હવે, પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

અને $$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$$

તેથી, $$\frac{BC}{QR} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{k^2\,PQ^2 - k^2\,PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}}$$

$$= \frac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k \qquad (2)$$

પરિણામ (1) અને (2) પરથી,

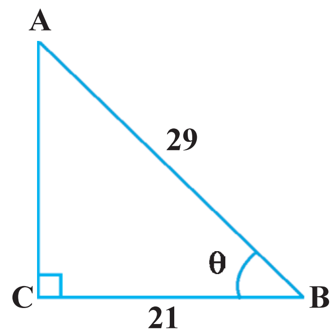
$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

આમ, પ્રમેય 6.4 પ્રમાણે Δ ACB ~ Δ PRQ. તેથી, $\angle B = \angle Q$

ઉદાહરણ 3 : જેમાં $\angle C$ કાટખૂણો હોય, તેવો કોઈ Δ ACB લો. AB = 29 એકમ, BC = 21 એકમ અને $\angle ABC = \theta$ (જુઓ આકૃતિ 8.10) હોય, તો નિમ્નલિખિત મૂલ્ય શોધો :

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$,

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$.



આકૃતિ 8.10

ઉકેલ : Δ ACB માં,

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{(29-21)\,(29+21)}$$

$$= \sqrt{(8)\,(50)}$$

$$= \sqrt{400}$$

= 20 એકમ

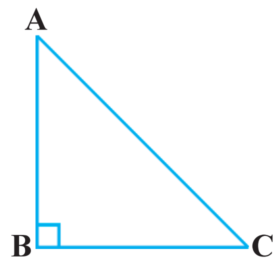
તેથી, $\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}$, $\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}$

હવે, (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 + \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{21^2 + 20^2}{29^2} = \frac{441+400}{841} = 1$

અને (ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{(21+20)(21-20)}{29^2} = \frac{41}{841}$

ઉદાહરણ 4 : કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં ખૂણો B કાટખૂણો છે. જો $tan\,A = 1$ તો ચકાસો કે $2\,sin\,A\,cos\,A = 1$

ઉકેલ : Δ ABC માં,



આકૃતિ 8.11

$tan\,A = \frac{BC}{AB} = 1$ (જુઓ આકૃતિ 8.11.)

એટલે કે BC = AB

ધારો કે કોઈ ધન સંખ્યા k માટે AB = BC = k,

હવે, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

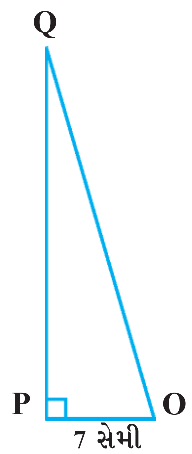
$= \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2}$

માટે, $sin\,A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ અને $cos\,A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

તેથી, $2\,sin\,A\,cos\,A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$ સિદ્ધ થાય છે.

ઉદાહરણ 5 : Δ OPQ માં, P કાટખૂણો છે, OP = 7 સેમી અને OQ – PQ = 1 સેમી (જુઓ આકૃતિ 8.12), $sin\,Q$ અને $cos\,Q$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : Δ OPQ માં,



આકૃતિ 8.12

$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

$\therefore (1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2$ (કેમ ?)

$\therefore 1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$

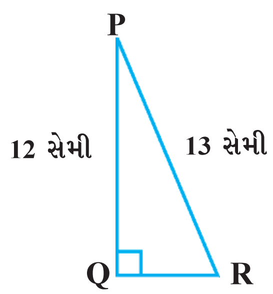
$\therefore 1 + 2PQ = 7^2$ (કેમ ?)

$\therefore$ PQ = 24 સેમી અને OQ = 1 + PQ = 25 સેમી

તેથી, $sin\,Q = \frac{7}{25}$ અને $cos\,Q = \frac{24}{25}$

સ્વાધ્યાય 8.1

1. Δ ABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે. AB = 24 સેમી, BC = 7 સેમી હોય, તો નીચેના ગુણોત્તરોનું મૂલ્ય શોધો :
   (i) $sin\,A$, $cos\,A$
   (ii) $sin\,C$, $cos\,C$
2. આકૃતિ 8.13 માં, $tan\,P - cot\,R$ શોધો.
3. જો $sin\,A = \frac{3}{4}$ હોય, તો $cos\,A$ અને $tan\,A$ ની ગણતરી કરો.
4. જો $15\,cot\,A = 8$ હોય, તો $sin\,A$ અને $sec\,A$ શોધો.
5. જો $sec\,\theta = \frac{13}{12}$ હોય, તો બાકીના બધા જ ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો શોધો.



આકૃતિ 8.13

6. $\angle A$ અને $\angle B$ એવા લઘુકોણો છે કે, જેથી $\cos A = \cos B$. સાબિત કરો કે $\angle A = \angle B$

7. જો $\cot \theta = \frac{7}{8}$ હોય તો, (i) $\frac{(1+\sin\theta)\,(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)\,(1-\cos\theta)}$ (ii) $\cot^2 \theta$ શોધો.

8. જો $3 \cot A = 4$ હોય, તો નક્કી કરો કે $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ છે કે નહિ.

9. Δ ABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે. જો $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ હોય, તો નિમ્નલિખિત મૂલ્ય શોધો.

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

10. Δ PQR માં $\angle Q$ કાટખૂણો છે અને PR + QR = 25 સેમી અને PQ = 5 સેમી હોય, તો $\sin P$, $\cos P$ અને $\tan P$ શોધો.

11. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે નહિ તે કારણ આપી જણાવો :

(i) $\tan A$ નું મૂલ્ય હંમેશાં 1 કરતાં ઓછું હોય છે.

(ii) A માપવાળા કોઈક ખૂણા માટે $\sec A = \frac{12}{5}$ સત્ય છે.

(iii) ખૂણા A ના *cosecant* ને સંક્ષિપ્તમાં $\cos A$ તરીકે લખાય છે.

(iv) *cot* અને A નો ગુણાકાર $\cot A$ છે.

(v) θ માપવાળા કોઈ એક ખૂણા માટે $\sin \theta = \frac{4}{3}$ શક્ય છે.

8.3 વિશિષ્ટ માપના ખૂણા માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

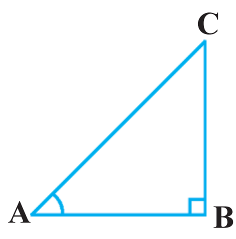
ભૂમિતિમાં તમે 30°, 45°, 60° અને 90° માપના ખૂણાઓની રચનાથી પરિચિત છો. આ વિભાગમાં આપણે આ ખૂણાઓ અને 0° માપના ખૂણા માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોના મૂલ્ય મેળવીશું.

45° ના ખૂણા માટે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

Δ ABC માં ખૂણો B કાટખૂણો છે. હવે જો કોઈ એક ખૂણો 45° હોય તો બીજો લઘુકોણ પણ 45°નો થાય.

અર્થાત્, $\angle A = \angle C = 45°$

(જુઓ આકૃતિ 8.14.)



આકૃતિ 8.14

માટે, $BC = AB$ (કેમ ?)

ધારો કે, $BC = AB = a$

પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

માટે, $AC = a\sqrt{2}$

ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોની વ્યાખ્યાઓનો ઉપયોગ કરતાં આપણને,

$$\sin 45° = \frac{45° \text{ ખૂણાની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{45° \text{ ખૂણાની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{45° \text{ ખૂણાની સામેની બાજુ}}{45° \text{ ખૂણાની પાસેની બાજુ}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

અને $\quad \operatorname{cosec} 45° = \frac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}$, $\sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2}$,

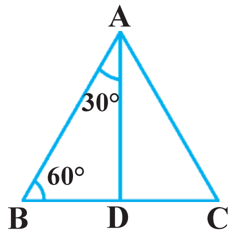
$\cot 45° = \frac{1}{\tan 45°} = 1$ મળે.

30° અને 60° ના ખૂણા માટે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

હવે આપણે 30° અને 60° ના ખૂણા માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો મેળવીએ. કોઈ એક સમબાજુ ત્રિકોણ ABC લો. સમબાજુ ત્રિકોણમાં દરેક ખૂણો 60° નો હોવાથી,

$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

બિંદુ A માંથી બાજુ BC પર લંબ AD દોરો (જુઓ આકૃતિ 8.15.)



આકૃતિ 8.15

હવે, $\quad \Delta ABD \cong \Delta ACD \quad$ (કેમ ?)

માટે, $\quad BD = DC$

અને $\quad \angle BAD = \angle CAD \quad$ (એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ)

હવે તમે જોઈ શકો છો કે,

ΔABD જેમાં ખૂણો D કાટખૂણો હોય તેવો કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને $\angle BAD = 30°$ તથા $\angle ABD = 60°$ (જુઓ આકૃતિ 8.15.)

તમે જાણો છો કે, ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો શોધવા માટે, આપણે ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ શોધવી પડશે. તેથી, ધારો કે, $AB = 2a$

માટે, $\quad BD = \frac{1}{2} BC = a$

અને $\quad AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$,

માટે, $\quad AD = a\sqrt{3}$

હવે, આપણને

$$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \ \cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ મળે.

અને $\quad cosec\ 30^\circ = \frac{1}{sin\,30^\circ} = 2,\ sec\ 30^\circ = \frac{1}{cos\,30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

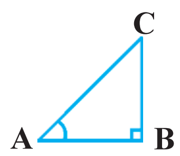
$$cot\ 30^\circ = \frac{1}{tan\,30^\circ} = \sqrt{3}$$

તે જ પ્રમાણે, $\quad sin\ 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ cos\ 60^\circ = \frac{1}{2},\ tan\ 60^\circ = \sqrt{3},$

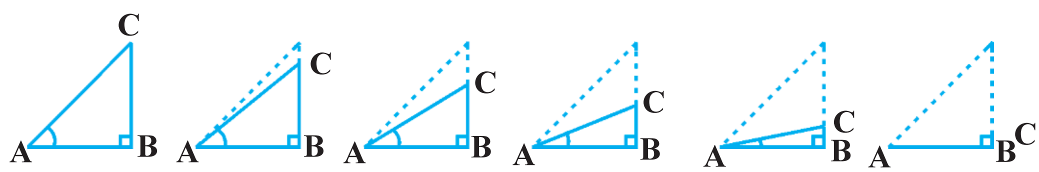
$cosec\ 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}},\ sec\ 60^\circ = 2$ અને $cot\ 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

0° અને 90° માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

હવે આપણે જોઈએ કે જો કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં ખૂણા A નું માપ શૂન્ય થાય ત્યાં સુધી ક્રમશઃ ઓછું કરીએ, (જુઓ આકૃતિ 8.16.) તો ખૂણા Aના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો પર શું પ્રભાવ પડે. જેમ જેમ ∠A નું માપ નાનું થતું જશે તેમ-તેમ બાજુ BC ની લંબાઈ ઘટતી જશે. બિંદુ C , બિંદુ B ની નજીક આવતું જશે અને જ્યારે ∠Aનું માપ 0° ની એકદમ નજીક હશે ત્યારે AC એ AB ને લગભગ સમાન થઈ જશે (જુઓ આકૃતિ 8.17.)



