T6H8B1

അധ്യായം 12

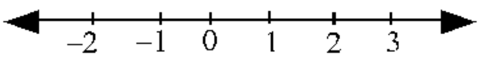
ത്രിമാന ജ്യാമിതിക്ക് ഒരു ആമുഖം (INTRODUCTION TO THREE DIMENSIONAL GEOMETRY)

❖ *ഗണിതം എല്ലാ ശാസ്ത്രങ്ങളുടേയും രാജ്ഞിയും അതേസമയം ദാസിയുമാണ് – ഇ. ടി. ബെൽ* ❖

12.1 ആമുഖം

ലിയോനാർഡ് ഓയിലർ (1707-1783)

സംഖ്യാരേഖയിൽ സംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ആധാരമായി നാം സ്വീകരിക്കാറുള്ളത് ഒരു ബിന്ദുവിനെ ആണ്. ആ ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ദൂരത്തിനനുസരിച്ചാണ് സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത്.



ഇതുപോലെ ഒരു തലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം നിർണയിക്കാൻ ആധാരമായി സ്വീകരിക്കുന്നത് പരസ്പരം ലംബങ്ങളായ രണ്ട് സംഖ്യാരേഖകളാണെന്ന് 10–ാം ക്ലാസിലെ "സൂചകസംഖ്യകൾ" എന്ന അധ്യായത്തിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. X അക്ഷമെന്നും Y അക്ഷമെന്നും വിളിക്കുന്ന ഈ രണ്ട് ലംബവരകളിൽ നിന്നുള്ള അകലങ്ങളെയാണ് ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളായി അടയാളപ്പെടുത്തിയത്.

എന്നാൽ ത്രിമാനതലത്തിൽ ഒരു ബിന്ദുവിനെ സൂചിപ്പിക്കുവാൻ ആധാരമായി രണ്ട് ലംബവരകൾ മാത്രം പോര.

ഉദാഹരണമായി, ക്ലാസ്മുറിയിൽ ഒരു പ്രത്യേക സ്ഥലത്ത് ഒരു ബൾബ് തൂക്കിയിടണമെന്ന് കരുതുക. ഇതിന്റെ സ്ഥാനം എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കാം? മുറിയുടെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ചുവരിൽ നിന്നുള്ള ദൂരം എടുത്തുകൊണ്ട് ബൾബിന്റെ സ്ഥാനം സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയുമോ? രണ്ടു ചുവരുകളിൽ നിന്നുള്ള അകലങ്ങൾ എടുത്താലോ? ഏത് രണ്ട് ചുവരുകൾ? ഇപ്പോഴും ബൾബിന്റെ സ്ഥാനത്തിന് കൃത്യത വന്നിട്ടില്ലല്ലോ? ഇനി മുറിയുടെ തറയിൽ നിന്നോ മുകൾപരപ്പിൽ നിന്നോ ഉള്ള അകലം കൂടി എടുത്താലെ ബൾബിന്റെ കൃത്യമായ സ്ഥാനം നിർണയിക്കാൻ കഴിയുകയുള്ളു.

ഇവിടെ പരിഗണിച്ച ചുവരുകൾ, തറ എന്നിവ ഗണിതഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ തലങ്ങൾ ആണ്.

അതായത്, പരസ്പരം ലംബമായ മൂന്ന് തലങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള അകലങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രിമാനതലത്തിൽ ഏതൊരു ബിന്ദുവിന്റെയും സ്ഥാനം കൃത്യമായി സൂചിപ്പിക്കാനാവും. ഒരു ദ്വിമാന തലത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തുന്ന ബിന്ദുവിന് രണ്ട് സൂചകസംഖ്യകൾ ഉള്ളപ്പോൾ ത്രിമാനതലത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തുന്ന ഓരോ ബിന്ദുവിനും മൂന്ന് സൂചകസംഖ്യകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. രണ്ടാം അധ്യായത്തിൽ പരാമർശിച്ച $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ എന്ന കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലത്തിലെ അംഗങ്ങളായ സംഖ്യാത്രയങ്ങൾ ആയിരിക്കും ഈ സൂചകസംഖ്യകൾ. ഇത്തരം സൂചകസംഖ്യകളെക്കുറിച്ചുള്ള ചില ആശയങ്ങൾ കൂടി ഈ അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യാം.

