U6E3M2

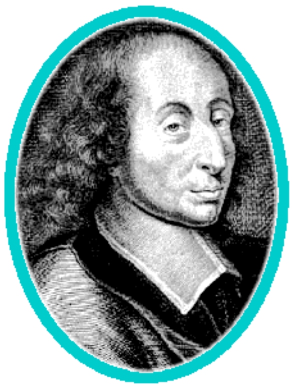
അധ്യായം **8**

ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം (BINOMIAL THEOREM)

❖ *ഏറ്റവും കൃത്യമായ ശാസ്ത്രമാണ് ഗണിതം. അതിന്റെ നിഗമനങ്ങൾ കൃത്യമായ തെളിവുകളുടെ പിൻബലമുള്ളവയാണ് - സി.പി. സ്റ്റൈൻമെറ്റ്സ്* ❖

8.1 ആമുഖം

$(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$ മുതലായ ദ്വിപദങ്ങൾ വിപുലനം ചെയ്തു കിട്ടിയ ബീജഗണിത വാചകങ്ങൾ എന്താണെന്ന് മുൻ ക്ലാസുകളിൽ പഠിച്ചത് നിങ്ങൾക്ക് ഓർമയുണ്ടാകുമല്ലോ. ഇത്തരം സർവസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് $101^2 = (100 + 1)^2$, $998^3 = (1000 - 2)^3$ തുടങ്ങിയ സംഖ്യകളുടെ വില കാണാനും നമുക്കറിയാം. എന്നാൽ 99^5, 102^6, 1001^6 എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വില കാണുന്നതിന് ആവർത്തിച്ചുള്ള ഗുണനക്രിയ പ്രയാസമാണ്. ഇത് പരിഹരിക്കാൻ 11-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന പേർഷ്യൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ അൽ-ഖരാജിയുടെ പേരിലുള്ള 'ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം' എന്ന ആശയമാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്.



ബ്ലെയ്സ് പാസ്കൽ
(1623-1662)

ഒരു പൂർണസംഖ്യ അഥവാ ഭിന്നസംഖ്യയാകുന്ന സാഹചര്യത്തിൽ $(a + b)^n$ എന്ന ദ്വിപദ വിപുലീകരണം എളുപ്പത്തിൽ ചെയ്യുന്നതിന് ഈ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

8.2 ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം

$$(a \quad b)^0 = 1, \; a + b \neq 0$$
$$(a - b)^1 = a + b$$
$$(a \quad b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a \quad b)^4 = (a + b)^3 \, (a + b)$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ഇവിടെ ദ്വിപദത്തിന്റെ കൃത്യകവും വിപുലീകരണം ചെയ്തു കിട്ടിയ പദങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതകളും ശ്രദ്ധിച്ചു നോക്കൂ.

- വിപുലീകരണം ചെയ്തു കിട്ടിയ വാചകത്തിലെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ദ്വിപദത്തിന്റെ കൃത്യങ്കത്തേക്കാൾ 1 കൂടുതലായിരിക്കും.
- (a b) യുടെ കൃത്യങ്കവും ഓരോ പദത്തിലെയും 'a' യുടെയും, 'b' യുടെയും കൃത്യങ്കങ്ങളുടെ തുകയും തുല്യമാണ്.
- 'a' യുടെ കൃത്യങ്കം 1 വീതം കുറഞ്ഞും 'b' യുടെ കൃത്യങ്കം 1 വീതം കൂടിയും വരുന്നു.

കൃത്യങ്കം	**ഗുണകങ്ങൾ**
0	**1**
1	**1 1**
2	**1 2 1**
3	**1 3 3 1**
4	**1 4 6 4 1**

വിപുലീകരിച്ചു കിട്ടിയ വാചകത്തിലെ ഗുണകങ്ങൾ പട്ടികയായി എഴുതിനോക്കാം. ഈ സംഖ്യകളുടെ ക്രമം നിരീക്ഷിച്ചാൽ, അടുത്ത വരി എഴുതാൻ കഴിയും. ഇവിടെ കൃത്യങ്കം 1 ലെ 1, 1 എന്നീ സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാണ് കൃത്യങ്കം 2 വരുന്ന വരിയിലെ 2 എന്ന സംഖ്യ എഴുതിയിട്ടുള്ളത്. കൃത്യങ്കം 2 ലെ 1, 2, 1 എന്നീ സംഖ്യകൾ കുട്ടിയാണ് കൃത്യങ്കം 3 വരുന്ന വരിയിലെ 3; 3 എന്നീ സംഖ്യകൾ എഴുതിയിട്ടുള്ളത്. ഇവിടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ നിന്നും ഇത് വ്യക്തമാകും.

തുടർന്നുള്ള രണ്ടു വരികൾ കൂടി എഴുതി നോക്കൂ.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക നോക്കാം

കൃത്യങ്കം	**ഗുണകങ്ങൾ**
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4

അങ്ങനെ ആയാൽ തുടർന്നുള്ള രണ്ടു വരികൾ എഴുതാം.

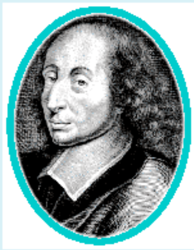
1   6   15   20   15   6   1

1   7   21   35   35   21   7   1

പാസ്ക്കൽ ത്രികോണം

ത്രികോണമാതൃകയിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഈ ക്രമീകരണത്തെ പാസ്ക്കൽ ത്രികോണം (Pascal's Triangle) എന്ന പേരിലാണ് അറിയപ്പെടുന്നത്.

ബ്ലെയ്സ് പാസ്ക്കൽ



ബ്ലെയ്സ് പാസ്ക്കൽ (1623 – 1662)

ഫ്രഞ്ച് പ്രവിശ്യയായ അവേർജിനിലെ ക്ലേർ മോണ്ട് നഗരത്തിൽ 1623 ജൂൺ 19-ാം തീയ്യതി പാസ്ക്കൽ ജനിച്ചു. അഭിഭാഷകനും പൊതുപ്രവർത്തകനുമായിരുന്നു പിതാവ് എറ്റ്യാനെ പാസ്ക്കൽ. പിതാവിന്റെ പ്രത്യേക മേൽനോട്ടത്തിലായിരുന്നു മകൻ പാസ്ക്കലിന്റെ വിദ്യാഭ്യാസം നടന്നിരുന്നത്. ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിലും അതീവ തല്പരനായിരുന്ന പിതാവ് തന്റെ പുത്രനെ ഭാഷാപഠനത്തിൽ നിപുണനാക്കിയ ശേഷം ഗണിതത്തിലേക്കു നയിക്കാമെന്ന് തീരുമാനിച്ചിരുന്നു. എന്നാൽ 12-ാമത്തെ വയസിൽത്തന്നെ ജ്യാമിതിയിലെ നിരവധി സൂത്രങ്ങളും അവയുടെ തെളിവുകളും ഈ ബാലൻ കണ്ടെത്തിയിരുന്നു. 16-ാമത്തെ വയസിൽ കോണുകങ്ങളെപ്പറ്റി ആധികാരികമായൊരു പുസ്തകം എഴുതിയ അദ്ദേഹം പ്രഗത്ഭർക്കുമാത്രം അംഗത്വമുള്ള ഗണിതശാസ്ത്ര സമിതിയിൽ ഇടം നേടി. 19-ാംമത്തെ വയസിൽ കണക്കുകൂട്ടൽ യന്ത്രം കണ്ടുപിടിച്ച പാസ്ക്കൽ 1658-ൽ സൈക്ലോയിഡ് എന്ന ഗണിതീയ വക്രത്തിന്റെ ചിത്രം രൂപപ്പെടുത്തി. 1662-ൽ തന്റെ 39-ാം വയസിൽ പല പ്രമുഖ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞരേയും പോലെ വളരെ നേരത്തേ ആ ഗണിതപ്രതിഭയും ഭൂമിയോട് വിട പറഞ്ഞു.

