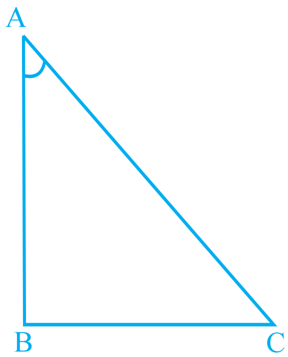
પ્રકરણ 8

ત્રિકોણમિતિનો પરિચય અને તેના ઉપયોગો

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પનાઓ અને પરિણામો

- $\angle$B કાટખૂણો હોય તેવા ત્રિકોણ ABC માં $\angle$A માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :



આકૃતિ 8.1

$\angle$A નો *sine* $= \sin A = \dfrac{\angle A \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \dfrac{BC}{AC}$

$\angle$A નો *cosine* $= \cos A = \dfrac{\angle A \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \dfrac{AB}{AC}$

$\angle$A નો *tangent* $= \tan A = \dfrac{\angle A \text{ ની સામેની બાજુ}}{\angle A \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \dfrac{BC}{AB}$

$\angle$A નો *cosecant* $= \operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A} = \dfrac{AC}{BC}$

$\angle$A નો *secant* $= \sec A = \dfrac{1}{\cos A} = \dfrac{AC}{AB}$

$\angle$A નો *cotangent* $= \cot A = \dfrac{1}{\tan A} = \dfrac{AB}{BC}$

$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$, $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$

- જો ખૂણાનું માપ સમાન રહે, તો તે ખૂણા માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનાં મૂલ્યોમાં ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ પ્રમાણે કોઈ પરિવર્તન થતું નથી.
- જો કોઈ એક ખૂણાના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરનું મૂલ્ય આપેલ હોય, તો અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનાં મૂલ્યો શોધી શકાય છે.

- 0°, 30°, 45°, 60° અને 90° માપના ખૂણાના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

A	0°	30°	45°	60°	90°
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	અવ્યાખ્યાયિત
cosec A	અવ્યાખ્યાયિત	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	અવ્યાખ્યાયિત
cot A	અવ્યાખ્યાયિત	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

- *sin* A અને *cos* A નું મૂલ્ય ક્યારેય 1થી વધારે ન હોય અને *sec* A તથા *cosec* A નું મૂલ્ય હંમેશાં એક અથવા એકથી વધારે હોય.
- કોટિકોણ વિશેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો :

  $sin\,(90° - A) = cos\,A,\ cos\,(90° - A) = sin\,A$

  $tan\,(90° - A) = cot\,A,\ cot\,(90° - A) = tan\,A$

  $sec\,(90° - A) = cosec\,A,\ cosec\,(90° - A) = sec\,A$
- ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ :

  $cos^2 A + sin^2 A = 1$

  $1 + tan^2 A = sec^2 A$

  $cot^2 A + 1 = cosec^2 A$
- દૃષ્ટિરેખા એ નિરીક્ષકની આંખથી નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થ સુધી લંબાવેલ રેખા છે.
- નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો ઉત્સેધકોણ એટલે, જ્યારે નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષૈતિજ રેખાથી ઊંચે હોય ત્યારે દૃષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજ રેખા વડે બનતો ખૂણો.
- નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો અવસેધકોણ એટલે, જ્યારે નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષૈતિજ રેખાથી નીચે હોય ત્યારે દૃષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજ રેખા વડે બનતો ખૂણો.
- પદાર્થની ઊંચાઈ અથવા લંબાઈ અથવા બે પદાર્થો વચ્ચેનું અંતર ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ કરીને મેળવી શકાય છે.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 3 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 1 : $(sin30° + cos30°) - (sin60° + cos60°)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

ઉકેલ : $(sin30° + cos30°) - (sin60° + cos60°)$

$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 0$$

ઉત્તર (B)

ઉદાહરણ 2 : $\frac{tan30°}{cot60°}$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 1

ઉકેલ : $\frac{tan30°}{cot60°} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 1$

ઉત્તર (D)

ઉદાહરણ 3 : $(sin\ 45° + cos\ 45°)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

ઉકેલ : $(sin\ 45° + cos\ 45°)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

ઉત્તર (B)

સ્વાધ્યાય 8.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 15 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

1. જો $cos\ A = \frac{4}{5}$ હોય, તો $tan\ A =$ ....

