પ્રકરણ 11

વર્તુળ સંબંધિત ક્ષેત્રફળ

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પના અને પરિણામો

સરળ બંધ આકૃતિઓની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ, વર્તુળનો પરિઘ અને ક્ષેત્રફળ, વર્તુળાકાર પથનું ક્ષેત્રફળ (એટલે કે વલયનું ક્ષેત્રફળ) વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ અને કેન્દ્રસ્થ ખૂણો - ગુરુવૃત્તાંશ અને લઘુવૃત્તાંશ. વૃત્તખંડ - ગુરુવૃત્તખંડ અને લઘુવૃત્તખંડ.

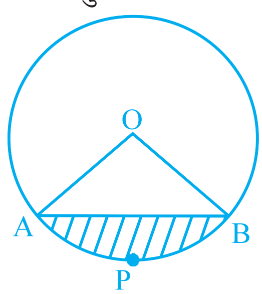
- વર્તુળનો પરિઘ $= 2\pi r$ અને વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$, જ્યાં r એ વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.
- ત્રિજ્યા r_1 અને r_2 $(r_1 > r_2)$ વાળા બે સમકેન્દ્રીય વર્તુળ વચ્ચે રચાતા

  વર્તુળાકાર માર્ગનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)$.

- r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ θ ખૂણો રચતા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$, θ એ ખૂણાનું માપ અંશમાં છે.
- ત્રિજ્યા r અને કેન્દ્ર આગળ રચિત ખૂણો θ હોય, તેવા વર્તુળના વૃત્તાંશના ચાપની લંબાઈ $= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$.

  (θ એ ખૂણાનું અંશ માપ છે.)

- આકૃતિ 11.1 માં વર્તુળના લઘુવૃત્તખંડ APB નું ક્ષેત્રફળ = વૃત્તાંશ OAPBનું ક્ષેત્રફળ – Δ OABનું ક્ષેત્રફળ
- r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના ગુરુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2 -$ અનુરૂપ લઘુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ
- r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના ગુરુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2 -$ અનુરૂપ લઘુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ



આકૃતિ 11.1

નોંધ : જો π ની કિંમત આપેલ ના હોય, તો તે $\frac{22}{7}$ લેવી.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 અને 2 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 1 : જો વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ 154 સેમી^{2} હોય, તો તેની પરિમિતિ

(A) 11 સેમી (B) 22 સેમી (C) 44 સેમી (D) 55 સેમી

ઉકેલ : વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = 154 સેમી^{2}

$\therefore \pi r^2 = 154$

$\therefore r^2 = \frac{154}{\pi}$

$\therefore r^2 = \frac{154 \times 7}{22} = 49$

$\therefore r$ = 7 સેમી

વર્તુળની પરિમિતિ = વર્તુળનો પરિઘ

$= 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7$

= 44 સેમી

ઉત્તર (C)

ઉદાહરણ 2 : જો θ એ r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના વૃત્તાંશના ખૂણાનું માપ અંશમાં હોય, તો તે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ

(A) $\frac{\pi r^2 \theta}{360}$ (B) $\frac{\pi r^2 \theta}{180}$ (C) $\frac{2\pi r \theta}{360}$ (D) $\frac{2\pi r \theta}{180}$

ઉકેલ : ઉત્તર (A)

સ્વાધ્યાય 11.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 10 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

1. જો R_1 અને R_2 ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળોનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો, R ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના ક્ષેત્રફળ જેટલો થાય, તો

(A) $R_1 + R_2 = R$ (B) $R_1^2 + R_2^2 = R^2$

(C) $R_1 + R_2 < R$ (D) $R_1^2 + R_2^2 < R^2$

2. જો R_1 અને R_2 ત્રિજ્યાવાળાં વર્તુળોના પરિઘનો સરવાળો, R ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના પરિઘ જેટલો હોય, તો

(A) $R_1 + R_2 = R$ (B) $R_1 + R_2 > R$

(C) $R_1 + R_2 < R$ (D) R_1, R_2 અને R ના સંબંધ વિશે કશું ચોક્કસ કહી શકાય નહિ.

3. જો વર્તુળનો પરિઘ અને ચોરસની પરિમિતિ સમાન હોય, તો

(A) વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = ચોરસનું ક્ષેત્રફળ

(B) વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ > ચોરસનું ક્ષેત્રફળ

(C) વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ < ચોરસનું ક્ષેત્રફળ

(D) વર્તુળના ક્ષેત્રફળ અને ચોરસના ક્ષેત્રફળના સંબંધ વિશે કશું ચોક્કસ કહી શકાય નહિ.

4. r એકમ ત્રિજ્યાવાળા અર્ધવર્તુળને અંતર્ગત સૌથી મોટા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ ....