12.2 സൂചകതലങ്ങളും സൂചകാക്ഷങ്ങളും (Co-ordinate planes and Co-ordinate axes)

നേരത്തെ മനസ്സിലാക്കിയ പരസ്പരം ലംബമായ മൂന്ന് തലങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. സമാന്തരങ്ങളല്ലാത്ത രണ്ട് വരകൾ ഒരു ബിന്ദുവിലാണ് സംഗമിക്കുന്നത്. അതുപോലെ സമാന്തരങ്ങളല്ലാത്ത രണ്ട് തലങ്ങൾ സംഗമിക്കുന്നത് ഒരു വരയിലായിരിക്കും. അതായത്, പരിഗണിച്ച മൂന്ന് ലംബതലങ്ങളുടെയും സംഗമമായി ലഭിക്കുന്ന പരസ്പരം ലംബമായ, തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന മൂന്ന് വരകളാണ്, ഇവയെ അക്ഷങ്ങളായി പരിഗണിക്കാം. ഇവ മൂന്നും സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദു ആധാരബിന്ദു (origin) ആകുന്നു. ഇനി നേരത്തെ പരിഗണിച്ച അടിസ്ഥാനതലങ്ങൾക്ക് പേര് നൽകാം.

X, Y എന്നീ അക്ഷങ്ങൾ പൂർണമായും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന തലത്തെ XY തലം എന്നാണ് പറയുക. ഇതേ രീതിയിൽ YZ തലം, ZX തലം എന്നീ പേരുകൾ മറ്റ് രണ്ട് തലങ്ങൾക്കും നൽകാം. ഈ മൂന്ന് തലങ്ങളാണ് സൂചകതലങ്ങൾ.

ഇനി ഒരു സ്ഥലത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിന് സൂചകസംഖ്യകൾ എങ്ങനെയാണ് നൽകുന്നത് എന്ന് നോക്കാം.

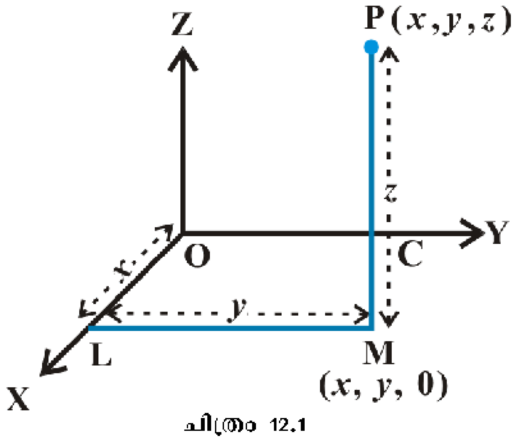
ചിത്രം 12.1 ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ P എന്ന ബിന്ദു പരിഗണിക്കുക. P യിലേക്ക് YZ തലത്തിൽ നിന്നുമുള്ള ലംബദൂരം എടുക്കുക. ഈ അകലം ഏത് അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാണ് എന്ന് നോക്കാം. YZ തലത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലം X അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാണ്. ഈ അകലത്തെ നമുക്ക് P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ x സൂചകസംഖ്യയായി പരിഗണിക്കാം.

അതായത്,

YZ തലത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലം P യുടെ x സൂചകസംഖ്യ

XZ തലത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലം P യുടെ y സൂചകസംഖ്യ

XY തലത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലം P യുടെ z സൂചകസംഖ്യ



ചിത്രം 12.1

ഉദാഹരണത്തിന് P(3, 4, 5) എന്ന ബിന്ദു സൂചകതലങ്ങളിൽ നിന്ന് എത്രവീതം അകലങ്ങളിലാണെന്ന് നോക്കാം. YZ തലത്തിൽ നിന്ന് 3, XZ തലത്തിൽ നിന്ന് 4, XY തലത്തിൽ നിന്ന് 5 യൂണിറ്റുകൾ അകലത്തിലായിരിക്കും P എന്ന ബിന്ദു.

മറ്റൊരു ബിന്ദു (3, 0, 4) ന്റെ സ്ഥാനം നോക്കാം. y സൂചകസംഖ്യ, അതായത് XZ തലത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലം 0 ആയതിനാൽ ആ ബിന്ദു XZ തലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദു ആകണമല്ലോ.

(3, 0, 0) എന്ന ബിന്ദു ഒരേ സമയം XZ തലത്തിലും XY തലത്തിലുമുള്ള ബിന്ദു ആണ്. അതിനാൽ അത് രണ്ട് തലങ്ങളുടേയും സംഗമരേഖയായ X അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദു ആയിരിക്കും.

പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ട് അക്ഷങ്ങൾ ഒരു ദ്വിമാന തലത്തെ നാല് ഭാഗങ്ങളായി തിരിക്കുമെന്ന് (ചതുർത്ഥാംശങ്ങൾ, *Quadrants*) നാം കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. പരസ്പരം ലംബമായ മൂന്ന് സൂചകതലങ്ങൾ ഈ സ്ഥലത്തെ എട്ട് ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കും. ഇവയെ അഷ്ടകാംശങ്ങൾ (*Octants*) എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്.

XOYZ, X′OYZ, X′OY′Z, XOY′Z, XOYZ′, X′OYZ′, X′OY′Z′, XOY′Z′.