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$

2. જો $sin\ A = \frac{1}{2}$ હોય, તો $cot\ A =$ ....

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

3. $[cosec\ (75° + \theta) - sec\ (15° - \theta) - tan\ (55° + \theta) + cot\ (35° - \theta)]$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) – 1 (B) 0 (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$

4. જો $sin\ \theta = \frac{a}{b}$ હોય, તો $cos\ \theta =$ ....

(A) $\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ (D) $\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}$

5. જો $cos\ (\alpha + \beta) = 0$ હોય, તો $sin\ (\alpha - \beta) =$ .... થાય.

(A) $cos\ \beta$ (B) $cos\ 2\beta$ (C) $sin\ \alpha$ (D) $sin\ 2\alpha$

6. $(tan1°\ tan2°\ tan3° \ldots tan89°)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

7. જો $cos\ 9\alpha = sin\ \alpha$ જ્યાં, $9\alpha < 90°$ હોય તો, $tan5\alpha$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 1 (D) 0

8. ΔABC માં $\angle C$ કાટખૂણો હોય, તો $cos\ (A+B)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. જો $sinA + sin^2A = 1$ હોય, તો $(cos^2A + cos^4A)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 3

10. જો $sin\ \alpha = \frac{1}{2}$ અને $cos\ \beta = \frac{1}{2}$ આપેલ હોય, તો $(\alpha + \beta) =$ ....

(A) 0° (B) 30° (C) 60° (D) 90°

11. $\left[\frac{sin^2 22° + sin^2 68°}{cos^2 22° + cos^2 68°} + sin^2 63° + cos 63° sin 27°\right]$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

12. જો $4\ tan\ \theta = 3$ હોય, તો $\left(\frac{4 sin\theta - cos\theta}{4 sin\theta + cos\theta}\right) =$ ....

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

13. જો $sin\,\theta - cos\,\theta = 0$, તો $(sin^4\theta + cos^4\theta)$ = ...

(A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

14. $sin\,(45° + \theta) - cos\,(45° - \theta)$ = ...

(A) $2cos\,\theta$ (B) 0 (C) $2sin\,\theta$ (D) 1

15. 6 મી ઊંચા થાંભલાના જમીન પરના પડછાયાની લંબાઈ $2\sqrt{3}$ મી હોય, તો સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ .... છે.

(A) 60° (B) 45° (C) 30° (D) 90°

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

આપેલ વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે કારણ સહિત દર્શાવો :

ઉદાહરણ 1 : $sin\,\theta + cos\,\theta$ નું મૂલ્ય હંમેશા 1 થી વધારે હોય છે.

ઉકેલ : અસત્ય.

$\theta = 0°$ માટે $(sin\,\theta + cos\,\theta)$ નું મૂલ્ય = 1.

ઉદાહરણ 2 : θ નું મૂલ્ય વધે તો $tan\,\theta$ $(\theta < 90°)$ નું મૂલ્ય પણ વધે છે.

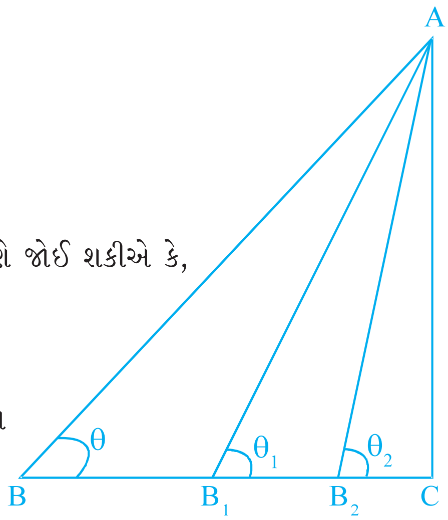
ઉકેલ : સત્ય છે.