(A) r^2 ચોરસ એકમ (B) $\frac{1}{2}r^2$ ચોરસ એકમ

(C) $2r^2$ ચોરસ એકમ (D) $\sqrt{2}\,r^2$ ચોરસ એકમ

5. જો વર્તુળની પરિમિતિ ચોરસની પરિમિતિ જેટલી હોય, તો તેમના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર ....

(A) 22 : 7 (B) 14 : 11 (C) 7 : 22 (D) 11: 14

6. એક વિસ્તારમાં એક વર્તુળાકાર બગીચો એવી રીતે બનાવવામાં આવે છે કે તેનું ક્ષેત્રફળ 16 મી અને 12 મી વ્યાસના બે વર્તુળાકાર બગીચાનાં ક્ષેત્રફળના સરવાળા બરાબર હોય, તો નવા બગીચાની ત્રિજ્યા .... હોય.

(A) 10 મી (B) 15 મી (C) 20 મી (D) 24 મી

7. 6 સેમી બાજુના ચોરસને અંતર્ગત વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ ....

(A) 36 π સેમી^{2} (B) 18 π સેમી^{2} (C) 12 π સેમી^{2} (D) 9 π સેમી^{2}

8. 8 સેમી ત્રિજ્યાના વર્તુળને અંતર્ગત ચોરસનું ક્ષેત્રફળ ....

(A) 256 સેમી^{2} (B) 128 સેમી^{2} (C) $64\sqrt{2}$ સેમી^{2} (D) 64 સેમી^{2}

9. 36 સેમી અને 20 સેમી વ્યાસવાળાં બે વર્તુળોના પરિઘના સરવાળાને સમાન પરિઘવાળા વર્તુળની ત્રિજ્યા ....

(A) 56 સેમી (B) 42 સેમી (C) 28 સેમી (D) 16 સેમી

10. એક વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ, 24 સેમી અને 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળોનાં ક્ષેત્રફળોના સરવાળા જેટલું હોય, તો તે વર્તુળનો વ્યાસ ....

(A) 31 સેમી (B) 25 સેમી (C) 62 સેમી (D) 50 સેમી

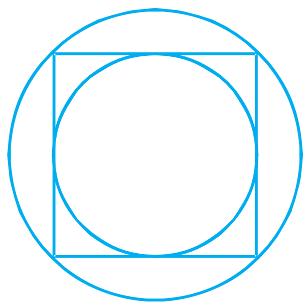
કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : નીચેનું વિધાન સત્ય છે ? તમારા ઉત્તર માટે કારણ આપો :

વર્તુળના વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ = અનુરૂપ વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ – અનુરૂપ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

ઉકેલ : વિધાન સાચું નથી. તે ફક્ત લઘુવૃત્તખંડ માટે સાચું છે. ગુરુવૃત્તખંડના કિસ્સામાં, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ, અનુરૂપ વૃત્તાંશના ક્ષેત્રફળમાં ઉમેરવું પડે.

ઉદાહરણ 2 : આકૃતિ 11.2 માં વર્તુળ એક ચોરસમાં અંતર્ગત છે. તે ચોરસની બાજુ 5 સેમી છે અને બીજું વર્તુળ ચોરસનું પરિવૃત્ત છે. શું એવું કહેવું સાચું છે કે બહારના વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ, અંદરના વર્તુળના ક્ષેત્રફળ કરતાં બમણું છે ? તમારા જવાબ માટે કારણ આપો.



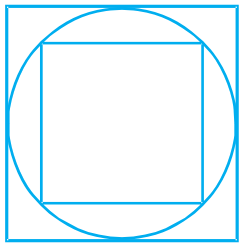
આકૃતિ 11.2

ઉકેલ : તે સત્ય છે, કારણ કે અંતર્ગત વર્તુળનો વ્યાસ = 5 સેમી અને બહારના વર્તુળનો વ્યાસ = ચોરસનો વિકર્ણ = $5\sqrt{2}$ સેમી.

તેથી, $A_1 = \pi\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$ અને $A_2 = \pi\left(\frac{5}{2}\right)^2$, તેથી $\frac{A_1}{A_2} = 2$

સ્વાધ્યાય 11.2

1. a સેમી બાજુવાળા ચોરસમાં અંતર્ગત વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ πa^2 સેમી^{2} છે ? તમારા ઉત્તર માટે કારણ આપો.
2. એ કહેવું સાચું છે કે a સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને બહિર્ગત ચોરસની પરિમિતિ $8a$ સેમી છે ? તમારા જવાબ માટે કારણ આપો.
3. આકૃતિ 11.3 માં, d વ્યાસવાળા વર્તુળને અંતર્ગત એક ચોરસ છે અને બીજો ચોરસ તે વર્તુળને બહિર્ગત છે. શું બહારના ચોરસનું ક્ષેત્રફળ, અંદરના ચોરસના ક્ષેત્રફળ કરતાં ચાર ગણું છે ? તમારા જવાબ માટે કારણ આપો.