ഇനി $(2x + 3y)^4$ വിപുലീകരണം ചെയ്തു കിട്ടുന്ന വാചകം എന്തായിരിക്കും?

ഇതിന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ 5 പദങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും എന്ന് കാണാമല്ലോ. അതുപോലെ ഗുണകങ്ങൾ പാസ്ക്കൽ ത്രികോണത്തിന്റെ 5-ാംവരിയിലെ സംഖ്യകളായ 1, 4, 6, 4, 1 എന്നും കാണാാം. പദങ്ങൾ

$(2x)^4$, $(2x)^3 \times 3y$, $(2x)^2 \times (3y)^2$, $(2x)^1 \times (3y)^3$, $(3y)^4$ ആണെന്നു കാണാം.

അതായത്,

$(2x + 3y)^4 = (2x)^4 + 4\ (2x)^3 \times 3y + 6y\ (2x)^2 \times (3y)^2 + 4 \times (2x)(3y)^3 + (3y)^4$

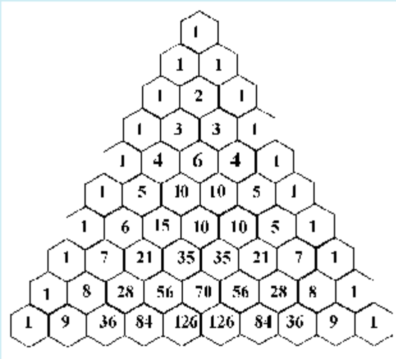
ഇതു ഒന്നു കൂടി ലഘൂകരിച്ചാൽ

$16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4$

എന്നു കിട്ടും. എന്നാൽ $(2x + 3y)^{12}$ എന്ന ദ്വിപദമാണ് വിപുലീകരണം ചെയ്യേണ്ടതെങ്കിൽ പാസ്ക്കൽ ത്രികോണത്തിലെ 13 വരികൾ എഴുതണം. ഇതുപോലെ ദ്വിപദത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം വലുതാകും തോറും വിപുലീകരണത്തിന്റെ പ്രയാസവും കൂടുന്നതായി കാണാം. ഉദാഹരണത്തിന് പാസ്ക്കൽ ത്രികോണത്തിലെ 10-ാം വരി മാത്രമായി എഴുതുക പ്രയാസമാണ്.

ഈ പ്രയാസം ലഘൂകരിക്കുന്നതിന് നമുക്ക് ക്രമീകരണവും തെരഞ്ഞെടുക്കലും (Permutation and combination) എന്ന അധ്യായത്തിൽ പഠിച്ച ചില പ്രധാന ആശയങ്ങൾ പ്രയോജനപ്പെടുത്താം.

ത്രികോണം ആരുടേത്



$(a+b)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന സംഖ്യാത്രികോണം ഫ്രഞ്ചുഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്ന ബ്ലേസ് പാസ്ക്കൽ (1623–1662) ന്റെ പേരിലാണ് അറിയപ്പെടുന്നത്. എന്നാൽ 10-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഹലായുധൻ ഈ സംഖ്യാത്രികോണം ഇതേ ആവശ്യത്തിന് ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ടെന്ന് ചരിത്രം. 'മേരുപ്രസ്ഥാരം' എന്നാണ് ഈ ത്രികോണത്തിന് അദ്ദേഹം നൽകിയ പേര്. 11-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന പേർഷ്യൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ -അൽ-ഖരാജി യുടെ പേരും ഇവിടെ പരാമർശിക്കുന്നുണ്ട്. 13-ാം നൂറ്റാണ്ടിലെ ചൈനീസ് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ യാങ്ഹുയി ചില ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളുടെ ഉത്തരം കണ്ടെത്താൻ ഈ ത്രികോണസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു.

$^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \le r \le n$, കൂടാതെ $^nC_0 = 1 = {}^nC_n$ എന്നീ ആശയങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് പാസ്ക്കൽ ത്രികോണം മാറ്റി എഴുതാം.

കൃത്യങ്കം	ഗുണകങ്ങൾ
0	${}^{0}C_{0}$ (=1)
1	${}^{1}C_{0}$ (=1) ${}^{1}C_{1}$ (=1)
2	${}^{2}C_{0}$ (=1) ${}^{2}C_{1}$ (=2) ${}^{2}C_{2}$ (=1)
3	${}^{3}C_{0}$ (=1) ${}^{3}C_{1}$ (=3) ${}^{3}C_{2}$ (=3) ${}^{3}C_{3}$ (=1)
4	${}^{4}C_{0}$ (=1) ${}^{4}C_{1}$ (=4) ${}^{4}C_{2}$ (=6) ${}^{4}C_{3}$ (=4) ${}^{4}C_{4}$ (=1)
5	${}^{5}C_{0}$ (=1) ${}^{5}C_{1}$ (=5) ${}^{5}C_{2}$ (=10) ${}^{5}C_{3}$ (=10) ${}^{5}C_{4}$ (=5) ${}^{5}C_{5}$ (=1)

$(x + 2)^6$ ന്റെ വിപുലീകരണം ചെയ്യുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. ഇതിന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ 7 പദങ്ങൾ ഉണ്ടാകും. കൂടാതെ ഗുണകങ്ങൾ കൃത്യങ്കം 6 വരുന്ന വരിയിലെ ${}^6C_0$, ${}^6C_1$, ${}^6C_2$, ${}^6C_3$, ${}^6C_4$, ${}^6C_5$, ${}^6C_6$ എന്നിവയാണ്. ഗുണകങ്ങൾ ഒഴികെയുള്ളവ $x^6, x^5\times 2, x^4\times 2^2, x^3\times 2^3, x^2\times 2^4, x \times 2^5, 2^6$ എന്നിവയാണല്ലോ.

അപ്പോൾ

$$(x + 2)^6 = x^6 + {}^6C_1\times x^5\times 2 + {}^6C_2 \times x^4 \times 2^2 + {}^6C_3 \times x^3 \times 2^3 + {}^6C_4 \times x^2 \times 2^4 + {}^6C_5 \times x^1 \times 2^5 + {}^6C_6 \times 2^6$$

ലഘൂകരിച്ചാൽ,

$$(x + 2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64.$$

എന്നു കിട്ടും.

8.2.1 ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം

'n' ഒരു പൂർണഅധിസംഖ്യയായാൽ

$$(a + b)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + {}^nC_2a^{n-2} b^2 + ...+ {}^nC_{n-1}a.b^{n-1} + {}^nC_nb^n$$

തെളിവ്:

ഈ സിദ്ധാന്തം ഗണിതാഗമന തത്ത്വമുപയോഗിച്ചാണ് തെളിയിച്ചിരിക്കുന്നത്.

ഈ പ്രസ്താവനയെ $P(n)$ എന്നെഴുതിയാൽ

$$P(n) : (a + b)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + ...+ {}^nC_{n-1}a.b^{n-1} + {}^nC_nb^n.$$

$n = 1$ ആയാൽ

$P\ (1) : (a + b)^1 = {}^1C_0a^1 + {}^1C_1b^1$

$= a + b$

അതുകൊണ്ട് P (1) ശരിയാണ്.

P (k) ശരിയാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ

$P\ (k) : (a + b)^k = {}^kC_0a^k + {}^kC_1a^{k-1}b + {}^kC_2a^{k-2}b^2 + {}^kC_3a^{k-3}b^3 + \cdots {}^kC_ra^{k-r}b^r + \ldots \; {}^kC_kb^k$

അടുത്തതായി P(k + 1) ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കണം.

$(a + b)^{k+1} = {}^{k+1}C_0\,a^{k+1} + {}^{k+1}C_1\,a^kb + {}^{k+1}C_2\,a^{k-1}b^2 + \ldots + {}^{k-1}C_r\,a^{k-1-r}b^r \ldots \; {}^{k-1}C_k\,b^{k+1}$

എന്നു തെളിയിക്കണം.