આકૃતિ 8.16



આકૃતિ 8.17

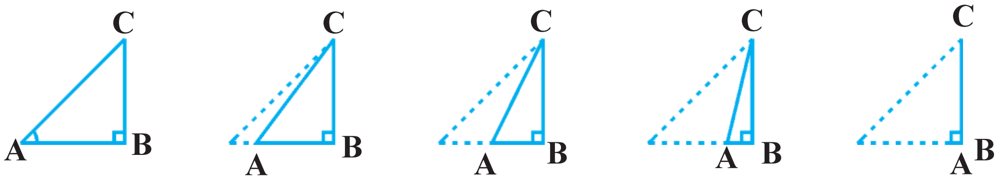
જ્યારે ∠A નું માપ શૂન્યની એકદમ નજીક હશે, ત્યારે BC ની લંબાઈ પણ શૂન્યની નજીક હશે. ત્યારે $sin\ A = \frac{BC}{AC}$ નું મૂલ્ય પણ શૂન્યની નજીક હશે. અને જ્યારે ∠A નું માપ શૂન્યની એકદમ નજીક હશે, ત્યારે લગભગ AC અને AB સમાન હશે તેથી, $cos\ A = \frac{AB}{AC}$ નું મૂલ્ય 1 ની એકદમ નજીક હશે.

આની મદદથી આપણે જ્યારે A = 0° હોય, ત્યારે *sin* A અને *cos* A નાં મૂલ્યોને વ્યાખ્યાયિત કરી શકીશું. અહીં $\boldsymbol{sin\ 0^\circ = 0}$ અને $\boldsymbol{cos\ 0^\circ = 1}$ વ્યાખ્યાયિત થાય છે. આના ઉપયોગથી આપણને

$tan\ 0^\circ = \frac{sin\,0^\circ}{cos\,0^\circ} = 0,\ cot\ 0^\circ = \frac{1}{tan\,0^\circ} =$ અવ્યાખ્યાયિત (કેમ ?)

$sec\ 0^\circ = \frac{1}{cos\,0^\circ} = 1$ અને $cosec\ 0^\circ = \frac{1}{sin\,0^\circ}$ પુનઃ અવ્યાખ્યાયિત છે. (કેમ?)

ચાલો, હવે આપણે જોઈએ કે જો કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં ખૂણા A નું માપ 90° થાય ત્યાં સુધી ક્રમશઃ વધારતા જઈએ તો આ સ્થિતિમાં ખૂણા A ના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો પર શું પ્રભાવ પડે. જેમ-જેમ ∠A નું માપ મોટું થશે તેમ-તેમ ∠C નાનો થતો જશે. માટે ઉપર્યુક્ત પરિસ્થિતિ પ્રમાણે બાજુ AB ની લંબાઈ ઘટશે. બિંદુ A બિંદુ B ની નજીક આવશે અને જ્યારે ∠A નું માપ 90° ની એકદમ નજીક હશે, ત્યારે ∠C નું માપ 0° ની એકદમ નજીક હશે અને બાજુ AC બાજુ BC ને લગભગ સંપાતી થશે. (જુઓ આકૃતિ 8.18.)



આકૃતિ 8.18

જ્યારે ∠C નું માપ 0° ની એકદમ નજીક હશે, ત્યારે ∠A નું માપ 90° ની અત્યંત નજીક હશે. બાજુ AC અને બાજુ BC ની લંબાઈ લગભગ સમાન થશે અને તેથી *sin* A નું મૂલ્ય 1ની અત્યંત નજીક હશે. અને જ્યારે ∠A નું માપ 90° ની અત્યંત નજીક હશે, ત્યારે ∠C નું માપ 0° ની અત્યંત નજીક હશે અને બાજુ AB નું માપ લગભગ શૂન્ય થશે તેથી *cos* A નું મૂલ્ય શૂન્યની એકદમ નજીક હશે.

આમ, આપણે **$\sin 90° = 1$** અને **$\cos 90° = 0$** વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

હવે, તમે 90° માટેના બીજા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો શોધવાનો પ્રયત્ન કેમ નથી કરતા ?

હવે, આપણે ઝડપી સંદર્ભ માટે 0°, 30°, 45°, 60° અને 90° માપના બધા જ ગુણોત્તરોના મૂલ્ય કોષ્ટક 8.1 માં દર્શાવીશું.

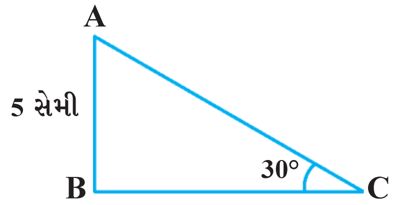
કોષ્ટક 8.1

∠A	0°	30°	45°	60°	90°
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	અવ્યાખ્યાયિત
cosec A	અવ્યાખ્યાયિત	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	અવ્યાખ્યાયિત
cot A	અવ્યાખ્યાયિત	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

નોંધ : ઉપર્યુક્ત કોષ્ટકમાં તમે જોઈ શકો છો કે જેમ-જેમ $\angle A$ નું માપ $0°$ થી વધીને $90°$ થાય છે તેમ-તેમ $\sin A$ નું માપ 0 થી વધીને 1 થાય છે તથા $\cos A$ નું માપ 1 થી ઘટીને 0 થાય છે.

ચાલો આપણે ઉપર્યુક્ત કોષ્ટકની કિંમતોનો ઉપયોગ કેટલાંક ઉદાહરણમાં કરીએ :

ઉદાહરણ 6 : Δ ABCમાં B કાટખૂણો છે, AB = 5 સેમી અને $\angle ACB = 30°$ (જુઓ આકૃતિ 8.19). તો બાજુ BC અને AC ની લંબાઈ શોધો.



આકૃતિ 8.19

ઉકેલ : બાજુ BC ની લંબાઈ શોધવા માટે આપણે બાજુ BC અને બાજુ AB ને સમાવતા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર પસંદ કરીશું. અહીં, ખૂણા C માટે બાજુ BC પાસેની બાજુ છે તથા AB ખૂણા C ની સામેની બાજુ છે.

માટે, $\frac{AB}{BC} = \tan C$ એટલે કે $\frac{5}{BC} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

આથી, $BC = 5\sqrt{3}$ સેમી મળશે.

બાજુ AC ની લંબાઈ શોધવા માટે આપણે $\sin 30° = \frac{AB}{AC}$ લઈશું. (કેમ ?)

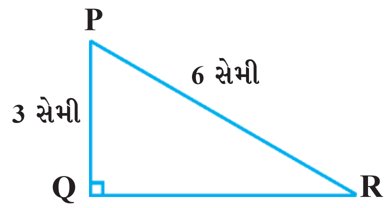
એટલે કે, $\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$

$\therefore$ AC = 10 સેમી

જુઓ કે, ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણમાં ત્રીજી બાજુની લંબાઈ શોધવા માટે આપણે બીજા વિકલ્પ તરીકે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો પણ ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ.

એટલે કે, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2}$ સેમી = 10 સેમી

ઉદાહરણ 7 : Δ PQRમાં, Q કાટખૂણો છે (જુઓ આકૃતિ 8.20). PQ = 3 સેમી અને PR = 6 સેમી હોય, તો $\angle QPR$ અને $\angle PRQ$ શોધો.



આકૃતિ 8.20

ઉકેલ : PQ = 3 સેમી અને PR = 6 સેમી આપેલ છે.

હવે $\frac{PQ}{PR} = \sin R$

$\therefore \sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

તેથી $\angle PRQ = 30°$

માટે, $\angle QPR = 60°$ (કેમ ?)

તમે અહીં જોઈ શકો છો કે, કાટકોણ ત્રિકોણમાં જો કોઈ એક બાજુ અને અન્ય કોઈ એક ભાગ (કોઈ એક લઘુકોણ અથવા તો કોઈ એક બાજુ) આપેલ હોય, તો ત્રિકોણની બાકીની બાજુ અને ખૂણાઓનાં માપ શોધી શકાય છે.

ઉદાહરણ 8 : જો $sin\ (A - B) = \frac{1}{2}$, $cos\ (A+B) = \frac{1}{2}$, $0° < A + B \le 90°$, $A > B$, તો A અને B શોધો.

ઉકેલ : $sin\ (A - B) = \frac{1}{2}$ હોવાથી $A - B = 30°$ (કેમ ?) (1)

અને $cos\ (A + B) = \frac{1}{2}$ હોવાથી $A + B = 60°$ (કેમ ?) (2)

(1) અને (2) નો ઉકેલ શોધતાં,

આપણને $A = 45°$ અને $B = 15°$ મળે.

સ્વાધ્યાય 8.2

1. કિંમત શોધો :

(i) $sin\ 60°\ cos\ 30° + sin\ 30°\ cos\ 60°$

(ii) $2\ tan^2\ 45° + cos^2\ 30° - sin^2\ 60°$

(iii) $\dfrac{cos\ 45°}{sec\ 30° + cosec\ 30°}$

(iv) $\dfrac{sin\ 30° + tan\ 45° - cosec\ 60°}{sec\ 30° + cos\ 60° + cot\ 45°}$

(v) $\dfrac{5cos^2\ 60° + 4\ sec^2\ 30° - tan^2\ 45°}{sin^2\ 30° + cos^2\ 30°}$

2. સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો અને તેની યથાર્થતા ચકાસો :

(i) $\dfrac{2\ tan\ 30°}{1 + tan^2\ 30°} =$ ....