આકૃતિ 11.3

4. એમ કહેવું સાચું છે કે વર્તુળના વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ તેના અનુરૂપ વૃત્તાંશના ક્ષેત્રફળથી ઓછું છે ? શા માટે ?
5. તે સાચું છે કે એક પરિભ્રમણ દરમિયાન d સેમી વ્યાસના વર્તુળાકાર ચક્રએ કાપેલું અંતર $2\pi d$ સેમી છે ? શા માટે ?
6. s મીટર અંતર કાપવામાં, એક r ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળાકાર ચક્ર, $\dfrac{s}{2\pi r}$ પરિભ્રમણ કરે છે. આ વિધાન સાચું છે ? શા માટે ?
7. વર્તુળના ક્ષેત્રફળની અંકીય કિંમત તેના પરિઘની અંકીય કિંમત કરતાં વધુ છે. આ વિધાન સાચું છે ? શા માટે ?
8. જો r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના ચાપની લંબાઈ, $2r$ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના ચાપની લંબાઈ જેટલી હોય, તો પહેલા વર્તુળના અનુરૂપ વૃત્તાંશનો ખૂણો, બીજા વર્તુળના અનુરૂપ વૃત્તાંશના ખૂણા કરતાં બમણો હોય. આ વિધાન અસત્ય છે ? શા માટે ?
9. જેના અનુરૂપ ચાપની લંબાઈ સમાન હોય, તેવાં બે ભિન્ન વર્તુળોના બે વૃત્તાંશનાં ક્ષેત્રફળ સરખાં હોય. આ વિધાન સત્ય છે ? શા માટે ?
10. બે ભિન્ન વર્તુળોનાં બે વૃત્તાંશનાં ક્ષેત્રફળ સરખાં છે. શું તે જરૂરી છે કે તેનાં અનુરૂપ ચાપની લંબાઈ સરખી હોય ? શા માટે ?
11. a સેમી લંબાઈ અને b સેમી પહોળાઈ $(a > b)$વાળા લંબચોરસની અંતર્ગત દોરેલા મોટામાં મોટા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ πb^2 સેમી^{2} છે ? શા માટે ?
12. બે વર્તુળોના પરિઘ સમાન છે. તો તેમના ક્ષેત્રફળ સમાન હોય તે આવશ્યક છે ?
13. બે વર્તુળોનાં ક્ષેત્રફળ સમાન છે. તો તેમના પરિઘ સમાન હોય તે આવશ્યક છે ?
14. શું તે કહેવું સાચું છે કે p સેમી વ્યાસના વર્તુળને અંતર્ગત ચોરસનું ક્ષેત્રફળ p^2 સેમી^{2} છે ? શા માટે ?

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : એવા વર્તુળનો વ્યાસ શોધો કે જેનું ક્ષેત્રફળ અનુક્રમે 20 સેમી અને 48 સેમી વ્યાસ હોય તેવાં બે વર્તુળોનાં ક્ષેત્રફળના સરવાળા બરાબર હોય.

ઉકેલ : અહીં પહેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા $r_1 = \dfrac{20}{2}$ સેમી $= 10$ સેમી

અને બીજા વર્તુળની ત્રિજ્યા $r_2 = \dfrac{48}{2}$ સેમી $= 24$ સેમી

તેથી, તેમનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો $= \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (10)^2 + \pi (24)^2 = \pi \times 676$ **(1)**

ધારો કે, નવા વર્તુળની ત્રિજ્યા r સેમી છે. તેનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$ **(2)**

તેથી, (1) અને (2) પરથી

$$\pi r^2 = \pi \times 676 \quad \textbf{અથવા} \quad r^2 = 676$$

એટલે કે, $r = 26$

આમ, નવા વર્તુળની ત્રિજ્યા = 26 સેમી

તેથી, નવા વર્તુળનો વ્યાસ = 2 × 26 સેમી = 52 સેમી

ઉદાહરણ 2 : 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળા અને 120° નો કેન્દ્રીય ખૂણો ધરાવતા વર્તુળના વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

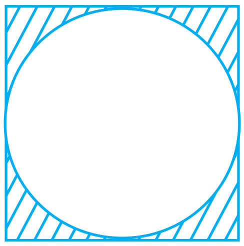
ઉકેલ : વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times (21)^2$ સેમી^{2}

$= 22 \times 21$ સેમી^{2}

$= 462$ સેમી^{2}

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 11.4 માં 7.5 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ એક ચોરસમાં અંતર્ગત છે. રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)



આકૃતિ 11.4

ઉકેલ : વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$

$= 3.14 \times (7.5)^2$ સેમી^{2}

$= 176.625$ સેમી^{2}

દેખીતી રીતે જ, ચોરસની બાજુ = વર્તુળનો વ્યાસ = 15 સેમી

તેથી, ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = 15^2 સેમી^{2} = 225 સેમી^{2}

તેથી રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ = 225 સેમી^{2} – 176.625 સેમી^{2} = 48.375 સેમી^{2}

ઉદાહરણ 4 : 36 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ 54 π સેમી^{2} છે. વૃત્તાંશને અનુરૂપ ચાપની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે કેન્દ્રીય ખૂણાનું અંશ માપ θ છે.