അപ്പോൾ $(a + b)^{k+1} = (a + b)\ (a + b)^k$

$= (a + b)\ ({}^kC_0\,a^k + {}^kC_1a^{k-1}\,b + {}^kC_2\,a^{k-2}\,b^2 + {}^kC_3\,a^{k-3}\,b^3 + \ldots + {}^kC_r\,a^{k-r}\,b^r + \ldots \; {}^kC_k\,b^k))$

$= {}^kC_0\,a^{k-1} + ({}^kC_1\,a^kb + {}^kC_0a^kb) + ({}^kC_2a^{k-1}\,b^2 + {}^kC_1\,a^{k-1}\,b^2) + \cdots + {}^kC_kb^{k-1}$

$= {}^kC_0a^{k+1} + ({}^kC_0 + {}^kC_1)\ a^kb + ({}^kC_1 + {}^kC_2)a^{k-1}b^2 + \ldots + {}^kC_kb^{k+1}$

എന്നാൽ ${}^nC_r - {}^nC_{r-1} - {}^{(n+1)}C_r$

$\therefore\ {}^kC_r - {}^kC_{r-1} - {}^{(k+1)}C_r$

${}^kC_1 + {}^kC_0 = {}^{(k+1)}C_1$

${}^kC_2 + {}^kC_1 = {}^{(k+1)}C_2$

${}^kC_0 = 1 = {}^{(k+1)}C_0$

${}^kC_k = 1 = {}^{(k+1)}C_{k+1}$ എന്നും എഴുതാം.

$\therefore\ (a + b)^{k+1} = {}^{k+1}C_0\,a^{k+1} + {}^{k+1}C_1\,a^kb + {}^{k+1}C_2\,a^{k-1}b^2 + {}^{k+1}C_3\,a^{k-2}b^3 + \ldots - {}^{k+1}C_{k+1}\,b^{k+1}$
എന്നാകും.

അതായത് P (k) ശരിയാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ P (k + 1) ശരിയാണെന്ന് കിട്ടുന്നു.

അതായത്, ഏത് പൂർണഅധിസംഖ്യ n നും P(n) ശരിയാണ്.

ഉദാഹരണത്തിന്

$(x + 2)^6 = {}^6C_0x^6 + {}^6C_1x^5.2 + {}^6C_2x^42^2 + {}^6C_3x^3.2^3 + {}^6C_4x^2.2^4 + {}^6C_5x.2^5 + {}^6C_6.2^6.$

$=(1)x^6 + 6x^5(2) + 15x^4(4) + 20x^3(8) + 15x^2(16) + 6x(32) + (1)(64)$

$(x + 2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$

അങ്ങനെ

$(a + b)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + {}^nC_3a^{n-3}b^3 + \ldots + {}^nC_ra^{n-r}b^r \ldots + {}^nC_nb^n$

ദ്വിപദസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ

1. ${}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + {}^nC_3 a^{n-3} b^3 + ... + {}^nC_r a^0 b^n$

   നെ ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച്

   $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k\, a^{n-k} b^k$ എന്നെഴുതാമല്ലോ.

   അതുകൊണ്ട് $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k\, a^{n-k} b^k$ എന്ന് ചുരുക്കി എഴുതാം.

2. ഇവിടെ ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, ------, {}^nC_n$ എന്നീ $n+1$ ഗുണകങ്ങളെ ദ്വിപദഗുണകങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

3. $(a+b)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $(n+1)$ പദങ്ങൾ ഉണ്ട്.

4. 'a' യുടെ കൃത്യങ്കം $n, n-1, n-2, ..., 0$ എന്ന ക്രമത്തിൽ കുറഞ്ഞും 'b' യുടെ കൃത്യങ്കം $0, 1, 2, ... n$ എന്ന ക്രമത്തിൽ കൂടിയും വരുന്നു.

5. ഓരോ പദത്തിലെയും 'a' യുടെയും 'b' യുടെയും കൃത്യങ്കങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ എല്ലായ്പ്പോഴും n ആയിരിക്കും.

8.2.2 പ്രത്യേക സന്ദർഭങ്ങൾ

$(a+b)^n$ എന്ന വിപുലീകരണത്തിൽ

(i) $a = x,\ b = -y$ എന്നെടുത്താൽ

$(x-y)^n = [x+(-y)]^n$

$= {}^nC_0 x^n + {}^nC_1 x^{n-1}(-y) + {}^nC_2 x^{n-2}(-y)^2 + ... + {}^nC_n (-y)^n$

$= {}^nC_0 x^n - {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 - ...... + (-1)^n\, {}^nC_n y^n$

അതായത് ഒന്നിടവിട്ട പദങ്ങൾ ന്യൂനമായി മാറുന്നു.

$(2-x)^5$ ന്റെ വിപുലീകരണം എങ്ങനെ?

$(2-x)^5 = 5C_0 2^5 - 5C_1 \times 2^4 \times x + 5C_2 \times 2^3 \times x^2 - 5C_3 \times 2^2 \times x^3 + 5C_4 \times 2 \times x^4 - 5C_5 \times x^5$

$= 32 - 80x + 80x^2 - 40x^3 + 10x^4 - x^5$

(ii) $a = 1,\ b = x$ എന്നെടുത്താൽ

$(1+x)^n = {}^nC_0 (1)^n + {}^nC_1 (1)^{n-1} x + {}^nC_2 (1)^{n-2} x^2 + ... + {}^nC_n x^n$

$= {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + {}^nC_3 x^3 + ... + {}^nC_n x^n$

ഈ വാചകത്തിൽ $x = 1$ എന്നു കരുതിയാൽ

$$(1 + 1)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \ldots + {}^nC_n$$

$$2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + {}^nC_n ________ (A)$$

(iii) $a - 1, b - -x$ എന്നു ആരോപിച്ചാൽ

$$(1 - x)^n = {}^nC_0 + -{}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 - {}^nC_3 x^3 + \ldots + (-1)^n\, {}^nC_n x^n$$

ഇവിടെ $x = 1$ എന്നു എഴുതിയാൽ

$$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + (-1)^n\, {}^nC_n ________ (B)$$

$$(A) + (B) \Rightarrow 2^n = 2\,{}^nC_0 + 2\,{}^nC_2 + 2\,{}^nC_4 + \ldots\ldots$$

അതായത് ${}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + {}^nC_6 + \ldots = 2^{n-1}$

അതുപോലെ,

(A) - (B)

$$2^n = 2\,{}^nC_1 + 2\,{}^nC_3 + 2\,{}^nC_5 + 2\,{}^nC_7 + \ldots$$

അതായത് ${}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + \ldots = 2^{n-1}$

ഉദാഹരണം : 1

വിപുലീകരിക്കുക : $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4, x \neq 0$

പരിഹാരം

$$\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4 = {}^4C_0 (x^2)^4 + {}^4C_1 (x^2)^3 \left(\frac{3}{x}\right)^1 + {}^4C_2 (x^2)^2 \left(\frac{3}{x}\right)^2 + {}^4C_3 (x^2)^1 \left(\frac{3}{x}\right)^3 + {}^4C_4 \left(\frac{3}{x}\right)^4$$

$$= 1x^8 + 4x^6 \frac{3}{x} + 6x^4 \frac{9}{x^2} + 4x^2 \frac{27}{x^3} + 1 \frac{81}{x^4}$$

$$= x^8 + 12x^5 + 54x^2 + \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4}.$$

ഉദാഹരണം : 2

$(98)^5$ ന്റെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

$$(98)^5 = (100-2)^5$$
$$= {}^5C_0\,(100)^5 - {}^5C_1\,(100)^4\,2 + {}^5C_2\,(100)^3 2^2$$
$$- {}^5C_3\,(100)^2\,(2)^3 + {}^5C_4\,(100)\,(2)^4 - {}^5C_5\,(2)^5$$
$$= 10000000000 - 5 \times 100000000 \times 2 + 10 \times 1000000 \times 4 - 10 \times 10000$$
$$\times 8 + 5 \times 100 \times 16 - 32$$
$$= 10040008000 - 1000800032 = 9039207968.$$

ഉദാഹരണം : 3

$(1.01)^{1000000}$, 10,000 ഇവയിൽ ഏതാണ് വലിയ സംഖ്യ.

