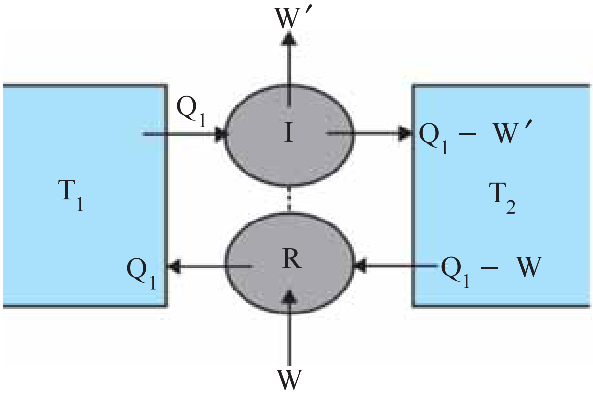
કે જો R એન્જિન તરીકે કાર્ય કરવાનું હોય, તો તે I કરતાં ઓછું કાર્ય ઊપજ (output) આપશે, જેથી આપેલ Q_1 માટે $W < W'$. R રેફ્રિજરેટર તરીકે કાર્ય કરતું હોવાથી, પરિણામ સ્વરૂપે $Q_2 = Q_1 - W > Q_1 - W'$. આમ, બધું મળીને ઉષ્મા પ્રાપ્તિસ્થાન કે બીજે ક્યાંય કોઈ પણ ફેરફાર વગર $I - R$નું જોડેલ તંત્ર ઠંડા પરિસરમાંથી $(Q_1 - W) - (Q_1 - W') = (W' - W)$ ઉષ્મા મેળવશે અને તેટલું જ કાર્ય એક ચક્ર દરમિયાન આપશે. આ સ્પષ્ટ પણે કૅલ્વિન-પ્લાન્કના કથન મુજબ થરમૉડાયનેમિક્સના બીજા નિયમનું ઉલ્લંઘન કરે છે. આથી એવું વિધાન કે $\eta_I > \eta_R$ ખોટું છે. કોઈ પણ એન્જિનની કાર્યક્ષમતા કાર્નોટ એન્જિન કરતા વધુ



***આકૃતિ* 12.12** *અપ્રતિવર્તી એન્જિન (I)નું પ્રતિવર્તી રેફ્રિજરેટર (R) સાથે જોડાણ. જો $W' > W$, તો $W' - W$ જેટલી ઉષ્માનું ઠારણ વ્યવસ્થામાંથી શોષણ થશે અને તે સંપૂર્ણપણે કાર્યમાં રૂપાંતરિત થશે, જે થરમૉડાયનેમિક્સના બીજા નિયમનું ઉલ્લંઘન છે.*

ન હોઈ શકે. આવું જ એક બીજું વિધાન કરી શકાય, જે દર્શાવે કે એક ચોક્કસ પદાર્થનો ઉપયોગ કરતું પ્રતિવર્તી એન્જિન, બીજા પદાર્થનો ઉપયોગ કરતા એન્જિન કરતાં વધુ કાર્યક્ષમ ન હોઈ શકે. સમીકરણ (12.32) દ્વારા દર્શાવેલી કાર્નોટ એન્જિનની મહત્તમ કાર્યક્ષમતા કાર્નોટ ચક્રની પ્રક્રિયાઓ કરતા તંત્રની પ્રકૃતિથી સ્વતંત્ર હોય છે. આમ, કાર્નોટ એન્જિનની કાર્યક્ષમતા ηની ગણતરીમાં આદર્શ વાયુને તંત્ર તરીકે લેવામાં આપણે બરોબર સાબિત થયા છીએ. આદર્શ વાયુનું અવસ્થા સમીકરણ સરળ છે, જે આપણને ηની ગણતરીમાં મદદરૂપ થાય છે, પરંતુ ηનું અંતિમ પરિણામ [સમીકરણ (12.32)] એ કોઈ પણ કાર્નોટ એન્જિન માટે સત્ય છે.

આ અંતિમ સૂચન દર્શાવે છે કે કાર્નોટ ચક્રમાં,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad (12.33)$$

એ તંત્રની પ્રકૃતિથી સ્વતંત્ર સાર્વત્રિક સમીકરણ છે. અહીંયાં Q_1 અને Q_2 અનુક્રમે કાર્નોટ એન્જિનમાં સમતાપી રીતે શોષાયેલી અને મુક્ત (વ્યય) થયેલી (ગરમમાંથી અને ઠંડા પરિસરમાંથી) ઉષ્મા છે. આથી, સમીકરણ (12.33)નો ઉપયોગ સાચા સાર્વત્રિક થરમૉડાયનેમિક તાપમાન માપક્રમ, કે જે કાર્નોટ ચક્રમાં ઉપયોગ કરેલ તંત્રના ચોક્કસ ગુણધર્મોથી સ્વતંત્ર હોય, તેને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે થઈ શકે. અલબત્ત, કાર્યકારી પદાર્થ તરીકે આદર્શ વાયુ હોય, તો આ સાર્વત્રિક તાપમાન એ પરિચ્છેદ 12.11માં દર્શાવેલ આદર્શ વાયુના તાપમાન જેટલું જ હોય.

સારાંશ

1. થરમૉડાયનેમિક્સનો શૂન્ય ક્રમનો નિયમ દર્શાવે છે કે *બે તંત્ર ત્રીજા તંત્ર સાથે તાપીય સંતુલનમાં હોય તો તે બંને પણ એકબીજા સાથે તાપીય સંતુલનમાં હોય.* શૂન્ય ક્રમનો નિયમ તાપમાનના ખ્યાલ તરફ દોરી જાય છે.

2. તંત્રની આંતરિક ઊર્જા તંત્રના આણ્વીક ઘટકોની ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જાઓના સરવાળા જેટલી હોય છે. તે તંત્રની સમગ્રપણે ગતિઊર્જાને નથી સમાવતી. ઉષ્મા અને કાર્ય એ તંત્રમાં ઊર્જા વિનિમયના બે પ્રકાર છે : તંત્ર અને પરિસર વચ્ચે તાપમાનના તફાવતના કારણે થતો ઊર્જાનો વિનિમય એ ઉષ્મા છે. કાર્ય એ બીજી રીતે થતો ઊર્જાનો વિનિમય છે. જેમકે, વાયુ ધરાવતા નળાકાર પાત્રમાં પિસ્ટન સાથે લગાડેલા વજનમાં વધારો કે ઘટાડો કરીને તેના સ્થાનમાં ફેરફાર કરવો.

3. થરમૉડાયનેમિક્સનો પહેલો નિયમ એ ઊર્જા-સંરક્ષણનો સામાન્ય નિયમ છે જે કોઈ પણ તંત્ર કે જેમાંથી અથવા જેના તરફ પરિસરમાંથી (ઉષ્મા કે કાર્ય દ્વારા) ઊર્જાનો વિનિમય થતો હોય. તે દર્શાવે છે કે,

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

જ્યાં, ΔQ એ તંત્રને આપેલી ઉષ્મા છે. ΔW એ તંત્ર વડે થયેલું કાર્ય અને ΔU એ તંત્રની આંતરીક ઊર્જામાં થતો ફેરફાર છે.

4. પદાર્થની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા, વ્યાખ્યા મુજબ

$$s = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

જ્યાં m એ પદાર્થનું દળ અને ΔQ એ તેનું તાપમાન ΔT જેટલું બદલવા માટે જરૂરી ઉષ્મા છે. પદાર્થની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા વ્યાખ્યા મુજબ,

$$C = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

જ્યાં, μ એ પદાર્થના મોલની સંખ્યા છે. ઘન પદાર્થ માટે, ઊર્જા સમવિભાજનના નિયમ મુજબ

$$C = 3\ R$$

જે સામાન્ય તાપમાને પ્રયોગો સાથે લગભગ મળતું આવે છે. ઉષ્માનો જૂનો એકમ કૅલરી છે. 1 g પાણીનું તાપમાન 14.5 °C થી 15.5 °C સુધી વધારવા માટે જરૂરી ઉષ્માને 1 કૅલરી કહે છે. 1 cal = 4.186 J.

5. આદર્શ વાયુ માટે અચળ દબાણ અને કદે મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા ઘનતાઓ,

$$C_p - C_v = R$$

સમીકરણનું સમાધાન કરે છે, જ્યાં R એ સાર્વત્રિક વાયુ-નિયતાંક છે.

6. થરમૉડાયનેમિક તંત્રની સંતુલન અવસ્થાઓને અવસ્થા ચલરાશિઓ વડે દર્શાવી શકાય છે. અવસ્થા ચલરાશિનું મૂલ્ય ફક્ત તેની ચોક્કસ અવસ્થા પર આધાર રાખે છે. આ અવસ્થા સુધી આવવા માટે તેણે લીધેલા માર્ગ પર નહિ. દબાણ (P), કદ (V), તાપમાન (T) અને દળ (m) એ અવસ્થા ચલરાશિઓનાં ઉદાહરણો છે. ઉષ્મા અને કાર્ય-અવસ્થા ચલરાશિઓ નથી. અવસ્થા સમીકરણ (જેમકે, વાયુનું અવસ્થા સમીકરણ $PV = \mu RT$) એ જુદી જુદી અવસ્થા ચલરાશિઓને સાંકળતું સમીકરણ છે.

7. ક્વૉસાઇ-સ્ટેટિક પ્રક્રિયા એટલી બધી ધીમી હોય છે કે જેથી સમગ્ર પ્રક્રિયા દરમિયાન તંત્ર-પરિસર સાથે તાપીય અને યાંત્રિક સંતુલનમાં રહે છે. ક્વૉસાઇ-સ્ટેટિક પ્રક્રિયામાં, પરિસરના દબાણ અને તાપમાન તંત્ર કરતાં નહિવત્ પ્રમાણમાં જ જુદાં હોય છે.

8. T તાપમાને આદર્શ વાયુના કદ V_1 થી V_2 સુધીના સમતાપી વિસ્તરણ દરમિયાન શોષાયેલી ઉષ્મા (Q), વાયુ વડે થયેલા કાર્ય (W) જેટલી હોય છે, જે આ સમીકરણ વડે અપાય છે.

$$Q = W = \mu RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

9. આદર્શ વાયુ માટે સમોષ્મી પ્રક્રિયા દરમિયાન

PV^{γ} = અચળ

જ્યાં, $$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

આદર્શ વાયુ દ્વારા અવસ્થા (P_1, V_1, T_1)થી (P_2, V_2, T_2) સુધીના સમોષ્મી ફેરફાર દરમિયાન થયેલ કાર્ય,

$$W = \frac{\mu R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}$$

10. હીટ એન્જિન એવું સાધન છે કે જેમાં તંત્ર ચક્રીય પ્રક્રિયા દરમિયાન ઉષ્માનું કાર્યમાં રૂપાંતર કરે છે. જો ઉષ્મા પ્રાપ્તિસ્થાન (source)માંથી શોષેલ ઉષ્મા Q_1 હોય, ઠારણ વ્યવસ્થા (sink)માં મુક્ત (વ્યય) કરેલ ઉષ્મા Q_2 હોય અને એક ચક્ર દરમિયાન થયેલ કાર્ય W હોય, તો

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

11. રેફ્રિજરેટર કે હીટ પંપમાં તંત્ર ઠારણ-વ્યવસ્થામાંથી ઉષ્મા Q_1 શોષે છે અને Q_2 જેટલી ઉષ્મા ગરમ પરિસરમાં મુક્ત કરે છે, જ્યારે તંત્ર પર થયેલું કાર્ય W હોય છે. રેફ્રિજરેટરનો પરફોર્મન્સ ગુણાંક આ રીતે મળે છે

$$\alpha = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

12. થરમૉડાયનેમિક્સના પહેલા નિયમ સાથે સુસંગત કેટલીક પ્રક્રિયાઓને થરમૉડાયનેમિક્સનો બીજો નિયમ સમર્થન આપતો નથી. તેનાં વિધાનો :

કૅલ્વિન-પ્લાન્કનું વિધાન

એવી કોઈ પ્રક્રિયા શક્ય નથી કે જેના એકમાત્ર પરિણામરૂપે પરિસરમાંથી ઉષ્મા શોષાય અને બધી જ ઉષ્માનું કાર્યમાં રૂપાંતર થાય.

ક્લૉસિયસનું વિધાન

એવી કોઈ પ્રક્રિયા શક્ય નથી કે જેના એકમાત્ર પરિણામરૂપે આપોઆપ (જાતે) ઉષ્માનું ઠંડા પદાર્થથી ગરમ પદાર્થ તરફ વહન થાય. સાદી ભાષામાં, બીજા નિયમનો મતલબ એ કે કોઈ પણ હીટ એન્જિનની કાર્યક્ષમતા ηનું મૂલ્ય 1 જેટલું ન હોઈ શકે અને કોઈ પણ રેફ્રિજરેટરનો પરફોર્મન્સ ગુણાંક α અનંત ન હોઈ શકે.

13. જો તંત્ર અને પરિસર તેમની પ્રારંભિક અવસ્થાઓ સુધી બહારના વિશ્વમાં કોઈ પણ ફેરફાર વગર પાછા આવી શકે તો તે પ્રક્રિયા પ્રતિવર્તી કહેવાય. કુદરતમાં સ્વૈચ્છિક (આપોઆપ) થતી પ્રક્રિયાઓ અપ્રતિવર્તી હોય છે. આદર્શરૂપ પ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા એ ક્વૉસાઇ-સ્ટેટિક પ્રક્રિયા છે, જેમાં ઘર્ષણ, શ્યાનતા વગેરે ઊર્જા-વ્યયનાં પરિબળો હોતાં નથી.

14. કાર્નોટ એન્જિન એ બે તાપમાનો T_1 (ઉષ્મા પ્રાપ્તિસ્થાન - source) અને T_2 (ઠારણ-વ્યવસ્થા - sink) વચ્ચે કાર્ય કરતું પ્રતિવર્તી એન્જિન છે. કાર્નોટ ચક્ર બે સમતાપી પ્રક્રિયાઓ અને બે સમોષ્મી પ્રક્રિયાઓના જોડાણથી પૂર્ણ થાય છે. કાર્નોટ એન્જિનની કાર્યક્ષમતા

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \qquad \text{(કાર્નોટ એન્જિન)}$$

વડે દર્શાવાય છે.

બે તાપમાનો વચ્ચે કાર્ય કરતા કોઈ પણ એન્જિનની કાર્યક્ષમતા કાર્નોટ એન્જિન કરતાં વધુ ન હોઈ શકે.

15. જો $Q > 0$ તંત્રમાં ઉષ્મા આવે છે.
જો $Q < 0$ તંત્ર ઉષ્મા ગુમાવે છે.
જો $W > 0$ તંત્ર વડે કાર્ય થાય છે.
જો $W < 0$ તંત્ર પર કાર્ય થાય છે.

જથ્થો	સંજ્ઞા	પરિમાણ	એકમ	નોંધ
કદ-પ્રસરણાંક	α_v	$[K^{-1}]$	K^{-1}	$\alpha_v = 3\alpha_l$
તંત્રને આપેલી ઉષ્મા	ΔQ	$[ML^2T^{-2}]$	J	Q એ અવસ્થા ચલ નથી.
વિશિષ્ટ ઉષ્મા	s	$[L^2T^{-2}K^{-1}]$	$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$	
ઉષ્માવાહકતા (Thermal Conductivity)	K	$[MLT^{-3}K^{-1}]$	$J\ s^{-1}K^{-1}$	$H = -KA\frac{dt}{dx}$

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ (Point to Ponder)

1. પદાર્થનું તાપમાન તેની આંતરિક ઊર્જા સાથે સંકળાયેલું હોય છે; તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિની ગતિઊર્જા સાથે નહિ. બંદૂકમાંથી છૂટેલી ગોળી (બુલિટ) તેની ઝડપના કારણે ઊંચા તાપમાને નથી હોતી.
2. થરમૉડાયનેમિક્સમાં સંતુલનનો મતલબ એ કે જે પરિસ્થિતિમાં તંત્રની થરમૉડાયનેમિક અવસ્થા દર્શાવતી ચલરાશિઓ સમય પર આધારિત ન હોય. યંત્રશાસ્ત્રમાં સંતુલનનો મતલબ એ કે તંત્ર પર લાગતું કુલ (ચોખ્ખું) બળ અને ટૉર્ક શૂન્ય હોય.
3. થરમૉડાયનેમિક સંતુલનની અવસ્થામાં તંત્રનાં સૂક્ષ્મ (microscopic) ઘટકો (કણો) સંતુલિત સ્થિતિમાં (યંત્રશાસ્ત્રની ભાષામાં) હોતાં નથી.
4. જ્યારે તંત્રને ઉષ્મા આપવામાં આવે ત્યારે તંત્ર કઈ પ્રક્રિયામાંથી પસાર થાય છે તેના પર મોટા ભાગે ઉષ્માધારિતા આધાર રાખે છે.
5. સમતાપી ક્વૉસાઇ-સ્ટેટિક પ્રક્રિયામાં વાયુનું તાપમાન બહારના પરિસર જેટલું હોય તોપણ તંત્રની દરેક અવસ્થામાં ઉષ્મા કાં તો શોષાય છે કે તંત્રમાંથી મુક્ત થાય છે. તંત્ર અને પરિસર વચ્ચેના અતિસૂક્ષ્મ તાપમાનના તફાવતના કારણે આમ થતું હોય છે.

સ્વાધ્યાય

12.1 એક મિનિટમાં 3.0 લિટરના દરથી પસાર થતા પાણીને ગિઝર 27 °C થી 77 °C સુધી ગરમ કરે છે. જો ગિઝર, ગૅસ બર્નર પર કાર્ય કરતું હોય અને બળતણ (combustion) ઉષ્મા 4.0×10^4 J/g હોય, તો બળતણના વપરાશનો દર કેટલો હશે ?

12.2 અચળ દબાણે રહેલા 2.0×10^{-2} kg નાઇટ્રોજન (ઓરડાના તાપમાને)નું તાપમાન 45 °C જેટલું વધારવા માટે કેટલી ઉષ્મા આપવી પડશે ? (N_2નો અણુભાર = 28 ; R = 8.3 J mol^{-1} K^{-1})

12.3 સમજાવો :

(a) T_1 અને T_2 તાપમાન ધરાવતા બે પદાર્થોને તાપીય સંપર્કમાં લાવતાં તેમનું સરેરાશ તાપમાન $(T_1 + T_2)/2$ હોવું જરૂરી નથી.

(b) રાસાયણિક કે ન્યુક્લિઅર પ્લાન્ટમાં રહેલા કુલન્ટ (એટલે કે પ્લાન્ટના જુદા જુદા ભાગને અતિશય ગરમ થતાં રોકે તેવું પ્રવાહી)ની વિશિષ્ટ ઉષ્મા વધુ હોવી જોઈએ.

(c) કાર ચલાવતી વખતે તેના ટાયરમાં દબાણ વધે છે.

(d) દરિયાકિનારે આવેલ બંદરનું (Harbour) વાતાવરણ સમાન અક્ષાંશ ધરાવતા જંગલમાં આવેલા શહેર કરતાં ગરમ (ઉષ્ણ) હોય છે.

12.4 ખસી શકે તેવો પિસ્ટન ધરાવતા એક નળાકાર પાત્રમાં પ્રમાણભૂત તાપમાન અને દબાણે 3 મોલ હાઇડ્રોજન રહેલો છે. નળાકાર પાત્રની દીવાલો ઉષ્મા અવાહક પદાર્થની બનેલી છે અને પિસ્ટન પર રેતીનો ઢગલો કરીને અવાહક બનાવ્યો છે. જો વાયુને તેના કદ કરતાં અડધા કદ સુધી સંકોચિત કરવામાં આવે તો વાયુનું દબાણ કેટલા પ્રમાણમાં બદલાશે ?

12.5 એક વાયુને સંતુલિત અવસ્થા A થી સમોષ્મી રીતે સંતુલિત અવસ્થા B સુધી લઈ જવા માટે, તંત્ર પર થયેલ કાર્ય 22.3 J જેટલું છે. જો તંત્રને A થી B સ્થિતિ સુધી એવી રીતે લઈ જવામાં આવે કે જેથી તેમાં શોષાયેલી ચોખ્ખી ઉષ્મા 9.35 કૅલરી હોય, તો બીજા કિસ્સામાં તંત્ર વડે કેટલું ચોખ્ખું કાર્ય થયું હશે ? (1 કૅલરી = 4.19 J લો.)

12.6 એકસરખી ક્ષમતા ધરાવતાં બે નળાકાર પાત્રો A અને Bને એકબીજાં સાથે સ્ટૉપકૉક (બંધ કરી શકાય તેવા કૉક) વડે જોડેલા છે. Aમાં વાયુ પ્રમાણભૂત તાપમાન અને દબાણે રહેલો છે. B સંપૂર્ણ રીતે ખાલી (evacuated) છે. આખું તંત્ર તાપીય રીતે અલિપ્ત (અલગ) કરેલું છે. સ્ટૉપકૉકને અચાનક ખોલવામાં આવે છે. નીચેનાના જવાબ આપો :

(a) A અને Bમાં અંતિમ દબાણ કેટલું હશે ?

(b) વાયુની આંતરિક ઊર્જામાં કેટલો ફેરફાર થયો હશે ?

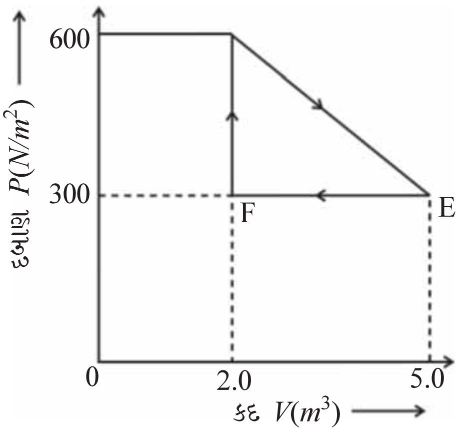
(c) વાયુના તાપમાનમાં કેટલો ફેરફાર થયો હશે ?

(d) શું તંત્રની વચ્ચેની અવસ્થાઓ (અંતિમ સંતુલિત અવસ્થામાં સ્થિર થતાં પહેલાં) તેના P - V - T સપાટી પર હશે ?

12.7 એક વરાળયંત્ર એક મિનિટમાં 5.4×10^8 J કાર્ય આપે છે અને તેના બોઇલરમાંથી એક મિનિટમાં 3.6×10^9 J ઉષ્મા પૂરી પાડે છે. એન્જિનની કાર્યક્ષમતા કેટલી હશે ? એક મિનિટમાં કેટલી ઉષ્મા વેડફાતી હશે ?

12.8 એક ઇલેક્ટ્રિક હીટર, તંત્રને 100 *W*ના દરથી ઉષ્મા પૂરી પાડે છે. જો તંત્ર એક સેકન્ડમાં 75 જૂલના દરથી કાર્ય કરતું હોય, તો તેની આંતરિક ઊર્જાનો વધવાનો દર કેટલો હશે ?

12.9 આકૃતિ 12.13માં દર્શાવ્યા મુજબ એક થરમૉડાયનેમિક તંત્રને તેની પ્રારંભિક અવસ્થાથી વચગાળાની (intermediate) અવસ્થા સુધી રેખીય પ્રક્રિયા દ્વારા લઈ જવામાં આવે છે.



આકૃતિ **12.13**

ત્યાર બાદ તેનું કદ E થી F સુધી સમદાબ પ્રક્રિયા દ્વારા ઘટાડીને મૂળ મૂલ્ય સુધી લાવવામાં આવે છે. વાયુ દ્વારા D થી Eથી F સુધીમાં થયેલ કુલ કાર્ય ગણો.