(A) $sin\ 60°$ (B) $cos\ 60°$ (C) $tan\ 60°$ (D) $sin\ 30°$

(ii) $\dfrac{1 - tan^2\ 45°}{1 + tan^2\ 45°} =$ ....

(A) $tan\ 90°$ (B) 1 (C) $sin\ 45°$ (D) 0°

(iii) જ્યારે A = ... હોય, ત્યારે $sin\ 2A = 2\ sin\ A$ સત્ય હોય.

(A) 0° (B) 30° (C) 45° (D) 60°

(iv) $\dfrac{2\ tan\ 30°}{1 - tan^2\ 30°} =$ ....

(A) $cos\ 60°$ (B) $sin\ 60°$ (C) $tan\ 60°$ (D) $sin\ 30°$

3. જો $tan\ (A + B) = \sqrt{3}$ અને $tan\ (A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $0° < A + B \le 90°$, $A > B$, તો A અને B શોધો.

4. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો :

(i) $sin\ (A + B) = sin\ A + sin\ B$.

(ii) જેમ-જેમ θ નું મૂલ્ય વધે, તેમ તેમ $sin\ \theta$ નું મૂલ્ય વધે છે.

(iii) જેમ-જેમ θ નું મૂલ્ય વધે, તેમ તેમ $cos\ \theta$ નું મૂલ્ય વધે છે.

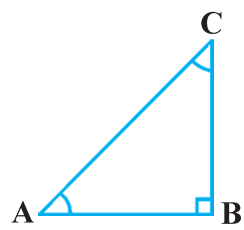
(iv) θ ના દરેક મૂલ્ય માટે $sin\ \theta = cos\ \theta$ થાય.

(v) $A = 0°$ માટે $cot\ A$ અવ્યાખ્યાયિત છે.

8.4 કોટિકોણના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

તમને યાદ હશે કે, જો બે ખૂણાઓનાં માપનો સરવાળો 90° હોય તો બંને ખૂણાઓને એકબીજાના કોટિકોણ કહે છે. Δ ABC માં, ∠B કાટખૂણો હોય, તો શું તમને અહીં કોટિકોણની એક જોડ મળશે ? (જુઓ આકૃતિ 8.21.)

∠A + ∠C = 90° હોવાથી, તે બંને કોટિકોણની જોડ બનાવે છે. આપણી પાસે,



આકૃતિ 8.21

$$\left.\begin{aligned} \sin A &= \frac{BC}{AC}, & \cos A &= \frac{AB}{AC}, & \tan A &= \frac{BC}{AB} \\ \operatorname{cosec} A &= \frac{AC}{BC}, & \sec A &= \frac{AC}{AB}, & \cot A &= \frac{AB}{BC} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

હવે, આપણે ∠C = 90 – ∠A માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો લખીએ.

આપણી સુવિધા માટે આપણે 90 – ∠A ને 90° – A તરીકે લખીશું.

ખૂણા 90 – A માટે સામેની બાજુ અને પાસેની બાજુ કઈ હશે ?

તમે જોઈ શકો છો કે, ખૂણા 90 – A માટે, સામેની બાજુ AB છે અને પાસેની બાજુ BC છે.

માટે,

$$\left.\begin{aligned} \sin (90° - A) &= \frac{AB}{AC}, & \cos (90° - A) &= \frac{BC}{AC}, & \tan (90° - A) &= \frac{AB}{BC} \\ \operatorname{cosec} (90° - A) &= \frac{AC}{AB}, & \sec (90° - A) &= \frac{AC}{BC}, & \cot (90° - A) &= \frac{BC}{AB} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

હવે (1) અને (2) માં દર્શાવેલ ગુણોત્તરોની સરખામણી કરતાં આપણે જોઈશું કે :

$$\sin (90° - A) = \frac{AB}{AC} = \cos A \text{ અને } \cos (90° - A) = \frac{BC}{AC} = \sin A$$

અને $$\tan (90° - A) = \frac{AB}{BC} = \cot A \text{ અને } \cot (90° - A) = \frac{BC}{AB} = \tan A$$

$$\sec (90° - A) = \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec} A \text{ અને } \operatorname{cosec} (90° - A) = \frac{AC}{AB} = \sec A$$

આમ, 0° અને 90° ની વચ્ચે આવેલા ખૂણા A ના દરેક મૂલ્ય માટે,

$\sin (90° - A) = \cos A$, $\quad\cos (90° - A) = \sin A$,

$\tan (90° - A) = \cot A$, $\quad\cot (90° - A) = \tan A$,

$\sec (90° - A) = \operatorname{cosec} A$, $\quad\operatorname{cosec} (90° - A) = \sec A$,

હવે, A = 0° અને A = 90° માટે આ સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસો.

નોંધ : $\tan 0° = 0 = \cot 90°$, $\sec 0° = 1 = \operatorname{cosec} 90°$ અને $\sec 90°$, $\operatorname{cosec} 0°$, $\tan 90°$ તથા $\cot 0°$ અવ્યાખ્યાયિત છે.

હવે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈશું.

ઉદાહરણ 9 : કિંમત શોધો : $\dfrac{\tan 65°}{\cot 25°}$

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે,

$\cot A = \tan (90° - A)$

માટે $\cot 25° = \tan (90° - 25°) = \tan 65°$

એટલે કે, $\dfrac{\tan 65°}{\cot 25°} = \dfrac{\tan 65°}{\tan 65°} = 1$

ઉદાહરણ 10 : જો 3A એ લઘુકોણનું માપ હોય તથા $\sin 3A = \cos (A - 26°)$ હોય, તો A ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : અહીં, આપણે $\sin 3A = \cos (A - 26°)$ આપેલ છે. (1)

હવે, $\sin 3A = \cos (90° - 3A)$ હોવાથી આપણે પરિણામ (1) ને નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ.

$\cos (90° - 3A) = \cos (A - 26°)$

હવે, $90° - 3A$ અને $A - 26°$ બંને લઘુકોણ હોવાથી,

$90° - 3A = A - 26°$

તેથી, $A = 29°$ મળે.

ઉદાહરણ 11 : $\cot 85° + \cos 75°$ ને 0° અને 45° વચ્ચેના માપવાળા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરનો ઉપયોગ કરીને દર્શાવો.

ઉકેલ : $\cot 85° + \cos 75° = \cot (90° - 5°) + \cos (90° - 15°)$

$= \tan 5° + \sin 15°$

સ્વાધ્યાય 8.3

1. કિંમત શોધો :

(i) $\dfrac{\sin 18°}{\cos 72°}$ (ii) $\dfrac{\tan 26°}{\cot 64°}$ (iii) $\cos 48° - \sin 42°$ (iv) $\operatorname{cosec} 31° - \sec 59°$

2. સાબિત કરો :

(i) $\tan 48° \tan 23° \tan 42° \tan 67° = 1$

(ii) $\cos 38° \cos 52° - \sin 38° \sin 52° = 0$

3. જો 2A એ લઘુકોણનું માપ હોય તથા $\tan 2A = \cot (A - 18°)$ હોય, તો A ની કિંમત શોધો.

4. જો $\tan A = \cot B$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $A + B = 90°$

5. જો 4A એ લઘુકોણનું માપ હોય તથા $\sec 4A = \operatorname{cosec} (A - 20°)$ હોય, તો A ની કિંમત શોધો.

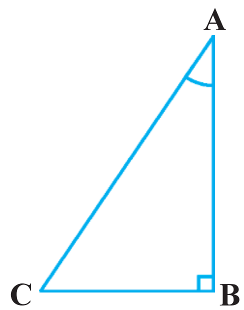
6. જો A, B અને C એ ΔABC ના ખૂણા હોય, તો સાબિત કરો કે, $\sin \left(\dfrac{B+C}{2}\right) = \cos \dfrac{A}{2}$

7. $\sin 67° + \cos 75°$ ને 0° અને 45° વચ્ચેના માપવાળા ખૂણાના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર તરીકે દર્શાવો.

8.5 ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમો

તમને યાદ હશે કે, જો સમીકરણમાં આવતા ચલના દરેક મૂલ્ય માટે સમીકરણ સત્ય હોય, તો સમીકરણને નિત્યસમ કહી શકાય. તે જ પ્રમાણે, જ્યારે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોને સમાવતા સમીકરણમાં આવતા ખૂણાઓના પ્રત્યેક મૂલ્ય માટે સમીકરણ સત્ય હોય, ત્યારે તે સમીકરણને **ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ** કહેવાય.

આ વિભાગમાં આપણે એક ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ સાબિત કરીશું અને તેનો ઉપયોગ બીજા કેટલાંક ઉપયોગી ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ સાબિત કરવા કરીશું.



આકૃતિ 8.22

Δ ABC માં $\angle$B કાટખૂણો છે (જુઓ આકૃતિ 8.22.) અહીં

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad (1)$$

પરિણામ (1)ના દરેક પદને AC^2 વડે ભાગતાં, આપણને

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} \text{ મળે.}$$

$$\text{માટે, } \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

$$\therefore \quad (\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$$

$$\therefore \quad \cos^2 A + \sin^2 A = 1 \quad (2)$$

આ, $0° \le A \le 90°$ માં આપેલ દરેક A માટે સત્ય છે. તેથી, તે ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ છે.

હવે, પરિણામ (1) ને AB^2 વડે ભાગતાં આપણને,

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2} \text{ મળે.}$$

$$\therefore \left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$\therefore \quad 1 + \tan^2 A = \sec^2 A \quad (3)$$

શું આ સમીકરણ A = 0° માટે સત્ય છે ? હા, છે. જો A = 90° હોય તો ? A = 90° માટે $\tan$ A અને $\sec$ A વ્યાખ્યાયિત નથી. આમ, પરિણામ (3) જ્યાં $0° \le A < 90°$ માં આવેલ પ્રત્યેક A માટે સત્ય છે.

હવે જોઈએ કે, પરિણામ (1) ને BC^2 વડે ભાગીએ તો શું મળે.

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

$$\therefore \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{cot^2\, A + 1 = cosec^2\, A}$$

આપણે નોંધીએ કે, A = 0° માટે *cosec* A અને *cot* A વ્યાખ્યાયિત નથી. આમ, પરિણામ (4) એ $0° < A \le 90°$ માં આવેલ પ્રત્યેક A માટે સત્ય છે.