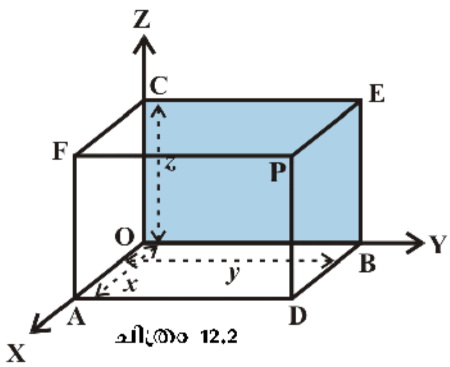
എന്നിങ്ങനെ അവയ്ക്ക് പേർ നൽകാം. ഇവയെ യഥാക്രമം 1—ാം അഷ്ടകാംശം, 2–ാം അഷ്ടകാംശം എന്നിങ്ങനേയും വിളിക്കാറുണ്ട്. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ നിന്ന് ഓരോ അഷ്ടകാംശത്തിലുള്ള സൂചകസംഖ്യകളുടെ ചിഹ്നങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാം.

അഷ്ടകാംശങ്ങൾ / സൂചകസംഖ്യകൾ	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

പട്ടിക 12.1

ഉദാഹരണം: 1

ചിത്രത്തിൽ P (2, 4, 5) ആണെങ്കിൽ A, B, C, D, E, F എന്നിവയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കാണുക.



ചിത്രം 12.2

പരിഹാരം

A(2, 0, 0), B(0, 4, 0)
C(0, 0, 5), D(2, 4, 0)
E(0, 4, 5), F(2, 0, 5)

ഉദാഹരണം: 2

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഏതു അഷ്ടകാംശത്തിലാണെന്ന് എഴുതുക.

A (–3,1, 2), B (–3, 1, – 2), C (3, 1, 2), D (–3, –1, –2)

പരിഹാരം

A (–3,1, 2) → X′OYZ അഷ്ടകാംശം (2–ാം അഷ്ടകാംശം)

B (–3, 1, – 2) → X′OYZ′ അഷ്ടകാംശം (6–ാം അഷ്ടകാംശം)

C (3, 1, 2) → XOYZ അഷ്ടകാംശം (1–ാം അഷ്ടകാംശം)

D (–3, –1, –2) → X′OY′Z അഷ്ടകാംശം (7–ാം അഷ്ടകാംശം)

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 12.1

1. x അക്ഷത്തിലുള്ള ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും y, z സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തായിരിക്കും?
2. XZ തലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ y സൂചകസംഖ്യ എന്തായിരിക്കും?

3. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഏത് അഷ്ടകാംശത്തിലാണെന്ന് നിർണ യിക്കുക.

(i) (1, 2, 3) (ii) (4, –2, 3) (iii) (4, –2, –5)

(iv) (4, 2, –5) (v) (–4, 2, –5) (vi) (–4, 2, 5)

(vii) (–3, –1, 6) (viii) (2, – 4, – 7)

4. (i) X അക്ഷത്തേയും Y അക്ഷത്തേയും പൂർണമായി ഉൾക്കൊള്ളുന്ന തലം ഏതാണ്?

(ii) XY തലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യയുടെ പൊതുരൂപം എന്ത്?

(iii) സൂചകതലങ്ങൾ ഒരു സ്ഥലത്തെ എത്ര ഭാഗങ്ങൾ ആക്കുന്നു?

12.3 രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം (Distance between two points)

(x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ദ്വിമാനതലത്തിലാകുമ്പോൾ അവ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണാൻ

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ എന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാറുണ്ടല്ലോ.

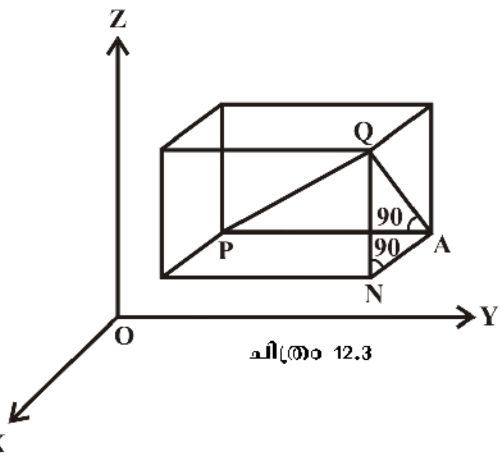
ഇതുപോലെ തന്നെ ത്രിമാനതലത്തിലെ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണാൻ

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ എന്ന സൂത്രവാക്യമുപയോഗിക്കാം

ഇതിൽ എത്തിച്ചേരുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

$P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ എന്നിവ OX, OY, OZ എന്ന പരസ്പരലംബമായസൂചക അക്ഷങ്ങൾ ഉള്ള ത്രിമാനതലത്തിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ ആണെന്ന് കരുതുക.