12.10 એક રેફ્રિજરેટરમાં રાખેલ ખોરાકને 9 °C તાપમાને સાચવવાનો છે. જો ઓરડાનું તાપમાન 36 °C હોય, તો પરફૉર્મન્સ-ગુણાંક (કાર્ય સિદ્ધિ ગુણાંક) શોધો.

પ્રકરણ 13

ગતિવાદ (KINETIC THEORY)

13.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

1661માં બૉઇલે એક નિયમ શોધ્યો જેને તેનું નામ આપવામાં આવ્યું છે. વાયુઓ નાના પરમાણ્વીક કણોના બનેલા છે તેવું માનીને બૉઇલ, ન્યૂટન અને બીજા ઘણાએ વાયુઓની વર્તણૂક સમજાવવા પ્રયત્ન કર્યો હતો. ત્યાર બાદ 150 વર્ષ પછી સાચો અણુવાદ સ્થાપિત થયો. ગતિવાદમાં વાયુઓની વર્તણૂક, વાયુ એ ઝડપથી ગતિ કરતા પરમાણુઓ અને અણુઓનો બનેલો છે તેવા અનુમાનના આધારે સમજાવવામાં આવે છે. આ એટલા માટે શક્ય છે કે, પરમાણુઓ વચ્ચેનાં આંતરિક બળો, જે ઘન તથા પ્રવાહી માટે જરૂરી ટૂંકા અંતરનાં બળો છે, તે વાયુ માટે અવગણી શકાય તેટલા હોય છે. ઓગણીસમી સદીમાં મૅક્સવેલ, બોલ્ટ્ઝમેન અને બીજાઓએ ગતિવાદ વિકસાવ્યો હતો. તે નોંધપાત્ર રીતે સફળ રહ્યો છે. તે વાયુના દબાણ અને તાપમાનનું અર્થઘટન અણુઓના રૂપમાં આપે છે અને તેમાં વાયુના નિયમો અને ઍવોગેડ્રોનો અધિતર્ક આવે છે. તે ઘણા વાયુઓની વિશિષ્ટ ઉષ્મા-ક્ષમતા યોગ્ય રીતે સમજાવે છે. તે વાયુઓના માપી શકાય તેવા ગુણધર્મો જેવા કે શ્યાનતા, વાહકતા, એકબીજામાં ભળવું (Diffusion) વગેરેને અણુઓના ગુણધર્મો સાથે સાંકળે છે, જેના પરથી અણુઓના કદ અને દળ વિશે અંદાજ મેળવી શકાય છે. આ પ્રકરણ ગતિવાદ વિશે પ્રાથમિક માહિતી આપે છે.

13.2 દ્રવ્યનું આણ્વિક રૂપ (MOLECULAR NATURE OF MATTER)

20મી સદીના મહાન વિજ્ઞાનીઓમાંના એક એવા રિચાર્ડ ફિનમૅન (Richard Feynman)ના મતે “દ્રવ્ય (પદાર્થ) પરમાણુઓનું બનેલું છે” એ શોધ અત્યંત મહત્ત્વની છે. જો માનવ સમજદારીપૂર્વક નહિ વર્તે તો માનવજાતનો કદાચ જડમૂળથી નાશ થઈ જશે (ન્યુક્લિઅર હુમલાઓના કારણે) કે પછી વિનાશ થશે (વાતાવરણની આફતોના કારણે). જો આવું થાય અને વિજ્ઞાનનું બધું જ જ્ઞાન નાશ પામે તો ફિનમૅનના મતે ‘પરમાણુવાદ’ વિશેની માહિતી તો વિશ્વમાં આવનારી પેઢી સુધી પહોંચાડવી જ જોઈએ. પરમાણુ અધિતર્ક (Hypothesis) આ છે : દરેક વસ્તુઓ પરમાણુઓની બનેલી છે. સૂક્ષ્મ કણો અવકાશમાં નિરંતર ગતિ કરે છે તથા જ્યારે એકબીજાથી થોડા અંતરે હોય ત્યારે આકર્ષે છે, પરંતુ ખૂબ નજીક જાય ત્યારે એકબીજાને અપાકર્ષે છે.

ઘણી જગ્યાએ અને ઘણી સભ્યતાઓમાં એવી માન્યતા હતી કે, દ્રવ્ય સતત ન પણ હોઈ શકે. ભારતમાં કણાદ અને ગ્રીસમાં ડૅમોક્રિટસે એ દર્શાવ્યું હતું કે, દ્રવ્યનું બંધારણ અવિભાજ્ય છે. વૈજ્ઞાનિક પદ ‘પરમાણુ વાદ’ માટે જહોન ડાલ્ટન (John Dalton)ને યશ આપવામાં આવે છે. એમણે, મૂળ તત્ત્વો ચોક્કસ અને અલગ અલગ

પ્રાચીન ભારત અને ગ્રીસના પરમાણુ અધિતર્ક (Atomic Hypothesis in Ancient India and Greece)

આજનું વિજ્ઞાન ભલે ડાલ્ટનને અણુવાદ આપવા બદલ યશ (Credit) આપતું હોય, પરંતુ તેના બહુ પહેલાં પ્રાચીન ભારત અને ગ્રીસના જ્ઞાનીજનોએ પરમાણુ અને અણુઓ વિશે અનુમાન કરેલ. (ઈ.સ. પૂર્વે છઠ્ઠી સદીમાં) ભારતના કન્નડમાં આપેલ વૈશેસિકા શાળામાં ભણાવવામાં આવતું હતું તે મુજબ પરમાણુ વિશેની માહિતી ઘણી ગહન રીતે આપવામાં આવી છે. પરમાણુઓ શાશ્વત, ટુકડા ન કરી શકાય તેવા (અતૂટ), અતિસૂક્ષ્મ અને દ્રવ્યનો અમૂલ્ય હિસ્સો માનવામાં આવતા હતા. એવું માનવામાં આવતું હતું કે જો દ્રવ્યને સતત તોડતા રહીએ તો મેરુ પર્વત અને રાઈના દાણા વચ્ચે કોઈ ફરક ન રહે. ચાર પ્રકારના અણુઓ (**પરમાણુ**-નાનામાં નાના કણ માટેનો સંસ્કૃત શબ્દ)ની કલ્પના કરવામાં આવી હતી તે ભૂમિ (જમીન), અપ (જળ), તેજસ (અગ્નિ) અને વાયુ (હવા) જેમને ચોક્કસ દળ અને બીજા ગુણધર્મો હતા. આકાશ (અવકાશ)ને પરમાણ્વીક બંધારણ નથી અને તે સતત તથા જડ (અચેતન) છે તેમ માનવામાં આવતું હતું. પરમાણુઓ ભેગા મળીને જુદા જુદા અણુની રચના કરે છે. (દા.ત., બે પરમાણુઓ ભેગા મળીને દ્વિપરમાણ્વીક અણુ દ્વિણુક, ત્રણ પરમાણુઓ ભેગા મળીને ત્ર્યાણુક કે ત્રિપરમાણ્વીક અણુ બનાવે), તેમના ગુણધર્મો તેમના મૂળભૂત પરમાણુઓની પ્રકૃતિ અને તેમના ગુણોત્તર પર આધાર રાખે છે. પરમાણુઓના પરિમાણ પણ અનુમાન દ્વારા કે આપણે જાણતા નથી તેવી પદ્ધતિઓથી શોધવામાં આવ્યા હતા. શોધેલ આ મૂલ્યો જુદાં હતાં. લલિતા વિસ્તાર, ઈ.સ. પૂર્વે બીજી સદીમાં લખાયેલા જાણીતા બુદ્ધના જીવનચરિત્રમાં અનુમાન કરેલ મૂલ્ય અત્યારના પરમાણુના કદ, 10^{-10}mના ક્રમને મળતું આવે છે.

જૂના ગ્રીસમાં ડૅમોક્રિટસ્ (ઈ.સ. પૂર્વે ચોથી સદી) તેના પરમાણુવાદ માટે જાણીતો છે. ગ્રીકમાં 'પરમાણુ' શબ્દનો અર્થ 'તોડી ન શકાય તેવું' છે. તેણે દર્શાવ્યા મુજબ અણુઓ એકબીજાથી ફક્ત ભૌતિક રીતે આકાર, કદ અને બીજા ગુણધર્મોમાં જુદા છે. જેના પરિણામે તેમના સંયોજન વડે બનતા પદાર્થોના ગુણધર્મો પણ જુદા છે. પાણીના પરમાણુઓ લીસા, ગોળ અને એકબીજામાં 'ખૂંપે' (Hook) એવા ન હોવાથી પ્રવાહી/પાણી સહેલાઈથી વહે છે. જમીન (પૃથ્વી)ના પરમાણુઓ ખરબચડા અને ખાંચવાળા હોવાથી તે એકબીજાને જકડી રાખે છે અને કઠણ પદાર્થ બનાવે છે. અગ્નિના પરમાણુઓ કાંટાવાળા હતા અને તેથી તે દુઃખદાયક રીતે દઝાડે છે. આ આકર્ષક ખ્યાલો, તેમની કુશળતા હોવા છતાં, તેમાં આગળ ઉત્ક્રાંતિ ન થઈ. કદાચ તે કાલ્પનિક માન્યતાઓ હતી અને આ ખ્યાલોની ખરાઈ કરાઈ ન હતી કે પ્રાયોગિક રીતે ચકાસીને સુધારવામાં આવ્યા ન હતા. જે અર્વાચિન વિજ્ઞાનની ગુણવત્તાનો પાયો છે.

માત્રામાં ભેગા થઈને કેવી રીતે સંયોજન બનાવે છે તે સમજાવતો પરમાણુવાદ આપ્યો. પહેલો નિયમ દર્શાવે છે કે આપેલ સંયોજનમાં રહેલાં તત્ત્વોનું દળ ચોક્કસ પ્રમાણમાં હોય છે. બીજો નિયમ દર્શાવે છે કે જ્યારે બે તત્ત્વો ભેગા થઈને એક કરતાં વધારે સંયોજનો બનાવે ત્યારે કોઈ એક તત્ત્વના ચોક્કસ દળ માટે, બીજા તત્ત્વોના દળ નાના પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગુણોત્તરમાં હોય છે.

આ નિયમો સમજાવવા ડાલ્ટને, આશરે 200 વર્ષ પહેલાં, સૂચવ્યું (Suggested) કે કોઈ સંયોજનના નાનામાં નાના કણો પરમાણુઓ છે. એક તત્ત્વના પરમાણુઓ એક સમાન (Indentical) હોય છે, પરંતુ તે બીજાં તત્ત્વો કરતાં જુદા હોય છે. દરેક તત્ત્વના થોડી (નાની) સંખ્યાના પરમાણુઓ ભેગા મળીને (સંયોજાઈને) સંયોજનનો અણુ બનાવે છે. ઓગણીસમી સદીમાં આપેલ ગૅલ્યુસેકનો નિયમ દર્શાવે છે કે, જ્યારે વાયુઓ રાસાયણિક પ્રક્રિયા વડે સંયોજાઈને બીજો વાયુ બનાવે ત્યારે, તેમના કદનો ગુણોત્તર નાની પરંતુ ચોક્કસ પૂર્ણાંક સંખ્યામાં હોય છે. ઍવોગેડ્રોનો નિયમ દર્શાવે છે કે, સમાન તાપમાન અને દબાણે રહેલા, એકસરખું કદ ધરાવતા, દરેક વાયુમાં અણુઓની સંખ્યા એકસરખી હોય છે. જ્યારે ઍવોગેડ્રોનો નિયમ ડાલ્ટનના સિદ્ધાંત સાથે મળીને ગેલ્યુસેકનો નિયમ સમજાવે છે. અહીં તત્ત્વો મોટા ભાગે અણુઓના રૂપમાં હોવાથી, ડાલ્ટનના પરમાણુવાદને ક્યારેક દ્રવ્ય માટેનો અણુવાદ પણ કહે છે. હવે આ સિદ્ધાંતને વિજ્ઞાનીઓ દ્વારા માન્યતા પણ મળેલ છે. પરંતુ ઓગણીસમી સદીના અંત સુધી ઘણા પ્રખ્યાત વિજ્ઞાનીઓ પરમાણુવાદને સાચો માનતા ન હતા !

ઘણાંબધાં અવલોકનો બાદ, આજના સમયમાં આપણે જાણીએ છીએ કે અણુઓ (જે એક કે વધુ પરમાણુઓના બનેલા છે), સંયોજાઈને દ્રવ્ય બનાવે છે. ઇલેક્ટ્રૉન માઇક્રોસ્કૉપ અને સ્કેનિંગ ટનલિંગ માઇક્રોસ્કોપ (Scanning Tunneling Microscope)ની મદદથી આપણે તેમને જોઈ પણ શકીએ છીએ. પરમાણુનું પરિમાણ લગભગ એન્ગસ્ટ્રોમ (10^{-10} m) જેટલું હોય છે. ઘન પદાર્થો, જે ખૂબ ગીચતા ધરાવે છે (Tightly Packed), તેમાં પરમાણુઓ વચ્ચેના અંતર અમુક એન્ગસ્ટ્રોમ (2 Å) જેટલા જ હોય છે. પ્રવાહીઓમાં પણ પરમાણુઓ વચ્ચેનું અંતર લગભગ આ ક્રમનું જ હોય છે. ઘન પદાર્થોની જેમ પ્રવાહીમાં પરમાણુઓ દૃઢ રીતે બંધાયેલ હોતા નથી, પણ તે આસપાસમાં (આજુબાજુમાં) ગતિ કરી શકે છે. આ કારણથી પ્રવાહી વહી શકે છે. વાયુઓમાં પરમાણુઓ વચ્ચેના અંતર દસ એન્ગસ્ટ્રોમના ક્રમના હોય છે. અથડામણ પહેલાં અણુએ કાપેલ સરેરાશ અંતરને **સરેરાશ મુક્ત પથ (Mean Free Path)** કહે છે. વાયુઓમાં આ સરેરાશ મુક્ત પથ હજારો એન્ગસ્ટ્રોમના ક્રમનો હોય છે. વાયુમાં પરમાણુઓ વધારે મુક્ત હોય છે અને (એકબીજાને) અથડાયા વગર લાંબું અંતર કાપી શકે છે. જો બંધ પાત્રમાં ન હોય તો તેઓ વિખેરાઈ (disperse) જાય છે. ઘન અને પ્રવાહીઓમાં અણુઓ એકબીજાની નજીક હોવાથી આંતર અણુ બળોનું મહત્ત્વ

વધી જાય છે. લાંબા અંતર માટે આ બળ આકર્ષી અને ટૂંકા અંતર માટે અપાકર્ષી હોય છે. પરમાણુઓ અમુક એન્ગસ્ટ્રોમના અંતરે હોય ત્યારે (એકબીજાને) આકર્ષે છે પરંતુ જ્યારે તેઓ નજીક આવે ત્યારે અપાકર્ષે છે. વાયુ સ્થિર છે તેવું વિધાન ગેરવ્યાજબી છે. વાયુ ખૂબ જ ક્રિયાશીલ છે અને તેની ગતિશીલતા સંતુલિત હોય છે. ગતિકીય સંતુલનમાં, અણુઓ અથડાય છે અને અથડામણ દરમિયાન તેમની ઝડપ બદલાય છે. ફક્ત સરેરાશ ગુણધર્મો જ અચળ રહે છે.

પરમાણુવાદ આપણા સવાલોનો અંત નથી, પરંતુ તે તો શરૂઆત છે. આપણે હવે જાણીએ છીએ કે, પરમાણુઓ ભાગ ન પાડી શકાય તેવા કે અવિઘટનીય નથી. તે ન્યુક્લિયસ અને ઇલેક્ટ્રૉનના બનેલા છે. ન્યુક્લિયસ પોતે પણ ન્યૂટ્રૉન અને પ્રોટોનનું બનેલું છે. પ્રોટોન અને ન્યૂટ્રૉન પણ ક્વાર્કસના બનેલા છે. આ ઉપરાંત ક્વાર્કસ સુધી આવીને વાત અટકતી નથી. આગળ જતાં દોરી જેવા અવિઘટનીય અંશ (Entities) હોઈ શકે. કુદરત પાસે આપણા માટે ઘણા આશ્ચર્યો છે, પણ સત્ય (તથ્ય) માટેની શોધ મોટે ભાગે આનંદદાયી હોય છે તથા શોધ હંમેશાં સુંદર હોય છે. આ પ્રકરણમાં, આપણે ફક્ત વાયુઓની (અને થોડા અંશે ઘન પદાર્થોની) સતત ગતિ કરતા અણુઓના સમૂહના રૂપમાં વર્તણૂક સમજવા પૂરતું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીશું.

13.3 વાયુઓની વર્તણૂક (BEHAVIOUR OF GASES)

ઘન અને પ્રવાહીની સરખામણીમાં વાયુઓની વર્તણૂક સમજવી સહેલી છે. આનું મુખ્ય કારણ એ છે કે વાયુઓમાં અણુઓ એકબીજાથી દૂર હોય છે અને તેમની વચ્ચેની આંતરક્રિયાઓ, બે અણુઓ અથડાય નહિ ત્યાં સુધી, નહિવત હોય છે. તેઓ પ્રવાહી (કે ઘન) અવસ્થામાં આવે, તે પહેલાંનાં નીચા દબાણ અને ઊંચાં તાપમાને, આપેલ વાયુના નમૂના માટે, તેમના દબાણ, તાપમાન અને કદને સાંકળતા સમીકરણ (જુઓ પ્રકરણ 11).

$$PV = KT \qquad (13.1)$$

નું સમાધાન કરે છે.

અહીં, તાપમાન T કેલ્વિન (અથવા નિરપેક્ષ) માપક્રમમાં છે. વાયુના આપેલ નમૂના માટે K અચળ હોય છે પરંતુ વાયુના કદ સાથે બદલાય છે. જો આપણે પરમાણુઓ કે અણુઓ (ને ધ્યાનમાં લઈએ)ના સંદર્ભમાં વિચારીએ તો K, આપેલ નમૂના માટે અણુઓની સંખ્યા N (ધારો કે)ના સમપ્રમાણમાં હોય છે. આપણે લખી શકીએ કે $K = N\,k$. આ જોતાં સમજાય છે કે બધા જ વાયુઓ માટે k એક સમાન જ છે. તેને બૉલ્ટ્ઝમેનનો અચળાંક કહે છે અને k_B વડે દર્શાવાય છે. અહીં,

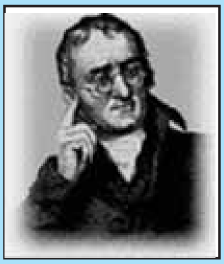
$$\frac{P_1V_1}{N_1T_1} = \frac{P_2V_2}{N_2T_2} = \text{અચળ} = k_B \qquad (13.2)$$

હોવાથી, જો P, V અને T સમાન હોય, તો બધા વાયુઓ માટે N પણ સમાન જ હોય. આ ઍવોગેડ્રોનો અધિતર્ક છે, કે નિયત તાપમાન અને દબાણે રહેલા બધા જ (દરેક) વાયુઓ માટે એકમ કદમાં રહેલા અણુઓની સંખ્યા એકસરખી (સમાન) હોય છે. દરેક વાયુ માટે 22.4 લિટરમાં અણુઓની સંખ્યા 6.02×10^{23} હોય છે. જેને ઍવોગેડ્રો અંક કહે છે અને તે N_A સંજ્ઞા વડે દર્શાવાય છે. 22.4 લિટરના દરેક વાયુનું આણ્વીય દળ STP એ (પ્રમાણભૂત તાપમાન 273 K અને દબાણ 1 atm) ગ્રામમાં તેના અણુભાર જેટલું હોય છે. પદાર્થના આટલા જથ્થાને એક મોલ (વધુ સ્પષ્ટ વ્યાખ્યા માટે પ્રકરણ 2 જુઓ.) કહે છે. ઍવોગેડ્રોએ રાસાયણિક પ્રક્રિયાઓ પરથી નિયત તાપમાન અને દબાણે એક સમાન કદ ધરાવતા વાયુઓ માટે આ સંખ્યા એક સમાન હશે તેમ માન્યું હતું. ગતિવાદ આ અધિતર્કને અનુમોદન આપે છે.

આદર્શ વાયુ સમીકરણ આ રીતે લખી શકાય.

$$PV = \mu\, RT$$

જ્યાં, μ એ મોલની સંખ્યા અને $R = N_A\, k_B$ એ સાર્વત્રિક અચળાંક છે. તાપમાન T એ નિરપેક્ષ તાપમાન છે. નિરપેક્ષ



જ્હોન ડાલ્ટન (John Dalton) (1766-1844)

તે અંગ્રેજ રસાયણશાસ્ત્રી હતો. જ્યારે જુદા જુદા પ્રકારના પરમાણુઓ સંયોજાય ત્યારે તેઓ અમુક સામાન્ય નિયમોનું પાલન કરે છે. ડાલ્ટનનો પરમાણુવાદ આ સામાન્ય નિયમો સમજાવે છે. તેમણે રંગઅંધત્વ માટેનો સિદ્ધાંત પણ આપ્યો હતો.

આમેડો ઍવોગેડ્રો (Amedo Avogadro) (1776-1856)

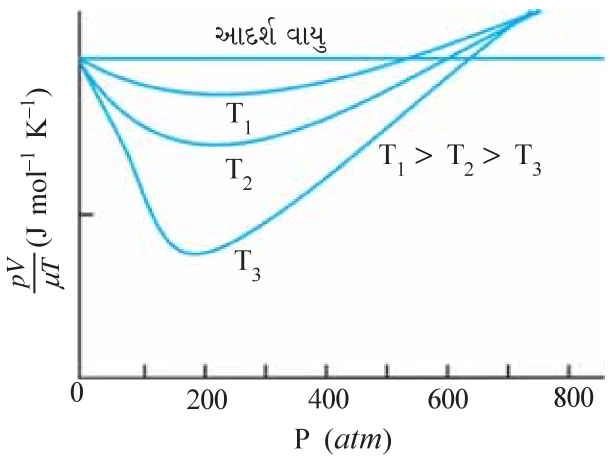
તેમણે એક અગત્યનું અનુમાન કર્યું કે સમાન તાપમાન અને દબાણે સમાન કદમાં રહેલા વાયુઓના અણુઓની સંખ્યા સમાન હોય છે. આથી, જુદા જુદા વાયુઓના મિશ્રણ (સંયોજન) સમજવામાં મદદ મળી રહી. એને હવે ઍવોગેડ્રોનો સિદ્ધાંત (નિયમ) કહે છે. તેમણે એ પણ દર્શાવ્યું કે હાઇડ્રોજન, ઑક્સિજન અને નાઇટ્રોજન જેવા વાયુઓના નાનાંમાં નાનાં ઘટકો પરમાણુઓ નહિ પરંતુ દ્વિપરમાણ્વીક અણુઓ છે.

તાપમાનને કેલ્વિનમાં દર્શાવીએ તો, $R = 8.314\ \mathrm{J\ mol^{-1}\ K^{-1}}$. અહીં,

$$\mu = \frac{M}{M_0} = \frac{N}{N_A} \tag{13.4}$$

જ્યાં, M એ N અણુઓ ધરાવતા વાયુનું દળ, M_0 મોલર દળ અને N_A ઍવોગેડ્રોનો અચળાંક છે. સમીકરણો (13.4) અને (13.3) પરથી લખી શકાય કે,

$PV = k_B NT$ અથવા $P = k_B nT$



આકૃતિ 13.1 *નીચા દબાણ અને ઊંચા તાપમાને વાસ્તવિક વાયુઓની વર્તણૂક આદર્શ વાયુ જેવી હોય છે.*

જ્યાં, n એ સંખ્યા ઘનતા, એટલે કે એકમ કદમાં રહેલા અણુઓની સંખ્યા છે. અગાઉ દર્શાવ્યું તેમ k_B એ બૉલ્ટ્ઝમેનનો અચળાંક છે. SI એકમ પદ્ધતિમાં તેનું મૂલ્ય 1.38×10^{-23} J K^{-1} છે.