આ નિત્યસમોના ઉપયોગથી દરેક ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરને અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરના સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય, એટલે કે જો કોઈ એક ગુણોત્તરની કિંમત જ્ઞાત હોય તો અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોની કિંમત શોધી શકાય.

હવે આપણે જોઈશું કે નિત્યસમના ઉપયોગથી આ કેવી રીતે શોધી શકાય. ધારો કે, આપણને $tan\, A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ આપેલ છે. માટે, $cot\, A = \sqrt{3}$

હવે, $sec^2\, A = 1 + tan^2\, A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. આથી, $sec\, A = \frac{2}{\sqrt{3}}$ અને $cos\, A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

અને $sin\, A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$. માટે, $cosec\, A = 2$

ઉદાહરણ 12 : ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો *cos* A, *tan* A અને *sec* A ને *sin* A ના સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : $cos^2\, A + sin^2\, A = 1$ હોવાથી,

$cos^2\, A = 1 - sin^2\, A$, એટલે કે,

$$cos\, A = \pm \sqrt{1 - sin^2 A}$$

માટે, $cos\, A = \sqrt{1 - sin^2 A}$ મળે (કેમ ?)

આમ, $$tan\, A = \frac{sin A}{cos\, A} = \frac{sin A}{\sqrt{1 - sin^2\, A}}$$

અને, $$sec\, A = \frac{1}{cos\, A} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2\, A}}$$

ઉદાહરણ 13 : સાબિત કરો કે $sec\, A\, (1 - sin\, A)\, (sec\, A + tan\, A) = 1$

ઉકેલ : ડા.બા. $= sec\, A\, (1 - sin\, A)\, (sec\, A + tan\, A) = \left(\frac{1}{cos\, A}\right)(1 - sin\, A)\left(\frac{1}{cos\, A} + \frac{sin\, A}{cos\, A}\right)$

$$= \frac{(1 - sin\, A)(1 + sin A)}{cos^2 A}$$

$$= \frac{1 - sin^2\, A}{cos^2 A}$$

$$= \frac{cos^2\, A}{cos^2 A} = 1 = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે, $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

ઉકેલ : ડા.બા. $= \frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$

$$= \frac{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1} = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 15 : નિત્યસમ $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ નો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે, $\frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta}$

ઉકેલ : અહીં $\tan \theta$ અને $\sec \theta$ ને સમાવતા નિત્યસમનો ઉપયોગ કરવાનો હોવાથી, સૌપ્રથમ આપણે ડા.બા.ના (આપણે જેને સાબિત કરવા માગીએ છીએ તે નિત્યસમની) અંશ અને છેદમાં રહેલા દરેક પદને $\cos \theta$ વડે ભાગીશું અને ડા.બા.નું $\sec \theta$ અને $\tan \theta$ ના સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કરીશું.

ડા.બા. $= \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$

$$= \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{(\tan\theta - \sec\theta) + 1}$$

$$= \frac{\{(\tan\theta + \sec\theta) - 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}{\{(\tan\theta - \sec\theta) + 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta - \sec^2\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{\{(\tan\theta - \sec\theta) + 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1}{\tan\theta - \sec\theta}$$

$$= \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$$

આ તો આપણે જે નિત્યસમ સાબિત કરવા માંગતા હતા તેની જ.બા. છે.

સ્વાધ્યાય 8.4

1. ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો *sin* A, *sec* A અને *tan* A ને *cot* A નાં પદોમાં દર્શાવો.

2. ખૂણા A ના બધા જ ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોને *sec* A નાં પદોમાં દર્શાવો.

3. કિંમત શોધો :

(i) $\dfrac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°}$

(ii) $\sin 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$

4. સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો અને તમારી પસંદગીની યથાર્થતા ચકાસો :

(i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$ = ...

(A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

(ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$ = ...

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) –1

(iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$ = ...

(A) *sec* A (B) *sin* A (C) *cosec* A (D) *cos* A

(iv) $\dfrac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$ = ...

(A) $\sec^2 A$ (B) –1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

5. નીચેના નિત્યસમોમાં જેમના માટે પદાવલિ વ્યાખ્યાયિત કરી છે તે ખૂણા લઘુકોણ છે. આ નિત્યસમો સાબિત કરો :

(i) $(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$

(ii) $\dfrac{\cos A}{1 + \sin A} + \dfrac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$

(iii) $\dfrac{\tan\theta}{1 - \cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1 - \tan\theta} = 1 + \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

[**સૂચન :** પદાવલિને *sin* θ અને *cos* θ ના સ્વરૂપે લખો.]

(iv) $\dfrac{1 + \sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$ [**સૂચન :** ડા.બા. અને જ.બા. નું અલગ-અલગ સાદું રૂપ આપો.]

(v) નિત્યસમ $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ નો ઉપયોગ કરીને $\dfrac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$ સાબિત કરો.

(vi) $\sqrt{\dfrac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$

(vii) $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

[**સૂચન :** ડા.બા. અને જ.બા. નું અલગ-અલગ સાદું રૂપ આપો.]

(x) $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

8.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચે આપેલા મુદ્દાઓ શીખ્યાં :

1. જેમાં કાટખૂણો B હોય તેવા, કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં,

$$\sin A = \frac{\text{ખૂણા A ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$$

$$\cos A = \frac{\text{ખૂણા A ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ખૂણા A ની સામેની બાજુ}}{\text{ખૂણા A ની પાસેની બાજુ}}$$

2. $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$, $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$, $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$, $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

3. જો આપણે કોઈ એક ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરનું મૂલ્ય જાણતાં હોઈએ, તો અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનાં મૂલ્ય સરળતાથી શોધી શકાય છે.

4. $0°, 30°, 45°, 60°$ અને $90°$ માપના ખૂણાઓ માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનાં મૂલ્ય

5. $\sin A$ અને $\cos A$ નું મૂલ્ય ક્યારેય 1 થી વધારે ન હોય અને $\sec A$ અને $\operatorname{cosec} A$ નું મૂલ્ય હંમેશાં 1 અથવા 1 થી વધારે જ હોય.

6. $\sin(90° - A) = \cos A$, $\cos(90° - A) = \sin A$

$\tan(90° - A) = \cot A$, $\cot(90° - A) = \tan A$

$\sec(90° - A) = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90° - A) = \sec A$.

7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$0° \le A < 90°$ હોય તેવા પ્રત્યેક A માટે $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

$0° < A \le 90°$ હોય તેવા પ્રત્યેક A માટે $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

ત્રિકોણમિતિના ઉપયોગો 9

9.1 પ્રાસ્તાવિક

આગળના પ્રકરણમાં તમે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો વિશે અભ્યાસ કર્યો. તમે તમારી આસપાસના વ્યવહારમાં ત્રિકોણમિતિ કેવી રીતે ઉપયોગી બને છે તેનો આ પ્રકરણમાં અભ્યાસ કરશો. જેનો અભ્યાસ સમગ્ર વિશ્વના વિદ્વાનો દ્વારા કરવામાં આવ્યો હોય તેવા અત્યંત પ્રાચીન વિષયોમાંનો એક વિષય ત્રિકોણમિતિ છે. પ્રકરણ VIII માં આપણે ચર્ચા કરી ચૂક્યાં છીએ કે, ત્રિકોણમિતિની શોધ તેની ખગોળશાસ્ત્રમાં ઊભી થતી આવશ્યકતાને ધ્યાનમાં રાખીને કરવામાં આવી. ત્યારથી આજ સુધી ખગોળશાસ્ત્રીઓ તેનો ઉપયોગ પૃથ્વીથી ગ્રહોનું તેમજ તારાઓનું અંતર શોધવામાં કરતા આવ્યા છે. ત્રિકોણમિતિ ભૂગોળ તથા નૌકાયનમાં પણ ઉપયોગી છે. ત્રિકોણમિતીય જ્ઞાનનો ઉપયોગ ભૌગોલિક નકશા બનાવવા તથા રેખાંશ અને અક્ષાંશને સાપેક્ષ કોઈ એક દ્વીપની સ્થિતિ જાણવા કરવામાં આવે છે.

Surveyors have used trigonometry for centuries. One such large surveying project of the nineteenth century was the ***'Great Trigonometric Survey'*** of British India for which the two largest-ever theodolites were built. During the survey in 1852, the highest mountain in the world was discovered. From a distance of over 160 *km*, the peak was observed from six different stations. In 1856, this peak was named after ***Sir George Everest,*** who had commissioned and first used the giant theodolites (see the figure alongside). The theodolites are now on display in the ***Museum of the Survey of India in Dehradun.***

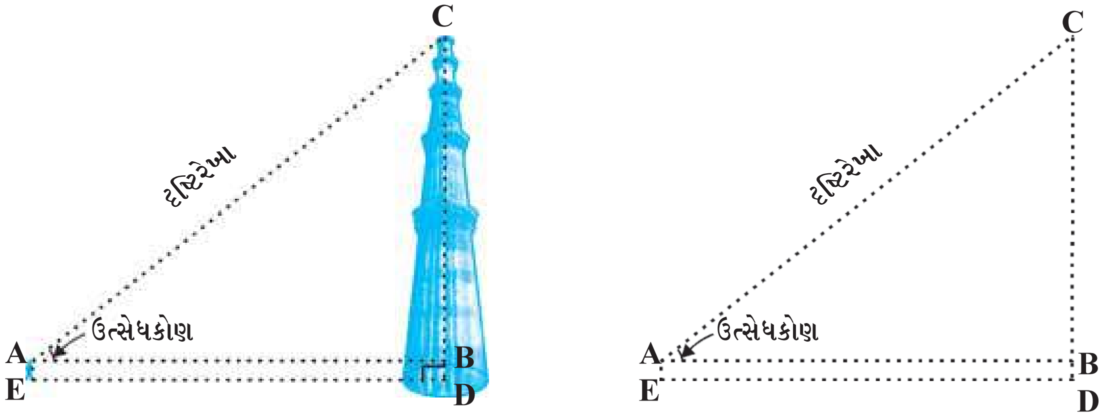
A Theodolite

(Surveying instrument, which is based on the Principles of trigonometry, is used for measuring angles with a rotating telescope)

આપણે આ પ્રકરણમાં પ્રત્યક્ષ માપન વિના વિભિન્ન વસ્તુઓની ઊંચાઈ તથા તેમની વચ્ચેનાં અંતર કેવી રીતે શોધી શકાય તેની ચર્ચા કરીશું.