આકૃતિ 8.2માં, બાજુ BC પર બિંદુ B ને બિંદુ C ની નજીક લાવતાં આપણે જોઈ શકીએ કે,

(i) θ નું મૂલ્ય વધે છે $(\theta_1 > \theta, \theta_2 > \theta_1, ...)$ અને

(ii) BC ની લંબાઈ ઘટે છે $(B_1C < BC, B_2C < B_1C, ...)$

આમ, લંબ AC ની લંબાઈ નિશ્ચિત છે અને પાયા BC ની લંબાઈમાં ઘટાડો થાય છે. તેથી, θ નું મૂલ્ય વધે તો $tan\,\theta$ નું મૂલ્ય પણ વધે છે.



આકૃતિ 8.2

ઉદાહરણ 3 : θ ના મૂલ્યમાં થતા વધારાને લીધે $tan\,\theta$ નું મૂલ્ય $sin\,\theta$ ના મૂલ્ય કરતાં વધુ ઝડપથી વધે છે.

ઉકેલ : સત્ય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે θ ના મૂલ્યમાં થતાં વધારાને લીધે $sin\,\theta$ નું મૂલ્ય વધે છે પરંતુ $cos\,\theta$ નું મૂલ્ય ઘટે છે.

હવે $tan\,\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$ છે.

હવે θ નું મૂલ્ય વધતાં, $sin\,\theta$ વધશે પરંતુ $cos\,\theta$ ઘટશે. માટે, $tan\,\theta$ ના કિસ્સામાં અંશ વધશે અને છેદ ઘટશે. પરંતુ $sin\,\theta$ માં, જે હકીકતમાં $\frac{sin\theta}{1}$ છે, ફક્ત અંશનું મૂલ્ય વધશે અને છેદ ફક્ત 1 જ રહેશે.

આથી θ નું મૂલ્ય વધતાં $sin\,\theta$ ના મૂલ્ય કરતાં $tan\,\theta$ નું મૂલ્ય વધુ ઝડપથી વધે છે.

ઉદાહરણ 4 : કોઈ ધન સંખ્યા 'a' માટે $sin\,\theta$ નું મૂલ્ય $\left(a+\frac{1}{a}\right)$ શક્ય છે.

ઉકેલ : અસત્ય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0$ અથવા $a+\frac{1}{a} \geq 2$, પરંતુ $sin\,\theta$ નું મૂલ્ય 1 થી વધારે નથી.

વૈકલ્પિક રીતે, ત્રણ શક્યતા સંભવી શકે.

શક્યતા 1. જો $a < 1$, તો $\left(a+\frac{1}{a}\right)>1$ કારણ કે $\frac{1}{a}>1$

શક્યતા 2. જો $a = 1$, તો $\left(a+\frac{1}{a}\right)>1$

શક્યતા 3. જો $a > 1$, તો $\left(a+\frac{1}{a}\right)>1$

અહીં, $sin\ \theta$ નું મૂલ્ય 1 થી મોટું નથી.

સ્વાધ્યાય 8.2

નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે કારણ સહિત જણાવો :

1. $\frac{tan\,47°}{cot\,43°} = 1$

2. $(cos^2\ 23° - sin^2\ 67°)$ નું મૂલ્ય ધન સંખ્યા છે.

3. $(sin\ 80° - cos\ 80°)$ નું મૂલ્ય ઋણ સંખ્યા છે.

4. $\sqrt{(1-cos^2\theta)\ sec^2\theta} = tan\theta$

5. જો $cosA + cos^2A = 1$ હોય, તો $sin^2A + sin^4A = 1$.