સમીકરણ (13.3)નું બીજું અગત્યનું સ્વરૂપ

$$P = \frac{\rho RT}{M_0} \tag{13.5}$$

છે, જ્યાં, ρ એ વાયુની દળ ઘનતા છે.

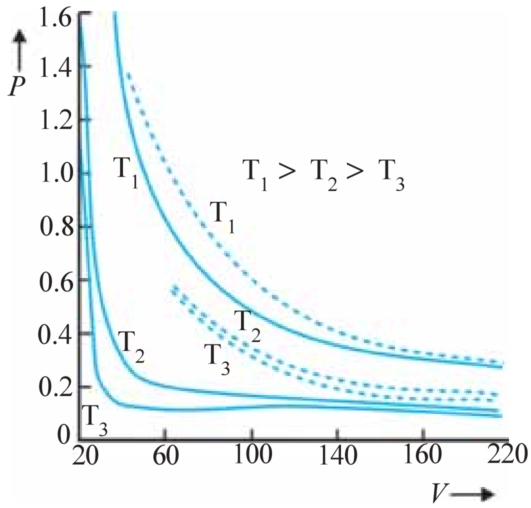
જે વાયુ દરેક દબાણ અને તાપમાને સમીકરણ (13.3)નું સંપૂર્ણ પાલન કરે તેને **આદર્શ વાયુ (Ideal Gas)** કહે છે. આદર્શ વાયુ એ વાયુ માટેનો એક સૈદ્ધાંતિક નમૂનો છે. વાસ્તવમાં, કોઈ પણ વાસ્તવિક વાયુ આદર્શ હોતો નથી. આકૃતિ 13.1માં ત્રણ તાપમાન માટે વાસ્તવિક વાયુનું આદર્શ વાયુથી જુદાપણું (Departure) દર્શાવ્યું છે. એ નોંધો કે નીચા દબાણ અને ઊંચા તાપમાને બધા જ વક્રો આદર્શ વાયુ વર્તણૂક તરફ દોરી જાય છે.

નીચા દબાણ અથવા ઊંચા તાપમાને અણુઓ એકબીજાથી દૂર હોય છે અને અણુઓ વચ્ચેની આંતરક્રિયા નહિવત હોય છે. આંતરક્રિયાની ગેરહાજરીમાં વાયુ આદર્શ રીતે વર્તે છે.

જો આપણે સમીકરણ (13.3)માં μ અને T અચળ રાખીએ, તો આપણને

$$PV = \text{અચળ} \tag{13.6}$$

મળે. એટલે કે, તાપમાન અચળ રાખીએ તો, આપેલ દળના વાયુનું દબાણ તેના કદના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં બદલાય છે. આ જાણીતો **બૉઈલનો નિયમ** છે. આકૃતિ 13.2માં પ્રાયોગિક રીતે મેળવેલ P–V વક્રો અને બૉઈલના નિયમ વડે મેળવેલ સૈદ્ધાંતિક વક્રો વચ્ચેની સરખામણી દર્શાવી છે. અહીં, ફરીથી તમે ઊંચા તાપમાન અને નીચા દબાણે સારી સંમતિ જોઈ શકો છો. ત્યાર બાદ, જો તમે P અચળ રાખો તો, સમીકરણ 13.1 મુજબ $V \propto T$, એટલે કે, નિયત દબાણે વાયુનું કદ તેના નિરપેક્ષ તાપમાન Tના સમપ્રમાણમાં (**ચાર્લ્સનો નિયમ Charles' Law**) હોય છે. જુઓ આકૃતિ 13.3.



આકૃતિ 13.2 *ત્રણ તાપમાન માટે બાષ્પ (વરાળ)ના પ્રાયોગિક P–V વક્રો (સળંગ લીટી) અને બૉઈલના નિયમ (ત્રુટક લીટી)ની સરખામણી. P એ 22 atmના એકમ (Unit)માં અને V એ 0.09 litreના એકમમાં છે.*

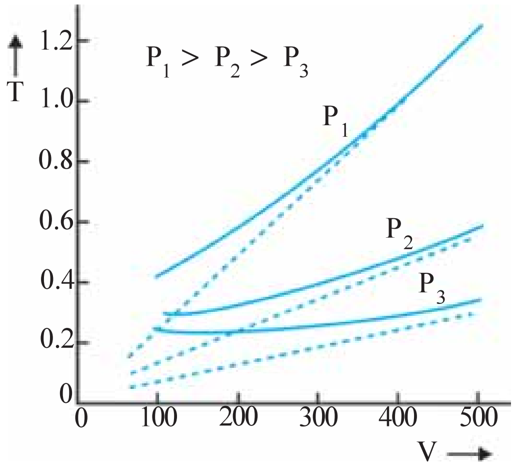
અંતમાં, આંતરક્રિયા ન કરે તેવા આદર્શ વાયુઓનું મિશ્રણ ધારો : વાયુ 1ના μ_1 મોલ, વાયુ 2ના μ_2 મોલ વગેરે, V કદના પાત્રમાં T તાપમાન અને P દબાણે રહેલા છે. આ મિશ્રણ માટે વાયુનું અવસ્થા સમીકરણ (Equation of State) આ મુજબ છે :

$$PV = (\mu_1 + \mu_2 + \ldots)\, RT \tag{13.7}$$

$$\text{આથી, } P = \mu_1 \frac{RT}{V} + \mu_2 \frac{RT}{V} + \ldots \tag{13.8}$$

$$= P_1 + P_2 + \ldots \tag{13.9}$$

એ સ્પષ્ટ છે કે $P_1 = \mu_1$ RT/V એ, જ્યારે બીજા વાયુઓ હાજર ન હોય ત્યારે, આ જ કદ અને તાપમાનની પરિસ્થિતિઓમાં, વાયુ 1 વડે લાગતું દબાણ છે. આને વાયુનું આંશિક દબાણ (Partial Pressure) કહે છે. આમ, આદર્શ વાયુઓના મિશ્રણનું કુલ દબાણ, તે વાયુઓના આંશિક દબાણના સરવાળા જેટલું હોય છે. આ ડાલ્ટનનો આંશિક દબાણનો નિયમ છે.



આકૃતિ 13.3 *ત્રણ દબાણ માટે CO_2ના પ્રાયોગિક T–V વક્રો (સળંગ લીટી) અને ચાર્લ્સના નિયમ વડે મેળવેલ વક્રો (ત્રુટક લીટી). Tનું મૂલ્ય 300 Kના એકમમાં અને Vનું મૂલ્ય 0.13 litresના એકમમાં છે.*

હવે આપણે થોડાં એવાં ઉદાહરણો જોઈએ કે જે આપણને અણુઓ વડે ઘેરાયેલ કદ અને એક અણુના કદ વિશે માહિતી આપે.

ઉદાહરણ 13.1 પાણીની ઘનતા 1000 kg m^{-3} છે. 100^o C અને 1 atm દબાણે પાણીની બાષ્પ ઘનતા 0.6 kg m^{-3} છે. અણુના કદ અને તેમની કુલ સંખ્યાના ગુણાકારને આણ્વિક કદ કહે છે. ઉપર આપેલ તાપમાન અને દબાણની પરિસ્થિતિમાં રહેલ પાણીની બાષ્પ માટે આણ્વિક કદ અને તેણે ઘેરાયેલ કુલ કદનો ગુણોત્તર ગણો.

ઉકેલ પાણીના અણુઓના આપેલ દળ માટે, કદ વધુ હોય તો ઘનતા ઓછી હોય છે. આથી બાષ્પનું કદ 1000/0.6 = $1/(6 \times 10^{-4})$ ગણું મોટું હોય. જો પાણીના જથ્થાની અને પાણીના અણુઓની ઘનતા સરખી હોય, તો પ્રવાહી સ્વરૂપમાં આણ્વિક કદ અને કુલ કદનો ગુણોત્તર 1 હોય છે. બાષ્પ રૂપમાં કદ વધે છે, આથી કદનો ગુણોત્તર તેટલા એટલે કે 6×10^{-4} પ્રમાણમાં ઓછો હોય છે. ◀

ઉદાહરણ 13.2 ઉદાહરણ 13.1માં આપેલ માહિતી પરથી પાણીના અણુનું કદ મેળવો.

ઉકેલ પ્રવાહી અવસ્થા (કે ઘન)માં, પાણીના અણુઓ ઘણાં નજીક ગોઠવાયેલા હોય છે. આથી પાણીના અણુની ઘનતા લગભગ પાણીના જથ્થાની ઘનતા = 1000 kg m^{-3} જેટલી સમજી શકાય. પાણીના એક અણુનું કદ મેળવવા માટે, આપણે પાણીના એક અણુનું દળ જાણવું પડે. આપણે જાણીએ છીએ કે, 1 મોલ પાણીનું દળ આશરે (2 + 16)g = 18 g = 0.018 kg જેટલું હોય છે.

પરંતુ, 1 મોલમાં લગભગ 6×10^{23} અણુઓ (ઍવોગેડ્રો નંબર) હોવાથી, પાણીના એક અણુનું દળ $(0.018)/(6 \times 10^{23})$ kg = 3×10^{-26} kg. આથી, પાણીના અણુનું લગભગ કદ નીચેની રીતે મેળવી શકાય :

પાણીના અણુનું કદ

$= (3 \times 10^{-26}\ kg) / (1000\ kg\ m^{-3})$

$= 3 \times 10^{-29}\ m^3$

$= (4 / 3)\ \pi$ (ત્રિજ્યા)^3

આથી, ત્રિજ્યા $\simeq 2 \times 10^{-10}$ m = 2 Å ◀

ઉદાહરણ 13.3 પાણીના અણુઓ વચ્ચેનું (આંતર આણ્વિક) સરેરાશ અંતર કેટલું છે ? ઉદાહરણો 13.1 અને 13.2ની માહિતીનો ઉપયોગ કરો.

ઉકેલ વરાળ (બાષ્પ) સ્વરૂપમાં રહેલ આપેલ દળના પાણીનું કદ તેટલા જ દળના પાણીના પ્રવાહી સ્વરૂપ કરતાં 1.67×10^3 ગણું હોય છે (ઉદાહરણ 13.1). તેટલા જ પ્રમાણમાં કદનો વધારો પાણીના દરેક અણુને મળી રહે છે. જ્યારે કદ 10^3 ગણું વધે ત્યારે ત્રિજ્યા $V^{1/3}$ એટલે કે 10 ગણી વધે છે. એટલે કે 10 × 2 Å = 20 Å. આથી, સરેરાશ અંતર 2 × 20 = 40 Å જેટલું છે. ◀

ઉદાહરણ 13.4 એક પાત્રમાં બે અક્રિયાશીલ વાયુઓ રહેલા છે. નિયૉન (એક પરમાણ્વિક) અને ઑક્સિજન (દ્વિ-પરમાણ્વિક). તેમના આંશિક દબાણનો ગુણોત્તર 3 : 2 છે. તો, (i) અણુઓની સંખ્યા, અને (ii) પાત્રમાં નિયૉન અને ઑક્સિજનની ઘનતાનો ગુણોત્તર મેળવો. નિયૉનનું પરમાણુ દળ Ne = 20.2 u., ઑક્સિજનનું અણુ દળ O_2 = 32.0 u.

ઉકેલ વાયુના મિશ્રણનું આંશિક દબાણ, એટલા જ કદ અને તાપમાને પાત્રને તે કોઈ એક વાયુથી ભરેલો હોય ત્યારના વાયુ - દબાણ જેટલું હોય છે. (અક્રિયાશીલ વાયુઓના મિશ્રણનું કુલ દબાણ તેના દરેક વાયુઓના આંશિક દબાણના સરવાળા જેટલું હોય છે) દબાણ જેટલું હોય છે. દરેક વાયુ (આદર્શ ધારેલ છે), વાયુના નિયમનું પાલન કરે છે. બંને વાયુઓ માટે V અને T એક જ હોવાથી, $P_1V = \mu_1RT$ અને $P_2V = \mu_2RT$ તેથી $(P_1/P_2) = (\mu_1/\mu_2)$. અહીંયાં 1 અને 2 નિયૉન અને ઑક્સિજન દર્શાવે છે. $(P_1/P_2) = (3/2)$ (આપેલ છે), આથી $(\mu_1/\mu_2) = 3/2$.

(i) વ્યાખ્યા મુજબ $\mu_1 = (N_1/N_A)$ અને $\mu_2 = (N_2/N_A)$, જ્યાં N_1 અને N_2 એ 1 અને 2ના અણુઓની સંખ્યા છે અને N_A એ ઍવોગેડ્રો અંક (સંખ્યા) છે. આથી, $(N_1/N_2) = (\mu_1/\mu_2) = 3/2$.

(ii) આપણે $\mu_1 = (m_1/M_1)$ અને $\mu_2 = (m_2/M_2)$ પણ લખી શકીએ, જ્યાં m_1 અને m_2 એ 1 અને 2ના દળ છે; અને M_1 અને M_2 તેમના આણ્વિક દળો છે. (બંને m_1 અને M_1; તથા m_2 અને M_2 સમાન એકમોમાં દર્શાવવા જોઈએ). જો ρ_1 અને ρ_2 અનુક્રમે 1 અને 2ની દળ ઘનતા હોય તો,

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{m_1/V}{m_2/V} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \times \left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{20.2}{32.0} = 0.947$$ ◀

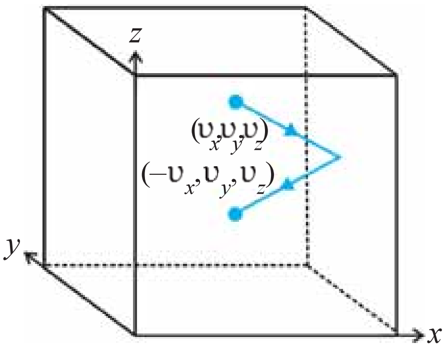
13.4 આદર્શ વાયુનો ગતિવાદ (KINETIC THEORY OF IDEAL GAS)

વાયુનો ગતિવાદ દ્રવ્યના અણુ સ્વરૂપ પર આધારિત છે. આપેલ જથ્થાનો વાયુ એ મોટી સંખ્યાનો (લગભગ ઍવોગેડ્રો અંકના ક્રમનો) અણુ સમૂહ છે, જે સતત અસ્તવ્યસ્ત ગતિ કરતા હોય છે. સામાન્ય દબાણ અને તાપમાને, અણુઓ વચ્ચેનું સરેરાશ અંતર, અણુના સામાન્યતઃ પરિમાણ (2 Å)ના કરતાં 10 ગણું કે તેથી વધુ હોય છે. આથી અણુઓ વચ્ચેની આંતરક્રિયા નહિવત હોય છે અને આપણે એવું માની શકીએ કે તેઓ ન્યૂટનના પહેલા નિયમ મુજબ મુક્ત રીતે સીધી રેખામાં ગતિ કરે છે. આમ છતાં, ઘણી વાર તેઓ એકબીજાની નજીક આવે છે આંતર આણ્વિક બળો અનુભવે છે અને તેમના વેગ બદલાય છે. આવી આંતરક્રિયાઓ સંઘાત (અથડામણ) કહેવાય છે. અણુઓ એકબીજા સાથે અથવા દીવાલો સાથે અવિરત સંઘાત અનુભવતા હોય છે અને તેમના વેગ બદલાતા રહે છે. આ અથડામણોને સ્થિતિસ્થાપક ગણી શકાય. ગતિવાદ પરથી આપણે વાયુના દબાણ માટેનું સમીકરણ તારવી શકીએ.

આપણે એવું માનીને શરૂ કરીશું કે વાયુના અણુઓ અવિરત અસ્તવ્યસ્ત ગતિમાં છે તથા એકબીજા સાથે અને પાત્રની દિવાલો સાથે સંઘાતો અનુભવે છે. અણુઓ વચ્ચેની આંતરિક અથડામણો અથવા અણુઓ અને દીવાલો વચ્ચેની અથડામણો સ્થિતિસ્થાપક છે. આનો મતલબ એ કે કુલ ગતિઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે. હંમેશની જેમ કુલ વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે.

13.4.1 આદર્શ વાયુનું દબાણ (Pressure of an Ideal Gas)

ધારો કે એક વાયુ l એકમ જેટલી બાજુઓ ધરાવતા સમઘનમાં ભરેલો છે. આકૃતિ 13.4માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સમઘનની બાજુઓને સમાંતર અક્ષો લો. $(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ વેગ ધરાવતો એક અણુ yz સમતલને સમાંતર રહેલી સમતલ દીવાલના



આકૃતિ 13.4 પાત્રની દીવાલ સાથે વાયુના અણુનો સ્થિતિસ્થાપક સંઘાત

$A(= l^2)$ ક્ષેત્રફળને અથડાય છે. અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક હોવાથી, અણુ તેટલા જ વેગથી પાછો પડે છે. અથડામણમાં તેના વેગના y અને z ઘટકો બદલાતાં નથી, પરંતુ x-ઘટક તેની સંજ્ઞા (દિશા) ઊલટાવે છે. એટલે કે, અથડામણ બાદ વેગ $(-\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ છે. અણુના વેગમાનમાં થતો ફેરફાર : $-m\upsilon_x - (m\upsilon_x) = -2m\upsilon_x$. વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમ અનુસાર, અથડામણ દ્વારા દીવાલને મળતું વેગમાન $= 2m\upsilon_x$.

દીવાલ પર લાગતું બળ (અને દબાણ) મેળવવા, આપણે એકમ સમયમાં દીવાલને મળતું વેગમાન શોધવું પડે. Δt જેટલા સૂક્ષ્મ સમયમાં, x-દિશામાંના ઘટક υ_x જેટલો વેગ ધરાવતો અણુ દીવાલથી $\upsilon_x\Delta t$ જેટલા અંતર સુધીમાં હશે તો દીવાલને અથડાશે. એટલે કે, $A\upsilon_x\Delta t$ કદમાં રહેલા બધા અણુઓ જ Δt સમયમાં દીવાલને અથડાઈ શકે. પરંતુ સરેરાશ રીતે, આમાંના અડધા દીવાલ તરફ અને બાકીના અડધા દીવાલથી દૂર તરફ ગતિ કરતા હોય છે. આમ, દીવાલને Δt સમયમાં અથડાતા $(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ વેગ ધરાવતા અણુઓની સંખ્યા $\frac{1}{2}A\upsilon_x\Delta t\ n$ છે. જ્યાં, n એ એકમ કદમાં રહેલા અણુઓની સંખ્યા છે. આ અણુઓ વડે Δt સમયમાં દીવાલને મળતું વેગમાન :

$$Q = (2m\upsilon_x)(\tfrac{1}{2}\ n\ A\upsilon_x\ \Delta t) \qquad (13.10)$$

દીવાલ પર લાગતું બળ એ વેગમાનના ફેરફારનો દર $Q/\Delta t$ છે અને દબાણ એ એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ બળ છે :

$$P = Q\ /\ (A\ \Delta t) = n\ m\ \upsilon_x^2 \qquad (13.11)$$

હકીકતમાં, વાયુમાં રહેલા બધા જ અણુઓનો વેગ સમાન હોતો નથી. પરંતુ ત્યાં વેગ-વિતરણ હોય છે. (Distribution) હોય છે. આથી ઉપરનું સમીકરણ, x દિશામાંના વેગ υ_x ધરાવતા અણુ સમૂહના કારણે લાગતા દબાણ અને n આ

અણુ સમૂહની સંખ્યા ઘનતા દર્શાવે છે. આમ, બધા જ સમૂહોના ફાળાનો સરવાળો કરતાં કુલ દબાણ

$$P = n\, m\overline{\upsilon_x^2} \tag{13.12}$$

મળે. જ્યાં, $\overline{\upsilon_x^2}$ એ $\upsilon_x{}^2$નું સરેરાશ છે. હવે વાયુ સમદિગ્ધર્મી (Isotropic) છે. એટલે કે, પાત્રમાં અણુઓના વેગની કોઈ માનીતી/ચોક્કસ (Preferred) દિશા હોતી નથી. આથી, સંમિતિ મુજબ :

$$\overline{\upsilon_x^2} = \overline{\upsilon_y^2} = \overline{\upsilon_z^2}$$

$$= (1/3)\,[\overline{\upsilon_x^2} + \overline{\upsilon_y^2} + \overline{\upsilon_z^2}] = (1/3)\overline{\upsilon^2} \tag{13.13}$$

જ્યાં, υ ઝડપ છે અને $\overline{\upsilon^2}$ એ સરેરાશ વર્ગીત ઝડપ છે. આથી,

$$P = (1/3)\; n\; m\,\overline{\upsilon^2} \tag{13.14}$$

આ તારવણીમાં ધ્યાનમાં રાખવા જેવા મુદ્દાઓ. પહેલું, આપણે પાત્રને ભલે સમઘન ધાર્યું હોય, પરંતુ પાત્રનો આકાર કોઈ મહત્ત્વ ધરાવતો નથી. અનિયમિત આકારના પાત્ર માટે, આપણે હંમેશાં અતિસૂક્ષ્મ એવું નાનું (સમતલ) ક્ષેત્રફળ વિચારી શકીએ અને ઉપરના પદ અનુસરી શકીએ. નોંધો કે અંતિમ પરિણામમાં A અને Δt આવતા નથી. પાસ્કલના નિયમ મુજબ, પ્રકરણ 10માં આપેલ, સંતુલન સ્થિતિમાં રહેલા વાયુના એક ભાગમાં લાગતું દબાણ બીજે બધે પણ એટલું જ હોય છે. બીજું, આપણે ગણતરીમાં કોઈ પણ પ્રકારની અથડામણોને અવગણી છે. ભલે આ ધારણા સાબિત કરવી અઘરી હોય, પરંતુ આપણે સામાન્ય રીતે સમજી શકીએ કે તેના પરથી ભૂલભરેલાં (ખોટા) પરિણામો નહિ મળે. Δt સમયમાં દીવાલ સાથે અથડાતા અણુઓની સંખ્યા $\frac{1}{2} nA\upsilon_x \Delta t$ મળી હતી. હવે વાયુ સ્થાયી સ્થિતિમાં છે અને અથડામણો અનિયમિત છે. આથી, જો (υ_x, υ_y, υ_z) વેગ ધરાવતો કોઈ અણુ અથડામણના કારણે બીજો વેગ મેળવે, તો ત્યાં બીજો કોઈ એવો અણુ પણ હોવો જ જોઈએ કે જે અથડામણ બાદ (υ_x, υ_y, υ_z) વેગ મેળવે. જો આમ ન હોત તો, વેગની વહેંચણી (Distribution) સ્થિર ન રહેત. કોઈ પણ પરિસ્થિતિમાં આપણે $\overline{\upsilon_x^2}$ શોધીએ છીએ. આમ, સર્વાંગી રીતે, અણુઓની અથડામણો (જો તે સતત ન હોય અને અથડામણ દરમિયાનનો સમય ક્રમિક અથડામણો વચ્ચેના સમય કરતાં નહિવત હોય તો) ઉપરની ગણતરીને અસર નહિ કરે.