9.2 ઊંચાઈ અને અંતર

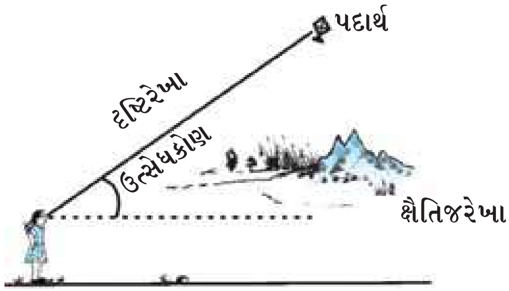
ચાલો, આપણે આકૃતિ 9.1 તરીકે પુનઃ દર્શાવેલ આગળના પ્રકરણની આકૃતિ 8.1 ની ચર્ચા કરીએ.



આકૃતિ 9.1

આ આકૃતિમાં, વિદ્યાર્થીની આંખથી મિનારાની ટોચ સુધી લંબાવેલ રેખા AC ને દૃષ્ટિરેખા કહે છે. વિદ્યાર્થી મિનારાની ટોચનું નિરીક્ષણ કરે છે. આથી, દૃષ્ટિરેખાએ ક્ષૈતિજરેખા સાથે બનાવેલ ખૂણા BAC ને, વિદ્યાર્થીની આંખ આગળનો મિનારાની ટોચનો *ઉત્સેધકોણ* ***(angle of elevation)*** કહે છે.

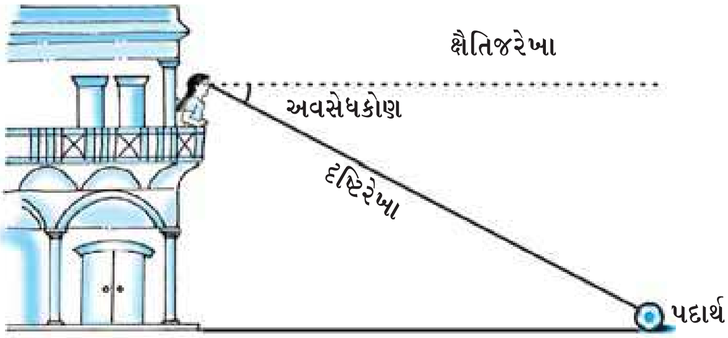
આમ, દૃષ્ટિરેખા એ નિરીક્ષકની આંખથી નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થ સુધી લંબાવેલ રેખા છે. નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો નિરીક્ષણ બિંદુને સાપેક્ષ ઉત્સેધકોણ એટલે, દૃષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજરેખાથી બનતો ખૂણો જેમાં નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષૈતિજરેખાથી ઉપર હોય અર્થાત્, એવી સ્થિતિ કે જ્યારે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે મસ્તકને ઊંચું કરવું પડે ત્યારે દૃષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજ રેખા વચ્ચે બનતો ખૂણો. (*જુઓ આકૃતિ 9.2.*)



આકૃતિ 9.2

ચાલો, હવે આપણે આકૃતિ 8.2 માં આપેલ સ્થિતિની ચર્ચા કરીએ. બાલ્કનીમાં બેઠેલી છોકરી મંદિરનાં પગથિયાં પર રાખેલ કૂંડાનું નિરીક્ષણ કરે છે. આ સ્થિતિમાં દૃષ્ટિરેખા, ક્ષૈતિજરેખાથી નીચે છે. દૃષ્ટિરેખાએ ક્ષૈતિજરેખા સાથે બનાવેલ આ પ્રકારના ખૂણાને *અવસેધકોણ* ***(angle of depression)*** કહે છે.

આમ, નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો નિરીક્ષણ બિંદુ આગળનો અવસેધકોણ એટલે જ્યારે નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષૈતિજરેખાથી નીચે હોય, ત્યારે દૃષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજરેખાથી બનતો ખૂણો. અર્થાત્, એવી સ્થિતિ કે જેમાં આપણે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે આપણું મસ્તક નીચે નમાવવું પડે, ત્યારે દૃષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજરેખા વચ્ચે બનતો ખૂણો. (*જુઓ આકૃતિ 9.3.*)



આકૃતિ 9.3

હવે, તમે આકૃતિ 9.3માં બનેલી દૃષ્ટિરેખા અને આ પ્રકારે બનેલા ખૂણાને ઓળખી શકશો ? આ ખૂણો ઉત્સેધકોણ છે કે અવસેધકોણ ?

ચાલો, આપણે આકૃતિ 9.1 ને ફરીથી જોઈએ. જો તમે મિનારા CD ની ઊંચાઈ, પ્રત્યક્ષ માપન વિના શોધવા માગતા હો, તો તમારા માટે કઈ માહિતી આવશ્યક હશે ? આ માટે નીચે દર્શાવેલ તથ્યોનું જ્ઞાન આવશ્યક હશે :

(i) અંતર DE, વિદ્યાર્થી અને મિનારાના પાયા વચ્ચેનું અંતર

(ii) મિનારાની ટોચનો ઉત્સેધકોણ, $\angle BAC$

(iii) વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ, AE

હવે, જો ઉપરોક્ત ત્રણેય માહિતીથી આપણે પરિચિત હોઈએ, તો મિનારાની ઊંચાઈ કેવી રીતે શોધી શકાય ?

આકૃતિમાં $CD = CB + BD$. અહીં, $BD = AE$ વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ છે.

BC શોધવા માટે આપણે $\angle BAC$ અથવા $\angle A$ ના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ કરીશું.

ΔABC માં, $\angle A$ ની સામેની બાજુ BC છે. હવે, અહીં કયા-કયા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ કરી શકાય ? જેમાં બે મૂલ્યોનો ઉપયોગ થતો હોય, એક આપેલ હોય અને બીજું શોધવાનું હોય એવા ગુણોત્તર ઉપયોગી થાય. આપણી જરૂરિયાત $\tan A$ અથવા $\cot A$ નો ઉપયોગ કરવાથી પૂરી થઈ શકે, કારણ કે, આ બંને ગુણોત્તરમાં AB અને BC નો સમાવેશ થયેલ છે.

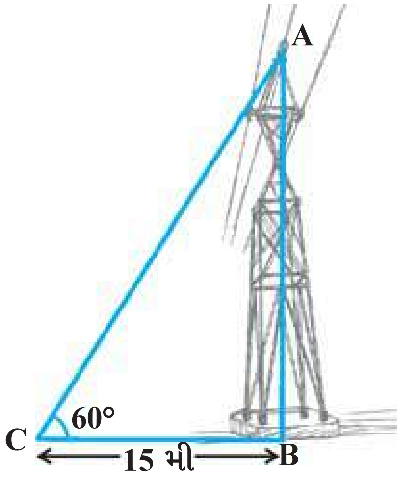
માટે, $\tan A = \frac{BC}{AB}$ અથવા $\cot A = \frac{AB}{BC}$ નો ઉકેલ મેળવતાં આપણને BC નું મૂલ્ય મળશે. હવે BC અને AE નો સરવાળો કરતાં મિનારાની ઊંચાઈ મળશે.

હવે, કેટલાંક વધારે ઉદાહરણ દ્વારા આપણે હમણાં જ જેની ચર્ચા કરી હતી તે પદ્ધતિની સમજૂતી મેળવીએ.

ઉદાહરણ 1 : જમીન પર એક ટાવર શિરોલંબ સ્થિતિમાં છે. તેના પાયાથી 15 મીટર દૂર રહેલા જમીન પરના એક બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ $60°$ છે, તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ સમસ્યાને દર્શાવતી એક સરળ આકૃતિ દોરો. (જુઓ આકૃતિ 9.4.) અહીં AB ટાવર દર્શાવે છે,

CB એ બિંદુ C નું ટાવરથી અંતર છે અને $\angle ACB$ ઉત્સેધકોણ છે. આપણે અહીં ટાવરની ઊંચાઈ શોધવાની છે, અર્થાત્ AB શોધવું છે. અહીં ત્રિકોણ ACBમાં ખૂણો B કાટકોણ છે. સમસ્યાના ઉકેલ માટે આપણે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર *tan* 60° (અથવા *cot* 60°) પસંદ કરીશું કારણ કે, તેમાં AB અને BC બંને રહેલા છે.



આકૃતિ 9.4

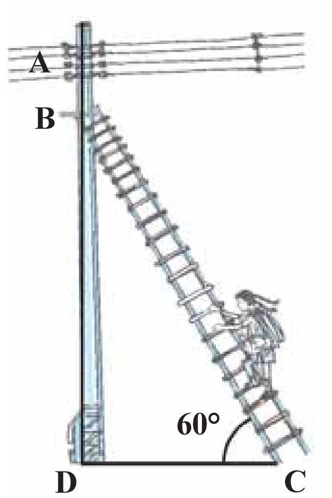
હવે, $\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

$\therefore \sqrt{3} = \frac{AB}{15}$

$\therefore AB = 15\sqrt{3}$

$\therefore$ ટાવરની ઊંચાઈ $15\sqrt{3}$ મીટર છે.

ઉદાહરણ 2 : એક ઈલેક્ટ્રિશિયનને 5 મી ઊંચાઈવાળા થાંભલા પર 'ફૉલ્ટ'નું સમારકામ કરવાનું છે. આ માટે તેણે ટોચથી 1.3 મી નીચે સુધી પહોંચીને સમારકામ કરવાનું છે. (જુઓ આકૃતિ 9.5.) આ માટે તે સમક્ષિતિજ રેખા સાથે 60° માપનો ખૂણો રહે તે રીતે એક નિસરણી થાંભલા સાથે ત્રાંસી ટેકવે છે. અને ઇચ્છિત જગ્યાએ પહોંચે છે, તો નિસરણીની લંબાઈ કેટલી હશે ? તદુપરાંત નિસરણીને થાંભલાના પાયાથી કેટલે દૂર રાખવી પડશે ? (અહીં, $\sqrt{3} = 1.73$ લઈ શકાય.)



