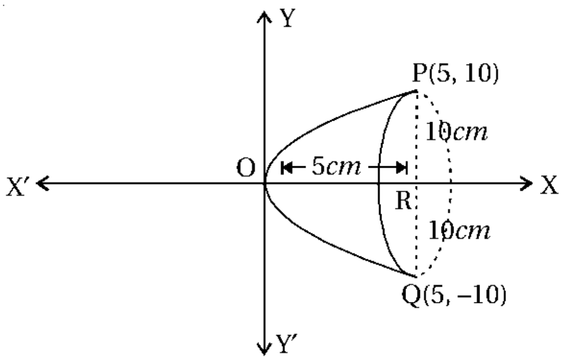
1. એક પરવલયાકાર પરાવર્તકનો વ્યાસ 20 સેમીનો છે અને ઊંડાઈ 5 સેમી છે. તેના નાભિના યામ શોધો.

➡



ધારો કે, POQ પરવલાયાકાર પરાવર્તક છે. જેનો વ્યાસ 20 સેમી.નો છે. અને ઊંડાઈ 5 સેમી. છે.

∴ PQ = 20 સેમી. તથા OR = 5 સેમી.

જ્યાં R એ $\overline{PQ}$ નું મધ્યબિંદુ છે.

$\overrightarrow{OX}$ એ X- અક્ષ દર્શાવે છે. તથા $\overrightarrow{OY}$ એ Y- અક્ષ દર્શાવે છે.

પરવલયનું સમીકરણ $y^2 = 4ax$ થાય. P(5, 10) બિંદુ પરવલયનું બિંદુ છે.

∴ $(10)^2 = 4a(5)$

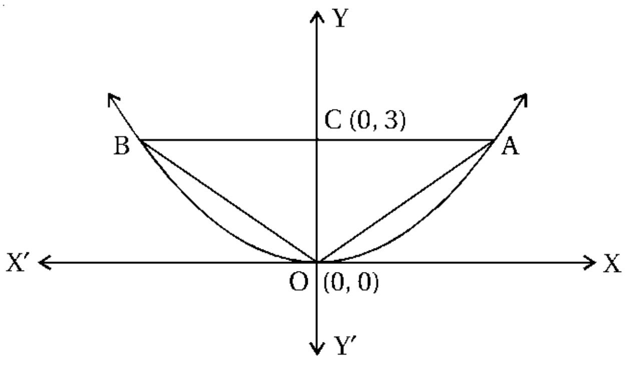
∴ $a = 5$

∴ નાભિના યામ $(a, 0) = (5, 0)$

આમ, નાભિ એ આપેલ વ્યાસનું મધ્યબિંદુ છે.

2. પરવલય $x^2 = 12y$ ના શિરોબિંદુ અને નાભિલંબના અંત્યબિંદુથી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

➡



$x^2 = 12y$

∴ $4a = 12 \Rightarrow a = 3$

∴ પરવલયની નાભિ (0, 3) છે.

નાભિલંબની $\overline{AB}$ છે.

નાભિલંબનાં અંત્યબિંદુઓ A(6, 3) તથા B(–6, 3) થશે.

∴ AB = 12 તથા OC = 3

$$\Delta OAB \text{ નું ક્ષેત્રફળ } = \frac{1}{2} AB \times OC$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 3$$

$$= 18 \text{ ચો. એકમ}$$

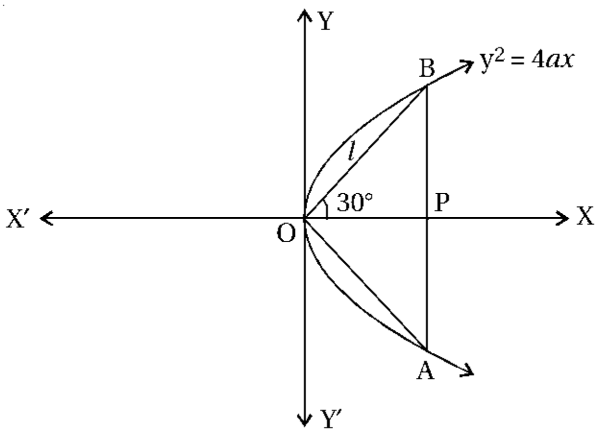
∴ પરવલય $x^2 = 12y$ નાં શિરોબિંદુ અને નાભિલંબના અંત્યબિંદુથી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 18 ચો.એકમ છે.