13.4.2 તાપમાનનું ગતિક અર્થઘટન (Kinetic Interpretation of Temperature)

સમીકરણ 13.14ને આ રીતે પણ લખી શકાય :

$$PV = (1/3)\; nVm\,\overline{\upsilon^2} \tag{13.15a}$$

વાયુના પરમાણુવાદના શોધકો (Founders of Kinetic Theory of Gases)

જેમ્સ ક્લાર્ક મૅક્સવેલ (James Clerk Maxwell) (1831-1879) : એડિનબર્ગ, સ્કોટલૅન્ડમાં જન્મેલા જે ઓગણીસમી સદીના મહાન ભૌતિકવિજ્ઞાનીઓમાંના એક છે. તેમણે વાયુના અણુઓના તાપીય વેગ વિતરણ (Distribution) વિશે તારણ આપ્યું હતું, જેના પરથી શ્યાનતા જેવી માપી શકાય તેવી રાશિઓ વિશે અનુમાન થઈ શકે છે. મૅક્સવેલની મહાનતમ સિદ્ધિ એ હતી કે તેમણે વિદ્યુત અને ચુંબકત્વના નિયમોને (એકબીજા સાથે) સાંકળીને સુસંગત સૂત્રો/સમીકરણો (જે કુલમ્બ, ઑરસ્ટેડ, ઍમ્પિયર અને ફેરાડેએ શોધ્યા હતા)નો સમૂહ આપ્યો, જે હવે મૅક્સવેલનાં સમીકરણો કહેવાય છે. આ પરથી તેમણે એક અત્યંત અગત્યનું તારણ આપ્યું કે પ્રકાશ એ વિદ્યુતચુંબકીય તરંગ છે. રસપ્રદ એ છે કે (ફેરાડેએ ભારપૂર્વક દર્શાવેલા વિદ્યુત વિશ્લેષણના નિયમો મુજબ) વિદ્યુતભાર કણ સ્વરૂપ ધરાવે છે તેવા વિચાર સાથે મૅક્સવેલ સહમત ન હતા.

લુડવિંગ બૉલ્ટ્ઝમૅન (Ludwing Boltzmann) (1844-1906) : વિએના, ઑસ્ટ્રિયામાં જન્મ્યા હતા, જેમણે વાયુના ગતિવાદ પર મૅક્સવેલથી સ્વતંત્ર રીતે કાર્ય કર્યું હતું. તે પરમાણુવાદના પ્રખર હિમાયતી હતા, જે ગતિવાદનો પાયાનો સિદ્ધાંત છે. બૉલ્ટ્ઝમૅને થરમૉડાયનેમિક્સના બીજા નિયમ અને એન્ટ્રોપી વિશે આંકડાકીય અર્થઘટન આપ્યું હતું. તેમને પ્રચલિત આંકડાકીય યંત્રવિજ્ઞાનના જનકોમાંના એક ગણવામાં આવે છે. યંત્રવિજ્ઞાનમાં ઊર્જા અને તાપમાનને સમપ્રમાણમાં સાંકળતો અચળાંક બૉલ્ટ્ઝમૅનનો અચળાંક કહેવાય છે.

$PV = (2/3)\ N \times (½\ m\overline{\upsilon^2}\ )$ (13.15b)

જ્યાં, $N (= nV)$ એ નમૂનામાં રહેલા અણુઓની સંખ્યા છે.

કૌંસમાંની રાશિ વાયુના અણુઓની સરેરાશ રેખીય ગતિઊર્જા છે. આદર્શ વાયુની આંતરિક ઊર્જા E સંપૂર્ણ ગતિકીય* હોવાથી,

$E = N \times (1/2)\ m\overline{\upsilon^2}$ (13.16)

આ પરથી સમીકરણ (13.15) મુજબ

$PV = (2/3)\ E$ (13.17)

હવે આપણે તાપમાનના ગતિક અર્થઘટન માટે તૈયાર છીએ. સમીકરણ (13.17) અને આદર્શ વાયુ સમીકરણ (13.3) પરથી

$E = (3/2)\ k_B\ NT$ (13.18)

અથવા $E / N = ½\ m\ \overline{\upsilon^2}\ = (3/2)k_B\ T$ (13.19)

એટલે કે, વાયુના અણુની સરેરાશ ગતિઊર્જા તેના નિરપેક્ષ તાપમાનના સમપ્રમાણમાં હોય છે; તે દબાણ, કદ અથવા આદર્શ વાયુની પ્રકૃતિથી સ્વતંત્ર હોય છે. આ મૂળભૂત (સિદ્ધાંત) સમીકરણ તાપમાન, જે વાયુની માપી શકાય તેવી સ્થૂળ રાશિ છે (જેને થરમૉડાયનેમિક ચલ પણ કહે છે), તેને આણ્વીક રાશિ, એટલે કે અણુની સરેરાશ ગતિઊર્જા સાથે સાંકળે છે. આ બંને વિભાગો (Domains) બૉલ્ટ્ઝમેનના અચળાંક વડે સંકળાયેલા છે. વધુમાં આપણે નોંધીએ કે સમીકરણ (13.18) મુજબ આદર્શ વાયુની આંતરિક ઊર્જા ફક્ત તેના તાપમાન પર આધાર રાખે છે, નહિ કે દબાણ અથવા કદ પર. તાપમાનના આ અર્થઘટન સાથે, આદર્શ વાયુનો ગતિવાદ એ આદર્શ વાયુ સમીકરણ અને તેના પર આધારિત બીજા વાયુનિયમો સાથે સુસંગત છે.

અક્રિયાશીલ એવા આદર્શ વાયુઓના મિશ્રણ માટે, મિશ્રણમાં રહેલ દરેક વાયુ કુલ દબાણમાં ફાળો આપે છે. સમીકરણ (13.14) પરથી,

$P = (1/3)\ [n_1 m_1 \overline{\upsilon_1^2}\ + n_2 m_2 \overline{\upsilon_2^2} + ...]$ (13.20)

સંતુલનની સ્થિતિમાં, જુદા જુદા દરેક વાયુના અણુઓની સરેરાશ ગતિઊર્જા સમાન હશે. એટલે કે,

$½\ m_1 \overline{\upsilon_1^2} = (½)\ m_2 \overline{\upsilon_2^2} = (3/2)k_B\ T$

આથી,

$P = (n_1 + n_2 + ...)\ k_B\ T$ (13.21)

જે આંશિક દબાણ માટેનો ડાલ્ટનનો નિયમ (Dalton's Law) છે.

સમીકરણ (13.19) પરથી, આપણને વાયુના અણુઓની ઝડપ કેટલી હશે તેનો અંદાજ મળે છે. $T = 300$ K તાપમાને, નાઇટ્રોજન વાયુના અણુની સરેરાશ વર્ગીત ઝડપ (Mean Square Speed) આ રીતે શોધાય.

$$m = \frac{M_{N_2}}{N_A} = \frac{28}{6.02 \times 10^{26}} = 4.65 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

$$\overline{\upsilon^2} = 3\ k_B\ T\ /\ m = (516)^2\ \text{m}^2\ \text{s}^{-2}$$

$\overline{\upsilon^2}$ ના વર્ગમૂળને સરેરાશ વર્ગીત ઝડપનું વર્ગમૂળ (Root Mean Square (rms) Speed) કહે છે અને તે υ_{rms} વડે દર્શાવાય છે, (આપણે $\overline{\upsilon^2}$ ને $<\upsilon^2>$ વડે પણ દર્શાવીએ છીએ.)

$\upsilon_{rms} = 516\ \text{m s}^{-1}$

આ ઝડપ હવામાં અવાજની ઝડપના ક્રમની છે. સમીકરણ (13.19) પરથી સ્પષ્ટ છે કે આ જ તાપમાને હલકા (Lighter) અણુઓની rms ઝડપ વધુ હોય છે.

ઉદાહરણ 13.5 એક બીકરમાં આર્ગન અને ક્લોરિન વાયુઓના દળ 2 : 1 પ્રમાણમાં રહેલા છે. આ મિશ્રણનું તાપમાન 27 °C છે. તો બંને વાયુના અણુઓ માટે (i) અણુ દીઠ સરેરાશ ગતિઊર્જા અને (ii) સરેરાશ વર્ગીત ઝડપનું વર્ગમૂળ υ_{rms} મેળવો.
આર્ગનનો પરમાણુભાર = 39.9 u,
ક્લોરિનનો અણુભાર = 70.9 u

ઉકેલ યાદ રાખવા જેવો મુદ્દો એ છે કે કોઈ પણ (આદર્શ) વાયુની (અણુ દીઠ) સરેરાશ ગતિઊર્જા (ભલે તે આર્ગનની જેમ એક પરમાણ્વિક, ક્લોરિનની જેમ દ્વિ-પરમાણ્વિક કે બહુ પરમાણ્વિક હોય) હંમેશાં $(3/2)\ k_B\ T$ જેટલી હોય છે. તે ફક્ત તાપમાન પર આધાર રાખે છે અને વાયુના પ્રકાર પર આધાર રાખતી નથી.

(i) વાયુપાત્રમાં રહેલા આર્ગન અને ક્લોરિન બંનેનું તાપમાન સમાન હોવાથી, બંને વાયુઓની (અણુ દીઠ) સરેરાશ ગતિઊર્જાનો ગુણોત્તર 1:1 છે.

(ii) હવે $(½)\ m\ \upsilon_{rms}^{\ 2}$ = અણુ દીઠ સરેરાશ ગતિઊર્જા = $(3/2)\ k_B\ T$, જ્યાં m એ વાયુના અણુનું દળ છે. આથી,

$$\frac{(\upsilon^2_{rms})_{Ar}}{(\upsilon^2_{rms})_{Cl}} = \frac{(m)_{Cl}}{(m)_{Ar}} = \frac{(M)_{Cl}}{(M)_{Ar}} = \frac{70.9}{39.9} = 1.77$$

જ્યાં, M વાયુનું આણ્વિક દળ દર્શાવે છે. (આર્ગન માટે, આર્ગન અણુ એ જ પરમાણુ છે.)

બંને બાજુ વર્ગમૂળ લેતાં,

$$\frac{(\upsilon_{rms})_{Ar}}{(\upsilon_{rms})_{Cl}} = 1.33$$

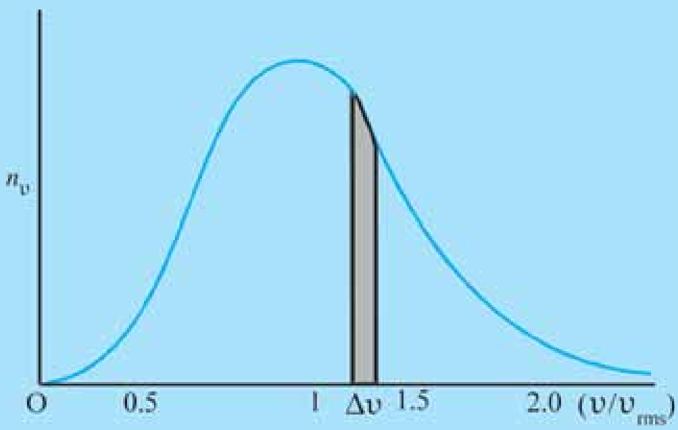
એ યાદ રાખો કે ઉપરની ગણતરીમાં દળના રૂપમાં મિશ્રણનો ઉપયોગ અપ્રસ્તુત છે. જો તાપમાન બદલાતું ન હોય તો દળના

* *E આંતરિક ઊર્જા Uનો રેખીય ભાગ દર્શાવે છે જેમાં બીજા પ્રકારના મુક્તતાના અંશો સાથે સંકળાયેલી ઊર્જા પણ હોઈ શકે. પરિચ્છેદ 13.5 જુઓ.*

મૅક્સવેલ વિતરણ વિધેય (Maxwell Distribution Function)

આપેલ દળના કોઈ વાયુમાં સ્થૂળ રાશિઓ જેવી કે દબાણ, કદ અને તાપમાન અચળ હોય તોપણ અણુઓના વેગ સમાન નથી હોતા. અથડામણોના કારણે અણુઓની દિશા અને ઝડપ બદલાય છે. આમ છતાં સંતુલન સ્થિતિમાં, ઝડપનું વિતરણ અચળ કે ચોક્કસ હોય છે.

જ્યારે ખૂબ મોટી સંખ્યામાં પદાર્થોને સમાવતાં તંત્રો સાથે કામ પાર પાડવામાં આવે ત્યારે આ વિતરણ ખૂબ અગત્યનું અને ઉપયોગી છે. ઉદાહરણ તરીકે, શહેરમાં વસતા જુદી જુદી ઉંમરના લોકો વિચારો. આપણે લોકોને જૂથમાં વહેંચી શકીએ : 20 વર્ષ સુધીનાં બાળકો, 20 થી 60 વર્ષની ઉંમરના વયસ્કો, 60થી ઉપરના વૃદ્ધો. જો આપણે વધારે ઊંડાણમાં માહિતી જોઈતી હોય, તો આપણે નાના અંતરાલો વિચારી શકીએ, 0-1, 1-2, ..., 99-100 ઉંમરના જૂથ. જ્યારે અંતરાલનું કદ નાનું થાય, ધારો કે અડધું વર્ષ, તો આ અંતરાલમાં માણસોની સંખ્યા પણ આશરે એક વર્ષના અંતરાલમાં મૂળ સંખ્યાના અડધા મૂલ્ય જેટલી ઘટશે. x અને $x + dx$ વર્ષના અંતરાલમાં માણસોની સંખ્યા $dN(x)$ એ dxના સમપ્રમાણમાં અથવા $dN(x) = n_x$ હોય છે. આપણે x પાસે માણસોની સંખ્યા દર્શાવવા n_xનો ઉપયોગ કર્યો છે.



અણુઓની ઝડપ માટે મૅક્સવેલનું વિતરણ

આ જ રીતે અણુઓની ઝડપનું વિતરણ, ઝડપ υ અને $\upsilon + d\upsilon$ની વચ્ચે અણુઓની સંખ્યા દર્શાવે છે. $dN(\upsilon) = 4p\text{N}\, a^3 e^{-bv2}\, \upsilon^2\, d\upsilon = n_\upsilon d\upsilon$. આને મૅક્સવેલનું વિતરણ કહે છે. n_υ વિરુદ્ધ υનો આલેખ આકૃતિમાં દર્શાવ્યો છે. υ અને $\upsilon + d\upsilon$ સુધીની ઝડપ ધરાવતા અણુઓની આંશિક સંખ્યા આપેલ પટ્ટી (Strip)ના ક્ષેત્રફળ જેટલી હોય છે. કોઈ પણ રાશિ જેવી કે υ^2નું સરેરાશ સંકલન $<\upsilon^2> = (1 / N) \int \upsilon^2\, dN(\upsilon) = \sqrt{(3\, k_B T / m)}$ વડે વ્યાખ્યાયિત થાય છે, જે પ્રાથમિક ખ્યાલો સાથે વધુ મળતું આવે છે.

બીજા કોઈ પ્રમાણના આર્ગન અને ક્લોરિન માટે પણ (i) અને (ii)નો એ જ જવાબ મળશે. ◀

▶ *ઉદાહરણ 13.6* યુરેનિયમના બે સમસ્થાનિકો (Isotopes)ના દળ 235 અને 238 units (એકમ) છે. યુરેનિયમ હેક્ઝાફ્લોરાઇડ વાયુમાં જો બંને હાજર હોય તો કોની સરેરાશ ઝડપ વધારે હશે ? જો ફ્લોરિનનો પરમાણુભાર 19 units હોય, તો કોઈ પણ તાપમાને ઝડપના તફાવતની ટકાવારી શોધો.

ઉકેલ નિયત તાપમાને સરેરાશ ઊર્જા $= (\frac{1}{2})m <\upsilon^2>$ અચળ હોય છે. અણુનું દળ જેટલું ઓછું, તેટલી ઝડપ વધારે. ઝડપનો ગુણોત્તર દળના ગુણોત્તરના વર્ગમૂળના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે. આ દળો 349 અને 352 unit છે, આથી

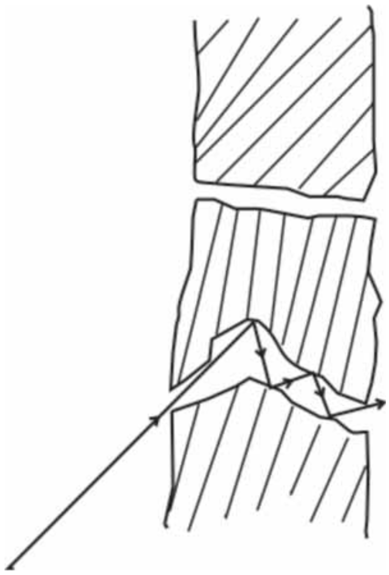
$$\upsilon_{349} / \upsilon_{352} = (352 / 349)^{1/2} = 1.0044$$

આથી, તફાવત $\frac{\Delta V}{V} = 0.44\ \%$

[^{235}U સમસ્થાનિક ન્યુક્લિઅર વિખંડન (Fission) માટે વપરાય છે. પુષ્કળ પ્રમાણમાં મળી આવતા સમસ્થાનિક ^{238}Uમાંથી તેને જુદો પાડવા માટે, આ મિશ્રણને છિદ્રાળું નળાકારની વચ્ચે રાખવામાં આવે છે. આ છિદ્રાળું નળાકાર જાડો અને સાંકડો હોવો જોઈએ કે જેથી અણુઓ આ લાંબાં છિદ્રોવાળી દીવાલ સાથે અથડાતા જઈને વારાફરતી પસાર થઈ

શકે. ધીમા અણુ કરતાં ઝડપી અણુ વધારે પ્રમાણમાં બહાર નીકળશે અને તેથી હલકા અણુઓ (નું પ્રમાણ) છિદ્રાળુ પાત્રની બહાર વધુ હશે (આકૃતિ 13.5). આ પદ્ધતિ બહુ કાર્યક્ષમ નથી અને પૂરતા પ્રમાણમાં મેળવવા માટે તેને વારંવાર કરવી પડે છે.]

જ્યારે વાયુઓ એકબીજામાં ભળતા (Diffuse) હોય, ત્યારે ભળવાનો દર તેમના દળના વર્ગમૂળના સમપ્રમાણમાં હોય છે (ઉદાહરણ 13.12 જુઓ). ઉપરના જવાબ પરથી તમે સમજૂતી વિચારી શકો ? ◀



આકૃતિ 13.5 છિદ્રાળુ દીવાલમાંથી પસાર થતા અણુઓ

▶ *ઉદાહરણ 13.7* (a) જ્યારે કોઈ અણુ (કે સ્થિતિસ્થાપક બૉલ), (દળદાર) દીવાલ સાથે અથડાય ત્યારે એ જ ઝડપથી પાછો પડે (ફરે) છે. જ્યારે એક બૉલ મજબૂત રીતે પકડી રાખેલા ભારે બૅટ સાથે અથડાય ત્યારે પણ આમ જ થાય છે. આમ છતાં, જ્યારે બૅટ બૉલ તરફ ગતિ કરતું હોય, ત્યારે બૉલ જુદી ઝડપથી પાછો ફરે છે. બૉલ વધારે ઝડપથી કે ધીમેથી પાછો પડશે ? (પ્રકરણ 6 પરથી તમને સ્થિતિસ્થાપક અથડામણો યાદ આવશે.)

(b) જ્યારે પિસ્ટનને નળાકારમાં ધકેલીને તેમાં રહેલા વાયુને દબાવવામાં (સંકોચવામાં) આવે, ત્યારે તેનું તાપમાન વધે છે. ઉપર (a)માં આપેલ ગતિવાદના સંદર્ભમાં આની સમજૂતી આપો.

(c) જ્યારે સંકોચાયેલ વાયુ પિસ્ટનને બહાર ધકેલે અને પ્રસરણ પામે ત્યારે શું થાય છે ? તમે શું અવલોકન કરશો ?

(d) ક્રિકેટ રમતી વખતે સચિન તેંડુલકર ભારે બૅટનો ઉપયોગ કરે છે. શું તે એને કોઈ રીતે ઉપયોગી થશે ?

ઉકેલ (a) ધારો કે બૅટની પાછળના સ્ટંપની સાપેક્ષે બૉલની ઝડપ u છે. જો સ્ટંપની સાપેક્ષે બૅટ-બૉલ તરફ V ઝડપથી ગતિ કરતું હોય (આવતું હોય), તો બૅટની સાપેક્ષે બૅટ તરફ બૉલની ઝડપ $V + u$ હોય. જ્યારે (ભારે બૅટ સાથે અથડાઈને) બૉલ પાછો ફેંકાય ત્યારે તેની ઝડપ, બૅટની સાપેક્ષે, બૅટથી દૂર તરફ $V + u$ જેટલી હોય. આથી, સ્ટંપની સાપેક્ષે, સ્ટંપથી દૂર તરફ, પાછા ફેંકાયેલા બૉલની ઝડપ $V + (V + u) = 2V + u$ હોય.

આમ, બૅટ સાથે અથડામણ બાદ બૉલ ઝડપ પકડે છે. જો બૅટ ભારે ન હોય તો પાછા ફરવાની ઝડપ u કરતાં ઓછી હોઈ શકે. અણુ માટે આનો મતલબ એ કે તાપમાન વધશે.

(a)ના જવાબ પરથી તમે (b), (c) અને (d)નો જવાબ આપી શકશો.

(**સૂચના :** અનુરૂપ (બંધબેસતા) જોડકાં યાદ રાખો. પિસ્ટન → બૅટ, નળાકાર → સ્ટંપ, અણુ → બૉલ) ◀

13.5 ઊર્જા સમવિભાજનનો નિયમ (LAW OF EQUIPARTITION OF ENERGY)

એક અણુની ગતિઊર્જા

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 \tag{13.22}$$

છે. T તાપમાને, ઉષ્મીય સંતુલનમાં રહેલા વાયુની સરેરાશ ઊર્જા $<\varepsilon_t>$ વડે દર્શાવીએ તો,

$$<\varepsilon_t> = \left\langle \frac{1}{2}mv_x^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2}mv_y^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2}mv_z^2 \right\rangle = \frac{3}{2}k_BT \tag{13.23}$$

અહીં, કોઈ ઇચ્છિત (પસંદગીની) દિશા ન હોવાથી, સમીકરણ (13.23) પરથી,

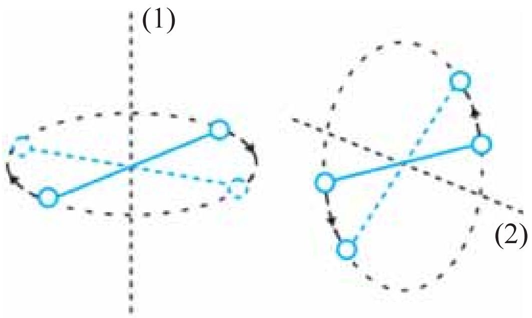
$$\left\langle \frac{1}{2}mv_x^2 \right\rangle = \frac{1}{2}k_BT, \quad \left\langle \frac{1}{2}mv_y^2 \right\rangle = \frac{1}{2}k_BT,$$

$$\left\langle \frac{1}{2}mv_z^2 \right\rangle = \frac{1}{2}k_BT \tag{13.24}$$

અવકાશમાં ગતિ કરી શકે તેવા મુક્ત અણુનું સ્થાન દર્શાવવા ત્રણ યામ જરૂરી હોય છે. જો તે ફક્ત કોઈ સમતલમાં ગતિ કરવા માટે બંધિત (Constrained) હોય તો તેને બે અને જો તે કોઈ રેખા પર ગતિ કરવા માટે બંધિત હોય તો તેનું સ્થાન નક્કી કરવા માટે ફક્ત એક જ યામ જરૂરી છે. આને બીજી રીતે પણ સમજી શકાય. આપણે કહી શકીએ કે તેની મુક્તતાના અંશો રેખા પર (રેખીય) ગતિ કરવા માટે એક, સમતલમાં ગતિ કરવા માટે બે અને અવકાશમાં ગતિ કરવા માટે ત્રણ હોય છે. સમગ્ર પદાર્થની (as a whole), એક બિંદુથી બીજા બિંદુ સુધીની ગતિને રેખીય ગતિ કહે છે. આમ, અવકાશમાં ગતિ કરવા માટે મુક્ત એવા કણને રેખીય ગતિની મુક્તતાના અંશો ત્રણ હોય છે. રેખીય ગતિની મુક્તતાનો દરેક અંશ ગતિના કોઈ એક ચલના વર્ગ દા.ત., $\frac{1}{2}mv_x^2$ અને તે જ રીતે v_y અને v_zનાં પદોનો ફાળો આપે છે. ઉષ્મીય સંતુલનના સમીકરણ (13.24)માં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે આવા દરેક પદનું સરેરાશ $\frac{1}{2}k_BT$ છે.