പരിഹാരം

1.01 നെ (1 + 0.01) എന്ന് എഴുതി ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് പദങ്ങൾ എഴുതിയാൽ

$$(1.01)^{1000000} = (1+0.01)^{1000000}$$
$$= {}^{1000000}C_0 + {}^{1000000}C_1(0.01) + \text{മറ്റ് അധിസംഖ്യകൾ}$$
$$= 1 + 1000000 \times 0.01 + \text{മറ്റ് അധിസംഖ്യകൾ}$$
$$= 1 + 10000 + \text{മറ്റ് അധിസംഖ്യകൾ}$$
$$> 10000$$

അതുകൊണ്ട്, $(1.01)^{1000000} > 10000$

ഉദാഹരണം : 4

ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് $6^n - 5n$ എന്നതിനെ 25 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ എല്ലായ്പ്പോഴും ശിഷ്ടം 1 കിട്ടും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

a എന്ന സംഖ്യയെ b എന്ന സംഖ്യകൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ 'q' ഹരണഫലവും r ശിഷ്ടവുമാണെങ്കിൽ $a = bq + r$ എന്ന് എഴുതാം.

$6^n - 5n$ എന്നതിനെ 25 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 കിട്ടണം എന്ന് തെളിയിക്കുന്നതിന്

$6^n - 5n = 25k + 1$, k ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ എന്ന് തെളിയിച്ചാൽ മതിയല്ലോ?

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x + \ldots + {}^nC_n x^n$$
$$(1+5)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1 \times 5 + {}^nC_2 \times 5^2 + {}^nC_3 \times 5^3 + \ldots + {}^nC_n \times 5^n$$
$$6^n = 1 + n \times 5 + {}^nC_2 \times 25 + \ldots + {}^nC_n \times 5^n$$

$$6^n - 5n = 1 + 25\,[{}^nC_2 + {}^nC_3 \times 5 + {}^nC_4 \times 5^2 + \ldots + {}^nC_n \times 5^{n-2}]$$
$$= 25k + 1$$

ഇവിടെ $k = {}^nC_2 + {}^nC_3 \times 5 + {}^nC_4 \times 5^2 \ldots + {}^nC_n 5^{n-2}$

അതായത് $6^n - 5n$ നെ 25 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം : 5

$(x + 1)^6 + (x - 1)^6$ വിപുലീകരിക്കുക. ഇതുപയോഗിച്ച് $\left(\sqrt{3} + 1\right)^6 + \left(\sqrt{3} - 1\right)^6$ ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം:

$$(x + 1)^6 = 6C_0x^6 + 6C_1x^5 + 6C_2x^4 + 6C_3x^3 + 6C_4x^2 + 6C_5x + 1$$
$$(x - 1)^6 = 6C_0x^6 - 6C_1x^5 + 6C_2x^4 - 6C_3x^3 + 6C_4x^2 - 6C_5x + 1$$
$$(x + 1)^6 + (x - 1)^6 = 2 \times [6C_0x^6 + 6C_2x^4 + 6C_4x^2 + 1\,]$$
$$= 2\,[x^6 + 15x^4 + 15x^2 + 1\,]$$

ഇവിടെ $x = \sqrt{3}$ ആയാൽ

$$\left(\sqrt{3} + 1\right)^6 + \left(\sqrt{3} - 1\right)^6 = 2\,[\sqrt{3}^{\,6} + 15\sqrt{3}^{\,4} + 15\sqrt{3}^{\,2} + 1]$$
$$= 2\,[27 + 15 \times 9 + 15 \times 3 + 1]$$
$$= 2\,[27 + 135 + 45 + 1]$$
$$= 2 \times 208$$
$$= 416$$

കുറിപ്പ്

കൃതി 'n' ഇരട്ടസംഖ്യയായാൽ

$(a + b)^n + (a - b)^n = 2\,[{}^nC_0a^n + {}^nC_2a^{n-2}\,b^2 + \ldots\ldots + b^n]$

ഉദാഹരണം : 6

$9^{n+1} - 8n - 9$ നെ 64 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാം എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$9^{n+1} - 8n - 9$ നെ 64 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാം എന്നു തെളിയിക്കുന്നതിന് $9^{n+1} - 8n - 9 = 64k$ എന്നു സമാപിച്ചാൽ മതിയാകുമല്ലോ.

$$9^{n+1} = (1 + 8)^{n+1}$$
$$= 1 + {}^{(n+1)}C_1 \times 8 + {}^{(n-1)}C_2 \times 8^2 + \ldots\ldots + {}^{(n-1)}C_{n-1} \times 8^{n+1}$$
$$= 1 + (n + 1) \times 8 + 8^2\,[{}^{(n-1)}C_2 + {}^{(n-1)}C_3\,8 + \ldots\ldots - 8^{n-1}]$$

$= 1 + 8n + 8 + 8^2 K$ ഇവിടെ $k = [{}^{(n+1)}C_2 + {}^{(n+1)}C_3 8 + ... + 8^{n-1}]$

$= 8n + 9 + 64K$

$9^{n+1} - 8n - 9 = 64K$

ഉദാഹരണം : 7

$\sum_{r=0}^{n} 3^r\, {}^nC_r = 4^n$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$4^n \quad - (1 + 3)^n \;-\; {}^nC_0 + {}^nC_1(3) + {}^nC_2(3)^2 + ... + {}^nC_n 3^n$

$= \sum_{r=0}^{n} nC_r \times 3^r$

> **കുറിപ്പ്**
>
> $(1 + x)^n - \sum_{r=0}^{n} nC_r\, x^r$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 8.1

വിപുലീകരിക്കുക

1. $(1 - 2x)^5$ **2.** $\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5$ **3.** $(2x - 3)^6$

4. $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5$ **5.** $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$

ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് വില കണക്കാക്കുക.

6. $(96)^3$ **7.** $(102)^5$ **8.** $(101)^4$

9. $(99)^5$

10. $(1.1)^{10000}$, 1000. ഇവയിൽ വലിയ സംഖ്യ ഏത്?

11. $(a + b)^4 - (a - b)^4$ നെ വിപുലീകരിക്കുക. ഇത് ഉപയോഗിച്ച്

$\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^4 - \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^4$ ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

12. $(x + 1)^6 + (x - 1)^6$ നെ വിപുലീകരിക്കുക. ഇതുപയോഗിച്ച്

$\left(\sqrt{2} + 1\right)^6 + \left(\sqrt{2} - 1\right)^6$ ന്റെ വില കണ്ടെത്തുക.

8.3 പൊതുപദവും മധ്യപദവും

1. $(a + b)^n$ വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ പദങ്ങൾ ${}^nC_0a^n$, ${}^nC_1a^{n-1}b$, ${}^nC_2a^{n-2}b^2$,.... എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഇതിൽ $(r + 1)$ -ാം പദമായ ${}^nC_ra^{n-r}b^r$ നെ പൊതുപദം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ T_{r+1} കൊണ്ടാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

$$T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r}b^r.$$

2. മധ്യപദത്തെപ്പറ്റി ചിന്തിക്കുമ്പോൾ രണ്ടു സന്ദർഭങ്ങളാണ് ഉണ്ടാവുക. $(a + b)^n$ എന്ന ദ്വിപദത്തിൽ കൃത്യങ്കമായ 'n' ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയോ ഒറ്റസംഖ്യയോ ആകാം. 'n' ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യ ആയാൽ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം $n + 1$ ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ ആയിരിക്കും. അപ്പോൾ മധ്യപദം ഒരെണ്ണം മാത്രമായിരിക്കുമല്ലോ ഉണ്ടാവുക.

$$\text{മധ്യപദം} = \left(\frac{n+1+1}{2}\right)\text{-ാം പദം}$$

$$= \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{-ാം പദം}$$

ഉദാഹരണത്തിന് $(2x + y)^6$ വിപുലീകരിച്ചാൽ

$$\text{മധ്യപദം} = \left(\frac{6}{2}+1\right) = 4\text{-ാം പദം}$$

n ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ ആയാൽ $(n + 1)$ ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യ ആയിരിക്കും. അപ്പോൾ മധ്യത്ത് രണ്ട് പദങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും എന്ന് കാണാം.