3. **એક સમબાજુ ત્રિકોણ પરવલય $y^2 = 4ax$ માં અંતર્ગત છે, તેનું એક શિરોબિંદુ પરવલયનું શીર્ષ છે. તો ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ શોધો.**

➡ પરવલય $y^2 = 4ax$ માં અંતર્ગત સમબાજુ ત્રિકોણ AOB આવેલો છે.

∴ OA = OB = AB = l

સમબાજુ ત્રિકોણમાં દરેક ખૂણો 60° નો હોય છે.



➡ વળી, પરવલય $y^2 = 4ax$ એ X- અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે.

∴ $m\angle BOP = 30°$

ΔBOP કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

∴ $\sin 30° = \frac{BP}{OB}$

∴ $\frac{1}{2} = \frac{BP}{l} \Rightarrow BP = \frac{l}{2}$

અને $\cos 30° = \frac{OP}{OB}$

∴ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OP}{l} \Rightarrow OP = \frac{\sqrt{3}l}{2}$

∴ B નાં યામ = $\left(\frac{\sqrt{3}l}{2}, \frac{l}{2}\right)$

બિંદુ B એ પરવલય $y^2 = 4ax$ ઉપર આવેલું છે.

∴ $\frac{l^2}{4} = 49 \times \frac{\sqrt{3}l}{2}$

∴ $l = 8\sqrt{3}a$ ∴ ત્રિકોણની બાજુનું માપ $= 8\sqrt{3}a$ એકમ.

4. **પરવલયાકારના ઝૂલતા પુલના બે આધાર સ્તંભો 30 મીટર ઊંચા અને 200 મીટરનાં અંતરે આવેલાં છે. પુલ તેની મધ્યમાં જમીનથી 5 મીટર ઊંચો છે. પુલના એક આધાર સ્તંભની ઊંચાઈ 11.25 મીટર હોય, તો તેનું કેન્દ્રથી અંતર શોધો.**

જવાબ 50 મીટર

5. **પૃથ્વીનો સૂર્યની આસપાસનો ગતિમાર્ગ એક ઉપવલય છે. સૂર્ય આ ઉપવલયની નાભિ છે. જો આ ઉપવલયના પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ 300 મિલિયન કિ.મી. હોય અને ગતિમાર્ગની ઉત્કેન્દ્રતા 0.0167 હોય, તો પૃથ્વીનું સૂર્યથી ન્યૂનતમ અને મહત્તમ અંતર શોધો.**

જવાબ મહત્તમ અંતર 152505000 કિમી., ન્યૂનતમ અંતર 147495000 કિમી.

6. **એક પરવલય પરાવર્તકનાં નાભિ પાસે મુખની પહોળાઈ 10 સેમી. છે. પરવલયનું સમીકરણ શોધો. શિરોબિંદુથી 11 સેમી. દૂર આવેલ મુખ $\overline{PQ}$ ની પહોળાઈ શોધો.**

જવાબ $y^2 = 10x,\ 2\sqrt{110}\ cm$

7. **એક અર્ધ ઉપવલયાકારની કમાન 10 મીટર પહોળી અને તેની કેન્દ્ર પાસે ઊંચાઈ 4 m છે. આ કમાનની તેના એક**

છેડેથી 2 m અંતરે ઊંચાઈ શોધો.

જવાબ **3.2 મીટર**

8. **વર્તુળ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ માં અંતર્ગત સમબાજુ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.**

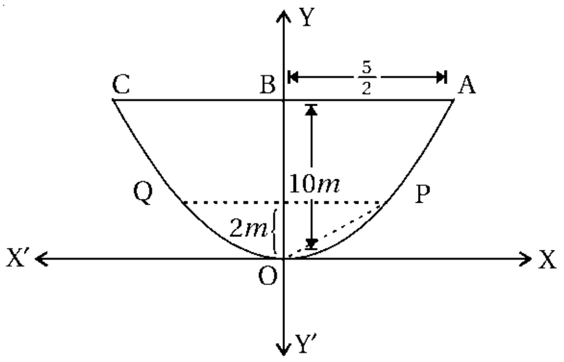
જવાબ **$\frac{3\sqrt{3}}{4}(g^2 + f^2 - c)$ ચો. એકમ**

9. **એક અતિવલય અને તેના અનુબદ્ધ અતિવલયની ઉત્કેન્દ્રતા અનુક્રમે e_1 અને e_2 હોય, તો સાબિત કરો કે, $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1.$**

જવાબ **સ્વપ્રયત્ને**

10. **એક કમાન પરવલયાકાર છે. તેનો અક્ષ શિરોલંબ છે. કમાન 10 મી. ઊંચી અને પાયામાં 5 મી. પહોળી છે. તે પરવલયના શિરોબિંદુથી 2 મી. દૂર કેટલી પહોળી હશે ?**

➥



➥ એક કમાન પરવલયાકાર છે. તેનો અક્ષ તેને શિરોલંબ છે.