ചിത്രം (12.3) ൽ വരച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി സൂചകതലങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ തലങ്ങൾ സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ ഒരു സാമാന്തരിക സ്തംഭം ലഭിക്കും. ഇതിന്റെ ഒരു വികർണമാണ് PQ.



ചിത്രം 12.3

$\angle PAQ = 90^\circ$ ആയതിനാൽ

$PQ^2 = PA^2 + AQ^2$

ANQ എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$AQ^2 = AN^2 + NQ^2$

അതായത് $PQ^2 = PA^2 + AN^2 + NQ^2$

$PA = y_2 - y_1$, $AN = x_2 - x_1$ കൂടാതെ $NQ = z_2 - z_1$

$\therefore \quad PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

അതായത്, $PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഇനി (x_2, y_2, z_2) എന്ന ബിന്ദു ആധാരബിന്ദു (0, 0, 0) ആയാൽ

$PQ = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ എന്ന് കാണാം.

ഉദാഹരണം: 3

P(1, –3, 4) and Q (– 4, 1, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$$PQ = \sqrt{(-4-1)^2+(1+3)^2+(2-4)^2}$$
$$= \sqrt{25+16+4}$$
$$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ യൂണിറ്റ്}$$

ഉദാഹരണം : 4

P (–2, 3, 5), Q (1, 2, 3), R (7, 0, –1) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$PQ = \sqrt{(1+2)^2+(2-3)^2+(3-5)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$
$$QR = \sqrt{(7-1)^2+(0-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$
$$PR = \sqrt{(7+2)^2+(0-3)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{81+9+36} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$
$$PQ + QR = \sqrt{14} + 2\sqrt{14} = 3\sqrt{14} = PR$$

അതുകൊണ്ട് P, Q, R എന്നിവ സമരേഖീയമാണ്.

ഉദാഹരണം : 5

A (3, 6, 9), B (10, 20, 30), C (25, – 41, 5) എന്നിവ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ ആകുമോ? എന്തുകൊണ്ട്?

പരിഹാരം

$$\begin{aligned} AB^2 &= (10-3)^2+(20-6)^2+(30-9)^2 \\ &= 49+196+441=686 \\ BC^2 &= (25-10)^2+(-41-20)^2+(5-30)^2 \\ &= 225+3721+625=4571 \\ CA^2 &= (3-25)^2+(6+41)^2+(9-5)^2 \\ &= 484+2209+16=2709 \end{aligned}$$

അതുകൊണ്ട് $CA^2 + AB^2 \neq BC^2$. ഈ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ ആയിരിക്കില്ല.

ഉദാഹരണം : 6

A (3, 4, 5), B (–1, 3, –7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തന്നിരിക്കുന്നു, കൂടാതെ

$PA^2 + PB^2 = 2k^2$, k ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ.
എങ്കിൽ P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ x, y, z സൂചകസംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

P (x, y, z) ആണ് എന്ന് കരുതുക.

$$PA^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2$$

$$PB^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2$$

$PA^2 + PB^2 = 2k^2$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. അതായത്,

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 + (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2 = 2k^2$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 14y + 4z = 2k^2 - 109, \text{ ആയിരിക്കും}$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 12.2

1. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണ്ടെത്തുക.
   (i) (2, 3, 5) , (4, 3, 1)　　(ii) (–3, 7, 2) , (2, 4, –1)
   (iii) (–1, 3, – 4) , (1, –3, 4)　　(iv) (2, –1, 3) , (–2, 1, 3).
2. (–2, 3, 5), (1, 2, 3), (7, 0, –1) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
3. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.
   (i) (0, 7, –10), (1, 6, – 6) , (4, 9, – 6) എന്നിവ ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ ആണ്.

(ii) (0, 7, 10), (–1, 6, 6) , (– 4, 9, 6) എന്നിവ ഒരു സമപാർശ്വ മട്ടത്രികോണ ത്തിന്റെ മൂലകൾ ആണ്.

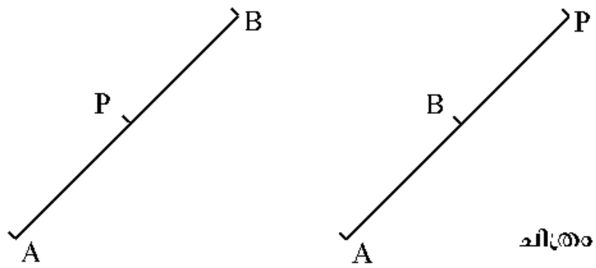
(iii) (–1, 2, 1), (1, –2, 5), (4, –7, 8) , (2, –3, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സാമാന്ത രികത്തിന്റെ മൂലകളാണ്.