આર્ગન જેવા એક પરમાણ્વિક અણુઓને ફક્ત રેખીય ગતિની મુક્તતાના અંશો જ હોય છે. પરંતુ, O_2 અથવા N_2 જેવા દ્વિપરમાણ્વિક અણુઓ ધરાવતા વાયુનું શું ? O_2ના અણુને રેખીય ગતિની મુક્તતાના અંશો ત્રણ હોય છે. પણ આ ઉપરાંત તે પોતાના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની આસપાસ ચાકગતિ પણ કરી શકે છે. આકૃતિ (13.6)માં ઑક્સિજનના બે પરમાણુઓને જોડતી અક્ષને લંબ રૂપે રહેલી બે સ્વતંત્ર ચાકગતિની અક્ષો 1 અને 2 દર્શાવી છે. જેમની આસપાસ અણુ ચાકગતિ કરી શકે*. અણુને ચાકગતિની મુક્તતાના અંશો બે હોય છે. જેમનો ફાળો પણ કુલ ઊર્જાનાં પદો : રેખીય ઊર્જા ε_t અને ચાકગતિ ઊર્જા ε_rમાં હોય છે.

$$\varepsilon_t+\varepsilon_r=\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}mv_y^2+\frac{1}{2}mv_z^2+\frac{1}{2}I_1\omega_1^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \tag{13.25}$$



આકૃતિ **13.6** *દ્વિપરમાણ્વિક અણુની ચાકગતિની બે સ્વતંત્ર અક્ષ*

જ્યાં, ω_1 અને ω_2 અનુક્રમે અક્ષો 1 અને 2ની આસપાસ (સાપેક્ષે) કોણીય ઝડપ તથા I_1, I_2 જડત્વની ચાકમાત્રા છે. નોંધો કે, ચાકગતિની દરેક મુક્તતાનો અંશ ઊર્જાના પદમાં ફાળો આપે છે. જેમાં ચાકગતિના ચલનો વર્ગ આવેલ હોય છે.

આપણે ઉપર ધાર્યું હતું કે, O_2 અણુ એ 'દૃઢ અણુ' (Rigid Rotator) છે, એટલે કે અણુ કંપન કરતો નથી. O_2 માટે કરેલ આ ધારણા (નિયંત્રિત તાપમાને) સત્ય હોવા છતાં, હંમેશાં માન્ય નથી હોતી. CO જેવા અણુઓ સામાન્ય તાપમાને પણ કંપન ધરાવતા હોય છે એટલે કે, તેના પરમાણુઓ આંતર પરમાણ્વિક અક્ષ પર એક-દિશ દોલકની જેમ કંપન કરતા હોય છે, જે કુલ ઊર્જામાં, કંપન ઊર્જા (Vibration Energy)નું પદ ε_v પ્રદાન કરે છે.

$$\varepsilon_v = \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}ky^2$$

$$\varepsilon = \varepsilon_t + \varepsilon_r + \varepsilon_v \tag{13.26}$$

જ્યાં, k એ દોલકનો બળ-અચળાંક છે અને y તેનો કંપન યામ (ચલ) છે.

સમીકરણ (13.26)માં પણ કંપનઊર્જાનાં પદો, કંપન ગતિના ચલો y અને dy/dt ના વર્ગના પદ ધરાવે છે.

આ સ્થિતિમાં, સમીકરણ (13.26)નું એક અગત્યનું તારણ નોંધો. દરેક રેખીય અને ચક્રીય મુક્તતાના અંશ સમીકરણ (13.26)માં ફક્ત એક વર્ગીત પદ પ્રદાન કરે છે પણ કંપનનો એક પ્રકાર (Mode) બે 'વર્ગીત પદો' પ્રદાન કરે છે : ગતિ અને સ્થિતિઊર્જાઓ.

ઊર્જાના સમીકરણમાં આવતું દરેક દ્વિઘાત (Quadratic) પદ એ અણુની ઊર્જાના શોષણ (Absorption)નો પ્રકાર દર્શાવે છે. આપણે જોયું છે કે, T નિરપેક્ષ તાપમાને તાપીય સંતુલનમાં, દરેક રેખીય ગતિના પ્રકાર માટે સરેરાશ ઊર્જા $\frac{1}{2}k_BT$ છે. આંકડાકીય પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્રનો ખૂબ અગત્યનો સિદ્ધાંત (જે પ્રથમ મૅક્સવેલે સાબિત કર્યો હતો) દર્શાવે છે કે આવું ઊર્જાના દરેક પ્રકાર માટે હોય છે, રેખીય, ચક્રીય અને કંપન. એટલે કે, સંતુલનની સ્થિતિમાં, કુલ ઊર્જા દરેક પ્રકારની ઊર્જાઓમાં સમાન રીતે વિતરીત હોય છે, જે દરેક પ્રકારની સરેરાશ ઊર્જા $\frac{1}{2}k_BT$ જેટલી હોય છે. આને **ઊર્જાના સમવિભાજનનો નિયમ (Law of Equipartition of Energy)** કહે છે. અણુની દરેક રેખીય અને ચક્રીય મુક્તતાનો અંશ ઊર્જામાં $\frac{1}{2}k_BT$ પદ પ્રદાન કરે છે, જ્યારે દરેક કંપન આવૃત્તિ $2 \times \frac{1}{2}k_BT = k_BT$ પદ પ્રદાન કરે છે, કારણ કે કંપન પ્રકારમાં ગતિ અને સ્થિતિ બંને પ્રકારની ઊર્જા હોય છે.

ઊર્જાના સમવિભાજનની સાબિતી આ પુસ્તકની મર્યાદાની બહાર છે. અહીં, આપણે આ નિયમનો ઉપયોગ કરીને સૈદ્ધાંતિક રીતે વાયુઓની વિશિષ્ટ ઊર્જા શોધવા પ્રયત્ન કરીશું.

આગળ જતાં આપણે ઘન પદાર્થોની વિશિષ્ટ ઉષ્માઓના ઉપયોગો વિશે પણ ટૂંકમાં ચર્ચા કરીશું.

13.6 વિશિષ્ટ ઉષ્મા-ક્ષમતા (SPECIFIC HEAT CAPACITY)

13.6.1 એકપરમાણ્વિક વાયુઓ (Monoatomic Gases)

એકપરમાણ્વિક વાયુના અણુને રેખીય મુક્તતાના ફક્ત ત્રણ અંશ હોય છે. આથી, T તાપમાને આ અણુની સરેરાશ ઊર્જા $(3/2)k_BT$ હોય છે. આ વાયુના એક મોલની કુલ આંતરિક ઊર્જા,

* *પરમાણુઓને જોડતી રેખાની ઉપર, ચાકગતિની ચાકમાત્રા નહિવત હોય છે, જે ક્વૉન્ટમ યંત્રશાસ્ત્ર મુજબ કોઈ કામમાં નથી આવતી. પરિચ્છેદ 13.6નો અંત ભાગ જુઓ.*

$$U = \frac{3}{2}k_B T \times N_A = \frac{3}{2}RT \tag{13.27}$$

છે. અચળ કદે મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા C_Vનું મૂલ્ય,

$$C_V \text{ (એક પરમાણ્વિક વાયુ)} = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}R \tag{13.28}$$

આદર્શ વાયુ માટે,

$$C_P - C_V = R \tag{13.29}$$

જ્યાં, C_P એ અચળ દબાણે મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા છે. આમ,

$$C_P = \frac{5}{2}R \tag{13.30}$$

$$\text{વિશિષ્ટ ઉષ્માઓનો ગુણોત્તર } \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3} \tag{13.31}$$

13.6.2 દ્વિપરમાણ્વિક વાયુઓ (Diatomic Gases)

આગળ સમજાવ્યું તે મુજબ, ડમ્બેલ (Dumbbell)ની જેમ નિરૂપણ કરેલ Rigid Rotator (ચાકગતિ કરી શકે તેવા દઢ અણુ) દ્વિપરમાણ્વિક અણુને 5 મુક્તતાના અંશો હોય છે : 3 રેખીય અને 2 ચક્રીય. ઊર્જા સમવિભાજના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં, આવા એક મોલ વાયુની કુલ આંતરિક ઊર્જા,

$$U = \frac{5}{2}k_B T \times N_A = \frac{5}{2}RT \tag{13.32}$$

આ પરથી મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માઓ.

$$C_V \text{ (દઢ દ્વિપરમાણ્વિક)} = \frac{5}{2}R,\ C_P = \frac{7}{2}R \tag{13.33}$$

$$\gamma \text{ (દઢ દ્વિપરમાણ્વિક)} = \frac{7}{5} \tag{13.34}$$

જો દ્વિપરમાણ્વિક અણુ દઢ ન હોય પરંતુ તે વધારામાં કંપન પણ ધરાવતો હોય તો

$$U = \left(\frac{5}{2}k_B T + k_B T\right)N_A = \frac{7}{2}RT$$

$$C_V = \frac{7}{2}R,\ C_P = \frac{9}{2}R,\ \gamma = \frac{9}{7} \tag{13.35}$$

13.6.3 બહુ પરમાણ્વિક વાયુઓ (Polyatomic Gases)

સામાન્ય રીતે બહુપરમાણ્વિક અણુને 3 રેખીય, 3 ચક્રીય મુક્તતાના અંશો અને અમુક સંખ્યા (f)ના કંપનના પ્રકારો (Modes) હોય છે. ઊર્જા સમવિભાજનના નિયમ પરથી સહેલાઈથી જોઈ શકીએ કે,

$$U = \left(\frac{3}{2}k_B T + \frac{3}{2}k_B T + f\,k_B T\right)N_A$$

તેથી, $C_V = (3 + f)\,R$, $C_P = (4 + f)\,R$,

$$\gamma = \frac{(4+f)}{(3+f)} \tag{13.36}$$

નોંધો કે એક, દ્વિ કે બહુપરમાણ્વિક એવા કોઈ પણ આદર્શ વાયુ માટે $C_P - C_V = R$ સાચું છે.

વાયુઓના કંપન ગતિના પ્રકારો (Modes) અવગણીને સૈદ્ધાંતિક રીતે અનુમાનિત વિશિષ્ટ ઉષ્માનાં મૂલ્યોનો સારાંશ કોષ્ટક 13.1માં દર્શાવ્યો છે. પ્રાયોગિક રીતે કેટલાક વાયુઓ માટે મેળવેલ વિશિષ્ટ ઉષ્માનાં મૂલ્યો કોષ્ટક 13.2માં દર્શાવેલ છે, જેમની સાથે આ મૂલ્યો મળતાં આવે છે. જોકે બીજા કેટલાક Cl_2, C_2H_6 અને અન્ય બહુપરમાણુક જેવા વાયુઓ માટે વિશિષ્ટ ઉષ્માના અનુમાનિત અને વાસ્તવિક મૂલ્યો વચ્ચે તફાવત છે (કોષ્ટકમાં બતાવેલ નથી). સામાન્યતઃ આ વાયુઓની વિશિષ્ટ ઉષ્માનાં પ્રાયોગિક મૂલ્યો કોષ્ટક 13.1માં દર્શાવેલ અનુમાનિત મૂલ્યો કરતાં મોટાં હોય છે, જે સૂચવે છે કે ગણતરીમાં ગતિના કંપન પ્રકારનો સમાવેશ કરીને તેમની વચ્ચેની સામ્યતા સુધારી શકાય છે.

આમ, સામાન્ય તાપમાને ઊર્જા સમવિભાજનનો નિયમ પ્રાયોગિક રીતે ચકાસી શકાય છે.

કોષ્ટક 13.1 વાયુઓની વિશિષ્ટ ઉષ્મા-ક્ષમતાઓના અનુમાનિત મૂલ્યો (કંપન પ્રકારો અવગણીને)

વાયુનો પ્રકાર	C_V (J mol^{-1} K^{-1})	C_P (J mol^{-1} K^{-1})	$C_P - C_V$ (J mol^{-1} K^{-1})	γ
એકપરમાણ્વિક	12.5	20.8	8.31	1.67
દ્વિપરમાણ્વિક	20.8	29.1	8.31	1.40
ત્રિપરમાણ્વિક	24.93	33.24	8.31	1.33

કોષ્ટક 13.2 કેટલાક વાયુઓની વિશિષ્ટ ઉષ્મા-ક્ષમતાના માપેલ મૂલ્યો

વાયુનો પ્રકાર	વાયુ	C_V (J mol^{-1} K^{-1})	C_P (J mol^{-1} K^{-1})	$C_P - C_V$ (J mol^{-1} K^{-1})	γ
એકપરમાણ્વિક	He	12.5	20.8	8.30	1.66
એકપરમાણ્વિક	Ne	12.7	20.8	8.12	1.64
એકપરમાણ્વિક	Ar	12.5	20.8	8.30	1.67
દ્વિપરમાણ્વિક	H_2	20.4	28.8	8.45	1.41
દ્વિપરમાણ્વિક	O_2	21.0	29.3	8.32	1.40
દ્વિપરમાણ્વિક	N_2	20.8	29.1	8.32	1.40
ત્રિપરમાણ્વિક	H_2O	27.0	35.4	8.35	1.31
બહુપરમાણ્વિક	CH_4	27.1	35.4	8.36	1.31

ઉદાહરણ 13.8 ચોક્કસ કદનું એક નળાકાર (પાત્ર) પ્રમાણભૂત તાપમાન અને દબાણે 44.8 litre હિલિયમ વાયુ ધરાવે છે. નળાકારમાં રહેલા વાયુનું તાપમાન 15.0° C જેટલું વધારવા માટે કેટલી ઉષ્મા જરૂરી છે ? ($R = 8.31$ J mol^{-1} K^{-1})

ઉકેલ વાયુના નિયમ $PV = \mu RT$નો ઉપયોગ કરીને તમે સહેલાઈથી દર્શાવી શકો કે નિરપેક્ષ તાપમાન (273 K) અને દબાણ (1 atm = 1.01×10^5 Pa)એ 1 મોલ જેટલો (આદર્શ) વાયુ 22.4 litre કદ રોકે છે. આ સાર્વત્રિક કદને મોલર કદ કહે છે. આ ઉદાહરણમાં આપેલ નળાકાર 2 મોલ હિલિયમ ધરાવે છે. આ ઉપરાંત, હિલિયમ એક-પરમાણ્વિક હોવાથી, અચળ કદે તેની સૈદ્ધાંતિક (અને પ્રાયોગિક) મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા, $C_V = (3/2)R$ અને અચળ દબાણે મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા $C_P = (3/2)R + R = (5/2)R$ છે. નળાકારનું કદ અચળ હોવાથી, જરૂરી ઉષ્મા C_Vની મદદથી ગણી શકાય છે. આથી, જરૂરી ઉષ્મા = મોલની સંખ્યા × મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા × તાપમાનનો વધારો.

$= 2 \times 1.5\ R \times 15.0 = 45\ R$

$= 45 \times 8.31 = 374$ J

13.6.4 ઘન પદાર્થોની વિશિષ્ટ ઉષ્મા-ક્ષમતા (Specific Heat Capacity of Solids)

આપણે ઊર્જા સમવિભાજનના નિયમનો ઉપયોગ ઘન પદાર્થોની વિશિષ્ટ ઉષ્મા મેળવવા કરી શકીએ. N પરમાણુઓ ધરાવતો એક ઘન પદાર્થ વિચારો, કે જેઓ તેમના મધ્યમાન સ્થાનની આસપાસ કંપન કરતા હોય. એક પરિમાણમાં આંદોલનની સરેરાશ ઊર્જા $2 \times \frac{1}{2}\ k_BT = k_BT$ હોય છે. ત્રિપરિમાણમાં, સરેરાશ ઊર્જા $3k_BT$. એક મોલ જેટલા ઘન પદાર્થ માટે, $N = N_A$, અને કુલ ઊર્જા

$U = 3\ k_BT \times N_A = 3\ RT$

પરંતુ, અચળ દબાણે $\Delta Q = \Delta U + P\Delta V = \Delta U$, કારણ કે ઘન પદાર્થ માટે ΔV અવગણી શકાય તેવું હોય છે. આથી,

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} = 3R \qquad (13.37)$$

કોષ્ટક 13.3 ઓરડાના તાપમાન અને વાતાવરણના દબાણે કેટલાક ઘન પદાર્થોની વિશિષ્ટ ઉષ્મા-ક્ષમતા

પદાર્થ	વિશિષ્ટ ઉષ્મા (J kg^{-1} K^{-1})	મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા (J mol^{-1} K^{-1})
ઍલ્યુમિનિયમ	900.0	24.4
કાર્બન	506.5	6.1
તાંબું	386.4	24.5
સીસું	127.7	26.5
ચાંદી	236.1	25.5
ટંગસ્ટન	134.4	24.9

કોષ્ટક 13.3 દર્શાવે છે કે, સામાન્ય તાપમાને (કાર્બન સિવાય) અનુમાન કરેલ મૂલ્યો પ્રાયોગિક મૂલ્યો સાથે મળતાં આવે છે.

13.6.5 પાણીની વિશિષ્ટ ઉષ્મા-ક્ષમતા (Specific Heat Capacity of Water)

આપણે પાણીને ઘન પદાર્થની જેમ ગણીએ (Treat) છીએ. દરેક પરમાણુ માટે સરેરાશ ઊર્જા $3k_BT$.

પાણીના અણુને ત્રણ પરમાણુ હોય છે, બે હાઇડ્રોજન અને એક ઑક્સિજન. આથી તેના માટે

$U = 3 \times 3\ k_BT \times N_A = 9\ RT$

અને $C = \Delta Q / \Delta T = \Delta U / \Delta T = 9R$

આ મૂલ્ય અવલોકન દ્વારા મેળવેલ છે અને તે ઘણું મળતું આવે છે. કેલરી, ગ્રામ, ડિગ્રી એકમોમાં, પાણીની વિશિષ્ટ ઉષ્મા એક એકમ વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે. જ્યારે 1 કેલરી = 4.179 જૂલ અને એક મોલ પાણી 18 ગ્રામ જેટલું હોય, ત્યારે મોલ દીઠ વિશિષ્ટ ઉષ્મા ~ 75 J mol^{-1} K^{-1} ~ 9R જેટલી હોય છે. આમ છતાં આલ્કોહૉલ અથવા એસિટોન જેવા જટિલ (Complex) અણુઓ માટે, મુક્તતાના અંશો પર આધારિત દલીલો (Arguments) વધુ ગૂંચવાડા ભરી બને છે.

અંતમાં, ઊર્જા સમવિભાજનના પ્રચલિત નિયમના આધારે વિશિષ્ટ ઉષ્માઓ કેવી રીતે અનુમાનિત કરી શકાય તે મુદ્દો નોંધીએ. અનુમાન કરેલ વિશિષ્ટ ઉષ્માઓ તાપમાનથી સ્વતંત્ર છે. આપણે નીચા તાપમાન તરફ જઈએ, ત્યારે પણ, આ અનુમાનમાં થોડો તફાવત તો રહે છે. જેમ $T \rightarrow 0$ તેમ, બધા પદાર્થોની વિશિષ્ટ ઉષ્મા શૂન્ય સુધી પહોંચે છે. જે એ હકીકત સાથે સંકળાયેલ છે કે નીચા તાપમાને મુક્તતાના અંશો શિથિલ (Frozen) બની જાય છે અને બિનઅસરકારક બને છે. પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્ર મુજબ મુક્તતાના અંશો કોઈ પણ સમયે બદલાવા જોઈએ નહિ. વિશિષ્ટ ઉષ્માની આ વર્તણૂક, પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્રની મર્યાદા દર્શાવે છે અને તે ક્વૉન્ટમ યંત્રશાસ્ત્રની મદદથી સમજાવી શકાય, જે સૌપ્રથમ આઇનસ્ટાઇને દર્શાવ્યું હતું. ક્વૉન્ટમ યંત્રશાસ્ત્ર મુજબ, મુક્તતાના અંશો લાગુ પડે તે પહેલાં જરૂરી લઘુતમ ઊર્જા અશૂન્ય હોવી જોઈએ. કેટલાક કિસ્સાઓમાં જ કંપનની મુક્તતાના અંશો લાગુ પડવા માટેનું આ પણ એક કારણ છે.

13.7 સરેરાશ મુક્ત પથ (MEAN FREE PATH)

વાયુના અણુઓને ઘણી વાર અવાજની ઝડપના ક્રમ જેટલી વધારે ઝડપ હોય છે. છતાં, રસોડામાં બાટલામાંથી ચૂવાતો (Leaking) વાયુ (ગૅસ) ઓરડાના બીજા ખૂણાઓ સુધી પ્રસરતાં સારો એવો સમય લે છે. ધુમાડાના વાદળની ટોચ ઘણા કલાકો સુધી રહે છે. આમ થવાનું કારણ એ છે કે, વાયુના અણુઓને ચોક્કસ પણ નાનું કદ હોય છે, આથી તેઓ એકબીજા સાથે અથડામણ કરે જ છે. પરિણામે, તેઓ

દેખાય એ સમજીએ (Seeing is Believing)

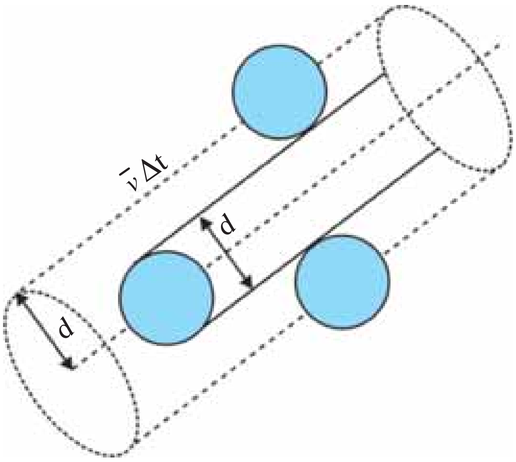
કોઈ આસપાસમાં ગતિ કરતા અણુઓ જોઈ શકે ? લગભગ નહિ જ. કોઈ પાણીના અણુઓ સાથે વહી જતી ફૂલોની પરાગરજ જોઈ શકે. આ અણુઓનું પરિમાણ ~10^{-5} m જેટલું હોય છે. 1827માં, સ્કોટલૅન્ડના વનસ્પતિશાસ્ત્રી (Botanist) રૉબર્ટ બ્રાઉને, માઇક્રોસ્કૉપમાંથી જોતાં નોધ્યું કે, પાણીમાં તરતી (કલીલ) ફૂલોની પરાગરજ સતત, અસ્તવ્યસ્ત ગતિ કરે છે.

ગતિવાદ આ ઘટનાની સાદી સમજ આપે છે. પાણીમાં તરતા કોઈ પણ પદાર્થ સાથે પાણીના અણુઓ બધી બાજુથી સતત અથડાતા હોય છે. અણુઓની ગતિ અસ્તવ્યસ્ત હોવાથી કોઈ પણ પદાર્થને એક દિશામાંથી અથડાતા અણુઓની સંખ્યા, વિરુદ્ધ દિશામાંથી અથડાતા અણુઓની સંખ્યા જેટલી હોય છે. અણુઓની આ અથડામણોનો તફાવત સામાન્ય કદના પદાર્થને અથડાતા અણુઓની કુલ સંખ્યાની સરખામણીમાં નહિવત્ હોય છે અને આપણે આ પદાર્થની સામાન્ય હલનચલનને નોંધી શકતા નથી.