$\therefore$ પરવલયનું સમીકરણ $x^2 = 4ay$ થશે.

કમાન 10 મીટર ઊંચી અને પાયામાં 5 મીટર પહોળી છે.

$\therefore$ OB = 10 મીટર તથા AC = 5 મીટર

$\therefore$ AB = BC = $\frac{5}{2}$ મીટર

$\therefore$ બિંદુ A નાં યામ $= \left(\frac{5}{2}, 10\right)$

બિંદુ A એ પરવલય ઉપર આવેલું છે.

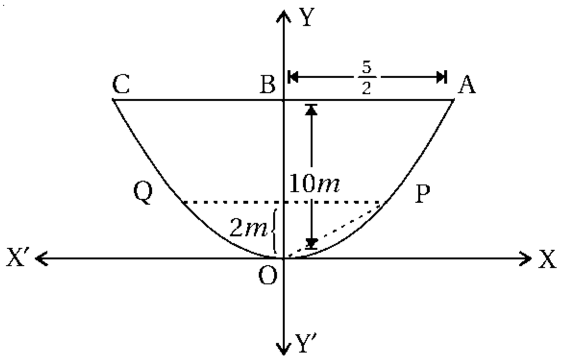
$\therefore \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 4a \times 10$

$\therefore \frac{25}{4} = 40a$

$\therefore a = \frac{5}{32}$

$\therefore$ પરવલયનું સમીકરણ : $x^2 = 4 \times \frac{5}{32}y$

$\therefore x^2 = \frac{5}{8}y$ ....(1)

➡ 

➡ એક કમાન પરવલયાકાર છે. તેનો અક્ષ તેને શિરોલંબ છે.

$\therefore$ પરવલયનું સમીકરણ $x^2 = 4ay$ થશે.

કમાન 10 મીટર ઊંચી અને પાયામાં 5 મીટર પહોળી છે.

$\therefore$ OB = 10 મીટર તથા AC = 5 મીટર

$\therefore$ AB = BC = $\frac{5}{2}$ મીટર

$\therefore$ બિંદુ A નાં યામ $= \left(\frac{5}{2}, 10\right)$

બિંદુ A એ પરવલય ઉપર આવેલું છે.

$\therefore \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 4a \times 10$

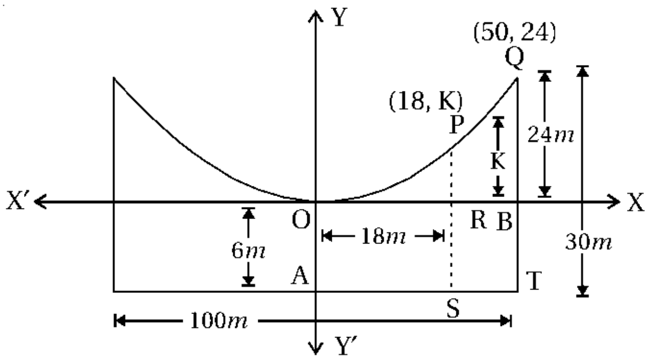
$\therefore \frac{25}{4} = 40a$

$\therefore a = \frac{5}{32}$

$\therefore$ પરવલયનું સમીકરણ : $x^2 = 4 \times \frac{5}{32}y$

$\therefore x^2 = \frac{5}{8}y$ ....(1)

11. તાર પર લટકતો એક સમાન ભારવાળો ઝૂલતો પુલ પરવલયાકારનો છે. શિરોલંબ તારથી પુલને ટકાવેલ સમક્ષિતિજ રસ્તો 100 મી. લાંબો છે. સૌથી મોટો તાર 30 મી. અને સૌથી નાનો તાર 6 મી. નો છે. પુલના કેન્દ્રથી 18 મી. દૂર આપેલ આધાર આપતા તારની લંબાઈ શોધો.

➡ 

અહીં તાર શિરોલંબ છે.

ધારો કે પરવલયનું સમીકરણ $x^2 = 4ay$ છે.