4. (1, 2, 3) , (3, 2, –1) എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും എപ്പോഴും തുല്യ അകലം പാലിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

5. A (4, 0, 0), B (– 4, 0, 0) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും P എന്ന ഒരു ബിന്ദു വിലേക്കുള്ള അകലം 10 യൂണിറ്റായാൽ, P പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ഒരു കൂട്ടം ബിന്ദുക്കളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

12.4 വിഭജനസൂത്രവാക്യം (Section Formula)

ദ്വിമാനജ്യാമിതിയിൽ, രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ അതിനു ള്ളിലെ ഒരു ബിന്ദു വിഭജിക്കുന്ന അനുപാതം തന്നിരുന്നാൽ, ആ വിഭജന ബിന്ദു വിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ത്രിമാനജ്യാമിതിയിൽ ഇക്കാര്യം ചർച്ച ചെയ്യാം. ഒരു ബിന്ദു ഒരു വരയെ എങ്ങനെയൊക്കെയാണ് വിഭജി ക്കുന്നത് എന്ന് ഓർമിക്കാം.



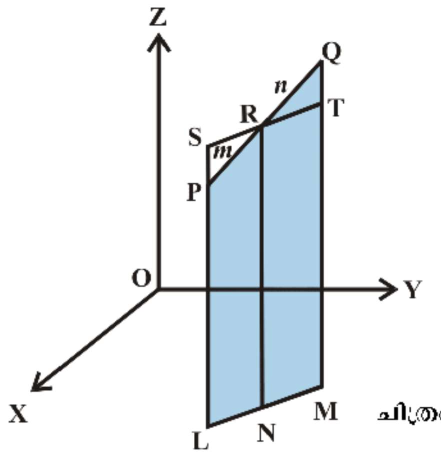
ചിത്രം 12.4

ഇതിൽ ആദ്യ ചിത്രത്തിൽ P എന്ന ബിന്ദു AB എന്ന വരയെ വിഭജിക്കുന്നത് ആന്ത രികമായാണ് (ആന്തരിക വിഭജനം). എന്നാൽ രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ P, AB യെ വിഭജിക്കുന്നത് ബാഹ്യമായാണ് (ബാഹ്യവിഭജനം).

P(x_1, y_1, z_1); Q (x_2, y_2, z_2) എന്നീ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ പരിഗണിക്കുക. R (x, y, z) എന്ന ബിന്ദു PQ എന്ന വരയെ $m : n$ ആനുപാതത്തിൽ ആന്തരികമായി വിഭജിക്കുന്നു എന്നും കരുതുക. x, y, z എന്നിവയുടെ വിലകൾ കണ്ടെത്താൻ ശ്രമിക്കാം.

P, Q, R എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്ന് ചിത്രത്തിലേതുപോലെ XY തലത്തിലേക്ക് വര യ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങൾ XY തലത്തെ യഥാക്രമം L, M, N എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡി ക്കുന്നു. PL, RN, QM എന്നിവ പരസ്പരം സമാന്തരങ്ങൾ ആയിരിക്കും.

L, M, N എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ XY തലത്തിൽ ഒരേ വരയിലായിരിക്കും.



ചിത്രം 12.5

LM എന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായി R എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ ചിത്രത്തിലേതുപോലെ ST വരയ്ക്കുക.

ST എന്ന വര LP യെ S എന്ന ബിന്ദുവിൽ ബാഹ്യമായും MQ എന്ന വരയെ T എന്ന ബിന്ദുവിൽ ആന്തരികമായും മുറിക്കുന്നുണ്ട്.

ഇവിടെ LNRS, NMTR എന്നിവ സാമന്തരികങ്ങളാണെന്ന് വ്യക്തമാണ്.

ത്രികോണം PSR, ത്രികോണം QTR എന്നിവ സദൃശത്രികോണങ്ങളാണ്.

അതുകൊണ്ട്,

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{PR}}{\text{QR}} = \frac{\text{SP}}{\text{QT}} = \frac{\text{SL} - \text{PL}}{\text{QM} - \text{TM}} = \frac{\text{NR} - \text{PL}}{\text{QM} - \text{NR}} = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$$

അതായത്, $z = \dfrac{mz_2 + nz_1}{m+n}$

ഇതുപോലെ P, Q എന്നിവയിൽ നിന്ന് XZ, YZ എന്നീ തലങ്ങളിലേക്ക് ലംബം വരച്ചാൽ

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}, \quad x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$ എന്നും ലഭിക്കുന്നു.

അതായത്,

$$\text{R} = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m + n} \right)$$

R വിഭജിക്കുന്നത് ബാഹ്യമായാണ് എങ്കിൽ,

$$R = \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}\right)$$

R എന്നത് മധ്യബിന്ദു ആണെങ്കിൽ $m : n = 1 : 1$ ആകും.