જ્યારે પદાર્થ પૂરતો નાનો હોય છતાં પણ માઇક્રોસ્કૉપમાંથી જોઈ શકાય એવો હોય ત્યારે, અલગ દિશાઓમાંથી અથડાતા અણુઓની સંખ્યાનો તફાવત અવગણી શકાય એવો હોતો નથી. એટલે કે, માધ્યમમાં તરતા પદાર્થ પર માધ્યમ (પાણી કે બીજા કોઈ પ્રવાહી)ના અણુઓ વડે થતા આઘાતના કારણે લાગતા ધક્કા કે ટૉર્કનો સરવાળો શૂન્ય થતો નથી. એમાં એક કે બીજી દિશામાં એક ચોખ્ખો ધક્કો કે ટૉર્ક લાગે છે. આથી, તરતા પદાર્થ અસ્તવ્યસ્ત હલનચલન કરે છે અને અનિયમિત રીતે ધ્રુજે છે. આ ગતિ જેને હવે 'બ્રાઉનિયન ગતિ' કહે છે તે અણુઓની વર્તણૂકનો દેખીતો પુરાવો છે. છેલ્લાં 50 વર્ષ કે તેની આસપાસથી અણુઓને સ્કેનિંગ ટનલિંગ અને બીજા વિશેષ પ્રકારના માઇક્રોસ્કૉપથી જોઈ શકાય છે.

1987માં અમેરિકામાં કાર્ય કરતા ઇજિપ્તના વિજ્ઞાની એહમદ ઝેવાઇલ (Ahmed Zewail)એ અણુઓ જ નહિ પરંતુ તેમની આંતરક્રિયાઓનું પણ અવલોકન કર્યું હતું. આ કાર્ય તેમણે લેસરના પ્રકાશના ટૂંકા સમયગાળા, દસ ફેમ્ટો સેકન્ડના ક્રમના ઝબકારા કરી અને તેમના ફોટા પાડીને કર્યું હતું. (1 ફેમ્ટો સેકન્ડ = 10^{-15} s). હવે તો કોઈ રાસાયણિક બંધના રચાવા કે તૂટવાની ઘટનાનો પણ અભ્યાસ કરી શકે છે. આ ખરેખર જોઈ શકાય છે !!

અથડાયા વગર સીધા જઈ શકતા નથી અને તેમનો માર્ગ સતત ફંટાતો હોય છે.



આકૃતિ 13.7 Δt સમયમાં અણુએ આંતરેલું કદ, જેમાં આવેલો કોઈ પણ અણુ તેની સાથે અથડાશે.

ધારો કે વાયુના અણુઓ d વ્યાસના ગોળાઓ છે. સરેરાશ ઝડપ $<\upsilon>$ ધરાવતા અણુ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરો. કોઈ પણ અણુ જે કેન્દ્રો વચ્ચેના અંતર d સુધીમાં આવેલ હોય તેની સાથે આ અણુ અથડાશે. Δt સમયમાં તે $\pi d^2 <\upsilon> \Delta t$ કદ આંતરે છે, જેમાં આવેલો કોઈ પણ અણુ તેની સાથે અથડાશે. (જુઓ આકૃતિ 13.7.) જો એકમ કદમાં આવેલ અણુઓની સંખ્યા n હોય, તો Δt સમયમાં અણુ $n\pi d^2 <\upsilon> \Delta t$ અથડામણો અનુભવશે. આથી, અથડામણોનો દર $n\pi d^2 <\upsilon>$ છે અથવા બે ક્રમિક અથડામણો વચ્ચેનો સમય સરેરાશ રૂપે

$$\tau = 1/(n\pi <\upsilon> d^2) \qquad (13.38)$$

બે ક્રમિક અથડામણો વચ્ચેનું સરેરાશ અંતર, જે સરેરાશ મુક્તપથ l કહેવાય છે, તે :

$$l = <\upsilon> \tau = 1/(n\pi d^2) \qquad (13.39)$$

છે. આ ગણતરીમાં, આપણે બીજા અણુઓ સ્થિર છે તેમ માન્યું હતું. પરંતુ ખરેખર તો બધા જ અણુઓ ગતિમાં હોય છે અને અથડામણનો દર અણુઓના સરેરાશ સાપેક્ષ વેગ પરથી મેળવી શકાય. આમ, આપણે સમીકરણ (13.38)માં $<\upsilon>$ની જગ્યાએ $<\upsilon_r>$ લખવું જોઈએ. વધુ ચોક્કસ ગણતરી (Treatment) પરથી,

$$l = 1/(\sqrt{2}\ n\pi d^2) \qquad (13.40)$$

મળે છે. ચાલો હવે આપણે સરેરાશ ઝડપ $<\upsilon> = (485 \text{m/s})$ ધરાવતા અણુઓ માટે l અને T શોધીએ. STP એ

$$n = \frac{(6.02 \times 10^{23})}{(22.4 \times 10^{-3})}$$

$= 2.7 \times 10^{25}\ \text{m}^{-3}$

$d = 2 \times 10^{-10}$ m, લેતાં

$\tau = 6.1 \times 10^{-10}$ s

અને $l = 2.9 \times 10^{-7}\ \text{m} \approx 1500\ d \qquad (13.41)$

અપેક્ષા મુજબ, સમીકરણ (13.40)વડે મળતો સરેરાશ મુક્તપથ, અણુઓની સંખ્યા ઘનતા અને પરિમાણના વ્યસ્તપ્રમાણમાં છે. ખૂબ નીચા દબાણવાળી (highly evacuated) નળીમાં બેશક n નાનો હોય છે અને સરેરાશ મુક્ત પથ નળીની લંબાઈ જેટલો મોટો પણ હોઈ શકે.

▶ *ઉદાહરણ 13.9* 373 K તાપમાને પાણીની બાષ્પ માટે પાણીના અણુનો સરેરાશ મુક્તપથ શોધો. અગાઉ આપેલ ઉદાહરણ 13.1 અને સમીકરણ (13.41)માં આપેલ માહિતીનો ઉપયોગ કરો.

ઉકેલ પાણીની બાષ્પ માટે dનું મૂલ્ય હવા જેટલું જ હોય છે. સંખ્યા ઘનતા નિરપેક્ષ તાપમાનના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે.

આથી, $n = 2.7 \times 10^{25} \times \frac{273}{373} = 2 \times 10^{25}\ \mathrm{m^{-3}}$

આથી, સરેરાશ મુક્તપથ $l = 4 \times 10^{-7}$ m.

નોંધો કે સરેરાશ મુક્તપથ, અગાઉ ગણેલ આંતરઆણ્વિક અંતર ~ 40 Å = 4 × 10^{-9} m કરતાં 100 ગણો છે. સરેરાશ મુક્તપથની આટલી મોટી કિંમત વાયુની ચોક્કસ પ્રકારની વર્તણૂક માટે જવાબદાર છે. કોઈ પાત્ર વગર વાયુઓને સિમિત (Confine) કરી શકાતા નથી.

વાયુના ગતિવાદનો ઉપયોગ કરીને, માપી શકાય તેવી સ્થૂળ રાશિઓ જેવી કે શ્યાનતા, ઉષ્મા વહન અને પ્રસરવું (Diffusion)ને અણુના કદ (પરિમાણ) જેવી સૂક્ષ્મ રાશિઓ સાથે સાંકળી શકાય છે. આવાં સમીકરણો પરથી સૌપ્રથમ અણુઓના પરિમાણ અંદાજવામાં આવ્યા હતા.

સારાંશ

1. દબાણ (P), કદ (V) અને નિરપેક્ષ તાપમાન (T)ને સાંકળતું આદર્શ વાયુ સમીકરણ

$$PV = \mu RT = k_B NT \text{ છે.}$$

જ્યાં, μ એ મોલની સંખ્યા અને N એ અણુઓની સંખ્યા છે. R અને k_B સાર્વત્રિક અચળાંકો છે.

$$R = 8.314\ \mathrm{J\ mol^{-1}\ K^{-1}}, \qquad k_B = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\ K^{-1}}$$

વાસ્તવિક વાયુઓ આદર્શ વાયુ સમીકરણને લગભગ જ અનુસરે છે, જ્યારે નીચા દબાણ અને ઊંચા તાપમાને વધુ અનુસરે છે.

2. વાયુના ગતિવાદ પરથી,

$$P = \frac{1}{3} n\, m\overline{\upsilon^2}$$

સમીકરણ મળે છે, જ્યાં n એ અણુઓની સંખ્યા ઘનતા m અણુનું દળ અને $\overline{\upsilon^2}$ એ વર્ગીત ઝડપનું સરેરાશ છે. આદર્શ વાયુ સમીકરણ સાથે મળીને તે તાપમાનનું ગતિક અર્થઘટન આપે છે.

$$\frac{1}{2} m\overline{\upsilon^2} = \frac{3}{2} k_B T, \quad \upsilon_{rms} = \left(\overline{\upsilon^2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

આ દર્શાવે છે કે વાયુનું તાપમાન, તેના અણુની સરેરાશ ગતિઊર્જાનું માપ દર્શાવે છે, જે વાયુ કે અણુના પ્રકારથી સ્વતંત્ર હોય છે. નિયત તાપમાને વાયુઓના મિશ્રણમાં ભારે અણુની સરેરાશ ઝડપ ઓછી હોય છે.

3. રેખીય ગતિઊર્જા,

$$E = \frac{3}{2} k_B N\, T$$

આ પરથી,

$$PV = \frac{2}{3} E$$

સમીકરણ મળે.

4. ઊર્જા સમવિભાજનનો નિયમ દર્શાવે છે કે, નિરપેક્ષ તાપમાન T એ જ્યારે તંત્ર સંતુલનમાં હોય, ત્યારે કુલ ઊર્જા એ શોષણ (Absorption) ઊર્જાના જુદા જુદા પ્રકારોમાં સમાન રીતે વહેંચાયેલી હોય છે, જેમાં

દરેક પ્રકારની ઊર્જા $\frac{1}{2}k_B T$ જેટલી હોય છે. દરેક રેખીય અને ચક્રીય મુક્તતાનો અંશ શોષણ ઊર્જાના એક પ્રકાર (Mode) સાથે સંકળાયેલ છે અને તેની ઊર્જા $\frac{1}{2}k_B T$ હોય છે. દરેક કંપન આવૃત્તિને બે પ્રકારની ઊર્જા હોય છે (ગતિ અને સ્થિતિ). જેની ઊર્જા, $2 \times \frac{1}{2}k_B T = k_B T$ હોય છે.

5. ઊર્જાના સમવિભાજનના નિયમ પરથી, વાયુઓની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા ગણી શકાય છે અને આ કિંમતો ઘણા વાયુઓની પ્રાયોગિક રીતે મેળવેલ વિશિષ્ટ ઉષ્મા સાથે મળતી આવે છે. આ સમાનતા વધારવા માટે ગતિના કંપન પ્રકારો પણ ઉમેરવા જોઈએ.
6. સરેરાશ મુક્તપથ l એ અણુની બે ક્રમિક અથડામણો વચ્ચે અણુએ કાપેલ સરેરાશ અંતર છે.

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}$$

જ્યાં, n એ અણુઓની સંખ્યા ઘનતા અને d એ વ્યાસ છે.

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ (POINTS TO PONDER)

1. પ્રવાહી (Fluid)નું દબાણ ફક્ત દીવાલ પર નથી લાગતું. દબાણ પ્રવાહીમાં દરેક જગ્યાએ લાગે છે. પાત્રમાં રહેલા વાયુનું કોઈ પણ સ્તર સમતોલન સ્થિતિમાં હોય છે કારણ કે, આ સ્તરની બંને બાજુ સમાન દબાણ હોય છે.
2. વાયુમાં આંતરઆણ્વિક અંતરો માટે આપણે અતિરેક પૂર્વક ના વિચારવું જોઈએ. સામાન્ય દબાણ અને તાપમાને, ઘન અને પ્રવાહીના આંતર આણ્વિકઅંતરો કરતાં તે લગભગ 10 ગણું કે તેની આસપાસનું હોય છે. તફાવત એ છે કે, વાયુમાં સરેરાશ મુક્તપથ આંતરઆણ્વિક અંતર કરતાં 100 ગણો છે અને અણુના પરિમાણ કરતાં 1000 ગણો છે.
3. ઊર્જા સમવિભાજનનો નિયમ આ રીતે દર્શાવી શકાય :

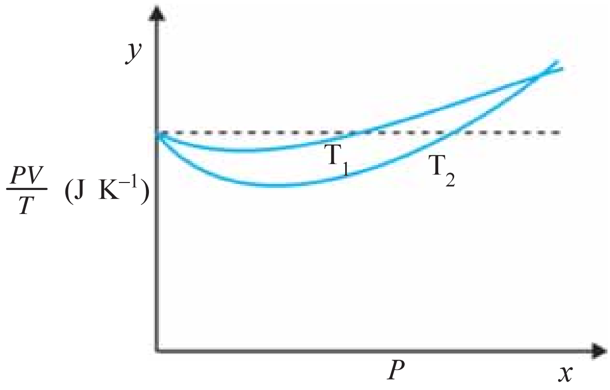
   તાપીય સંતુલનમાં રહેલ દરેક મુક્તતાના અંશની ઊર્જા $\frac{1}{2}k_B T$ છે. અણુની કુલ ઊર્જા દર્શાવતા સમીકરણમાં આવતું દરેક દ્વિઘાત (Quadratic) પદ મુક્તતાના અંશ તરીકે ગણવું જોઈએ. આમ, દરેક કંપન પ્રકાર, $2 \times \frac{1}{2}k_B T = k_B T$ ઊર્જાને અનુરૂપ 2 (1 નહીં) મુક્તતાના અંશો (ગતિ અને સ્થિતિઊર્જા પ્રકારના) આપે.
4. ઓરડામાં રહેલી હવાના અણુઓ તેમની વધુ (ઊંચી) ઝડપ અને સતત અથડામણોના કારણે નીચે પડીને જમીન પર (ગુરુત્વાકર્ષણના કારણે) બેસી જતા નથી. સંતુલનની પરિસ્થિતિમાં ઓછી ઊંચાઈએ ઘનતામાં ખૂબ સામાન્ય વધારો (વાતાવરણમાં હોય છે તેમ) હોય છે. આ અસર ઓછી હોય છે કારણ કે સામાન્ય ઊંચાઈઓએ અણુઓની સ્થિતિઊર્જા (mgh), સરેરાશ ગતિ ઊર્જા $\frac{1}{2}mv^2$ કરતાં ઘણી ઓછી હોય છે.
5. $<v^2>$ હંમેશ $(<v>)^2$ જેટલું નથી હોતું. વર્ગીત મૂલ્યનું સરેરાશ હંમેશાં સરેરાશના વર્ગ જેટલું હોય એ જરૂરી નથી. આ વિધાન માટે તમે ઉદાહરણો શોધી શકો.

સ્વાધ્યાય

13.1 STP એ ઑક્સિજન વાયુ દ્વારા મોલર કદ અને ઘેરાયેલ વાસ્તવિક કદનો ગુણોત્તર શોધો. ઑક્સિજનના અણુનો વ્યાસ 3 Å લો.

13.2 પ્રમાણભૂત તાપમાન અને દબાણે (STP : 1 વાતાવરણનું દબાણ, 0 °C) 1 મોલ જેટલા કોઈ પણ (આદર્શ) વાયુ દ્વારા ઘેરાયેલ કદને મોલર કદ કહે છે. દર્શાવો કે તે 22.4 લિટર છે.

13.3 બે અલગ તાપમાને 1.00×10^{-3} kg ઑક્સિજન વાયુ માટે PV/T વિરુદ્ધ Pનો આલેખ આકૃતિ 13.8માં દર્શાવ્યો છે.



આકૃતિ 13.8

(a) ત્રુટક વક્ર શું દર્શાવે છે ?
(b) શું સાચું છે : $T_1 > T_2$ કે $T_1 < T_2$?
(c) વક્રો y-અક્ષને જ્યાં મળે છે ત્યાં PV/Tનું મૂલ્ય શું છે ?
(d) જો આપણે 1.00×10^{-3} kg હાઇડ્રોજન માટે આવા વક્રો મેળવ્યા હોત, તો આ વક્રો y-અક્ષને જ્યાં મળે છે ત્યાં આપણને શું આ જ મૂલ્ય મળત ? જો ના, તો હાઇડ્રોજનના કયા દળ માટે આપણને (આલેખના નીચા દબાણ અને ઊંચા તાપમાનવાળા વિસ્તારમાં) PV/Tનું એ જ મૂલ્ય મળે ? (H_2નું મોલર દળ = 2.02 u, O_2નું = 32.0 u, R = 8.31 J mol^{-1} K^{-1})

13.4 30 લિટર કદના ઑક્સિજનના બાટલાનું 27 ^oC તાપમાને પ્રારંભિક ગેજ દબાણ (Guage Pressure) 15 atm છે. બાટલામાંથી થોડો ઑક્સિજન કાઢ્યા પછી, માપનનું ગેજ દબાણ ઘટીને 11 atm અને તાપમાન ઘટીને 17 ^oC થાય છે. બાટલામાંથી બહાર કાઢેલા ઑક્સિજનનું દળ શોધો. (R = 8.31 J mol^{-1} K^{-1}, O_2નું મોલર દળ = 32 u)

13.5 એક તળાવની 40 m ઊંડાઈએથી 12 ^oC તાપમાને 1.0 cm^3 કદનો હવાનો એક પરપોટો ઉપર તરફ આવે છે. જ્યારે તે સપાટી પર આવે, કે જેનું તાપમાન 35 ^oC છે, ત્યારે તેનું કદ કેટલું હશે ?

13.6 27 ^oC તાપમાન અને 1 atm દબાણે 25.0 m^{3}ની ક્ષમતાવાળા ઓરડામાં રહેલા (ઑક્સિજન, નાઇટ્રોજન, હવાની બાષ્પ અને બંધારણના બીજા વાયુઓ પણ સમાવીને) હવાના અણુઓની સંખ્યા ગણો.

13.7 હિલિયમ પરમાણુ માટે (i) ઓરડાના તાપમાન (27 ^oC), (ii) સૂર્યની સપાટી પરના તાપમાન (6000 K) (iii) 10 મિલિયન કૅલ્વિન (તારાના કેન્દ્રનું લાક્ષણિક તાપમાન) માટે સરેરાશ ઉષ્મીય ઊર્જા ગણો.

13.8 સમાન ક્ષમતાનાં ત્રણ વાયુ પાત્રોમાં વાયુ સમાન તાપમાન અને દબાણે રહેલા છે. પહેલું પાત્ર નિયૉન (એક પરમાણ્વિક) ધરાવે છે, બીજું પાત્ર ક્લોરિન (દ્વિપરમાણ્વિક) અને ત્રીજું યુરેનિયમ હેક્ઝાફ્લોરાઇડ (બહુ પરમાણ્વિક) ધરાવે છે. શું દરેક પાત્રમાં તદનુરૂપ સમાન સંખ્યાના અણુઓ હશે ? શું ત્રણે કિસ્સામાં સરેરાશ વર્ગીત ઝડપનું વર્ગમૂળ સમાન હશે ? જો ના, તો કયા વિસ્તારમાં υ_{rms} મહત્તમ હશે ?

13.9 કયા તાપમાને વાયુપાત્રમાં રહેલા આર્ગનની સરેરાશ વર્ગીત ઝડપનું વર્ગમૂળ –20 ^oC એ રહેલા હિલિયમ વાયુના અણુની rms ઝડપ જેટલું હશે ? (Arનું પરમાણુ દળ = 39.9 u, Heનું પરમાણુદળ = 4.0 u)

13.10 2.0 atm અને 17 ^oC તાપમાને નાઇટ્રોજન ધરાવતા વાયુપાત્રમાં નાઇટ્રોજનના અણુ માટે સરેરાશ મુક્તપથ અને અથડામણનો દર (આવૃત્તિ) શોધો. નાઇટ્રોજન અણુની ત્રિજ્યા આશરે 1.0 Å લો. અથડામણના સમયને અણુની બે ક્રમિક અથડામણો વચ્ચેના સમય સાથે સરખાવો. (N_2ના અણુનું દળ = 28.0 u).

વધારાનું સ્વાધ્યાય

13.11 એક મીટર લાંબો પાઈપ (નળી) (Bore) સમક્ષિતિજ રાખેલો છે, (તેનો બીજો છેડો બંધ કરેલો છે) જે 76 cm લાંબો પારાનો આડો સ્તંભ (Thread) ધરાવે છે અને તે 15 cm જેટલો હવાના સ્તંભ રચે (Traps) છે. જો નળીને તેનો ખુલ્લો છેડો તળિયા તરફ રહે તેમ શિરોલંબ રાખીએ તો શું થશે ?

13.12 કોઈ ચોક્કસ સાધનમાંથી હાઇડ્રોજનના ભળવા (પ્રસરવા) (Diffusion)નો સરેરાશ દર 28.7 $cm^3\ s^{-1}$ છે. આ જ પરિસ્થિતિઓમાં બીજા વાયુ માટે ભળવાનો સરેરાશ દર 7.2 $cm^3\ s^{-1}$ માપવામાં આવે છે. આ વાયુ કયો હશે તે શોધો.

(**સૂચન :** ગ્રેહામના પ્રસરણના નિયમનો ઉપયોગ કરો : $R_1 / R_2 = (M_2 / M_1)^{1/2}$, જ્યાં R_1, R_2 એ વાયુઓ 1 અને 2ના પ્રસરવાનો દર છે, તથા M_1 અને M_2 અનુક્રમે તેમના મોલર દળ છે. આ નિયમ ગતિવાદ પરથી સીધો તરી આવે છે.)

13.13 સંતુલનમાં રહેલા એક વાયુની ઘનતા અને દબાણ તેના કદમાં સમાન રીતે વહેંચાયેલા છે. આ ફક્ત તો જ શક્ય છે કે જ્યારે બહારની પરિસ્થિતિઓ અસર ન કરતી હોય. દા.ત., ગુરુત્વાકર્ષણ હેઠળ વાયુના સ્તંભની ઘનતા (અને દબાણ) એક ધાર્યા (સમાન) હોતા નથી. તમે અપેક્ષા રાખતા હશો તેમ, તેની ઘનતા ઊંચાઈ સાથે ઘટે છે. ચોક્કસ અવલંબન એ જાણીતા વાતાવરણના નિયમ પરથી આપી શકાય છે,

$$n_2 = n_1 \exp\left[-mg\,(h_2 - h_1) / k_B T \right]$$

જ્યાં n_2, n_1 અનુક્રમે ઊંચાઈઓ h_2 અને h_1 માટે સંખ્યા ઘનતા છે. આ સમીકરણનો ઉપયોગ કરીને સંતુલનમાં રહેલા કલીલ દ્રાવણ (Suspension)ના નળાકારિય સ્તંભના ઠારણ (Sedimentation) સંતુલન માટેનું સમીકરણ,

$$n_2 = n_1 \exp\left[-mg\, N_A(\rho - \rho')\,(h_2 - h_1) / (\rho RT) \right]$$

મેળવો. જ્યાં, ρ એ કલીલ કણની અને ρ' તેની આસપાસના માધ્યમની ઘનતા છે. (N_A ઍવોગેડ્રો આંક છે અને R એ સાર્વત્રિક વાયુ-અચળાંક છે.)

(**સૂચન :** આર્કિમિડિઝના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને કલીલ કણ (Suspended Particle)નું આભાસી (Apparent) વજન શોધો.