അതായത് $\left(\frac{n+1}{2}\right)$, $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ -ാം പദങ്ങളാണ് മധ്യപദങ്ങൾ.

ഉദാഹരണത്തിന് $(2x - y)^9$ വിപുലീകരണം ചെയ്താൽ $\left(\frac{9+1}{2}\right) = 5$-ാം പദവും,

$\left(\frac{9+1}{2}+1\right) = 6$-ാം പദവും ആയിരിക്കും മധ്യപദങ്ങൾ.

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ

$$\text{മധ്യപദം} = \left(\frac{2n+1+1}{2}\right)\text{-ാം പദം}$$

$= (n + 1)$-ാം പദമാണ് മധ്യപദം

മധ്യപദം $= {}^{2n}C_n x^n \left(\frac{1}{x}\right)^n$

$= {}^{2n}C_n$ (ഒരു സറിരസംഖ്യയാണ്)

ഉദാഹരണം : 8

$(2 + a)^{50}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ 17-ാം പദവും 18-ാം പദവും തുല്യമായാൽ a യുടെ വിലയെന്ത്?

പരിഹാരം

പൊതുപദം $T_{r+1} = {}^nC_r a^{n-r} b^r$

അപ്പോൾ $T_{17} = {}^{50}C_{16}\ (2)^{50-16}\ a^{16}$

$= {}^{50}C_{16}\ 2^{34} \times a^{16}$

$T_{18} = {}^{50}C_{17}\ 2^{50-17} \times a^{17}$

$= {}^{50}C_{17}\ (2)^{33} \times a^{17}$

$T_{17} = T_{18}$ എന്നു തന്നിരിക്കുന്നു.

$\therefore\ {}^{50}C_{16} \times (2)^{34} \times a^{16} = {}^{50}C_{17} \times (2)^{33} \times a^{17}$

$$\frac{{}^{50}C_{16}\ .2^{34}}{{}^{50}C_{17}\ .2^{33}} = \frac{a^{17}}{a^{16}}$$

$$\therefore \qquad a = \frac{{}^{50}C_{16} \times 2}{{}^{50}C_{17}}$$

$$= \frac{17 \times 2}{34} = 1$$

ഉദാഹരണം : 9

n ഒരു അധിപൂർണസംഖ്യയായാൽ $(1+x)^{2n}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ മധ്യപദം $\frac{1.3.5...(2n-1)}{n!}\ 2^n x^n$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$(1+x)^{2n}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $(2n+1)$ പദങ്ങൾ ഉണ്ട്.

മധ്യപദം = $\left(\dfrac{2n+1+1}{2}\right)$ = $(n+1)$-ാം പദം.

$$= {}^{2n}C_{n}.x^{2n-n}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\ (2n-n)!}x^n$$

$$= \frac{2n\,(2n-1)\ (2n-2)\ \ ...3.2.1}{n!\times n!}x^n$$

$$= \frac{\left[2n\,(2n-2)\ \ (2n-4)\ \ ...4.2\right]\left[(2n-1)\ \ (2n-3)...3.1\right]}{n!\times n!}x^n$$

$$= \frac{\left[1.3.5.7....2n-1\right]\times\left[\,n\,(n-1)\,(n-2)....2.1\right]}{n!n!}x^n.2^n$$

$$= \frac{[1.3.5.7....(2n-1)]2^n\,n!}{n!n!}x^n$$

$$= \frac{2^n x^n\ 1.3.5.7....(2n-1)}{n!}$$

$$= \frac{1.3.5...(2n-1)}{n!}\ 2^n\ x^n$$

ഉദാഹരണം : 10

$(x + 2y)^9$ വിപുലീകരിച്ചാൽ x^6y^3 ന്റെ ഗുണകം എന്തായിരിക്കും?

പരിഹാരം

$(x + 2y)^9$ വിപുലീകരിച്ചാൽ പൊതുപദം

$$T_{r+1} = {}^nC_r\,a^{n-r}b^r$$

$$= {}^9C_r\,x^{9-r}.(2y)^r$$

ഇവിടെ x^6y^3 ഉൾപ്പെടണമെങ്കിൽ $r = 3$ ആകുന്നു.

$$T_4 = {}^9C_3\, x^{9-3}\,(2y)^3$$

$$T_4 = {}^9C_3\, x^6 .\, 2^3 .\, y^3$$

$$= \frac{9.8.7}{1.2.3} \times 2^3 \times x^6 \times y^3$$

$$= 672\ x^6y^3$$

അപ്പോൾ x^6y^3 ന്റെ ഗുണകം 672 എന്ന് മനസ്സിലാകും.

ഉദാഹരണം : 11

$(x + a)^n$ വിപുലീകരിച്ചാൽ 2-ാം പദം, 3-ാം പദം, 4-ാം പദം യഥാക്രമം 240, 720, 1080 ആയാൽ x, a, n ഇവ കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$T_2 = 240$, $T_3 = 720$, $T_4 = 1080$ ഇവ തന്നിരിക്കുന്നു.

അതായത്,

$$T_2 = {}^nC_1 x^{n-1} .\, a = 240 \quad \ldots (1)$$

$$T_3 = {}^nC_2 x^{n-2} a^2 = 720 \quad \ldots (2)$$

$$T_4 = {}^nC_3 x^{n-3} a^3 = 1080 \quad \ldots (3)$$

$$(2) \div (1) \Rightarrow \quad \frac{{}^nC_2 x^{n-2} a^2}{{}^nC_1 x^{n-1} a} = \frac{720}{240}$$

അതായത്,

$$\frac{\left[\dfrac{n!}{2!(n-2)!}\right] a}{\left[\dfrac{n!}{1!(n-1)!}\right] x} = 3$$

$$\frac{(n-1)}{2 \times x} \times a = 3 \qquad [(n-1)! = (n-1)\,(n-2)!$$

$$\frac{a}{x} = \frac{6}{(n-1)} \quad \ldots (4)$$

$$(3) \div (2) \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{9}{2(n-2)} \quad \ldots (5)$$

(4), (5) ഇവ പരിഗണിച്ചാൽ

$$\frac{6}{n-1} = \frac{9}{2(n-2)}$$

$$12n - 24 = 9n - 9$$

$$3n = 15 \Rightarrow n = 5$$

(1) ൽ നിന്ന് $\quad 5x^4 a = 240 \quad \ldots (6)$

(4) ൽ നിന്ന് $\quad \frac{a}{x} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \ldots (7)$

(6), (7) ഇവയുടെ പരിഹാരം കണ്ടെത്തിയാൽ

$$x = 2,\ a = 3$$

ഉദാഹരണം : 12

$(1 + a)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ അടുത്തടുത്തുള്ള മൂന്നു പദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങൾ 1 : 7 : 42 എന്ന അംശബന്ധത്തിലായാൽ n എത്രയാണ്?