6. $(tan\ \theta + 2)\ (2\ tan\ \theta + 1) = 5\ tan\ \theta + sec^2\theta$

7. જો ટાવરના પડછાયાની લંબાઈ વધે તો સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ પણ વધે.

8. તળાવની સપાટીથી 3 મીટર ઊંચે રહેલા પ્લૅટફૉર્મ પર ઊભેલો માણસ, વાદળ અને તેના તળાવમાં પડતા પ્રતિબિંબનું અવલોકન કરે છે, તો વાદળના ઉત્સેધકોણનું માપ અને તેના પ્રતિબિંબ માટેના અવસેધકોણનું માપ સમાન હશે.

9. $a \neq 1$ હોય તેવી કોઈક ધન સંખ્યા a માટે $2sin\theta$ નું મૂલ્ય $\left(a+\frac{1}{a}\right)$ હોઈ શકે.

10. $cos\ \theta = \frac{a^2+b^2}{2ab}$ હોય તેવી બે ભિન્ન સંખ્યાઓ a અને b મળી શકે. જ્યાં $ab > 0$.

11. ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° છે. જો ટાવરની ઊંચાઈ બમણી કરવામાં આવે, તો તેની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ પણ બમણું થશે.

12. જો ટાવરની ઊંચાઈ અને તેના પાયાથી નિરીક્ષણ બિંદુના અંતર બંનેમાં 10 ટકાનો વધારો થાય, તો તેના ઉત્સેધકોણના માપમાં કોઈ ફેરફાર થશે નહિ.

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : સાબિત કરો કે $sin^6\theta + cos^6\theta + 3sin^2\theta\ cos^2\theta = 1$

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

માટે, $(sin^2\theta + cos^2\theta)^3 = 1$

$\therefore\ (sin^2\theta)^3 + (cos^2\theta)^3 + 3sin^2\theta\ cos^2\theta\ (sin^2\theta + cos^2\theta) = 1$

$\therefore\ sin^6\theta + cos^6\ \theta + 3sin^2\theta\ \ cos^2\theta\ = 1$

ઉદાહરણ 2 : સાબિત કરો કે $(sin^4\theta - cos^4\theta +1)\ cosec^2\theta = 2$

ઉકેલ : ડા.બા. $= (sin^4\theta - cos^4\theta +1)\ cosec^2\theta$

$= [(sin^2\theta - cos^2\theta)\ (sin^2\theta + cos^2\theta) + 1]\ cosec^2\theta$

$= (sin^2\theta - cos^2\theta + 1)\ cosec^2\theta$ **[$sin^2\theta + cos^2\theta =1$]**

$= 2sin^2\theta\ \ cosec^2\theta$ **[$1- cos^2\theta = sin^2\theta$]**

$= 2 =$ જ.બા.

ઉદાહરણ 3 : જો $\alpha + \beta = 90°$ હોય, તો સાબિત કરો કે

$$\sqrt{cos\,\alpha\,cosec\,\beta - cos\,\alpha\,sin\,\beta} = sin\,\alpha$$

ઉકેલ : $\sqrt{cos\,\alpha\,cosec\ \beta - cos\,\alpha\,sin\,\beta} = \sqrt{cos\,\alpha\,cosec\,(90° - \alpha) - cos\,\alpha\,sin\,(90° - \alpha)}$

[$\alpha + \beta = 90°$ આપેલ છે]

$= \sqrt{cos\,\alpha\,sec\,\alpha - cos\,\alpha\,cos\,\alpha}$

$= \sqrt{1 - cos^2\,\alpha}$

$= sin\ \alpha$ **($sin\ \ \alpha > 0$)**

ઉદાહરણ 4 : જો $sin\ \theta + cos\ \theta = \sqrt{3}$, તો સાબિત કરો કે $tan\ \theta + cot\ \theta = 1$