13.14 કેટલાક ઘન અને પ્રવાહીઓની ઘનતા નીચે આપેલી છે. તેમના પરમાણુઓના કદ વિશે અંદાજ આપો :

પદાર્થ	પરમાણ્વિક દળ (u)	ઘનતા (10^3 kg m^{-3})
કાર્બન (હીરો)	12.01	2.22
સોનું	197.00	19.32
નાઈટ્રોજન (પ્રવાહી)	14.01	1.00
લિથિયમ	6.94	0.53
ફ્લોરીન (પ્રવાહી)	19.00	1.14

(**સૂચન :** ઘન અથવા પ્રવાહી અવસ્થામાં અણુઓ 'ખીચોખીચ ગોઠવાયેલા' છે, તેમ માનો અને ઍવોગેડ્રો અંકના જાણીતા મૂલ્યનો ઉપયોગ કરો. જોકે તમારા વિવિધ પરમાણુના પરિમાણ માટે તમને મળતી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ બહુ અક્ષરશઃ (Literally) લેવી જોઈએ નહિ. 'ગીચોગીચ ભરાયેલા'-એવી અપરિપક્વ સન્નિકટતાને લીધે પરિણામો માત્ર એટલું જ સૂચવે છે કે પરમાણુનાં પરિમાણો કેટલાંક Åના ક્રમનાં હોય છે.)

પ્રકરણ 14

દોલનો (OSCILLATIONS)

14.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

આપણા દૈનિક જીવનમાં આપણે જુદા જુદા પ્રકારની ગતિઓનો અનુભવ કરીએ છીએ. તમે તેમાંની કેટલીક ગતિઓ વિશે પહેલેથી જ શીખ્યાં છો. દા. ત., સુરેખ ગતિ અને પ્રક્ષિપ્ત ગતિ. આ બંને ગતિઓ અપુનરાવર્તિત છે. આપણે સૂર્ય મંડળના ગ્રહોની નિયમિત વર્તુળમય ગતિ અને કક્ષીય ગતિ વિશે પણ શીખ્યાં છીએ. આ કિસ્સાઓમાં, ગતિનું એક ચોક્કસ સમયગાળા પછી પુનરાવર્તન થાય છે, એટલે કે તે આવર્ત (periodic) છે. તમારા બાળપણમાં તમે પારણામાં અથવા હીંચકા પર ઝૂલતા આનંદ માણ્યો જ હશે. આ બંને ગતિઓ પુનરાવર્તિત પ્રકારની છે, પરંતુ તે કોઈ ગ્રહની આવર્તગતિથી અલગ છે. અહીં પદાર્થ એ નિશ્ચિત (મધ્યમાન) સ્થાનને અનુલક્ષીને આગળ-પાછળ ગતિ કરે છે. આગળ-પાછળની આવી આવર્તગતિનાં ઉદાહરણો છે : નદીમાં ઉપર-નીચે (હાલક-ડોલક) થતી બોટ, વરાળયંત્રમાં આગળ-પાછળ થતો પિસ્ટન વગેરે. (આ તમામ પદાર્થો આગળ-પાછળ આવર્તગતિ કરે છે.) આવી ગતિને દોલિત ગતિ (oscillatory motion) કહેવામાં આવે છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આ ગતિનો અભ્યાસ કરીશું.

ભૌતિકશાસ્ત્ર માટે દોલિત ગતિનો અભ્યાસ એ પાયાનો છે; ઘણી ભૌતિક ઘટનાઓની સમજ માટે તેની વિભાવના જરૂરી છે. સિતાર, ગિટાર અથવા વાયોલિન જેવાં સંગીતનાં સાધનોમાં, આપણને કંપન કરતાં તાર જણાય છે, જે આનંદદાયક ધ્વનિ ઉત્પન્ન કરે છે. ટેલિફોન અને સ્પીકર સિસ્ટમ્સમાં ડ્રમ્સ અને ડાયફ્રામમાંના પડદા (મેમ્બ્રેન) તેમના નિશ્ચિત સ્થાનને અનુલક્ષીને કંપન કરે છે. હવાના અણુઓનાં કંપનો ધ્વનિના પ્રસરણને શક્ય બનાવે છે. તેવી જ રીતે, ઘન પદાર્થમાં અણુઓ તેમના સંતુલન (નિશ્ચિત) સ્થાનને અનુલક્ષીને દોલનો કરે છે. તેમના દોલનની સરેરાશ ઊર્જા એ તાપમાનના સમપ્રમાણમાં હોય છે. AC પાવર સપ્લાયમાંથી મળતો વૉલ્ટેજ એ પણ દોલન કરે છે અને તે તેના સરેરાશ મૂલ્ય (શૂન્ય)ની આસપાસ એકાંતરે ધન અને ઋણ થાય છે.

સામાન્ય રીતે આવર્તગતિ અને ખાસ કરીને દોલિત ગતિના વર્ણનમાં, આવર્તકાળ (periodic time/period), આવૃત્તિ (frequency), સ્થાનાંતર (displacement), કંપવિસ્તાર (amplitude) અને કળા (phase) જેવી કેટલીક મૂળભૂત વિભાવનાઓની જરૂર પડે છે. આ ખ્યાલોને (વિભાવનાઓને) હવે પછીના પરિચ્છેદમાં રજૂ કરવામાં આવ્યા છે.

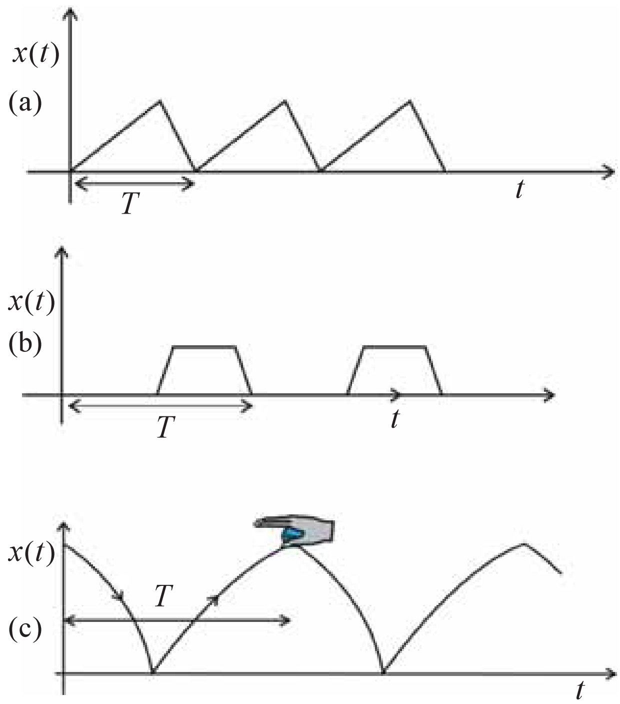
14.2 આવર્ત અને દોલિત ગતિઓ (PERIODIC AND OSCILLATORY MOTIONS)

આકૃતિ 14.1 કેટલીક આવર્ત ગતિઓ દર્શાવે છે. ધારો કે કોઈ એક જંતુ એક ઢોળાવવાળા માર્ગ પર ઉપર ચઢે છે અને નીચે પડે છે અને તે પ્રારંભિક બિંદુ પર પાછું આવે છે. આ ક્રિયાનું તે સમાનરૂપે પુનરાવર્તન કરે છે. જો તમે જમીનથી તેની ઊંચાઈ વિરુદ્ધ સમયનો આલેખ દોરશો તો તે આકૃતિ 14.1 (a) જેવો દેખાશે. જો કોઈ બાળક એક પગથિયું ઉપર ચઢે અને નીચે આવે, અને આ ક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરે, તો જમીન ઉપરની તેની ઊંચાઈ એ આકૃતિ 14.1(b)માં દર્શાવ્યા જેવી દેખાશે. જ્યારે તમે જમીન પરથી બૉલને તમારી હથેળી અને જમીન વચ્ચે ઉછાળવાની રમત રમો છો ત્યારે, તેની ઊંચાઈ વિરુદ્ધ સમયનો આલેખ એ આકૃતિ 14.1 (c) જેવો દેખાશે. નોંધો કે આકૃતિ 14.1 (c)માંના બંને વક્ર ભાગો એ એક પરવલયના ભાગો છે જે ન્યૂટનના ગતિના સમીકરણ દ્વારા આપવામાં આવે છે (જુઓ પરિચ્છેદ 3.6).

$$h = ut + \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{નીચે તરફની ગતિ માટે, અને}$$

$$h = ut - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{ઉપર તરફની ગતિ માટે}$$

જે દરેક કિસ્સામાં પ્રારંભિક વેગ uનાં જુદાં મૂલ્યો માટે છે. આ આવર્તગતિનાં ઉદાહરણો છે. આમ, જે ગતિ પોતે સમયનાં નિયમિત અંતરાલો પર પુનરાવર્તન કરે છે તેને **આવર્તગતિ (Periodic Motion)** કહેવામાં આવે છે.



આકૃતિ 14.1 *આવર્તગતિનાં ઉદાહરણો. દરેક કિસ્સામાં આવર્તકાળ T દર્શાવેલ છે.*

ઘણી વખત આવર્તગતિ કરતાં પદાર્થને તેના પથમાં ક્યાંક એક સંતુલન સ્થિતિ હોય છે. જ્યારે પદાર્થ આ સ્થિતિમાં હોય ત્યારે તેના પર કુલ ચોખ્ખું (Net) બાહ્ય બળ લાગતું નથી. તેથી, જો તેને ત્યાં સ્થિર છોડી દેવામાં આવે તો તે કાયમ માટે ત્યાં જ રહે છે. જો પદાર્થને આ સ્થાનથી નાનું સ્થાનાંતર આપવામાં આવે, તો એક એવું બળ કાર્યરત થાય છે જે પદાર્થને સંતુલન બિંદુ તરફ લાવવાનો પ્રયાસ કરે છે, જે **દોલનો** (oscillations) કે **કંપનો** (vibrations) ઉત્પન્ન કરે છે. ઉદાહરણ તરીકે, વાટકા (બાઉલ)માં મૂકવામાં આવેલ બૉલ તેના તળિયે સંતુલનમાં હશે. જો આ બિંદુથી તેને થોડું સ્થાનાંતરિત કરવામાં આવે, તો તે વાટકામાં દોલનો કરશે. દરેક દોલિત ગતિ આવર્ત હોય છે, પરંતુ દરેક આવર્તગતિએ દોલિત હોય તે જરૂરી નથી. વર્તુળમય (ચક્રીય-Circular Motion) ગતિ આવર્તગતિ છે, પરંતુ તે દોલિત નથી.

દોલનો અને કંપનો વચ્ચે કોઈ નોંધપાત્ર તફાવત નથી. જ્યારે આવૃત્તિ નાની હોય છે (એક વૃક્ષની શાખાનાં દોલનો જેવી), ત્યારે આપણે તેને દોલન કહીએ છીએ, જ્યારે આવૃત્તિ ઊંચી હોય છે (સંગીતનાં સાધનના તારનાં કંપનો જેવી), ત્યારે આપણે તેને કંપન કહીએ છીએ.

સરળ આવર્ત (પ્રસંવાદી / harmonic) ગતિ દોલિત ગતિનું સૌથી સાદું સ્વરૂપ છે. જ્યારે દોલિત પદાર્થ પરનું બળ તેના મધ્યમાન સ્થાન (જે સંતુલન સ્થાન પણ છે) થી સ્થાનાંતરના સમપ્રમાણમાં હોય, ત્યારે આ ગતિ ઉત્પન્ન થાય છે. વધુમાં, તેના દોલનના કોઈ પણ તબક્કે, આ બળ સંતુલન સ્થિતિ તરફ દિશાન્વિત હોય છે.

વ્યવહારમાં, ઘર્ષણ અને અન્ય દ્વારા ઉદ્ભવતાં અવમંદનના કારણોને લીધે દોલન કરતાં પદાર્થો આખરે તેમની સંતુલન સ્થિતિ પર સ્થિર સ્થિતિમાં આવે છે. જોકે, કેટલાક બાહ્ય આવર્ત પરિબળ દ્વારા તેઓને દોલનમાં રાખવા માટે ફરજ પાડી શકાય છે. આપણે અવમંદિત (Damped) અને પ્રણોદિત (Forced) દોલનોની ઘટનાઓની ચર્ચા આ પ્રકરણના અંતમાં કરીશું.

કોઈ પણ દ્રવ્ય માધ્યમને મોટી સંખ્યામાં યુગ્મ દોલકો (coupled oscillators)ના સમૂહ તરીકે જોઈ શકાય છે. કોઈ માધ્યમનાં ઘટકોનાં સામૂહિક આવર્તનો પોતાને તરંગો સ્વરૂપે પ્રગટ કરે છે. તરંગોનાં ઉદાહરણોમાં પાણીના તરંગો, ધરતીકંપના તરંગો, વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોનો સમાવેશ થાય છે. તરંગની ઘટનાઓનો આપણે આગામી પ્રકરણમાં અભ્યાસ કરીશું.

14.2.1 આવર્તકાળ અને આવૃત્તિ (Period and frequency)

આપણે જોયું છે કે કોઈ પણ ગતિ જે સમયનાં નિયમિત અંતરાલો પર પોતે પુનરાવર્તન કરે છે તેને **આવર્તગતિ** કહેવામાં આવે છે. **સમયનો લઘુતમ અંતરાલ કે જે પછી આ ગતિનું પુનરાવર્તન થાય છે તેને તેનો આવર્તકાળ (periodic time / period) કહેવાય છે.** ચાલો આ આવર્તકાળને (લઘુતમ સમયગાળાને) સંજ્ઞા T દ્વારા દર્શાવીએ. તેનો S.I. એકમ

સેકન્ડ (second) છે. આવર્તગતિ કે જે સેકન્ડના સ્કેલ પર ખૂબ ઝડપી અથવા ખૂબ ધીમી હોય, તો તેના માટે સમયના અન્ય અનુકૂળ એકમોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ક્વાર્ટ્ઝ સ્ફટિકનાં કંપનોનો સમયગાળો માઇક્રોસેકન્ડ્સ (10^{-6} s)ના એકમોમાં દર્શાવવામાં આવે છે જેને સંક્ષિપ્તમાં μs વડે દર્શાવાય છે. બીજી તરફ, બુધ (Mercury) ગ્રહનો કક્ષીય આવર્તકાળ 88 પૃથ્વી દિવસ છે. હેલીનો ધૂમકેતુ દર 76 વર્ષ પછી દેખાય છે.

Tનું વ્યસ્ત એ, એકમ સમયમાં થતાં પુનરાવર્તનોની સંખ્યા આપે છે. આ રાશિને **આવર્તગતિની આવૃત્તિ** કહેવામાં આવે છે. તેને પ્રતીક ν દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. આમ, ν અને T વચ્ચેનો સંબંધ

$$\nu = 1/T \qquad (14.1)$$

છે. આમ, νનો એકમ s^{-1} છે. હેઇનરિચ રુડોલ્ફ હર્ટ્ઝ (1857-1894)ના રેડિયો તરંગોના સંશોધન બાદ, આવૃત્તિના એકમને વિશેષ નામ આપવામાં આવ્યું છે. તેને હર્ટ્ઝ (hertz) (સંક્ષેપમાં Hz) કહેવામાં આવે છે. આમ,

$$1 \text{ હર્ટ્ઝ(hertz)} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ દોલન પ્રતિ સેકન્ડ} = 1 \text{ s}^{-1} \qquad (14.2)$$

નોંધ કરો કે આવૃત્તિ ν, એ પૂર્ણાંક જ હોય તે જરૂરી નથી.

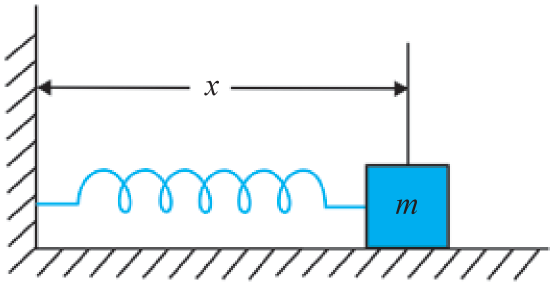
▶ *ઉદાહરણ 14.1* સામાન્ય રીતે માનવહૃદય એક મિનિટમાં 75 વખત ધબકતું જણાય છે. તેની આવૃત્તિ અને આવર્તકાળની ગણતરી કરો.

ઉકેલ

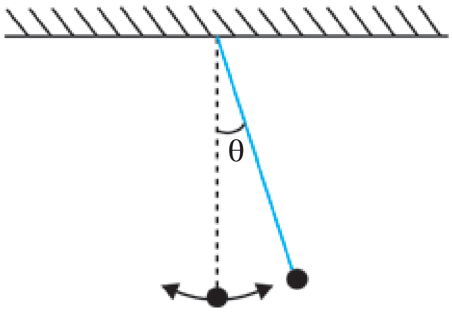
$$\begin{aligned} \text{હૃદયના ધબકારની આવૃત્તિ} &= 75/(1 \text{ min}) \\ &= 75/(60 \text{ s}) \\ &= 1.25 \text{ s}^{-1} \\ &= 1.25 \text{ Hz} \\ \text{આવર્તકાળ } T &= 1/(1.25 \text{ s}^{-1}) \\ &= 0.8 \text{ s} \end{aligned}$$ ◀

14.2.2 સ્થાનાંતર (Displacement)

પરિચ્છેદ 4.2માં, આપણે કણના સ્થાનાંતરને તેના સ્થાનસદિશના ફેરફાર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કર્યું છે. આ પ્રકરણમાં આપણે સ્થાનાંતર શબ્દનો ઉપયોગ વધુ વ્યાપક અર્થમાં કરીશું. સ્થાનાંતર એ આપણે ધ્યાનમાં લીધેલ કોઈ પણ ભૌતિક ગુણધર્મના સમય સાથેના બદલાવ માટે ઉલ્લેખાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, કોઈ સપાટી પર સ્ટીલના એક બૉલની સુરેખ ગતિના કિસ્સામાં, પ્રારંભ બિંદુથી સમયના વિધેય તરીકે તેનું અંતર એ સ્થાન-સ્થાનાંતર છે. ઉદ્ગમબિંદુની પસંદગી એ સગવડતાની બાબત છે. એક સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ બ્લૉકનો વિચાર કરો કે, જેનો બીજો છેડો દઢ દીવાલ પર જડેલ હોય [જુઓ આકૃતિ 14.2 (a)]. સામાન્ય રીતે, તેની સંતુલન સ્થિતિમાંથી પદાર્થનું સ્થાનાંતર માપવું અનુકૂળ છે. એક દોલન કરતા સાદા લોલક માટે, સમયના વિધેય તરીકે શિરોલંબ (ઊર્ધ્વ)થી તેના કોણને સ્થાનાંતર ચલ તરીકે લઈ શકાય છે. [જુઓ આકૃતિ 14.2(b)]. સ્થાનાંતર પદને હંમેશાં સ્થાનના સંદર્ભમાં જ લેવું જોઈએ એવું નથી. ઘણા અન્ય પ્રકારના સ્થાનાંતર ચલો પણ હોઈ શકે છે.



આકૃતિ 14.2 (a) *એક સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ બ્લૉક, જેનો બીજો છેડો એક દઢ દીવાલ પર જડવામાં આવેલ છે. આ બ્લૉક એક ઘર્ષણરહિત સપાટી પર ગતિ કરે છે. આ બ્લૉકની ગતિને દીવાલથી તેનું અંતર અથવા સ્થાનાંતર xના પદમાં વર્ણવી શકાય છે.*



આકૃતિ 14.2 (b) *એક દોલિત સાદું લોલક; તેની ગતિને ઊર્ધ્વથી કોણીય સ્થાનાંતર θના પદમાં વર્ણવી શકાય છે.*

એક કેપેસિટર પરનો વૉલ્ટેજ, એ.સી. સર્કિટમાં સમય સાથે બદલાય છે, આમ વૉલ્ટેજ સ્થાનાંતર ચલ પણ છે. એ જ રીતે, ધ્વનિતરંગના પ્રસરણમાં દબાણનું સમય સાથે બદલાવવું, પ્રકાશના તરંગમાં બદલાતા વિદ્યુત અને ચુંબકીયક્ષેત્રો અલગ અલગ સંદર્ભોમાં સ્થાનાંતરનાં ઉદાહરણો છે. સ્થાનાંતર ચલ ધન અને ઋણ એમ બંને મૂલ્યો લઈ શકે છે. દોલનો પરના પ્રયોગોમાં, સ્થાનાંતરને અલગ અલગ સમયે માપવામાં આવે છે.

સ્થાનાંતરને સમયના ગાણિતિક વિધેય દ્વારા રજૂ કરી શકાય છે. આવર્તગતિના કિસ્સામાં, આ વિધેય સમય પર આવર્ત છે. અતિસરળ આવર્ત વિધેયોમાંથી એકને

$$f(t) = A \cos \omega t \qquad (14.3a)$$

તરીકે રજૂ કરાય છે.

જો આ વિધેયનો કોણાંક (argument), ωt એ 2π રેડિયનના પૂર્ણાંક ગુણાંકમાં વધે, તો આ વિધેયનું મૂલ્ય એનું એ જ રહે છે. આમ, આ વિધેય $f(t)$ એ આવર્ત છે અને તેનો

આવર્તકાળ T નીચે મુજબ આપવામાં આવે છે :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{14.3b}$$

આમ, વિધેય $f(t)$એ આવર્તકાળ T સાથે આવર્ત છે,

$f(t) = f(t + T)$

જો આપણે sine વિધેય, $f(t) = A\sin \omega t$ લઈએ તોપણ આ પરિણામ દેખીતી રીતે સાચું છે. વધુમાં sine અને cosine વિધેયોનું રેખીય સંયોજન જેમકે,

$$f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \tag{14.3c}$$

એ પણ તે જ આવર્તકાળ T સાથે આવર્ત વિધેય છે.

$A = D \cos \phi$ અને $B = D \sin \phi$

લેતાં સમીકરણ (14.3c)ને

$$f(t) = D \sin (\omega t + \phi) \tag{14.3d}$$

તરીકે લખી શકાય છે,

અહીં D અને ϕ અચળાંકોને

$D = \sqrt{A^2 + B^2}$ અને $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$

દ્વારા આપવામાં આવે છે.

sine અને cosine આવર્ત વિધેયોનું મહત્ત્વ ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી, જીન બાપ્ટિસ્ટ જોસેફ ફોરિયર (1768-1830) દ્વારા સાબિત થયેલ નોંધપાત્ર પરિણામને લીધે છે; **કોઈ પણ આવર્ત વિધેયને યોગ્ય સહગુણાંકો સાથેના વિવિધ આવર્તકાળના sine અને cosine વિધેયોના સંપાતપણા તરીકે વ્યક્ત કરી શકાય છે.**

ઉદાહરણ 14.2 નીચે આપેલ સમયનાં વિધેયોમાંથી કયું (a) આવર્તગતિ અને (b) બિનઆવર્તગતિ દર્શાવે છે ? આવર્તગતિના દરેક કિસ્સા માટે આવર્તકાળ આપો [ω એ કોઈ ધન અચળાંક છે].

(i) $\sin \omega t + \cos \omega t$

(ii) $\sin \omega t + \cos 2\omega t + \sin 4\omega t$

(iii) $e^{-\omega t}$

(iv) $\log (\omega t)$

ઉકેલ

(i) $\sin \omega t + \cos \omega t$ એ આવર્ત વિધેય છે.

તેને $\sqrt{2}\sin (\omega t + \pi/4)$ વડે પણ લખી શકાય.

હવે $\sqrt{2}\sin (\omega t + \pi/4) = \sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4 + 2\pi)$

$= \sqrt{2}\sin [\omega (t + 2\pi/\omega) + \pi/4]$

આ વિધેયનો આવર્તકાળ $2\pi/\omega$ છે.