તારની લંબાઈ 100 મીટર છે. શિરોલંબ સૌથી મોટો તાર 30 મીટર અને સૌથી નાનો તાર 6 મીટર છે.

$\therefore$ OA = 6 મીટર તથા QT = 30 મીટર

$\therefore$ QB = QT − BT = QT − OA = 30 − 6 = 24 મીટર

OB = $\frac{100}{2}$ = 50 મીટર

$\therefore$ Q નાં યામ = (50, 24)

હવે બિંદુ Q પરવલય $x^2 = 4ay$ નું બિંદુ છે.

$\therefore (50)^2 = 4a\ (24)$

$\therefore a = \frac{50 \times 50}{24 \times 4} = \frac{625}{24}$

$\therefore$ પરવલય સમીકરણ : $x^2 = 4 \times \frac{625}{24}\ y$

$\therefore x^2 = \frac{625}{6}\ y$ થાય. ....(1)

આપેલ છે કે, OR = 18 મીટર

ધારો કે PR = k મીટર

$\therefore$ P નાં યામ = (18, k) થાય.

બિંદુ P એ પરવલયનું બિંદુ છે.

$\therefore$ સમીકરણ (1) પરથી, $(18)^2 = \frac{625}{6}k$

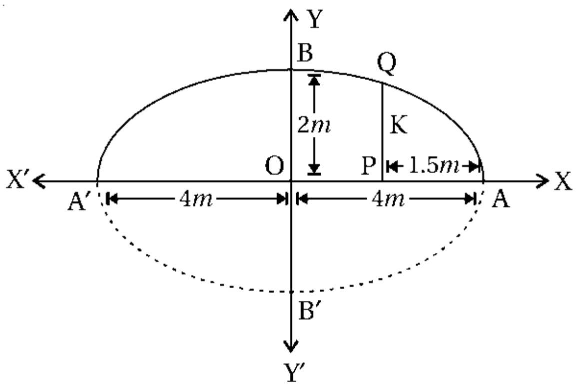
$\therefore k = \frac{18 \times 18 \times 6}{625} = \frac{1944}{625}$

$\therefore k = 3.11$

$\therefore$ પુલનાં કેન્દ્રથી 18 મીટર દૂર આવેલ આધાર આપતા તારની લંબાઈ = 6 + k = 6 + 3.11 = 9.11 મીટર (લગભગ)

12. **એક કમાન અર્ધઉપવલયાકારની છે. તે 8 મી. પહોળી અને કેન્દ્ર આગળ 2 મી. ઊંચી છે, તો તેના એક છેડેથી 1.5 મી. અંતરે આવેલા બિંદુ આગળ કમાનની ઊંચાઈ શોધો.**

➡



એક કમાન અર્ધઉપવલયાકારની છે. તે 8 મીટર પહોળી અને કેન્દ્ર આગળ 2 મીટર ઊંચી છે.

$\therefore$ AA' = 8 મીટર તથા OB = 2 મીટર

$\therefore$ OA = OA' = 4 મીટર

$\therefore a$ = 4 મીટર તથા b = 2 મીટર

ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ થાય.

$a = 4$ તથા $b = 2$ લેતાં,

ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ....(1)

એક છેડેથી 1.5 મીટરનાં અંતરે ધારો કે, બિંદુ P આવેલું છે.

$\therefore$ AP = 1.5 મીટર

$\therefore$ OP = OA − AP = (4 - 1.5) = 2.5 મીટર

ધારો કે કમાનની ઊંચાઈ k છે. અર્થાત્ PQ = k મીટર

$\therefore$ Q નાં યામ (2.5, k) થાય.

બિંદુ Q એ ઉપવલયનું બિંદુ છે.

$\therefore$ સમીકરણ (1) પરથી,

$\frac{(2.5)^2}{16} + \frac{k^2}{4} = 1$

$\therefore \frac{k^2}{4} = 1 - \frac{6.25}{16} = \frac{9.75}{16}$

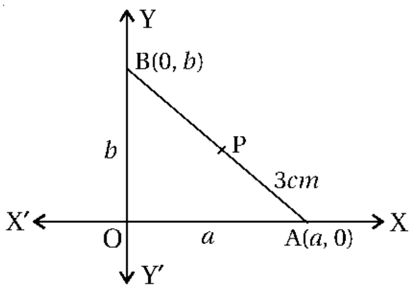
$\therefore k^2 = \frac{9.75}{4} = 2.4375$

$\therefore k = 1.56$ મીટર

$\therefore$ માંગેલ કમાનની ઊંચાઈ = 1.56 મીટર (લગભગ)

13. 12 મી. લંબાઈનો સળિયો એવી રીતે ખસે છે કે જેથી તેનાં અંત્યબિંદુઓ યામાક્ષો પર રહે. X- અક્ષ પરનાં અંત્યબિંદુથી 3 મી. દૂર આવેલ સળિયા પરના બિંદુ P નો બિંદુગણ શોધો.