તેથી, $\frac{\pi \times (36)^2\,\theta}{360} = 54\,\pi$

અથવા $\theta = \frac{54 \times 360}{36 \times 36} = 15$

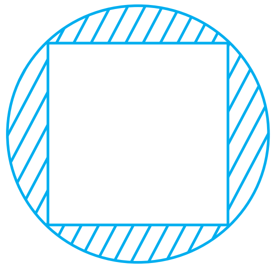
હવે, ચાપની લંબાઈ $= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$= \frac{15}{360} \times 2\pi \times 36$ સેમી

$= 3\,\pi$ સેમી

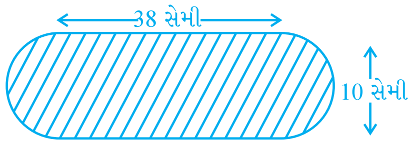
સ્વાધ્યાય 11.3

1. 15 સેમી અને 18 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળોના પરિઘના સરવાળા બરાબર જેનો પરિઘ હોય એવા વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.
2. આકૃતિ 11.5 માં, 8 સેમી વિકર્ણવાળો એક ચોરસ વર્તુળમાં અંતર્ગત છે. રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
3. 28 સેમી ત્રિજ્યા અને કેન્દ્રીય ખૂણો 45° હોય, તેવા વર્તુળના વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



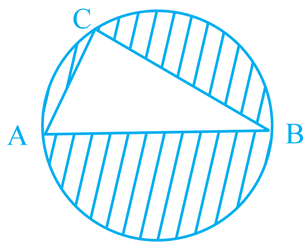
આકૃતિ 11.5

4. એક મોટરસાઈકલનાં પૈડાંની ત્રિજ્યા 35 સેમી છે. 66 કિમી પ્રતિ કલાકની ઝડપ રાખવા માટે પૈડાંએ પ્રતિ મિનિટ કેટલા પરિભ્રમણ કરવા પડે ?
5. 20 મી × 16 મી પરિમાણવાળા લંબચોરસ ખેતરના કોઈ એક ખૂણે, 14 મી લંબાઈના દોરડાથી એક ગાય બાંધેલી છે, તો ગાય ચરી શકે તેટલા ખેતરના ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
6. આકૃતિ 11.6 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ફૂલોની ક્યારી (જેના બંને છેડા અર્ધ વર્તુળાકાર છે) નું ક્ષેત્રફળ શોધો.



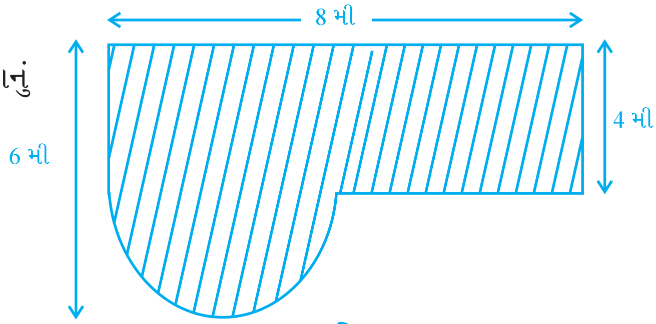
આકૃતિ 11.6

7. આકૃતિ 11.7 માં AB એ વર્તુળનો વ્યાસ છે AC = 6 સેમી અને BC = 8 સેમી છે. રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π = 3.14 લો.)



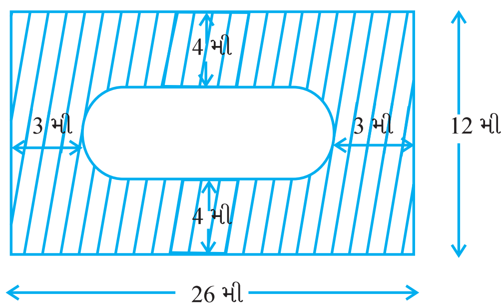
આકૃતિ 11.7

8. આકૃતિ 11.8 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 11.8

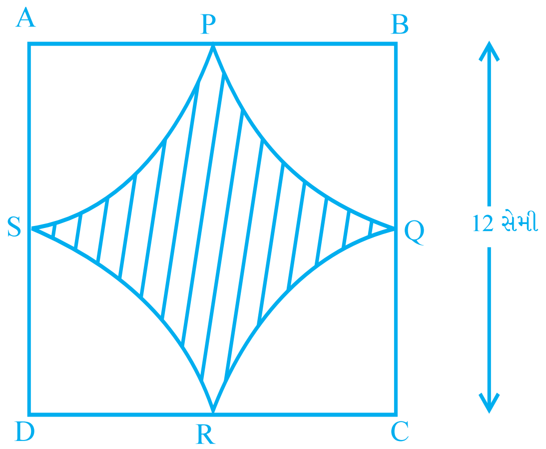
9. આકૃતિ 11.9 ના રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 11.9