പരിഹാരം

$(1 + a)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ അടുത്തടുത്തുള്ള മൂന്നു പദങ്ങൾ T_{r-1}, T_r, T_{r-1} എന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ T_{r-1}, T_r, T_{r+1} ന്റെ ഗുണകങ്ങൾ ${}^nC_{r-2}, {}^nC_{r-1}, {}^nC_r$ എന്നു കിട്ടുമല്ലോ,

അതായത്

${}^nC_{r-2} : {}^nC_{r-1} : {}^nC_r = 1 : 7 : 42$ എന്നു തന്നിട്ടുണ്ട്.

$$\frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-1}} = \frac{1}{7}, \quad \frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r} = \frac{7}{42} = \frac{1}{6}$$ എന്നും കിട്ടും

$$\therefore \quad \frac{\left[\dfrac{n!}{(r-2)!\,(n-r+2)!}\right]}{\left[\dfrac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}\right]} = \frac{1}{7}; \quad \frac{\left[\dfrac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}\right]}{\left[\dfrac{n!}{r!(n-r)!}\right]} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{r-1}{n-r+2} = \frac{1}{7};\ \frac{r}{n-r+1} = \frac{1}{6}$$

ലഘൂകരിച്ചാൽ

$n - 8r + 9 = 0;\ n - 7r + 1 = 0$ എന്നും കിട്ടും.

ഈ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം

$n = 55$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം : 12

$(1+x)^{2n}$, $(1+x)^{2n-1}$ എന്നിവയുടെ വിപുലീകരണത്തിൽ x^n ന്റെ ഗുണകങ്ങൾ യഥാക്രമം A, B ഇവ ആയാൽ A = 2B എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$A = {}^{2n}C_n$, $B = {}^{2n-1}C_n$ എന്നിവ ആണ്.

$$\frac{A}{B} = \frac{{}^{2n}C_n}{{}^{2n-1}C_n}$$

$$= \frac{\left[\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}\right]}{\left[\frac{(2n-1)!}{n!(2n-1-n)!}\right]}$$

$$= \frac{2n}{n}$$

$$= 2$$

$$\therefore A = 2B$$

ഉദാഹരണം : 14

$\left(2+\frac{x}{3}\right)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ x^7, x^8, ഇവയുടെ ഗുണകങ്ങൾ തുല്യമായാൽ n ന്റെ വിലയെന്ത്?

പരിഹാരം

$${}^{n}C_{7}2^{n-7}\left(\frac{1}{3}\right)^{7} = {}^{n}C_{8}2^{n-8}\left(\frac{1}{3}\right)^{8}$$ എന്നു തന്നിട്ടുണ്ട്.

$$\frac{nC_7}{nC_8} = \frac{2^{n-8}.3^7}{3^8.2^{n-7}} \Rightarrow \frac{\frac{n!}{7!(n-7)!}}{\frac{n!}{8!(n-8)!}} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{n-7}{8} = 6 \Rightarrow n = 55$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 8.2

1. $(x + 3)^8$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ x^5 ന്റെ ഗുണകം എന്ത്?

2. $(a - 2b)^{12}$ നെ വിപുലീകരിച്ചാൽ a^5b^7 ന്റെ ഗുണകം എന്ത്?

ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയുടെ പൊതുപദം കാണുക?

3. $(x^2 - y)^6$

4. $(x^2 - yx)^{12}, x \neq 0.$

5. $(x - 2y)^{12}$ നെ വിപുലീകരിച്ചാൽ 4-ാം പദം ഏത്?

6. $\left(9x - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$, $x \neq 0$ വിപുലീകരിച്ചാൽ 13-ാം പാദം കണ്ടെത്തുക.

ചുവടെ തന്നിട്ടുള്ളവ വിപുലീകരിച്ചാൽ മധ്യപദം ഏത്?

7. $\left(3 - \frac{x^3}{6}\right)^7$

8. $\left(\frac{x}{3} + 9y\right)^{10}$.

9. $(1 + a)^{m+n}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ a^m, a^n ഇവയുടെ ഗുണകങ്ങൾ തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

10. $(x + 1)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $(r - 1)$ -ാം പദം r -ാം പദം, $(r + 1)$ -ാം പദം ഇവയുടെ ഗുണകങ്ങൾ $1 : 3 : 5$ എന്ന അനുപാദത്തിൽ ആയാൽ n, r ഇവ കണ്ടെത്തുക.

11. $(1+x)^{2n}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ x^n ന്റെ ഗുണകം $(1+x)^{2n-1}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ x^n ന്റെ ഗുണകത്തിന്റെ 2 മടങ്ങാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

12. $(1+x)^m$ വിപുലീകരിച്ചാൽ x^2 ന്റെ ഗുണകം 6 ആയാൽ m ന്റെ അധിസംഖ്യാവില എത്രയാണ്?

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 15

$(1+x)^{39}$ വിപുലീകരിച്ചാൽ അവസാനത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങളുടെ തുകയെത്രയാണ്.

പരിഹാരം

$(1+x)^{39}$ വിപുലീകരിച്ചാൽ 40 പദങ്ങൾ ഉണ്ടാകുമല്ലോ.

$S = {}^{39}C_{20} + {}^{39}C_{21} + \ldots\ldots {}^{39}C_{39}$ ....(1)

${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ ആയതുകൊണ്ട്.

$S = {}^{39}C_{19} + {}^{39}C_{18} + \ldots\ldots {}^{39}C_{0}$ ....(2)

$(1)+(2) \Rightarrow 2S = {}^{39}C_0 + {}^{39}C_1 + \ldots\ldots + {}^{39}C_{19} + {}^{39}C_{20} + {}^{39}C_{21} + \ldots\ldots {}^{39}C_{39}$ ....(2)

${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots\ldots + {}^nC_n - 2^n$ ആയതുകൊണ്ട്

$$2S = 2^{39}$$

$$S = 2^{38}$$

ഉദാഹരണം : 16

$\sum_{m=0}^{100} {}^{100}C_m (x-5)^{100-m} \times 4^m$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ x^{53} ന്റെ ഗുണകം എന്താണ്?

പരിഹാരം

$$\sum_{m=0}^{100} {}^{100}C_m (x-5)^{100-m} \times 4^m = (x-5+4)^{100}$$

$$= (x-1)^{100}$$

ഇതിൽ x^{53} ന്റെ ഗുണകം $= (-1)^{53}\ {}^{100}C_{53} (1)^{100-53}$

$$= -{}^{100}C_{53}$$

ഉദാഹരണം : 17

$\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^6$ വിപുലീകരിച്ചാൽ x ഉൾപ്പെടാത്ത പദം ഏത്?

പരിഹാരം

$$T_{r+1} = (-1)^r\, {}^6C_r \left(\frac{3}{2}x^2\right)^{6-r} \left(\frac{1}{3x}\right)^r$$

$$= (-1)^r\, {}^6C_r \left(\frac{3}{2}\right)^{6-r} \left(x^2\right)^{6-r} \frac{1}{3^r} \times \frac{1}{x^r}$$

$$= \frac{(-1)^r\, {}^6C_r \left(\frac{3}{2}\right)^{6-r}}{3^r} x^{12-2r-r}$$ എന്ന് നാം കണ്ടതാണല്ലോ.

'x' ഇല്ലാതെ വരണമെങ്കിൽ $12 - 2r - r = 0$

$r = 4$ എന്നു കിട്ടും

അതുകൊണ്ട് 5-ാം പദം $= \dfrac{(-1)^4 \cdot {}^6C_4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{6-4}}{3^4}$

$$= \frac{{}^6C_4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2}{3^4}$$

$$= \frac{{}^6C_2 \times 3^2}{3^4 \times 2^2} \qquad \because {}^nC_r = {}^nC_{n-r}$$

$$= \frac{6\times 5}{1\times 2}\times\frac{3^2}{3^4\times 2^2}$$

$$= \frac{15}{3^2\times 2^2} = \frac{5}{12}$$ ആണ് x ഉൾപ്പെടാത്ത പദം

ഉദാഹരണം :18

$(1+a)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ a^{r-1}, a^r, a^{r+1} ഇവയുടെ ഗുണകങ്ങൾ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിൽ ആയാൽ $n^2 - n(4r+1) + 4r^2 - 2 = 0$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $T_{r-1} = {}^nC_r a^r$ എന്ന് നമുക്ക് അറിയാമല്ലോ.