➡



સળિયાની લંબાઈ AB = 12 મીટર

સળિયાનાં અંત્યબિંદુઓ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે યામાક્ષો પર છે.

ધારો કે, OA = a તથા OB = b

ΔOAB કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$\therefore OA^2 + OB^2 = AB^2$

$\therefore a^2 + b^2 = (12)^2 = 144$

X- અક્ષ પરનાં અંત્યબિંદુથી 3 મીટર દૂર આવેલ બિંદુ P છે.

$\therefore$ AP = 3 મીટર

$\therefore$ BP = AB − AP = (12 − 3) = 9 મીટર

$\therefore AP : BP = 3 : 9 = 1 : 3$

$\therefore$ બિંદુ P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી 1 : 3 નાં ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

A નાં યામ $(a, 0)$ તથા B ના યામ $(0, b)$ છે.

ધારો કે, P નાં યામ (h, k) છે.

$\therefore h = \frac{1 \times 0 + 3 \times a}{1 + 3} = \frac{3a}{4} \Rightarrow a = \frac{4h}{3}$

$k = \frac{1 \times b + 3 \times 0}{1 + 3} = \frac{b}{4} \Rightarrow b = 4k$

હવે $a^2 + b^2 = 144$

$\therefore \left(\frac{4h}{3}\right)^2 + (4k)^2 = 144$

$\therefore \frac{16h^2}{9} + 16k^2 = 144$

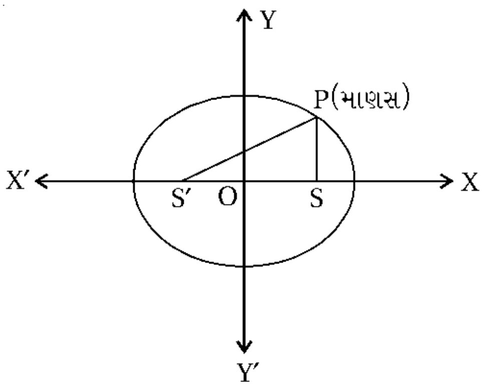
$\therefore \frac{h^2}{9} + k^2 = 9$

$\therefore \frac{h^2}{81} + \frac{k^2}{9} = 1$

$\therefore$ P નાં બિંદુગણનું સમીકરણ : $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$

14. એક માણસ રમતના મેદાનમાં અંકિત કેડી પર એવી રીતે દોડે છે કે જેથી બે ધજાના દંડાના અંતરનો સરવાળો અચળ 10 મી રહે છે. જો બંને ધજાના દંડા વચ્ચેનું અંતર 8 મી હોય, તો માણસના ગતિમાર્ગનું સમીકરણ શોધો.

➥



એક માણસ રમતના મેદાનમાં અંકિત કેડી પર એવી રીતે દોડે કે જેથી બે ધજાના દંડાના અંતરનો સરવાળો અચળ 10 મી. રહે છે. સ્પષ્ટ છે કે માણસનો ગતિમાર્ગ ઉપવલય છે.

S અને S' બે ધજાનાં દંડો છે. P માણસનું સ્થાન દર્શાવે છે.

SP + S'P = 10 મીટર

$\therefore\ 2a = 10$

$\therefore\ a = 5$

S અને S' એ ઉપવલયની નાભિઓ છે.

તેમની વચ્ચેનું અંતર 8 મીટર છે.

S = $(c, 0)$ તથા S' = $(-c, 0)$

$\therefore\ 2c = 8 \Rightarrow c = 4$

$\therefore\ e^2 = a^2 - b^2 = 16$

$\therefore\ 25 - b^2 = 16 \qquad (\because\ a = 5)$

$\therefore\ b^2 = 9$

$\therefore\ b = 3$

માગેલ ગતિમાર્ગનું સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ મુજબ થશે.

$a = 5$ તથા $b = 3$ લેતાં,

$\therefore\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

આમ, માણસનાં ગતિમાર્ગનું સમીકરણ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ છે.