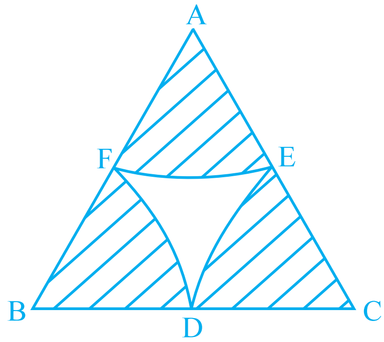
10. 14 સેમીની ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના વૃત્તાંશનો ખૂણો 60°નો હોય એવા લઘુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

11. આકૃતિ 11.10 માં રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ચોરસ ABCD ની બાજુઓ AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q, R અને S છે અને તેમને A, B, C અને D ને કેન્દ્ર ગણીને દોરેલાં ચાપ જોડીમાં છેદે છે. (π = 3.14 લો.)



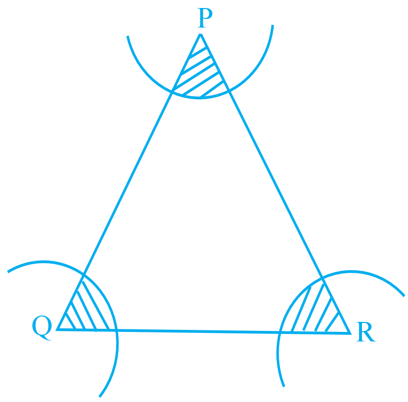
આકૃતિ 11.10

12. આકૃતિ 11.11 માં 10 સેમી બાજુવાળા સમબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ A, B અને C ને કેન્દ્ર ગણી દોરેલાં ચાપ બાજુઓ BC, CA અને AB ને અનુક્રમે D, E અને F માં છેદે છે. રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π = 3.14 લો.).



આકૃતિ 11.11

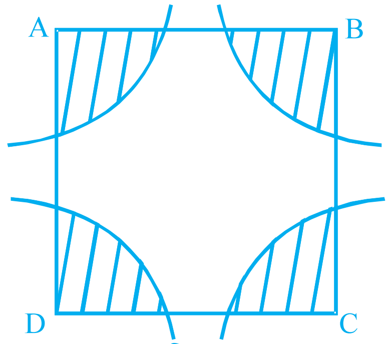
13. આકૃતિ 11.12 માં P, Q અને R ને કેન્દ્ર લઈ 14 સેમીની ત્રિજ્યાનાં ચાપ દોરેલા છે. રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 11.12

14. એક વર્તુળાકાર બગીચાની ચારે બાજુ 21 મી પહોળાઈનો એક રસ્તો આવેલો છે. જો બગીચાની ત્રિજ્યા 105 મી હોય, તો રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

15. આકૃતિ 11.13 માં ચતુષ્કોણ ABCD નાં શિરોબિંદુઓ A, B, C અને D ને કેન્દ્ર ગણી 21 સેમીની ત્રિજ્યાનાં ચાપ દોરેલા છે. રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

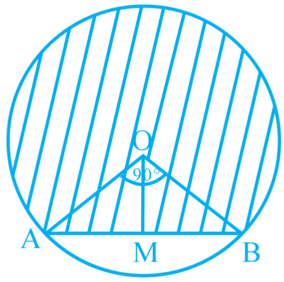


આકૃતિ 11.13

16. 20 સેમી લંબાઈના એક તારના ટુકડાને વાળીને એક વર્તુળના ચાપ-આકારમાં ફેરવવામાં આવે છે અને તે કેન્દ્ર આગળ 60° નો ખૂણો આંતરે છે, તો તે વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : 10 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની જીવા કેન્દ્ર આગળ 90° નો ખૂણો આંતરે છે. વર્તુળના અનુરૂપ ગુરુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)



આકૃતિ 11.14

ઉકેલ : ધારો કે 10 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની જીવા AB છે. તે વર્તુળનું કેન્દ્ર O છે. (આકૃતિ 11.4 જુઓ.)

અહીં, $\angle AOB = 90°$ અને આપણે ગુરુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું છે (તે રેખાંકિત છે). $\angle AOB = 90°$ હોવાથી, ગુરુવૃત્તાંશનો ખૂણો $= 360° - 90° = 270°$

તેથી, ગુરુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{270}{360} \times \pi \times (10)^2$ સેમી^{2}

$= \frac{3}{4} \times 3.14 \times 100$ સેમી^{2}

$= 75 \times 3.14$ સેમી^{2} $= 235.5$ સેમી^{2}

હવે, Δ OABનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે, $OM \perp AB$ દોરો.