ઉકેલ : $sin\ \theta + cos\ \theta = \sqrt{3}$ **(આપેલ છે.)**

$\therefore\ (sin\ \theta + cos\ \theta)^2 = 3$

$\therefore\ sin^2\ \theta + cos^2\theta + 2sin\ \theta\ cos\ \theta\ = 3$

$2sin\ \theta\ \ cos\ \theta = 2$ **(A)** **[$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$]**

$\therefore\ sin\ \theta\ cos\ \theta\ = 1 = sin^2\ \theta + cos^2\ \theta$

$\therefore\ 1 = \dfrac{sin^2\,\theta + cos^2\,\theta}{sin\,\theta\,cos\,\theta}$

માટે, $tan\ \theta + cot\ \theta = 1$

નોંધ : આ પ્રશ્ન શક્ય જ નથી.

$sin\ \theta + cos\ \theta$ નું મહત્તમ મૂલ્ય $\sqrt{2}$ થી વધે નહીં.

$(sin\ \theta + cos\ \theta)^2 + (sin\ \theta - cos\ \theta)^2 = 2\ (sin^2\ \theta + cos^2\ \theta) = 2$

વર્ગ અનૃણ હોવાથી $(sin\ \theta + cos\ \theta)^2\ \leq 2$

$\therefore\ sin\ \theta + cos\ \theta\ \leq\ \sqrt{2}$

આથી $sin\ \theta + cos\ \theta$ ક્યારેય $\sqrt{3}$ થશે નહીં.

હવે, $sin\ \theta\ \leq 1$, $cos\ \theta\ \leq 1$ હોવાથી જો (A) પ્રમાણે $sin\ \theta \cdot cos\ \theta = 1$ તો $sin\ \theta = 1 = cos\ \theta$ જરૂરી છે. આ શક્ય નથી, કારણ કે $sin^2\ \theta + cos^2\theta = 2$ થઈ જાય. $tan\ \theta + cot\ \theta = 1$ શક્ય નથી, કારણ કે સંખ્યા તથા તેના વ્યસ્તનો સરવાળો હંમેશાં 1 થી વધારે જ થાય.

સ્વાધ્યાય 8.3

સાબિત કરો : (પ્રશ્ન 1 થી 7)

1. $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\ cosec\ \theta$

2. $\dfrac{\tan A}{1+\sec A} - \dfrac{\tan A}{1-\sec A} = 2\ cosec\ A$

3. જો $\tan A = \dfrac{3}{4}$ હોય, તો $\sin A \cos A = \dfrac{12}{25}$

4. $(\sin\alpha + \cos\alpha)(\tan\alpha + \cot\alpha) = \sec\alpha + cosec\ \alpha$

5. $\left(\sqrt{3}+1\right)(3 - \cot 30°) = \tan^3 60° - 2\sin 60°$

6. $1 + \dfrac{\cot^2\alpha}{1+cosec\ \alpha} = cosec\ \alpha$

7. $\tan\theta + \tan(90° - \theta) = \sec\theta\ \sec(90° - \theta)$

8. જો h મી ઊંચા ટાવરના પડછાયાની લંબાઈ $\sqrt{3}\,h$ મી હોય, તો સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ શોધો.

9. જો $\sqrt{3}\ \tan\theta = 1$ હોય, તો $\sin^2\theta - \cos^2\theta$ નું મૂલ્ય શોધો.

10. 15 મીટર લાંબી નિસરણીનો છેડો શિરોલંબ દીવાલની ટોચને અડે છે. જો નિસરણી દીવાલ સાથે 60° માપનો ખૂણો બનાવે તો દીવાલની ઊંચાઈ શોધો.

11. સાદું રૂપ આપો : $(1 + \tan^2\theta)(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta)$

12. જો $2\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2$, તો θ નું મૂલ્ય શોધો.