${}^nC_{r-1}, {}^nC_r, {}^nC_{r+1}$ ഇവ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്നാണ് തന്നിരിക്കുന്നത്.

അതായത്, $2({}^nC_r) = {}^nC_{r-1} + {}^nC_{r+1}$

$\because$ [a, b, c, AP യിൽ ആയാൽ $2b = a + c$ ആയിരിക്കും]

അതായത്, $$\frac{2\times n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{(n-r-1)!(r+1)!}$$

$$\frac{2\times n!}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)(n-r)(n-r-1)!} + \frac{n!}{(n-r-1)!(r+1)(r)(r-1)!}$$

ഇരു വശത്തുനിന്നും പൊതുവായ പദങ്ങൾ ഒഴിവാക്കിയാൽ

$$\frac{2}{r(n-r)} = \frac{1}{(n-r+1)(n-r)} + \frac{1}{r(r+1)}$$

$$\frac{2}{r(n-r)} = \frac{r(r+1)+(n-r+1)(n-r)}{(n-r+1)(n-r)(r)(r+1)}$$

$$2 \;=\; \frac{r^2 + r + n^2 - nr - nr + r^2 + n - r}{(n - r + 1)(r + 1)}$$

$$2\,(n - r \quad 1)\,(r \quad 1) \;=\; n^2 + 2r^2 - 2nr \mid n$$

$$2nr + 2n - 2r^2 - 2r + 2r + 2 \;=\; n^2 + 2r^2 - 2nr + n$$

$$n^2 - 4nr - n + 4r^2 - 2 \;=\; 0$$

അതായത്, $n^2 - n\,(4r \quad 1) + 4r^2 - 2 = 0$

ഉദാഹരണം : 19

$(1 + x)^{2n}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ മധ്യപദത്തിന്റെ ഗുണകം $(1 + x)^{2n-1}$ ന്റെ മധ്യപദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങളുടെ തുകയായിരിക്കും എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$(1 + x)^{2n-1}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $(2n - 1 \mid 1)$പദങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

അതായത്, പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യ ആയിരിക്കും.

$\therefore$ മധ്യപദം $= \left(\frac{2n}{2} + 1\right)$-ാം പദം

$= (n \quad 1)$-ാം പദം

$= {}^{2n}C_n x^n$

$(1 + x)^{2n-1}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $2n - 1 + 1 - 2n$ പദങ്ങൾ ഉണ്ട്.

അതായത്, പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്.

$\therefore$ മധ്യഭാഗത്ത് 2 പദങ്ങൾ ഉണ്ടാകുമല്ലോ.

$\therefore$ മധ്യപദങ്ങൾ $\frac{(2n-1+1)}{2}$ -ാം പദവും, $\left(\frac{2n-1+1}{2} + 1\right)$ -ാം പദവും ആയിരിക്കും

അതായത്, n-ാം പദവും, $(n \quad 1)$ -ാം പദവും ആയിരിക്കുമല്ലോ.

$\therefore$ അവയുടെ ഗുണകങ്ങളുടെ തുക

$${}^{2n\quad 1}C_{n\quad 1} + {}^{2n\quad 1}C_n = {}^{2n}C_n \quad (\because nC_r + nC_{r-1} = (n+1)C_r)$$

$= (1 \mid x)^{2n}$ ന്റെ മധ്യപദത്തിന്റെ ഗുണകം

ഉദാഹരണം :20

ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് $(1 + 2a)^4 (2 - a)^5$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ a^4 ന്റെ ഗുണകം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$$\begin{aligned}(1 + 2a)^4 &= {}^4C_0 + {}^4C_1 (2a) + {}^4C_2 (2a)^2 + {}^4C_3 (2a)^3 + {}^4C_4 (2a)^4 \\ &= 1 + 4 (2a) + 6(4a^2) + 4 (8a^3) + 16a^4. \\ &= 1 + 8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2 - a)^5 &= {}^5C_0 (2)^5 - {}^5C_1 (2)^4 (a) + {}^5C_2 (2)^3 (a)^2 - {}^5C_3 (2)^2 (a)^3 \\ &\quad + {}^5C_4 (2) (a)^4 - {}^5C_5 (a)^5 \\ &= 32 - 80a + 80a^2 - 40a^3 + 10a^4 - a^5\end{aligned}$$

$(1 + 2a)^4 (2 - a)^5$

$$= (1 + 8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4) \times (32 - 80a + 80a^2 - 40a^3 + 10a^4 - a^5)$$

ഇവിടെ ഗുണനഫലത്തിൽ a^4 ഉൾപ്പെടുന്ന പദം മാത്രം കണ്ടാൽ മതിയാകും. അതായത്

a^4 ന്റെ ഗുണകം

$$\begin{aligned}&= 1 (10a^4) + (8a) (-40a^3) + (24a^2) (80a^2) + (32a^3) (-80a) + (16a^4) (32) \\ &= (10 - 320 + 1920 - 2560 + 512)a^4 \\ &= -438a^4\end{aligned}$$

$\therefore a^4$ ന്റെ ഗുണകം $= -438$

ഉദാഹരണം : 21

$(x + a)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ വലത്തെ അറ്റത്തു നിന്ന് r -ാം പദം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$(x + a)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ വലത്തെ അറ്റത്തുനിന്നും r-ാം പദവും ഇടത്തെ അറ്റത്തു നിന്നും $(n + 1) - (r - 1)$ പദവും ഒന്നു തന്നെ ആയിരിക്കും. ഇത് $(x + a)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ പദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങൾ പരിശോധിച്ചാൽ അറിയാം. അതായത്,

$${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \ldots\ldots {}^nC_{r-1}, {}^nC_r, {}^nC_{r+1}, {}^nC_{r+2}, \ldots\ldots\ldots\ldots {}^nC_{n-1}, {}^nC_n$$

അങ്ങനെയെങ്കിൽ T_{n-r+2} കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി.

$$\therefore T_{n-r+2} = {}^{n}C_{n-r+1}\, x^{r-1}\, a^{n-r+1}$$

ഉദാഹരണം : 22

$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{18}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ 'x' ഉൾപ്പെടാത്ത പദം ഏതാണ്.

പരിഹാരം

പൊതുപദം $T_{r-1} = {}^{n}Cr\; a^{n-r}\, b^{r}$

ഇവിടെ $T_{r+1} = {}^{18}C_r \left(\sqrt[3]{x}\right)^{18-r} \left(\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{r}$

$$= {}^{18}C_r\, x^{\frac{18-r}{3}} \cdot \frac{1}{2^r . x^{\frac{r}{3}}}$$

$$= {}^{18}C_r\, \frac{1}{2^r} . x^{\frac{18-2r}{3}}$$

ഈ വിപുലീകരണത്തിൽ 'x' ഉൾപ്പെടാതെ വരണമെങ്കിൽ $\frac{18-2r}{3} = 0$ ആകണം

അതായത്, $r - 9$ ആകണം

എങ്കിൽ ഈ വിപുലീകരണത്തിൽ x ഉൾപ്പെടാത്ത പദം $= \frac{{}^{18}C_9}{2^9}$

ഉദാഹരണം : 23

$\left(x - \frac{3}{x^2}\right)^{m}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നുപദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങളുടെ തുക 559 ആയാൽ x^3 ഉൾപ്പെടുന്ന പദം ഏതാണ്. (m ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ).

പരിഹാരം

$\left(x - \frac{3}{x^2}\right)^{m}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങൾ.