તેથી, $AM = \frac{1}{2} AB$ અને $\angle AOM = \frac{1}{2} \times 90° = 45°$.

હવે, $\frac{AM}{OA} = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

તેથી, $AM = 10 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ સેમી

તેથી, $AB = 10\sqrt{2}$ સેમી અને $OM = OA \cos 45° = 10 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ સેમી $= 5\sqrt{2}$ સેમી

તેથી, Δ OABનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}$ પાયો × ઊંચાઈ

$= \frac{1}{2}\, 10\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}$ સેમી^{2} $= 50$ સેમી^{2}

તેથી, માંગેલા ગુરુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ

$= 235.5$ સેમી^{2} $+ 50$ સેમી^{2} $= 285.5$ સેમી^{2}

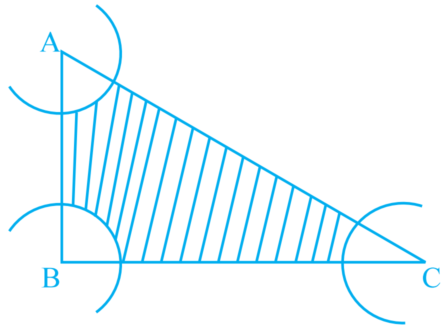
Δ OAB ના ક્ષેત્રફળ માટેની બીજી રીત

$\angle AOB = 90°$,

તેથી, Δ OABનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\, OA \times OB$

$= \frac{1}{2}\, 10 \times 10$ સેમી^{2} $= 50$ સેમી^{2}

ઉદાહરણ 2 : ત્રિકોણ ABC નાં શિરોબિંદુઓ A, B અને C ને કેન્દ્ર લઈ, આકૃતિ 11.15 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે 5 સેમી ત્રિજ્યાનાં ચાપ દોરેલા છે. જો AB = 14 સેમી, BC = 48 સેમી અને CA = 50 સેમી તો રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)



આકૃતિ 11.15

ઉકેલ : ખૂણા A વાળાં વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{\angle A}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{\angle A}{360^\circ} \times \pi \times (5)^2 \text{ સેમી}^2$$

ખૂણા B વાળાં વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{\angle B}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{\angle B}{360^\circ} \times \pi \times (5)^2 \text{ સેમી}^2$$

અને ખૂણા C વાળા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\angle C}{360^\circ} \times \pi \times (5)^2$ સેમી^{2}

તેથી, ત્રણેય વૃત્તાંશનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો (સેમી^{2}માં)

$$= \frac{\angle A}{360^\circ} \times \pi \times (5)^2 + \frac{\angle B}{360^\circ} \times \pi \times (5)^2 + \frac{\angle C}{360^\circ} \times \pi \times (5)^2$$

$$= \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{360^\circ} \times 25\,\pi$$

$$= \frac{180^\circ}{360^\circ} \times 25\,\pi \text{ સેમી}^2 \text{ (કારણ કે } \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ)$$

$$= 25 \times \frac{\pi}{2} \text{ સેમી}^2 = 25 \times 1.57 \text{ સેમી}^2 = 39.25 \text{ સેમી}^2$$

હવે, Δ ABC નું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે આપણે શોધીશું કે,

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{48+50+14}{2} \text{ સેમી} = 56 \text{ સેમી}$$

હેરોનના સૂત્ર મુજબ,

$$ar\,(\text{ABC}) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{56 \times 8 \times 6 \times 42} \text{ સેમી}^2$$

$$= 336 \text{ સેમી}^2$$

તેથી, રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ = Δ ABCનું ક્ષેત્રફળ – ત્રણ વૃત્તાંશનું કુલ ક્ષેત્રફળ

$= (336 - 39.25)$ સેમી^{2} $= 296.75$ સેમી^{2}

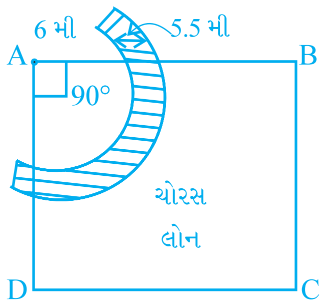
ar (ABC) માટેની બીજી રીત

અહીં, $AB^2 + BC^2 = (14)^2 + (48)^2 = 2500 = (50)^2 = (CA)^2$

તેથી, $\angle B = 90^\circ$ (પાયથાગોરસ પ્રમેયના પ્રતીપ પ્રમાણે)

તેથી, $ar\,(\text{ABC}) = \frac{1}{2} \text{AB} \times \text{BC} = \frac{1}{2} \times 14 \times 48$ સેમી^{2} $= 336$ સેમી^{2}

ઉદાહરણ 3 : 20 મી બાજુવાળા ઘાસથી આચ્છાદિત ચોરસના કોઈ એક ખૂણા પર 6 મી લંબાઈના દોરડાથી એક વાછરડું બાંધેલું છે. જો દોરડાની લંબાઈ 5.5 મી વધારવામાં આવે, તો વાછરડું ચરી શકે તેટલું વધારાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 11.16

ઉકેલ : ધારો કે, ચોરસ લૉનના કોઈ એક ખૂણા A પર વાછરડું બાંધેલું છે. (આકૃતિ 11.16 જુઓ.)