13. સાબિત કરો કે $\dfrac{\cos^2(45°+\theta)+\cos^2(45°-\theta)}{\tan(60°+\theta)\ \tan(30°-\theta)} = 1$

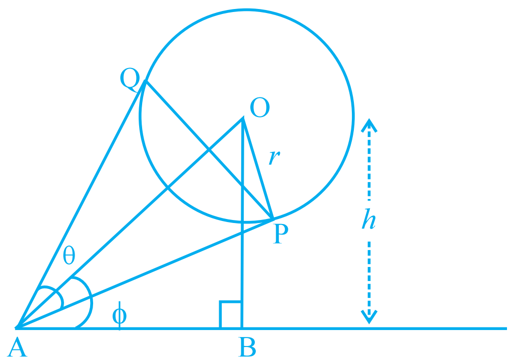
14. 1.5 મી ઊંચાઈવાળો એક નિરીક્ષક 22 મીટર ઊંચા ટાવરથી 20.5 મીટરના અંતરે ઊભો છે. નિરીક્ષકની આંખથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ શોધો.

15. સાબિત કરો કે $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : r ત્રિજ્યાવાળું એક ગોળાકાર બલૂન જમીન પર રહેલા નિરીક્ષકની આંખ આગળ θ માપનો આંતરે છે. જો બલૂનના કેન્દ્રના ઉત્સેધકોણનું માપ ϕ હોય, તો બલૂનના કેન્દ્રની જમીનથી ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 8.3 માં, O એ બલૂનનું કેન્દ્ર છે તથા ત્રિજ્યા $OP = r$ અને $\angle PAQ = \theta$. વળી, $\angle OAB = \phi$.



આકૃતિ 8.3

ધારો કે જમીનથી બલૂનના કેન્દ્રની ઊંચાઈ h છે. આમ, OB = h.

હવે, ΔOAP માં, $sin\ \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{r}{d}$, જ્યાં OA = d **(1)**

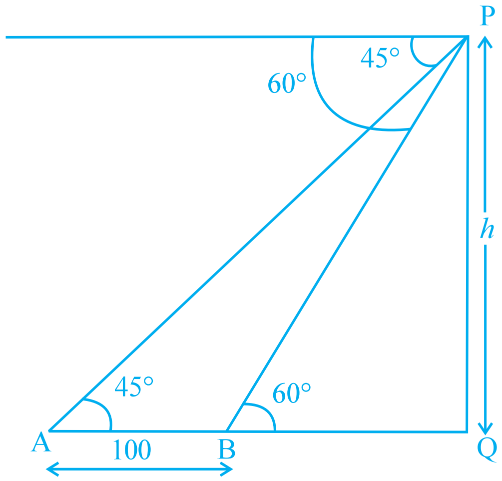
વળી, ΔOAB માં, $sin\ \phi = \dfrac{h}{d}$. **(2)**

પરિણામ (1) અને (2) પરથી આપણને, $\dfrac{sin\phi}{sin\dfrac{\theta}{2}} = \dfrac{\dfrac{h}{d}}{\dfrac{r}{d}} = \dfrac{h}{r}$

અથવા $h = r\ sin\ \phi\ cosec\ \dfrac{\theta}{2}$.

ઉદાહરણ 2 : એક સુરેખ માર્ગથી શિરોલંબ રહેલા બલૂનમાંથી કોઈ એક સમયે બે મોટરકારનાં અવસેધકોણના માપ 45° અને 60° છે. જો આ સમયે બે મોટરકાર વચ્ચેનું અંતર 100 મીટર હોય, તો બલૂનની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બિંદુ P પર રહેલા બલૂનની ઊંચાઈ h મીટર છે. (જુઓ આકૃતિ 8.4). ધારો કે A અને B બે મોટરકાર છે. આમ AB = 100 મીટર. ΔPAQ માં, AQ = PQ = h



આકૃતિ 8.4

હવે, ΔPBQ માં, $\dfrac{PQ}{BQ} = tan\ 60° = \sqrt{3}$ અથવા $\dfrac{h}{h-100} = \sqrt{3}$