આકૃતિ 9.5

ઉકેલ : આકૃતિ 9.5 માં, ઈલેક્ટ્રિશિયનને થાંભલા AD પરના બિંદુ B સુધી પહોચવું પડે.

આથી, $BD = AD - AB = (5 - 1.3)$ મી $= 3.7$ મી

અહીં, BC નિસરણી દર્શાવે છે અને તેની લંબાઈ શોધવાની છે. અર્થાત્ કાટકોણ ત્રિકોણ BDCના કર્ણની લંબાઈ શોધવાની છે.

હવે, તમે કહી શકો કે આપણે કયા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરનો ઉપયોગ કરીશું ?

તે ગુણોત્તર sin 60 હોવો જોઈએ.

માટે, $\frac{BD}{BC} = \sin 60°$ અથવા $\frac{3.7}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore BC = \frac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}} = 4.28$ મી (આસન્ન મૂલ્ય)

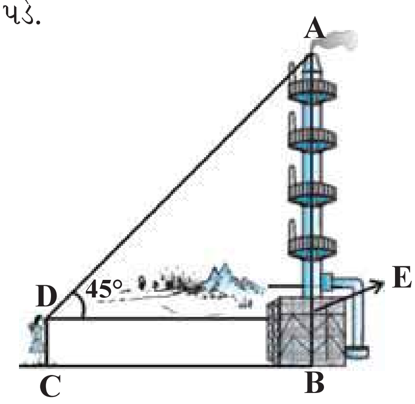
આમ, નિસરણીની લંબાઈ 4.28 મી હોવી જોઈએ.

હવે, $\frac{DC}{BD} = cot\ 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore DC = \frac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14$ મી (આસન્ન મૂલ્ય)

આથી, તેને નિસરણીના નીચેના છેડાને થાંભલાથી 2.14 મી દૂર રાખવી પડે.

ઉદાહરણ 3 : 1.5 મી ઊંચાઈવાળી એક નિરીક્ષક એક ચીમનીથી 28.5 મી દૂર ઊભેલ છે. તેની આંખથી ચીમનીની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 45° છે. ચીમનીની ઊંચાઈ કેટલી હશે ?



આકૃતિ 9.6

ઉકેલ : અહીં, AB ચીમની છે. CD નિરીક્ષક અને ∠ADE ઉત્સેધકોણ છે. (જુઓ આકૃતિ 9.6.) અહીં, જેમાં ખૂણો E કાટકોણ હોય તેવો એક ત્રિકોણ ADE છે અને આપણે અહીં ચીમનીની ઊંચાઈ શોધવા માગીએ છીએ.

આપણી પાસે, AB = AE + BE = AE + 1.5

અને DE = CB = 28.5 મી છે.

AE શોધવા માટે આપણે એવો ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર પસંદ કરીશું, જેમાં AE અને DE બંને હોય. ચાલો ઉત્સેધકોણનો *tangent* પસંદ કરીએ.

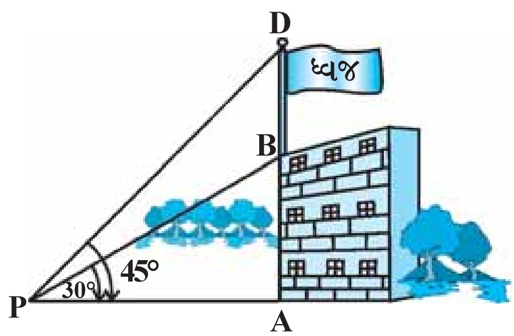
હવે, $tan\ 45° = \frac{AE}{DE}$

$\therefore\ 1 = \frac{AE}{28.5}$

$\therefore\ AE = 28.5$

તેથી, ચીમનીની ઊંચાઈ AB = (28.5 + 1.5) મી = 30 મી

ઉદાહરણ 4 : જમીન પરના બિંદુ P થી એક 10 મી ઊંચી ઇમારતની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 30° છે. ઇમારતની ટોચ પર ધ્વજ ફરકાવવામાં આવ્યો છે અને બિંદુ P થી આ ધ્વજસ્તંભની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 45° છે, તો ધ્વજસ્તંભની લંબાઈ તથા ઇમારતનું બિંદુ P થી અંતર શોધો. ($\sqrt{3}$ = 1.732 લઈ શકાય.)



આકૃતિ 9.7

ઉકેલ : આકૃતિ 9.7 માં, AB ઇમારતની ઊંચાઈ દર્શાવે છે BD ધ્વજસ્તંભ દર્શાવે છે અને P એ જમીન પરનું બિંદુ દર્શાવે છે. ધ્યાન રાખો, અહીં બે કાટકોણ ત્રિકોણ PAB અને PAD બને છે. અહીં ધ્વજસ્તંભની લંબાઈ અર્થાત્ DB અને ઇમારતનું બિંદુ P થી અંતર અર્થાત્ AP શોધવાનું છે.

આપણે ઇમારતની ઊંચાઈ AB જાણીએ છીએ તેથી સૌપ્રથમ આપણે કાટકોણ ΔPAB નો વિચાર કરીશું.

અહીં, $\tan 30° = \frac{AB}{AP}$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$$

$$\therefore AP = 10\sqrt{3}$$

અર્થાત્, ઇમારતનું બિંદુ P થી અંતર $10\sqrt{3}$ મી = 17.32 મી છે.

હવે, ધારો કે DB = x મી છે, તેથી AD = $(10 + x)$ મી થાય.

હવે, કાટકોણ ΔPAD માં,

$$\tan 45° = \frac{AD}{AP} = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$$

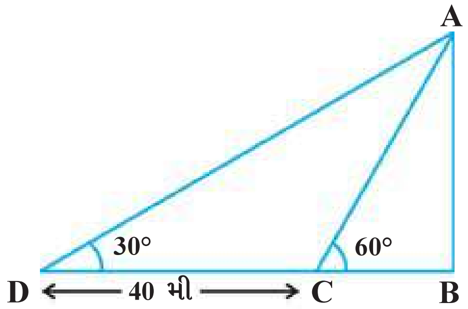
માટે, $1 = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$

અર્થાત્, $x = 10(\sqrt{3}-1) = 7.32$

આમ, ધ્વજસ્તંભની લંબાઈ 7.32 મી છે.

ઉદાહરણ 5 : સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ 60°થી ઘટીને 30° થતાં, સમતલ જમીન પર ઊભેલ ટાવરના પડછાયાની લંબાઈમાં 40 મીટર જેટલો વધારો થાય છે. તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 9.8 માં, AB ટાવર તથા સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° હોય, ત્યારે ટાવરનો પડછાયો BC અને સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° હોય, ત્યારે ટાવરનો પડછાયો DB છે.



આકૃતિ 9.8

ધારો કે, AB ની ઊંચાઈ 'h' મી અને BC, 'x' મી છે પ્રશ્નમાં જણાવ્યા પ્રમાણે DB, BC કરતાં 40 મી વધારે છે.

આથી, DB = $(40 + x)$ મી

હવે, આપણી પાસે બે કાટકોણ ત્રિકોણ ABC અને ABD છે.

Δ ABC માં, $\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

$$\therefore \sqrt{3} = \frac{h}{x} \quad (1)$$

Δ ABD માં, $\tan 30° = \frac{AB}{BD}$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+40} \quad (2)$$

હવે, (1) પરથી, $h = x\sqrt{3}$

h ના આ મૂલ્યને (2) માં મૂકતાં આપણને $(x\sqrt{3})\sqrt{3} = x + 40$, એટલે કે, $3x = x + 40$

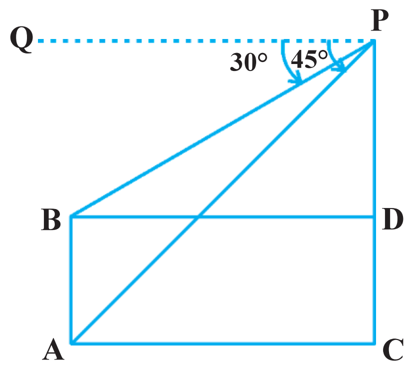
$$\therefore\ x = 20$$

તેથી, $h = 20\sqrt{3}$ ((1) પરથી)

આમ, ટાવરની ઊંચાઈ $20\sqrt{3}$ મી છે.

ઉદાહરણ 6 : એક બહુમાળી ઈમારતની ટોચ પરથી અવલોકન કરતાં એક 8 મી ઊંચી ઈમારતની ટોચ અને તળિયાના અવસેધકોણનાં માપ અનુક્રમે 30° અને 45° માલૂમ પડે છે, તો બહુમાળી ઈમારતની ઊંચાઈ અને બે ઈમારતો વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 9.9 માં, PC એ બહુમાળી ઈમારત દર્શાવે છે તથા AB એ 8 મી ઊંચી ઈમારત દર્શાવે છે. આપણને અહીં બહુમાળી ઈમારતની ઊંચાઈ અર્થાત્ PC અને બે ઈમારતો વચ્ચેનું અંતર અર્થાત્ AC શોધવામાં રસ છે.



આકૃતિ 9.9

ધ્યાનથી આકૃતિનું અવલોકન કરો. તમે જોઈ શકો છો કે, બે સમાંતર રેખા PQ અને BD ની છેદિકા PB છે. આથી, ∠QPB અને ∠PBD યુગ્મકોણ થાય. તેથી તે સમાન છે. એટલે કે, ∠PBD = 30°. આ જ રીતે, ∠PAC = 45° થાય.

કાટકોણ ∠PBD માં,

$$\frac{PD}{BD} = tan\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ અથવા } BD = PD\ \sqrt{3}$$

કાટકોણ ΔPAC માં,

$$\frac{PC}{AC} = tan\ 45° = 1$$

$$\therefore\ PC = AC$$

પરંતુ, PC = PD + DC. માટે PD + DC = AC

અહીં, AC = BD અને DC = AB = 8 મી હોવાથી, આપણને PD + 8 = BD = PD$\sqrt{3}$ મળે. (કેમ?)