તેથી, વધેલું ક્ષેત્રફળ = બે વૃત્તાંશનો તફાવત કે જેનો કેન્દ્રીય ખૂણો 90° અને ત્રિજ્યા 11.5 મી (6 મી + 5.5 મી) અને 6 મી હોય. તે આકૃતિમાં રેખાંકિત ભાગ દ્વારા દર્શાવેલ છે.

તેથી, માંગેલું વધારાનું ક્ષેત્રફળ

$$= \left[\frac{90}{360}\times\pi\times 11.5^2 - \frac{90}{360}\times\pi\times 6^2\right] \text{ મી}^2$$

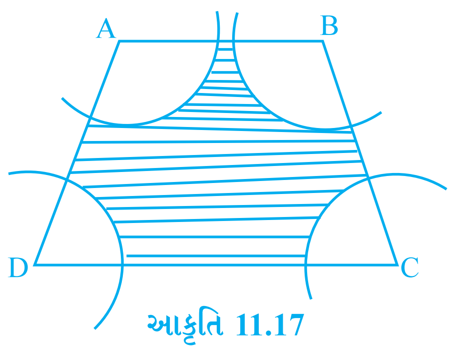
$$= \frac{\pi}{4}\times (11.5+6)\,(11.5-6) \text{ મી}^2$$

$$= \frac{22}{7\times 4}\times 17.5\times 5.5 \text{ મી}^2$$

$$= 75.625 \text{ મી}^2$$

સ્વાધ્યાય 11.4

1. એક વર્તુળાકાર રમતના મેદાનનું ક્ષેત્રફળ 22176 મી^{2} છે. આ મેદાનની ફરતે વાડ બનાવવાનો ખર્ચ પ્રતિ મીટરના ₹ 50 દરે શોધો.
2. એક ટ્રેક્ટરના આગળ અને પાછળનાં પૈડાંના વ્યાસ અનુક્રમે 80 સેમી અને 2 મી છે. જો આગળનું પૈડું 1400 પરિભ્રમણ કરે, તો તેટલું અંતર કાપવા પાછળનાં પૈડાંએ કેટલાં પરિભ્રમણ કરવા પડે ?
3. ત્રિકોણીય ખેતરની બાજુઓ 15 મી, 16 મી અને 17 મી છે. ગાય, ભેંસ અને ઘોડો તે ખેતરમાં ચરી શકે તે રીતે ખેતરના ત્રણ ખૂણાઓએ 7 મી લાંબા દોરડાથી બાંધેલા છે, આ ત્રણ પ્રાણીઓ દ્વારા ન ચરી શકાય તેવા ખેતરના ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
4. 12 સેમી ત્રિજ્યાવાળા જેને અનુરૂપ વૃત્તાંશનો કેન્દ્રીય ખૂણો 60° હોય તેવા વર્તુળના વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π = 3.14 લો.)
5. એક વર્તુળાકાર તળાવનો વ્યાસ 17.5 મી છે. તેની બહાર 2 મી પહોળાઈનો રસ્તો છે. ₹ 25 પ્રતિ મી^{2} ના દરે રસ્તાના બાંધકામનો ખર્ચ શોધો.
6. આકૃતિ 11.17 માં, ABCD સમલંબ ચતુષ્કોણ છે. AB || DC છે. AB = 18 સેમી, DC = 32 સેમી અને AB અને DC, વચ્ચેનું અંતર = 14 સેમી. જો A, B, C અને D ને કેન્દ્ર ગણીને 7 સેમી સમાન ત્રિજ્યાનાં ચાપ દોરેલાં હોય, તો આકૃતિમાં દર્શાવેલા રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 11.17

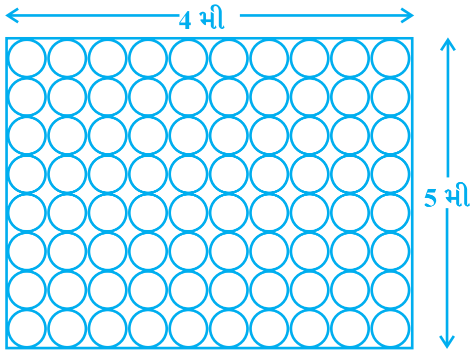
7. જે દરેકની ત્રિજ્યા 3.5 સેમી હોય તેવાં ત્રણ વર્તુળો એવી રીતે દોરેલાં છે કે દરેક બાકીના બેને સ્પર્શે. આ વર્તુળોની વચ્ચે ઘેરાતા ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