R ന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 7

A (1, –2, 3), B(3, 4, –5) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന AB എന്ന വരയെ 2 : 3 അനുപാതത്തിൽ ആന്തരികമായും ബാഹ്യമായും ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

(i) AB യെ ആന്തരികമായി 2:3 അനുപാതത്തിൽ വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദു P (*x*, *y*, *z*) ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

$$x = \frac{2(3) + 3(1)}{2+3} = \frac{9}{5}$$

$$y = \frac{2(4) + 3(-2)}{2+3} = \frac{2}{5}$$

$$z = \frac{2(-5) + 3(3)}{2+3} = \frac{-1}{5}$$

അതായത് ബിന്ദു $\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$ ആണ്.

(ii) AB യെ ബാഹ്യമായി 2 : 3 എന്ന അനുപാതത്തിൽ വിഭിജിക്കുന്ന ബിന്ദു P (*x*, *y*, *z*) ആണെങ്കിൽ

$$x = \frac{2(3) - 3(1)}{2-3} = -3$$

$$y = \frac{2(4) - 3(-2)}{2-3} = -14$$

$$z = \frac{2(-5) - 3(3)}{2-3} = 19$$

അതുകൊണ്ട് ബിന്ദു (–3, –14, 19) ആണ്

ഉദാഹരണം : 8

വിഭജനസൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് (– 4, 6, 10), (2, 4, 6), (14, 0, – 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിൽ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ A (– 4, 6, 10), B (2, 4, 6), C(14, 0, – 2) ആണെന്ന് കരുതാം.

P എന്ന ബിന്ദു AB യെ $k : 1$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു എന്ന് വിചാരിച്ചാൽ.

P എന്നത് $\left(\dfrac{2k-4}{k+1}, \dfrac{4k+6}{k+1}, \dfrac{6k+10}{k+1}\right)$

k യുടെ ഏതെങ്കിലും വിലകൾക്ക് P യ്ക്കും C യ്ക്കും ഒരേ വിലകൾ കിട്ടുന്നുണ്ടോ എന്ന് നോക്കാം.

$\dfrac{2k-4}{k+1} = 14$ എന്നെടുത്താൽ $k = -\dfrac{3}{2}$ ആണ്.

$k = -\dfrac{3}{2}$ ആകുമ്പോൾ $\quad \dfrac{4k+6}{k+1} = \dfrac{4(-\frac{3}{2})+6}{-\frac{3}{2}+1} = 0$

$$\dfrac{6k+10}{k+1} = \dfrac{6(-\frac{3}{2})+10}{-\frac{3}{2}+1} = -2$$

അതായത് C (14, 0, –2) എന്നത് AB യെ 3 : 2 എന്ന അനുപാതത്തിൽ ബാഹ്യമായി വിഭജിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദു ആണ്. അതുകൊണ്ട് A, B, C എന്നിവ ഒരേ വരയിലാണ്.

ഉദാഹരണം : 9

(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ മൂലകളായിട്ടുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രത്തിന്റെ (Centroid) സൂചകസംഖ്യകൾ എന്ത്?

പരിഹാരം

ത്രികോണം ABC എന്നിരിക്കട്ടെ. A, B, C എന്നീ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകളാണ് (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3). BC യുടെ മധ്യബിന്ദുവാണ് D.

BC യുടെ മധ്യബിന്ദു ആണല്ലോ D.

അതുകൊണ്ട്; D $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$ ആണ്.

G എന്ന ബിന്ദു, AD യെ 2 : 1 എന്ന അനുപാതത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നതിനാൽ

വിഭജനസൂത്രവാക്യപ്രകാരം G എന്നത്

$$\left(\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+x_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+y_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)+z_1}{2+1}\right)$$

അതായത്; $$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

ഉദാഹരണം : 10

(4, 8, 10), (6, 10, – 8) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര YZ തലത്തെ വിഭജിക്കുന്ന അനുപാതം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

YZ തലത്തെ ഈ വര മുറിച്ച് കടന്നു പോകുന്നത് YZ തലത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂടിയായതുകൊണ്ട് അതിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ പൂജ്യമാണ്.

$$x = \frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

അതായത്, $$0 = \frac{m\times 6+n\times 4}{m+n}$$

$$\therefore 0 = 6m + 4n$$

$$\Rightarrow 6m = -4n$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

അതായത് ഈ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര YZ തലത്തെ വിഭജിക്കുന്നത് $-2 : 3$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ ആയിരിക്കും. YZ തലം ഈ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ മുറിക്കുന്നത് ബാഹ്യമായാണ്.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 12.3

1. $(-2, 3, 5)$ $(1, -4, 6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ $2 : 3$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ (i)ആന്തരികമായും (ii) ബാഹ്യമായും വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.
2. P $(3, 2, -4)$, Q $(5, 4, -6)$, R $(9, 8, -10)$ എന്നിവ ഒരേ വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ആണ്. Q എന്ന ബിന്ദു PR നെ വിഭജിക്കുന്നത് ഏത് അനുപാതത്തിലാണെന്ന് കണ്ടെത്തുക.
3. $(-2, 4, 7)$, $(3, -5, 8)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ YZ തലം വിഭജിക്കുന്ന അനുപാതം കണ്ടുപിടിക്കുക.
4. വിഭജനസൂത്രവാക്യമുപയോഗിച്ച് A $(2, -3, 4)$, B $(-1, 2, 1)$, $C\left(0, \frac{1}{3}, 2\right)$ എന്നിവ ഒരേ വരയിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
5. P $(4, 2, -6)$, Q $(10, -16, 6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ മൂന്ന് തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 11