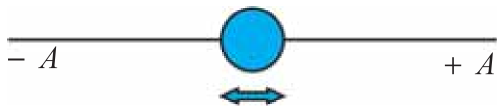
(ii) આ આવર્તગતિનું એક ઉદાહરણ છે. એ નોંધવામાં આવે કે દરેક પદ વિવિધ કોણીય આવૃત્તિ સાથે આવર્ત વિધેય રજૂ કરે છે. સમયના જે નાનામાં નાના અંતરાલ બાદ વિધેય તેના મૂલ્યનું પુનરાવર્તન કરે છે તે આવર્તકાળ છે. તેથી $\sin \omega t$ નો આવર્તકાળ $T_0 = 2\pi/\omega$ છે; $\cos 2\omega t$ નો આવર્તકાળ $\pi/\omega = T_0/2$ છે અને $\sin 4\omega t$ નો આવર્તકાળ $2\pi/4\omega = T_0/4$ છે. પ્રથમ પદનો આવર્તકાળ છેલ્લાં બે પદના આવર્તકાળના ગુણાંકમાં છે. તેથી T_0 એ સમયનો એ લઘુતમ અંતરાલ છે કે જે પછી ત્રણેય પદોનો સરવાળો પુનરાવર્તિત થાય છે અને આમ સરવાળો એક આવર્ત વિધેય છે જેનો આવર્તકાળ $2\pi/\omega$ છે.

(iii) વિધેય $e^{-\omega t}$ આવર્ત નથી તે સમયના વધારા સાથે એકપક્ષીય રીતે ઘટે છે અને $t \to \infty$ માટે શૂન્ય તરફ દોરાઈ જાય છે અને આમ, તેના મૂલ્યનું ક્યારેય પુનરાવર્તન થતું નથી.

(iv) વિધેય $\log (\omega t)$ સમય t સાથે એકપક્ષીય રીતે વધે છે. તેથી, તેના મૂલ્યનું ક્યારેય પુનરાવર્તન થતું નથી અને તે બિનઆવર્ત વિધેય છે. તે નોંધવામાં આવે કે જેમ $t \to \infty$, તેમ $\log (\omega t)$ અપસારિત થઈ ∞ સુધી પહોંચે છે. તેથી, તે કોઈ પણ પ્રકારનું ભૌતિક સ્થાનાંતર રજૂ કરી શકતું નથી. ◀

14.3 સરળ આવર્તગતિ (SIMPLE HARMONIC MOTION)

ચાલો, આપણે આકૃતિ 14.3માં બતાવ્યા પ્રમાણે X-અક્ષના ઊગમબિંદુથી ચરમસીમાઓ $+A$ અને $-A$ ની વચ્ચે આગળ-પાછળની બાજુએ દોલન કરતાં એક કણનો વિચાર કરીએ.



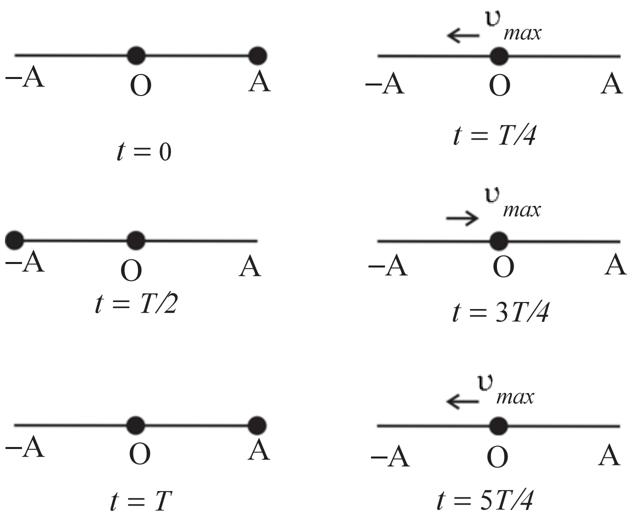
આકૃતિ **14.3** *X-અક્ષના ઊગમબિંદુને અનુલક્ષીને $+A$ અને $-A$ સીમાઓ વચ્ચે આગળ-પાછળ કંપન કરતો કણ*

આવી દોલિત ગતિ ત્યારે જ આવર્ત (પ્રસંવાદી) કહી શકાય કે જ્યારે આ કણનું ઊગમબિંદુથી સ્થાનાંતર સમય સાથે નીચે આપેલ સંબંધ પ્રમાણે બદલાતું હોય :

$$x(t) = A \cos (\omega t + \phi) \tag{14.4}$$

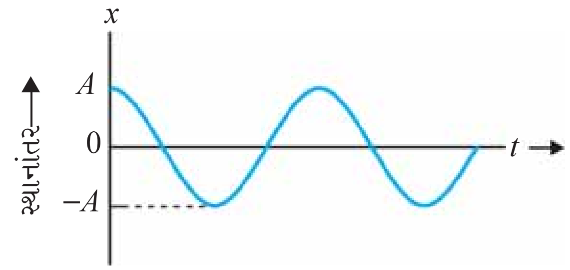
જ્યાં A, ω અને ϕ એ અચળાંકો છે.

આમ, કોઈ પણ આવર્તગતિ એ સરળ આવર્તગતિ નથી પરંતુ તે ગતિ કે જેમાં સ્થાનાંતર એ સમયનું સાઇન્યુસોઇડલ (એટલે કે sine પ્રકારનું જયાવર્તી) વિધેય છે. તે સ.આ.ગ. છે. આકૃતિ 14.4 એ, સમયનો દરેક અંતરાલ $T/4$ હોય તેવા જુદા જુદા સમયે સ.આ.ગ. કરતા કણનું સ્થાન દર્શાવે છે, જ્યાં T એ ગતિનો આવર્તકાળ છે.



આકૃતિ 14.4 *સમયનાં અલગ અલગ મૂલ્યો $t = 0, T/4, 3T/4, T, 5T/4$ માટે સ.આ.ગ. કરતાં કણના સ્થાન. જે સમય બાદ આ ગતિ તેનું પુનઃઆવર્તન કરે છે તે T છે. T એ અચળ રહે છે અને તે તમે પ્રારંભિક સ્થિતિ ($t = 0$) કઈ સ્થિતિ લો છો તેના પર આધારિત નથી. શૂન્ય સ્થાનાંતર ($x = 0$ પર) માટે ઝડપ મહત્તમ અને ગતિના અંત્ય બિંદુઓ પર ઝડપ શૂન્ય છે.*

આકૃતિ 14.5માં x વિરુદ્ધ tનો આલેખ રેખાંકિત કરેલ છે કે જે સ્થાનાંતરના સમય સાથેના સતત વિધેયનાં મૂલ્યો આપે છે. એ રાશિઓ A, ω અને ϕ કે જે આ સ.આ.ગ.ની લાક્ષણિકતાઓ નક્કી કરે છે તેને આકૃતિ *14.6*માં તેનાં પ્રમાણભૂત નામો સાથે દર્શાવેલ છે.

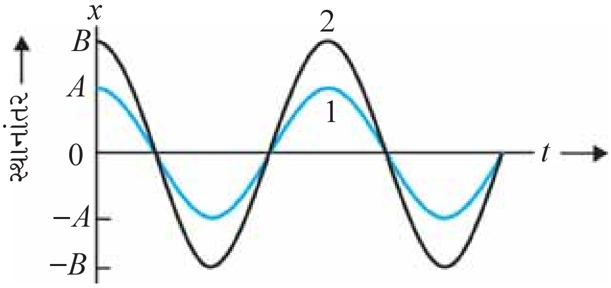


આકૃતિ 14.5 *સમયના સતત વિધેય તરીકે સરળ આવર્તગતિ માટે સ્થાનાંતર*

$x(t)$	:	સ્થાનાંતર x એ સમય t નાં વિધેય તરીકે
A	:	કંપવિસ્તાર (Amplitude)
ω	:	કોણીય આવૃત્તિ (Angular Frequency)
$\omega t + \phi$	:	કળા (સમય આધારિત) [Phase (Time-Dependent)]
ϕ	:	કળા-અચળાંક (Phase Constant)

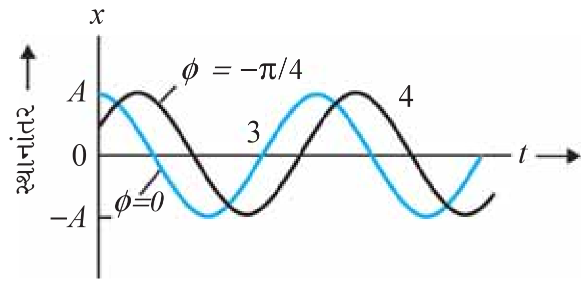
આકૃતિ 14.6 *સમીકરણ (14.4)માંની પ્રમાણભૂત સંજ્ઞાઓનો અર્થ*

સ.આ.ગ.નો કંપવિસ્તાર A એ આ કણના મહત્તમ સ્થાનાંતરનું માન છે. [નોંધો, વ્યાપકતાના કોઈ પણ નુકસાન વગર, A ને ધન લઈ શકાય.] જેમ સમયનું cosine વિધેય એ $+1$ અને -1 ની વચ્ચે બદલાય છે, તેમ સ્થાનાંતર એ બે ચરમસીમાઓ (સીમાંત બિંદુઓ) $+A$ અને $-A$ ની વચ્ચે બદલાય છે. ω અને ϕ સમાન હોય તેવી પરંતુ જુદા કંપવિસ્તાર A અને B ધરાવતી બે સરળ આવર્તગતિઓને આકૃતિ 14.7(a) માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 14.7 (a) *સમયના એક વિધેય તરીકે સ્થાનાંતરનો $\phi = 0$ માટે સમીકરણ (14.4) પરથી મેળવેલ આલેખ. વક્રો 1 અને 2 એ બે જુદા જુદા કંપવિસ્તારો A અને B માટેના છે.*

જ્યારે આપેલ સ.આ.ગ. માટે કંપવિસ્તાર A અચળ હોય ત્યારે, કોઈ પણ t સમયે આ કણની ગતિ-અવસ્થા (સ્થાન અને વેગ)ને cosine વિધેયના કોણાંક ($\omega t + \phi$) વડે શોધવામાં આવે છે. આ સમય આધારિત રાશિ, ($\omega t + \phi$) ને ગતિની **કળા (Phase)** કહેવામાં આવે છે. $t = 0$ સમયે કળાનું મૂલ્ય ϕ છે અને તેને **કળા-અચળાંક (Phase Constant)** કે **કળા-કોણ (Phase Angle)** કહેવાય છે. જો કંપવિસ્તાર જાણતા હોઈએ, તો કણનાં $t = 0$ પરના સ્થાનાંતર પરથી ϕ શોધી શકાય છે. સમાન A અને ω હોય તેવી પરંતુ જુદી કળાઓ ϕ ધરાવતી બે સરળ આવર્તગતિઓને આકૃતિ 14.7(b)માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 14.7 (b) સમીકરણ 14.4 પરથી મેળવેલ આલેખ વક્રો 3 અને 4 અનુક્રમે $\phi = 0$ અને $-\pi/4$ માટેના છે. આ બંને વક્રો માટે કંપવિસ્તાર સમાન છે.

અંતમાં, રાશિ ω એ ગતિના આવર્તકાળ T સાથે સંબંધિત છે તેમ જોઈ શકાય છે. સરળતા માટે, સમીકરણ (14.4)માં $\phi = 0$ લેતાં, આપણને

$$x(t) = A \cos \omega t \qquad (14.5)$$

મળે છે. આ ગતિ, આવર્તકાળ T સાથે આવર્ત હોવાનાં કારણે $x(t)$ એ $x(t + T)$ છે. એટલે કે,

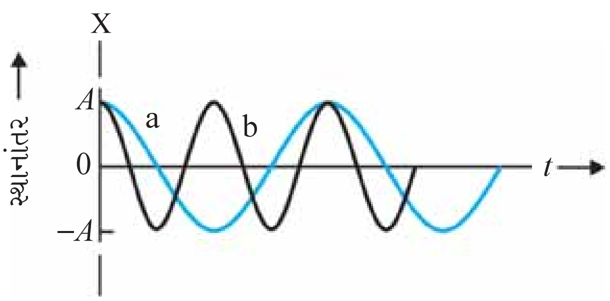
$$A \cos \omega t = A \cos \omega (t + T) \qquad (14.6)$$

હવે cosine વિધેય એ આવર્તકાળ 2π સાથે આવર્ત છે, એટલે કે જ્યારે તેની કળામાં 2π વધારો થાય ત્યારે તે પોતાનું પોતે પુનરાવર્તન કરે છે. આમ,

$$\omega (t + T) = \omega t + 2\pi$$

આમ, $\omega = 2\pi/T$ (14.7)

ω ને સ.આ.ગ.ની કોણીય આવૃત્તિ કહે છે. કોણીય આવૃત્તિનો SI એકમ રેડિયન / સેકન્ડ (redian per second) છે. દોલનોની આવૃત્તિ એ $1/T$ છે. તેથી ω એ દોલનની આ આવૃત્તિથી 2π ગણી છે. સમાન A અને ϕ હોય શકે તેવી પરંતુ જુદી ω ધરાવતી બે સરળ આવર્તગતિઓને આકૃતિ 14.8માં દર્શાવેલ છે. આ આલેખમાં વક્ર a કરતાં વક્ર b નો આવર્તકાળ અડધો છે અને આવૃત્તિ બમણી છે.



આકૃતિ 14.8 સમીકરણ (14.4)ના $\phi = 0$ માટે બે જુદા આવર્તકાળ માટેના આલેખો

> **ઉદાહરણ 14.3** નીચેનામાંથી સમયનાં કયા વિધેયો (a) સરળ આવર્તગતિ અને (b) આવર્ત પરંતુ સરળ આવર્ત નથી તેમ રજૂ કરે છે. દરેક કિસ્સા માટે આવર્તકાળ આપો.
> (1) $\sin \omega t - \cos \omega t$
> (2) $\sin^2 \omega t$

ઉકેલ

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

$= \sin \omega t - \sin (\pi/2 - \omega t)$

$= 2 \cos (\pi/4) \sin (\omega t - \pi/4)$

$= \sqrt{2} \sin (\omega t - \pi/4)$

આ વિધેય આવર્તકાળ $T = 2\pi/\omega$ અને કળા-કોણ $(-\pi/4)$ અથવા $(7\pi/4)$ ધરાવતી સરળ આવર્તગતિ દર્શાવે છે.

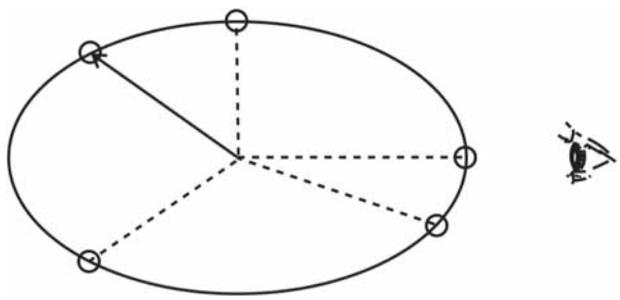
(b) $\sin^2 \omega t$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 \omega t$

આ વિધેય આવર્ત છે જેનો આવર્તકાળ $T = \pi/\omega$ છે. તે એવી આવર્તગતિ પણ રજૂ કરે છે કે જેનું સંતુલન બિંદુ શૂન્યને બદલે $\frac{1}{2}$ પર આવેલ હોય. ◀

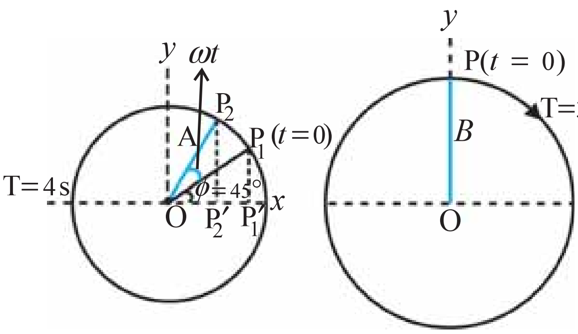
14.4 સરળ આવર્તગતિ અને નિયમિત વર્તુળમય ગતિ (SIMPLE HARMONIC MOTION AND UNIFORM CIRCULAR MOTION)

આ પરિચ્છેદમાં આપણે બતાવીશું કે વર્તુળના વ્યાસ પર નિયમિત વર્તુળમય ગતિનો પ્રક્ષેપ સરળ આવર્તગતિ કરે છે. આ કથનને દ્રશ્યમાન કરવા એક સરળ પ્રયોગ આપણને મદદરૂપ થશે (આકૃતિ 14.9). કોઈ દોરીના એક છેડે એક દડાને બાંધો અને તેને નિયત બિંદુને અનુલક્ષીને સમક્ષિતિજ સમતલમાં અચળ કોણીય ઝડપ સાથે ગતિ કરાવો. આ દડો પછી સમક્ષિતિજ સમતલમાં નિયમિત વર્તુળમય ગતિ કરશે. ગતિના સમતલમાં તમારું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીને દડાનું બાજુ પરથી અથવા સામેથી અવલોકન કરો. આ દડો સમક્ષિતિજ રેખા પર પરિભ્રમણ બિંદુને મધ્યબિંદુ તરીકે લેતા આગળ-પાછળ ગતિ કરતો દેખાશે. તમે વૈકલ્પિક રીતે એક દીવાલ પર પણ આ દડાના પડછાયાનું અવલોકન કરી શકો છો, જે વર્તુળના સમતલને લંબ છે. આ ક્રિયામાં આપણે જે અવલોકન કરી રહ્યાં છીએ તે આપણી જોવાની દિશાને લંબ, વર્તુળના વ્યાસ પર બૉલની ગતિ છે.



આકૃતિ 14.9 એક સમતલમાં દડાની વર્તુળમય ગતિને ધાર પરથી જોતાં તે સ.આ.ગ. દેખાશે.

આકૃતિ 14.10 એ આ જ પરિસ્થિતિનું ગાણિતિક સ્વરૂપ દર્શાવે છે. કોઈ A ત્રિજ્યાના વર્તુળ પર નિયમિત કોણીય ઝડપ ω સાથે ગતિ કરતો કોઈ એક કણ P ધારો. આ પરિભ્રમણની દિશા ઘડિયાળના કાંટાની ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં છે. આ કણનો પ્રારંભિક સ્થાનસદિશ $\mathbf{OP_1}$ X -અક્ષની ધન દિશા



આકૃતિ **14.10**

સાથે ϕ ખૂણો આંતરે છે. $\mathbf{OP_1}$નો x-અક્ષ પરનો પ્રક્ષેપ OP'_1 છે. t સમયમાં કણનો સ્થાનસદિશ, ωt જેટલો વધુ કોણ આંતરશે અને હવે તેનો સ્થાનસદિશ $\mathbf{OP_2}$, ધન x-અક્ષ સાથે $\omega t + \phi$નો કોણ બનાવશે. ત્યાર બાદ, સ્થાનસદિશ OP_2 નો x-અક્ષ પરનો પ્રક્ષેપ OP'_2 હશે. કણ P જેમ જેમ વર્તુળ પર ગતિ કરે છે, તેમ તેમ P'નું x-અક્ષ પરનું સ્થાન

$$x(t) = A \cos (\omega t + \phi)$$

વડે આપવામાં આવે છે,

જે સ.આ.ગ.ને વ્યાખ્યાયિત કરતું સમીકરણ છે. આ દર્શાવે છે કે જો કણ P એ નિયમિત વર્તુળમય ગતિ કરે, તો તેનો પ્રક્ષેપ P' એ વર્તુળના વ્યાસ પર સ.આ.ગ. કરે છે. આ કણ P અને આ વર્તુળ કે જેના પર તે ગતિ કરે છે તેને ઘણી વાર અનુક્રમે **સંદર્ભકણ (reference particle)** અને **સંદર્ભવર્તુળ (reference circle)** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

આપણે Pની ગતિનો પ્રક્ષેપ કોઈ પણ વ્યાસ પર લઈ શકીએ છીએ, જેમકે y-અક્ષ પર. આ કિસ્સામાં P'નું y-અક્ષ પરનું સ્થાનાંતર

$$y(t) = A \sin (\omega t + \phi)$$

વડે આપવામાં આવે છે, તે પણ x-અક્ષ પરના પ્રક્ષેપના સમાન કંપવિસ્તારની પરંતુ $\pi/2$ કળાથી ભિન્ન એવી એક સ.આ.ગ. છે.

વર્તુળમય અને સ.આ.ગ. વચ્ચે આવો સંબંધ હોવા છતાં, રેખીય સરળ આવર્તગતિ કરતાં કણ પર લાગતું બળ એ કણને નિયમિત વર્તુળમય ગતિમાં રાખવા જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ કરતાં સદંતર ભિન્ન પ્રકારનું હોય છે.

▶ *ઉદાહરણ 14.4* આકૃતિ 14.10 એ બે વર્તુળમય ગતિ દર્શાવે છે. આ આકૃતિમાં વર્તુળની ત્રિજ્યા, ભ્રમણનો આવર્તકાળ, પ્રારંભિક સ્થિતિ અને ભ્રમણની દિશા દર્શાવવામાં આવેલ છે. પ્રત્યેક કિસ્સામાં ભ્રમણ કરતાં કણ P ના ત્રિજ્યા-સદિશના X-પ્રક્ષેપની સરળ આવર્તગતિ મેળવો.

ઉકેલ

(a) $t = 0$ પર, OP એ X-અક્ષની (ધન દિશા) સાથે $45° = \pi/4$ radનો એક ખૂણો બનાવે છે. t સમય પછી, તે ઘડિયાળના કાંટાની ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં ખૂણો $\frac{2\pi}{T}t$ને આવરી લે છે અને X-અક્ષ સાથે $\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$ ખૂણો બનાવે છે.

t સમયે X-અક્ષ પર OP ના પ્રક્ષેપને

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

વડે આપવામાં આવે છે.

$T = 4$ s માટે,

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

જે કંપવિસ્તાર A, આવર્તકાળ 4 s અને પ્રારંભિક કળા* $= \frac{\pi}{4}$ની સ.આ.ગ. (SHM) છે.

(b) $t = 0$ના આ કિસ્સામાં, OP એ X-અક્ષ સાથે $90° = \frac{\pi}{2}$નો કોણ બનાવે છે. t સમય બાદ, તે ઘડિયાળના કાંટાની ગતિની દિશામાં $\frac{2\pi}{T}t$નો કોણ આવરે છે અને તે X-અક્ષ સાથે $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T}t\right)$ ખૂણો

* *કોણનો પ્રાકૃતિક એકમ રેડિયન (Radian) છે, જે ચાપ (arc) અને ત્રિજ્યા (Radius)ના ગુણોત્તર દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થયેલ છે. કોણ એ પરિમાણરહિત રાશિ છે. આથી જ્યારે આપણે π, કે તેના ગુણાંક કે ઉપગુણાંકમાં તેનો ઉપયોગ કરીએ ત્યારે હમેશાં એ જરૂરી નથી કે આપણે Radian એકમ દર્શાવવો પડે. Radian અને Degree વચ્ચેનું રૂપાંતરણ Meter અને Centimetre કે Mileના સમરૂપ નથી. જો કોઈ ત્રિકોણમિતીય વિધેયમાં કોણને એકમ વગર દર્શાવેલ હોય, તો તેનો એકમ Radian છે તેમ સમજવાનું. બીજી તરફ, જો ખૂણાનો એકમ Degree તરીકે ઉપયોગ કરવો હોય, તો તે સ્પષ્ટપણે દર્શાવવો જોઈએ. ઉદાહરણ તરીકે, sin (15°) એટલે કે 15 Degreeનો sine થાય છે, પરંતુ sine (15) એટલે કે 15 Radiansનો sin. હવે પછી આપણે ઘણી વાર 'rad' ને એકમ તરીકે નહિ લખીએ અને તે સમજી લઈશું કે જ્યારે કોઈ એકમ વગર કોણને કોઈક સંખ્યાત્મક મૂલ્ય તરીકે ઉલ્લેખ કરવામાં આવેલ હોય, તો તેને radian તરીકે ગણવામાં આવેલ છે.*