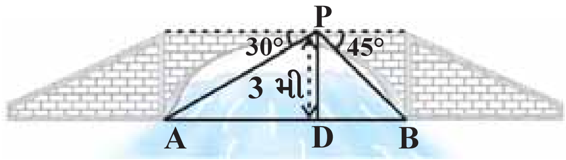
$$\therefore\ PD = \frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = 4\ \left(\sqrt{3}+1\right) \text{ મી}$$

આમ, બહુમાળી ઈમારતની ઊંચાઈ $\left\{4\left(\sqrt{3}+1\right)+8\right\}$ મી $= 4\ \left(3+\sqrt{3}\right)$ મી

અને બંને ઈમારતો વચ્ચેનું અંતર પણ $4\ \left(3+\sqrt{3}\right)$ મી હશે.

ઉદાહરણ 7 : નદી પર રહેલા પુલના એક બિંદુથી નદીના બંને કિનારાના અવસેધકોણનાં માપ અનુક્રમે 30° અને 45° માલૂમ પડે છે. જો નદીની સપાટીથી પુલની ઊંચાઈ 3મી હોય તો નદીની પહોળાઈ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 9.10 માં, બિંદુઓ A અને B નદીના સામસામેના બે કિનારા દર્શાવે છે. આથી નદીની પહોળાઈ AB થાય. નદીની સપાટીથી 3 મી ઊંચાઈએ આવેલા પુલ પરનું એક બિંદુ P છે, અર્થાત્ DP = 3 મી.



આકૃતિ 9.10

અહીં, નદીની પહોળાઈ એટલે કે, Δ APBની એક બાજુ AB ની લંબાઈ, શોધવાની છે.

હવે, $AB = AD + DB$

કાટકોણ ત્રિકોણ APD માં, $\angle A = 30°$

$$\therefore \tan 30° = \frac{PD}{AD}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD} \text{ અથવા } AD = 3\sqrt{3} \text{ મી}$$

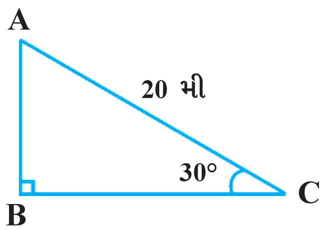
અને કાટકોણ Δ PBD માં, $\angle B = 45°$. આથી, BD = PD = 3 મી

હવે, $AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3(1 + \sqrt{3})$ મી

આમ, નદીની પહોળાઈ $3(\sqrt{3} + 1)$ મી છે.

સ્વાધ્યાય 9.1

1. સર્કસના તંબુમાં, જમીન સાથે શિરોલંબ સ્થિતિમાં રહેલા થાંભલાની ટોચથી જમીન સાથે ખેંચીને બાંધેલા 20 મી લાંબા દોરડા પર એક કલાકાર ચઢી રહ્યો છે. જો દોરડું જમીન સાથે 30° માપનો ખૂણો બનાવે તો થાંભલાની ઊંચાઈ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 9.11.)



આકૃતિ 9.11

2. વાવાઝોડાને કારણે એક ઝાડ એવી રીતે ભાંગીને વળી જાય છે, જેથી તેની ટોચ, જમીન સાથે 30° માપનો ખૂણો બનાવે તે રીતે જમીનને સ્પર્શે છે. ઝાડની જમીનને સ્પર્શતી ટોચ અને ઝાડના થડ વચ્ચેનું અંતર 8 મી હોય, તો ઝાડની ઊંચાઈ શોધો.

3. એક ઠેકેદારે બાળકોને રમવા માટે, બગીચામાં બે લપસણી લગાવવાની છે. આ માટે તે 5 વર્ષથી ઓછી ઉંમરનાં બાળકો માટે, જમીનથી ઉપરનો છેડો 1.5 મી રહે અને જમીન સાથે 30° નો ખૂણો બનાવે તેવી અને તેનાથી વધારે ઉંમરનાં બાળકો માટે 3 મીની ઊંચાઈથી સીધો ઢાળ હોય તથા જમીન સાથે 60° નો ખૂણો બનાવતી હોય તેવી લપસણીઓ પસંદ કરે છે. તો બંને લપસણીઓની લંબાઈ શોધો.

4. ટાવરના પાયાથી 30 મી દૂર રહેલા જમીન પરના એક બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° છે. તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

5. એક પતંગ જમીનથી 60 મી ની ઊંચાઈ પર ઊડી રહેલ છે. આ પતંગની દોરીનો એક છેડો ક્ષણભર માટે જમીન પરના એક બિંદુ સાથે બાંધેલ છે. આ સ્થિતિમાં દોરીનો જમીન સાથેનો ખૂણો 60° છે. જો દોરીમાં કોઈ ઢીલ નથી તેવું માની લેવામાં આવે તો દોરીની લંબાઈ શોધો.

6. 1.5 મી ઊંચો એક છોકરો એક 30 મી ઊંચી ઈમારતથી કોઈક અંતરે ઊભેલ છે. હવે જ્યારે તે ઈમારત તરફ ચાલવાનું શરૂ કરે છે ત્યારે કેટલાક સમય પછી તેની આંખથી ઈમારતની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° થી વધીને 60° થાય છે. તો તે કેટલું અંતર ચાલ્યો હશે ?

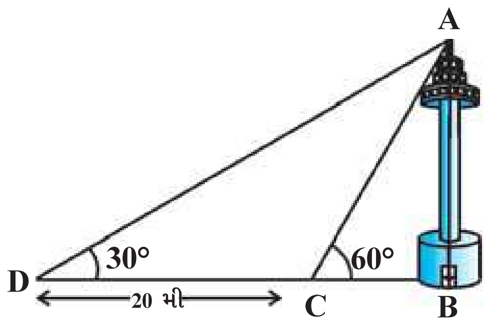
7. જમીન પર આવેલ એક બિંદુથી એક 20 મી ઊંચી ઈમારતની ટોચ પર રહેલ એક સંચાર ટાવરના તળિયા અને ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ અનુક્રમે 45° અને 60° છે. તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

8. એક ઊંચી બેઠક પર 1.6 મી ઊંચી એક પ્રતિમા ગોઠવેલ છે. જમીન પરના એક બિંદુએથી પ્રતિમાની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° અને બેઠકની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 45° છે. તો બેઠકની ઊંચાઈ શોધો.

9. એક ટાવરના તળિયાથી એક ઈમારતની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° છે અને ઈમારતના તળિયાથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° છે. જો ટાવરની ઊંચાઈ 50 મી હોય તો ઈમારતની ઊંચાઈ શોધો.

10. એક 80 મી પહોળા માર્ગની બંને બાજુએ સમાન ઊંચાઈના બે સ્તંભ શિરોલંબ સ્થિતિમાં છે. માર્ગ પર વચ્ચે આવેલ કોઈ એક બિંદુએથી બંને સ્તંભની ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ 60° અને 30° જણાય છે. તો દરેક સ્તંભની ઊંચાઈ શોધો તથા બંને સ્તંભનું નિરીક્ષણ બિંદુથી અંતર શોધો.

11. નહેરના એક કિનારા પર ટીવીનો ટાવર શિરોલંબ ઊભો કરવામાં આવેલ છે. ટાવરની સામેના બીજા કિનારા પર રહેલા એક બિંદુથી ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60° છે. ટાવરના તળિયા અને નિરીક્ષણ બિંદુને જોડતી રેખા પર આવેલ અને નિરીક્ષણ બિંદુથી 20 મી દૂર બીજા એક બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° છે. (જુઓ આકૃતિ 9.12.) તો ટાવરની ઊંચાઈ અને નહેરની પહોળાઈ શોધો.

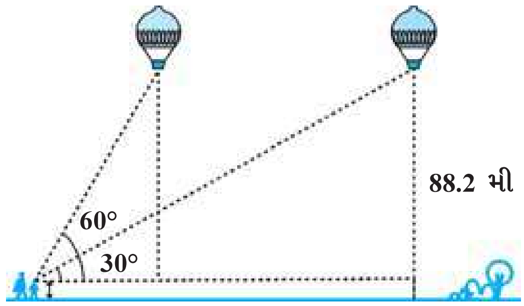


આકૃતિ 9.12

12. 7 મી ઊંચી ઈમારત પરથી એક 'કેબલ' ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60° અને ટાવરના તળિયાનો અવસેધકોણ 45° છે, તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

13. દરિયાની સપાટીથી 75 મી ઊંચી દીવાદાંડી પરથી અવલોકન કરતાં, દરિયામાં રહેલા બે વહાણના અવસેધકોણનાં માપ 30° અને 45° માલૂમ પડે છે. જો એક વહાણ બીજાની બરાબર પાછળ હોય અને બંને વહાણ દીવાદાંડીની એક જ બાજુ પર આવેલ હોય તો બંને વહાણ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

14. 1.2 મી ઊંચાઈવાળી એક છોકરીને, જમીનથી 88.2 મી ઊંચાઈ પર રહેલું પવનને કારણે સમક્ષિતિજ રેખામાં ગતિ કરતું એક બલૂન જોવા મળે છે. કોઈ એક સમયે છોકરીને તેના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° મળે છે. થોડા સમય બાદ બલૂનના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° થાય છે (જુઓ આકૃતિ 9.13), તો આ સમય દરમિયાન બલૂને કાપેલું અંતર શોધો.



આકૃતિ 9.13

15. એક સુરેખ માર્ગ ટાવર તરફ જાય છે. ટાવરની ટોચ પર રહેલ એક વ્યક્તિ, ટાવર તરફ અચળ ઝડપથી આવતી એક મોટરકારના અવસેધકોણનું માપ 30° નોંધે છે. 6 સેકન્ડ પછી આ કારના અવસેધકોણનું માપ 60° થાય છે, તો કારને ટાવર સુધી પહોંચતાં કેટલો સમય લાગશે ?

16. ટાવરના તળિયામાંથી પસાર થતી રેખા પર તળિયાથી 4 મી અને 9 મી દૂર આવેલાં બે બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ કોટિકોણનાં માપ છે. સાબિત કરો કે, ટાવરની ઊંચાઈ 6 મી છે.

9.3 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. (i) દૃષ્ટિરેખા એ નિરીક્ષકની આંખથી નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થ સુધી લંબાવેલ રેખા છે.

(ii) નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો ઉત્સેધકોણ એટલે, જ્યારે નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષૈતિજરેખાથી ઊંચે હોય અર્થાત્ એવી સ્થિતિમાં હોય કે જ્યારે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે મસ્તકને ઊંચું કરવું પડે ત્યારે દૃષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજરેખા વડે બનતો ખૂણો.