A $(1, 2, 3)$, B $(-1, -2, -1)$, C $(2, 3, 2)$, D $(4, 7, 6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ABCD എന്ന സാമാന്തരികത്തിന്റെ മൂലകളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. കൂടാതെ ABCD ഒരു ചതുരമല്ലെന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

ABCD ഒരു സാമാന്തരികമാണെന്ന് തെളിയിക്കുവാൻ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിച്ചാൽ മതി.

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$BC = \sqrt{(2+1)^2+(3+2)^2+(2+1)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

$$CD = \sqrt{(4-2)^2+(7-3)^2+(6-2)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$DA = \sqrt{(1-4)^2+(2-7)^2+(3-6)^2} = \sqrt{9+25+9}=\sqrt{43}$$

AB = CD, BC = AD, ആയതിനാൽ

ABCD ഒരു സാമാന്തരികമാകുന്നു.

ABCD ഒരു ചതുരമല്ല എന്ന് തെളിയിക്കുന്നതിന് വികർണങ്ങൾ AC, BD എന്നിവ തുല്യമല്ല എന്ന് തെളിയിച്ചാൽ മതി.

$$AC = \sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

$$BD = \sqrt{(4+1)^2+(7+2)^2+(6+1)^2} = \sqrt{25+81+49}=\sqrt{155}\,.$$

AC ≠ BD ആയതിനാൽ ABCD ഒരു ചതുരമല്ല.

കുറിപ്പ്

ABCD ഒരു സാമാന്തരികമാണെന്ന് തെളിയിക്കാൻ വികർണങ്ങൾ AC, BD എന്നിവ പരസ്പരസമഭാജികളാണെന്ന് തെളിയിച്ചാലും മതി.

ഉദാഹരണം 12

A (3, 4, –5), B (– 2, 1, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്ന് തുല്യ അകലത്തിലുള്ള P എന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ ഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമവാക്യമെഴുതുക.

പരിഹാരം

PA = PB ആകുന്ന ഒരു ബിന്ദു P (x, y, z) എന്ന ആണ്.

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2}$$

അതായത്, $(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2 = (x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2$

$$10x+6y-18z-29=0.$$

ഉദാഹരണം 13

A (3, –5, 7) B (–1, 7, – 6) എന്നിവ രണ്ടു മൂലകളായ ത്രികോണം ABC യുടെ മധ്യമകേന്ദ്രം (1, 1, 1) ആയാൽ C എന്ന മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകളെഴുതുക.

പരിഹാരം

C യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y, z) എന്നിരിക്കട്ടെ. മധ്യമകേന്ദ്രം (1, 1, 1) ആയതിനാൽ

$$\frac{x+3-1}{3}=1,\quad \frac{y-5+7}{3}=1,\quad \frac{z+7-6}{3}=1,$$

അതായത് $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$.

ആയതിനാൽ C യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (1, 1, 2).

കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. സാമാന്തരികം ABCD യുടെ മൂന്നു മൂലകൾ യഥാക്രമം A(3, – 1, 2), B (1, 2, – 4), C (– 1, 1, 2) ആയാൽ നാലാമത്തെ മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകളെഴുതുക.

2. (0, 0, 6), B (0,4, 0), (6, 0, 0) എന്നിവ മൂലകളായ ത്രികോണം ABC യുടെ മധ്യമങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

3. ആധാരബിന്ദു മധ്യമകേന്ദ്രമാകുന്ന ത്രികോണം PQR ന്റെ മൂലകൾ യഥാക്രമം P $(2a, 2, 6)$, Q $(-4, 3b, -10)$, R$(8, 14, 2c)$ ആയാൽ a, b, c യുടെ വില കണക്കാക്കുക.

4. P (3, –2, 5) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $5\sqrt{2}$ യൂണിറ്റ് അകലത്തിൽ y അക്ഷത്തിലുള്ള ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളെഴുതുക.

5. P(2, –3, 4), Q (8, 0, 10) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ബിന്ദുവായ R ന്റെ x സൂചകസംഖ്യ 4 ആയാൽ R ന്റെ മറ്റു സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

   (സൂചന : PQ വിനെ R വിഭജിക്കുന്ന അംശബന്ധം $k : 1$ ആയാൽ, R ന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(\frac{8k+2}{k+1}, \frac{-3}{k+1}, \frac{10k+4}{k+1}\right)$ ആയിരിക്കും)

6. A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം (3, 4, 5), (–1, 3, –7) ആകുന്നു. $PA^2 + PB^2 = k^2$, (k ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ) ആകുന്ന P എന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ ഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമവാക്യമെഴുതുക.