અથવા $h = \sqrt{3}\,(h - 100)$

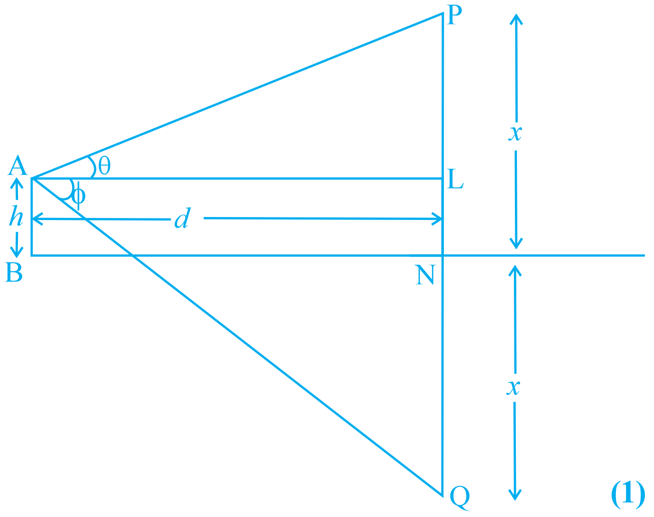
માટે $h = \dfrac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \times \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{100\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1} = 50\ (3 + \sqrt{3})$

તેથી, બલૂનની ઊંચાઈ 50 (3 + $\sqrt{3}$) મીટર છે.

ઉદાહરણ 3 : તળાવની સપાટીથી h મીટર ઊંચાઈએ આવેલા બિંદુથી વાદળના ઉત્સેધકોણનું માપ θ અને તળાવમાં મળતા તે જ વાદળના પ્રતિબિંબના અવસેધકોણનું માપ ϕ જણાય છે. સાબિત કરો કે તળાવની સપાટીથી વાદળની ઊંચાઈ $h\left(\dfrac{tan\phi + tan\theta}{tan\phi - tan\theta}\right)$ છે.

ઉકેલ : ધારો કે બિંદુ P વાદળની સ્થિતિ અને બિંદુ Q એ તળાવમાં તેનું પ્રતિબિંબ દર્શાવે છે. (જુઓ આકૃતિ 8.5.) ધારો કે A એ નિરીક્ષણ બિંદુ છે તથા AB = h.

ધારો કે તળાવની સપાટીથી વાદળની ઊંચાઈ x છે તથા AL = d.



આકૃતિ 8.5

હવે ΔPAL પરથી, $\frac{x-h}{d} = \tan\theta$ **(1)**

ΔQAL પરથી, $\frac{x+h}{d} = \tan\phi$ **(2)**

પરિણામ (1) અને (2) પરથી, આપણને

$$\frac{x+h}{x-h} = \frac{\tan\phi}{\tan\theta}$$

અથવા, $\frac{2x}{2h} = \frac{\tan\phi+\tan\theta}{\tan\phi-\tan\theta}$ (યોગ-વિયોગ પ્રમાણ)

માટે, $x = h\left(\frac{\tan\phi+\tan\theta}{\tan\phi-\tan\theta}\right)$.

સ્વાધ્યાય 8.4

1. જો $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = p$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\cos\theta = \frac{p^2-1}{p^2+1}$.

2. સાબિત કરો કે $\sqrt{\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$

3. જમીન પરના કોઈ એક બિંદુએથી એક ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 30° છે. જો નિરીક્ષક તે ટાવર તરફ 20 મીટર ચાલે, તો ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 15° વધે છે. તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

4. જો $1 + \sin^2\theta = 3\sin\theta\cos\theta$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\tan\theta = 1$ અથવા $\frac{1}{2}$.

5. $\sin\theta + 2\cos\theta = 1$ હોય, તો સાબિત કરો કે $2\sin\theta - \cos\theta = 2$.

6. ટાવરના તળિયામાંથી પસાર થતી રેખા પર તળિયાથી s અને t મી દૂર આવેલા બે બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ કોટિકોણનાં માપ છે. સાબિત કરો કે ટાવરની ઊંચાઈ $\sqrt{st}$ છે.

7. સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° થી ઘટીને 30° થતાં સમતલ જમીન પર શિરોલંબ રહેલા ટાવરના પડછાયાની લંબાઈમાં 50 મીટરનો વધારો થાય છે, તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

8. h ઊંચાઈના એક શિરોલંબ ધ્વજસ્તંભને સમક્ષિતિજ જમીન પર શિરોલંબ રહેલા ટાવર પર મૂકવામાં આવેલ છે જમીન પરના એક બિંદુથી આ ધ્વજસ્તંભના તળિયા અને ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ અનુક્રમે α અને β છે. સાબિત કરો કે ટાવરની ઊંચાઈ $\left(\frac{h \tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}\right)$ છે.

9. જો $\tan\theta + \sec\theta = l$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\sec\theta = \frac{l^2+1}{2l}$.

10. જો $\sin\theta + \cos\theta = p$ અને $\sec\theta + \mathrm{cosec}\,\theta = q$, તો સાબિત કરો કે $q\,(p^2 - 1) = 2p$.

11. જો $a \sin\theta + b \cos\theta = c$, તો સાબિત કરો કે $a \cos\theta - b \sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$, $a^2 + b^2 \geq c^2$.

12. સાબિત કરો કે $\frac{1+\sec\theta-\tan\theta}{1+\sec\theta+\tan\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

13. એક શિરોલંબ ટાવરના તળિયેથી બીજા કોઈ 30 મીટર ઊંચા શિરોલંબ ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60° છે અને બીજા ટાવરના તળિયેથી પ્રથમ ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 30° છે, તો બંને ટાવર વચ્ચેનું અંતર તથા પ્રથમ ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

14. h મીટર ઊંચા એક શિરોલંબ ટાવર પરથી ટાવરના તળિયામાંથી પસાર થતી રેખા પર રહેલા બે પદાર્થોના અવસેધકોણનાં માપ α અને β છે. ($\beta > \alpha$). આ બે પદાર્થો વચ્ચેનું અંતર શોધો.

15. દીવાલ પાસે એક નિસરણી જમીન સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે તે રીતે મૂકેલ છે. તેના તળિયાનો ભાગ દીવાલથી p જેટલો દૂર લઈ જતાં તેનો ઉપરનો છેડો q જેટલો નીચે ઊતરે છે અને જમીન સાથે β માપનો ખૂણો બનાવે છે, તો સાબિત કરો કે $\frac{p}{q} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\sin\alpha - \sin\beta}$.

16. જમીન પરના એક બિંદુથી શિરોલંબ ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60° છે. આ બિંદુથી શિરોલંબ દિશામાં 10 મીટર ઊંચે આવેલ બીજા કોઈ બિંદુથી ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 45° છે, તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

17. એક ઇમારતની બારી જમીનથી h મીટર ઊંચાઈએ આવેલ છે. બારીમાંથી અવલોકન કરતાં, આ શેરીમાં સામેની બાજુએ રહેલી બીજી ઇમારતની ટોચના ઉત્સેધકોણ અને તળિયાના અવસેધકોણનાં માપ અનુક્રમે α અને β છે. સાબિત કરો કે બીજી ઇમારતની ઊંચાઈ $h\,(1 + \tan\alpha\ \cot\beta)$ મીટર છે.

18. એક ઇમારતની નીચેની બારી જમીનથી 2 મીટરની ઊંચાઈ પર છે અને તેની ઉપરની બારી, નીચેની બારીથી શિરોલંબ દિશામાં 4 મીટર ઉપરની બાજુએ આવેલ છે. આ બે બારીઓમાંથી અવલોકન કરતાં કોઈ એક વિશિષ્ટ પરિસ્થિતિમાં એક બલૂનના ઉત્સેધકોણનાં માપ અનુક્રમે 60° અને 30° મળે છે, તો બલૂનની જમીનથી ઊંચાઈ શોધો.