${}^{m}C_0, {}^{m}C_1 \times (-3),\ {}^{m}C_2 \times (-3)^2$ ഇവയാണ്.

$$\text{അതുകൊണ്ട്, } {}^{m}C_0 - 3\,{}^{m}C_1 + 9\,{}^{m}C_2 = 559$$

അതായത്, $1 - 3m + \dfrac{9m(m-1)}{2} = 559$

$$2 - 6m + 9m^2 - 9m = 1118$$

$$9m^2 - 15m - 1116 = 0 \Rightarrow 3m^2 - 5m - 372 = 0$$

ഈ ദ്വിമാന സമവാക്യം പരിഹരിച്ചാൽ $m = 12$ എന്നു കിട്ടുമല്ലോ.

$$\therefore\ T_{r+1} = {}^{12}C_r x^{12-r}\left(-\frac{3}{x^2}\right)^r$$

$$= {}^{12}C_r (-3)^r \cdot x^{12-3r}$$

ഇതിൽ x^3 ഉൾപ്പെടുത്ത പദത്തിൽ $12 - 3r = 3 \Rightarrow r = 3$

എങ്കിൽ x^3 ഉൾപ്പെടുന്ന പദം $= {}^{12}C_3 (-3)^3 x^3$

$= -5940\, x^3$

ഉദാഹരണം : 24

$(1 + x)^{34}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $(r - 5)$ -ാം പദം $(2r - 1)$ -ാം പദം.

എന്നിവയിലെ ഗുണകങ്ങൾ തുല്യമായാൽ 'r' ന്റെ വില കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$(1 + x)^{34}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $(r - 5)$ -ാം പദം $(2r - 1)$ -ാം പദം ഇവയുടെ ഗുണകങ്ങൾ ${}^{34}C_{r-6}$, ${}^{34}C_{2r-2}$ ഇവയാണല്ലോ.

${}^{34}C_{r-6} = {}^{34}C_{2r-2}$

അതുകൊണ്ട്, $r - 6 = 2r - 2$ $\qquad nC_a - nC_b \Rightarrow n - a + b$ or $a - b$

അല്ലെങ്കിൽ

$2r - 2 + r - 6 = 34$

അതുകൊണ്ട്, $r = -4$ അല്ലെങ്കിൽ $r = 14$

$r = -4$ സാധ്യമാവുകയില്ലല്ലോ. (എന്തുകൊണ്ട്?)

$r = 14$ എന്നു കിട്ടും.

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. $(a + b)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ 729, 7290, 30375 ഇവ ആയാൽ a, b, n എന്നിവ കണ്ടെത്തുക.
2. $(3 + ax)^9$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ x^2, x^3 എന്നിവയുടെ ഗുണകങ്ങൾ തുല്യമായാൽ a യുടെ വില എന്ത്?

3. $(1 + 2x)^6 (1 - x)^7$ ഗുണനഫലത്തിൽ x^5 ന്റെ ഗുണകം എത്ര?

4. a, b ഇവ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത പൂർണസംഖ്യകൾ ആയാൽ $a^n - b^n$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ് $a - b$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

   (സൂചന : $a^n = (a - b + b)^n$ എന്ന് പരിഗണിച്ച് വിപുലീകരിക്കുക)

5. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^6 - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^6$ ന്റെ വില എന്ത്?

6. $\left(a^2+\sqrt{a^2-1}\right)^4 + \left(a^2-\sqrt{a^2-1}\right)^4$ ന്റെ വില എന്ത്?

7. $(0.99)^5$ ന്റെ ഏകദേശ വിലയെത്ര?

   (സൂചന : $(0.99)^5 = (1 - 0.01)^5$ ന്റെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ എടുത്താൽ മതിയാകും.)

8. $\left(\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ തുടക്കത്തിൽ നിന്നുള്ള 5-ാം പദവും, അവസാനത്തു നിന്ന് 5-ാം പദവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $\sqrt{6}:1$ ആയാൽ 'n' എത്രയാണ്?

9. ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് $\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4, x \neq 0$ വിപുലീകരിക്കുക.

10. $(3x^2 - 2ax + 3a^2)^3$ നെ ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് വിപുലീകരിക്കുക.

സംഗ്രഹം

- 'n' ഒരു പൂർണഅധിസംഖ്യ ആയാൽ

  $(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + {}^nC_{n-1} a.b^{n-1} + {}^nC_n b^n$.
- വിപുലീകരണത്തിലെ വാചകത്തിലെ ഗുണകങ്ങളെ ഒരു ശ്രേണിയായി ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നതാണ് പാസ്ക്കൽ ത്രികോണം .
- $(a + b)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ പൊതുപദം

  $T_{r-1} = {}^nC_r a^{n-r} b^r$
- $(a - b)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ പൊതുപദം.

$T_{r+1} = (-1)^r \, {}^nC_r a^{n-r} b^r$

- $(a+b)^n$ ൽ 'n' ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യ ആയാൽ വിപുലീകരണത്തിലെ മധ്യപദം $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ -ാം പദമാണ്.
- $(a+b)^n$ ൽ 'n' ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ ആയാൽ വിപുലീകരണത്തിലെ മധ്യപദങ്ങൾ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-ാം പദം, $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$-ാം പദം എന്നിവ ആയിരിക്കും.

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

$(x+y)^n$, $0 \le n \le 7$ വരെയുള്ള വിപുലീകരണത്തിന്റെ ഗുണകങ്ങളെ പ്രാചീന ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ പിംഗളൻ തന്റെ ഛന്ദശാസ്ത്ര (200 ബി.സി) മേരു-പ്രസ്ഥാരം എന്ന പുസ്തകത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. മേരു-പ്രസ്ഥാരം എന്നാണ് ഈ ത്രികോണസംഖ്യാരൂപത്തിനുള്ള പേര്. 1303 ൽ ചൈനീസ് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്ന ചു-ഷി-കി ഈ ത്രികോണസംഖ്യകളെക്കുറിച്ച് പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുണ്ട്. ജർമൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്ന മിഖായേൽ സ്റ്റിപ്പൽ (1486 - 1567) ആണ്, ഏകദേശം 1544 ൽ ഈ സംഖ്യകൾക്ക് ദ്വിപദഗുണകം എന്ന പേര് ആദ്യം നൽകിയത്. 1572 ൽ ബോംബെല്ലി $(a+b)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $n = 1, 2, \ldots, 7$ വരെയുള്ള ഗുണകങ്ങളും 1631-ൽ ഓട്രിഡ് $n = 1, 2, \ldots, 10$ വരെയുള്ള ഗുണകങ്ങളും കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്. ബ്ലേസ് പാസ്കൽ (1623-1662) എന്ന ഫ്രഞ്ച് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനാണ് പിംഗളന്റെ 'മേരുപ്രസ്ഥാരം' ത്തിന്റെ മാതൃകയിൽ തയാറാക്കിയിരുന്ന ഈ ത്രികോണരൂപം പാസ്ക്കൽ ത്രികോണം എന്ന പേരിൽ നിർമിച്ചതും ജനകീയമാക്കിയതും.

പാസ്ക്കൽ എഴുതിയ *Trate du triange arithmetic* എന്ന പുസ്തകത്തിൽ 'n' ഒരു പൂർണസംഖ്യയാവുമ്പോൾ ഉള്ള ദ്വിപദസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ഇന്നത്തെ രൂപം കാണപ്പെടുന്നതും അത് അദ്ദേഹത്തിന്റെ മരണാന്തരം 1665 ൽ പ്രസിദ്ധീകരിച്ചതും ചരിത്രം. $(a+b)^n$ ൽ സർ. ഐസക് ന്യൂട്ടൻ പ്രസറാവിക്കുകയും 1736 ൽ ജോൺ കോൾസൺ (1680 - 1760) എന്ന ഇംഗ്ലീഷ് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ ഈ സിദ്ധാന്തത്തിന് ഒരു തെളിവ് (proof) നൽകുകയുമുണ്ടായി.