സംഗ്രഹം

- ത്രിമാനജ്യാമിതിയിൽ സൂചക അക്ഷങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബങ്ങളായ മൂന്നു വരകളാണ്. വരകളെ x, y, z അക്ഷങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.
- ഓരോ ജോടി അക്ഷങ്ങൾ നിർണയിക്കുന്ന സൂചകതലങ്ങൾ XY, YZ, ZX തലങ്ങളെന്നു പറയുന്നു.
- സൂചകതലങ്ങൾ സ്പെയിസിനെ എട്ട് ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു. ഈ ഭാഗങ്ങളെ അഷ്ടകാംശങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.
- ത്രിമാനതലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു P യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y, z) എന്ന സംഖ്യാത്രയം ഉപയോഗിച്ച് എഴുതുന്നു. ഇവിടെ x, y, z, യഥാക്രമം YZ, ZX, XY എന്നീ തലങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള അകലങ്ങളാണ്.
- (i) x അക്ഷത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(x, 0, 0)$ എന്ന രൂപത്തിലായിരിക്കും.

  (ii) y അക്ഷത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(0, y, 0)$ എന്ന രൂപത്തിലായിരിക്കും.

  (iii) z അക്ഷത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(0, 0, z)$ എന്ന രൂപത്തിലായിരിക്കും.
- $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം

  $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
- $P(x_1\ y_1\ z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച വരയെ R എന്ന ബിന്ദു $m : n$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിച്ചാൽ R ന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ

  i. $\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}, \dfrac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$, ആന്തരികവിഭജനം

  ii. $\left(\dfrac{mx_2 - nx_1}{m\quad n}, \dfrac{my_2 - ny_1}{m\quad n}, \dfrac{mz_2 - nz_1}{m\quad n}\right)$, ബാഹ്യവിഭജനം ആയിരിക്കും.

- $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ ആയിരിക്കും.
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) എന്നിവ ആയാൽ അതിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$ ആയിരിക്കും.

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

വിശ്ലേഷണജ്യാമിതിയുടെ പിതാവ് എന്നറിയപ്പെടുന്ന റെനെ ഡെക്കാർത്തേ (1596 – 1650) 1637 ൽ മാത്രമാണ് ദ്വിമാന ജ്യാമിതിയെക്കുറിച്ച് പ്രതിപാദിച്ചത്. ഈ പ്രസ്താവം അദ്ദേഹത്തിന്റെ സഹപ്രവർത്തകൻ പിയറെ ഫെർമ (1601 – 1665) യുടെയും ലാഹയറെയുടെയും (1640 – 1718) കാര്യത്തിൽ ശരിയാണ്. അവരുടെ സംഭാവനയിൽ ത്രിമാന ജ്യാമിതിയുടെ സൂചനകൾ ഉണ്ടായിരുന്നെങ്കിലും വിശദാംശങ്ങൾ ഇല്ലായിരുന്നു. ഡെകാർത്തേക്കും ത്രിമാന ജ്യാമിതിയുടെ ആശയങ്ങൾ ഉണ്ടായിരുന്നെങ്കിലും അതിനെ വികസിപ്പിച്ചിരുന്നില്ല. ഇന്ന് നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന ത്രിമാന സൂചകതലങ്ങളെക്കുറിച്ച് 1715 ൽ ലബനീസിന് ജെ. ബർനോലി (1667 – 1716) കത്തെഴുതി വിശ്ലേഷണ ത്രിമാന ജ്യാമിതിയെ ചിട്ടയായി വികസിപ്പിച്ചതും ഫ്രഞ്ച് അക്കാദമിയിൽ ആദ്യമായി അവതരിപ്പിച്ചതും 1748 ൽ എൽ.ഓയ്ലർ (1707 – 1783) തന്റെ "Introduction to Geometry" എന്ന പുസ്തകത്തിലെ രണ്ടാം വാല്യത്തിലെ 5–ാം അധ്യായത്തിൽ അനുബന്ധമായി ത്രിമാന ജ്യാമിതിയെ കുറിച്ച് ചിട്ടയായി പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുണ്ട്. 19–ാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ രണ്ടാം പകുതിയിൽ മാത്രമാണ് മൂന്നിൽ കൂടുതൽ മാനങ്ങളിലേക്ക് ജ്യാമിതിയെ വിപുലപ്പെടുത്തിയത്. ഐൻസ്റ്റൈന്റെ ആപേക്ഷികതാസിദ്ധാന്തത്തിലെ Space-Time Continuum ത്തിലാണ് ഇതിന്റെ പ്രായോഗികതയുടെ പ്രസിദ്ധമായ ഉദാഹരണം രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ളത്.