8. 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના એક વૃત્તાંશના અનુરૂપ ચાપની લંબાઈ 3.5 સેમી છે. તો આ વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

9. 7 સેમી ત્રિજ્યાના ચાર વર્તુળાકાર પૂંઠાના ટુકડાઓ એક કાગળ ઉપર એવી રીતે ગોઠવેલા છે કે જેથી દરેક ટુકડો બીજા બે ટુકડાઓને સ્પર્શે છે. આ ટુકડાઓની વચ્ચે રચાતા બંધ ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

10. જેનું ક્ષેત્રફળ 784 સેમી^{2} છે તેવા એક ચોરસ પૂંઠા પર, મહત્તમ માપની ચાર વર્તુળાકાર તકતીઓ એવી રીતે ગોઠવેલી છે કે દરેક વર્તુળાકાર તકતી બીજી બે તકતીઓને સ્પર્શે અને ચોરસ પૂંઠાની દરેક બાજુ બે વર્તુળાકાર તકતીઓનો સ્પર્શક છે. ચોરસ પૂંઠાનો જેટલો ભાગ બાકી રહે તે ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

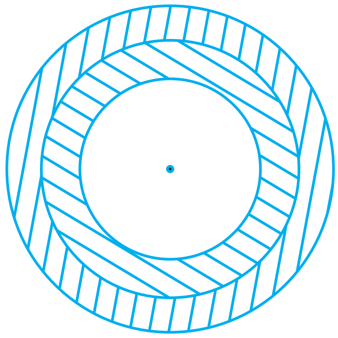
11. આકૃતિ 11.18 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, એક ઓરડાના ભોંયતળિયાનાં પરિમાણ 5 મી × 4 મી અને તેના પર 50 સેમી વ્યાસવાળી વર્તુળાકાર લાદી ઢાંકેલી છે. લાદી દ્વારા ન રોકાયેલ ભોંયતળિયાના ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)



આકૃતિ 11.18

12. એક સમબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ વર્તુળ પર છે. જો વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ 1256 સેમી^{2} હોય, તો સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

13. આકૃતિ 11.19 માં બતાવ્યા પ્રમાણે, એક તિરંદાજી નિશાનમાં ત્રણ સમકેન્દ્રીય વર્તુળોથી રચાતા ત્રણ ભાગ છે. જો સમકેન્દ્રી વર્તુળોના વ્યાસનો ગુણોત્તર 1 : 2 : 3 હોય, તો તે ત્રણેય ભાગનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

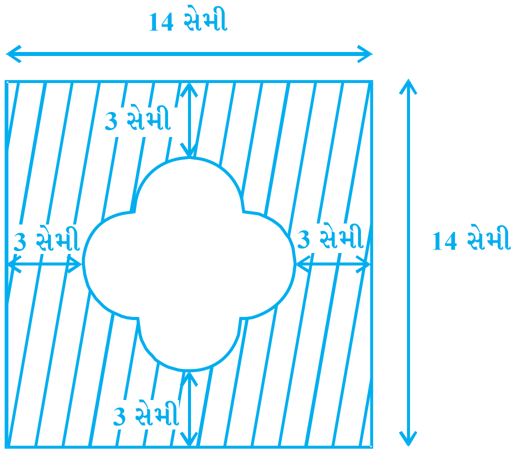

આકૃતિ 11.19

14. એક ઘડિયાળના મિનિટકાંટાની લંબાઈ 5 સેમી છે. મિનિટકાંટાએ સવારના 6:05 અને સવારના 6:40 દરમિયાન આંતરેલા ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

15. કેન્દ્રીય ખૂણો 200° હોય, તેવા વર્તુળના વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ 770 સેમી^{2} છે. આ વૃત્તાંશને અનુરૂપ ચાપની લંબાઈ શોધો.

16. 7 સેમી અને 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં વર્તુળોના બે વૃત્તાંશના કેન્દ્રીય ખૂણાઓ અનુક્રમે 120° અને 40° છે. તે બે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો અને તેને અનુરૂપ ચાપની લંબાઈ પણ શોધો. તમે શું અવલોકન કર્યું ?

17. આકૃતિ 11.20 માં રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 11.20

18. 176 મી અંતર કાપવા, 1.54 મી^{2} ક્ષેત્રફળવાળા વર્તુળાકાર પૈડાએ કરેલાં પરિભ્રમણની સંખ્યા શોધો.

19. 5 સેમી લંબાઈની જીવા, કેન્દ્ર આગળ 90° નો ખૂણો આંતરે, તો વર્તુળના બે વૃત્તખંડોનાં ક્ષેત્રફળનો તફાવત શોધો.

20. 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના 120° ના ખૂણાવાળા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ અને તેને અનુરૂપ ગુરુવૃત્તાંશના ક્ષેત્રફળનો તફાવત શોધો.