(iii) નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો અવસેધકોણ એટલે, જ્યારે નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષૈતિજરેખાથી નીચે હોય, અર્થાત્ એવી સ્થિતિમાં હોય કે, જ્યારે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે મસ્તકને નીચે નમાવવું પડે ત્યારે દૃષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજરેખા વડે બનતો ખૂણો.

2. પદાર્થની ઊંચાઈ અથવા લંબાઈ અથવા બે પદાર્થો વચ્ચેનું અંતર ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ કરીને મેળવી શકાય છે.

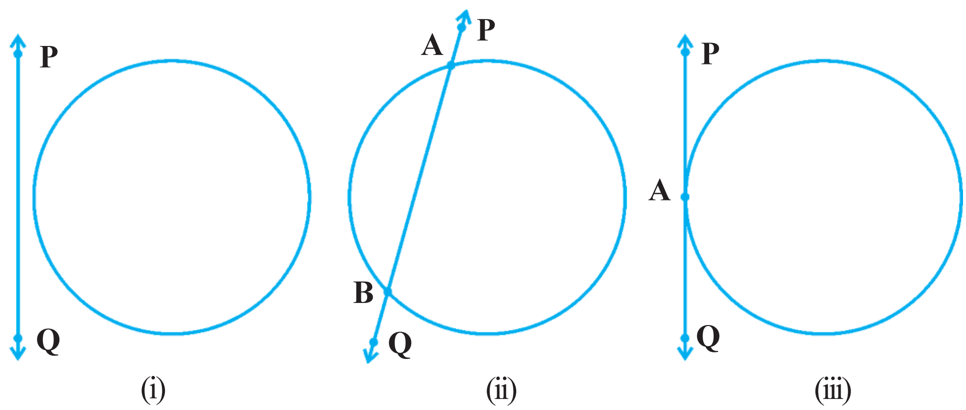
■

વર્તુળ 10

10.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે ધોરણ IX માં અભ્યાસ કર્યો છે એ પ્રમાણે એક સમતલના એક ચોક્કસ બિંદુ (કેન્દ્ર)થી અચળ અંતરે (ત્રિજ્યા) આવેલાં બિંદુઓનો સમૂહ વર્તુળ છે. તમે વર્તુળ સંબંધિત જુદાં-જુદાં પદો જેવાં કે, જીવા, વૃત્તખંડ, વૃત્તાંશ, ચાપ વગેરે જેવાંનો પણ અભ્યાસ કર્યો છે. ચાલો, હવે જ્યારે કોઈ સમતલમાં વર્તુળ અને રેખા આપેલાં હોય, ત્યારે ઊભી થતી જુદી-જુદી પરિસ્થિતિઓ જોઈએ.

હવે, કોઈ એક વર્તુળ અને રેખા PQ નો વિચાર કરો. નીચે આકૃતિ 10.1 માં ત્રણ શક્યતા આપેલી છે :



આકૃતિ 10.1

આકૃતિ 10.1 (i) માં, રેખા PQ અને વર્તુળને કોઈ સામાન્ય બિંદુ નથી. આ કિસ્સામાં રેખા **PQ** વર્તુળને ***છેદતી નથી*** એમ કહીશું. આકૃતિ 10.1 (ii) માં રેખા PQ અને વર્તુળને બે સામાન્ય બિંદુઓ A અને B છે. આ વિકલ્પમાં રેખા PQ ને વર્તુળની *છેદિકા* કહે છે. આકૃતિ 10.1 (iii) માં ***રેખા અને વર્તુળમાં ફક્ત એક જ બિંદુ સામાન્ય છે. આ વિકલ્પમાં રેખાને વર્તુળનો સ્પર્શક કહે છે.***

કૂવામાંથી પાણી કાઢવા ઉપયોગમાં લેવામાં આવતી કૂવા પર લગાડેલી ગરગડી તમે કદાચ જોઈ હશે. આકૃતિ 10.2 જુઓ. અહીં, જો ગરગડીની બંને બાજુઓમાં રહેલી દોરીને કિરણ સમજવામાં આવે, તો તેમને ગરગડીને દર્શાવતાં વર્તુળના સ્પર્શક તરીકે ગણી શકાય.

આકૃતિ 10.2

ઉપર જે પ્રકારો આપ્યા છે તે સિવાય રેખાની કોઈ સ્થિતિ વર્તુળના સંદર્ભે હોય ? તમે જોશો કે, રેખાની અન્ય સ્થિતિ વર્તુળના સંદર્ભમાં ન હોય. આ પ્રકરણમાં આપણે, વર્તુળના સ્પર્શકના અસ્તિત્વ વિશે અભ્યાસ કરીશું અને તેના કેટલાક ગુણધર્મોનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

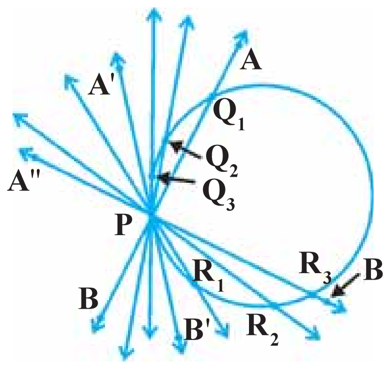
10.2 વર્તુળનો સ્પર્શક

અગાઉના વિભાગમાં, તમે જોયું કે, ***વર્તુળનો સ્પર્શક* (tangent) વર્તુળને ફક્ત એક જ બિંદુમાં છેદતી એક રેખા છે.***

વર્તુળના કોઈ બિંદુએ સ્પર્શકનું અસ્તિત્વ સમજવા માટે આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 1 : એક વર્તુળાકાર તાર લો. અને એક સીધો તાર AB વર્તુળાકાર તારના બિંદુ P પર એવી રીતે લગાડો કે, જેથી તેને સમતલમાં બિંદુ P ની આસપાસ ફેરવી શકાય. આ પ્રણાલીને ટેબલ પર મૂકો અને સીધા તારની અલગ- અલગ સ્થિતિ મેળવવા તાર AB ને બિંદુ P ની આસપાસ હળવેથી ફેરવો. (જુઓ આકૃતિ 10.3 (i).)

જુદી-જુદી પરિસ્થિતિમાં આ તાર વર્તુળાકાર તારને P અને બીજાં બિંદુઓ Q_1 કે Q_2 કે Q_3 વગેરે બિંદુઓમાં છેદશે. કોઈ એક સ્થિતિમાં, તમે જોશો કે, તે વર્તુળને ફક્ત એક બિંદુ P માં છેદશે. (AB ની A'B' સ્થિતિ જુઓ.) આ દર્શાવે છે કે, વર્તુળના બિંદુ P આગળ સ્પર્શક અસ્તિત્વ ધરાવે છે. AB ને વધુ ફેરવતાં તમે જોશો કે, AB ની બીજી બધી સ્થિતિમાં, તે વર્તુળને P અને બીજાં બિંદુઓ જેમ કે, R_1 કે R_2 કે R_3 વગેરેમાં છેદશે. તેથી તમે જોશો કે, ***વર્તુળના કોઈ એક બિંદુએ એક અને ફક્ત એક જ સ્પર્શક છે.***



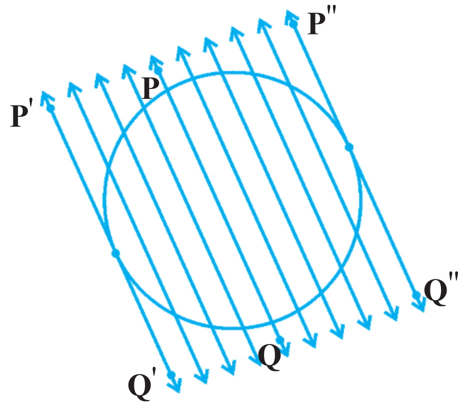
આકૃતિ 10.3 (i)

જ્યારે ઉપરની પ્રવૃત્તિ કરતા હોઈએ, ત્યારે તમે એ જોયું જ હશે કે જેમ સ્થિતિ AB એ સ્થિતિ A'B' તરફ પ્રસ્થાન કરે છે, તેમ રેખા AB અને વર્તુળનું સામાન્ય બિંદુ Q_1 ધીમે ધીમે સામાન્ય બિંદુ P ની નજીક અને નજીક આવે છે. છેવટે, તે A"B" ની સ્થિતિ A'B' માં બિંદુ P માં સંપાતિ થાય છે. ફરીથી નોંધો કે, જો AB ને P ની આસપાસ જમણી તરફ ફેરવીએ તો શું થશે ? સામાન્ય બિંદુ R_3 ધીમે-ધીમે P ની નજીક અને નજીક આવશે. અને છેવટે તે P માં સંપાતિ થશે. આમ, આપણે શું જોયું?

જેમાં બે અંત્યબિંદુઓ તેની અનુરૂપ જીવામાં સંપાતિ હોય છે એવી છેદિકાનો વિશિષ્ટ કિસ્સો એ વર્તુળનો સ્પર્શક છે.

* Tangent શબ્દ લેટિન શબ્દ Tangere પરથી આવ્યો છે. તેનો અર્થ સ્પર્શવું એવો થાય છે અને તે ડેનિશ ગણિતશાસ્ત્રી થોમસ ફિનેકે C.E. 1583માં દાખલ કર્યો હતો.

પ્રવૃત્તિ 2 : કાગળના સમતલ પર એક વર્તુળ અને વર્તુળની છેદિકા PQ દોરો. છેદિકાની બંને તરફ તેને સમાંતર રેખાઓ દોરો. તમે જોઈ શકશો કે, રેખાઓ દ્વારા કપાતી જીવાની લંબાઈ ધીમે-ધીમે ઘટતી જાય છે. એટલે કે, વર્તુળ અને રેખાનાં છેદબિંદુ વધુ ને વધુ નજીક આવતા જાય છે. (જુઓ આકૃતિ 10.3 (ii).) કોઈ એક વિકલ્પમાં, તે લંબાઈ છેદિકાની એક બાજુએ શૂન્ય બની જાય છે અને કોઈ બીજા વિકલ્પમાં તે છેદિકાની બીજી બાજુએ શૂન્ય બની જાય છે. આકૃતિ 10.3 (ii) માં છેદિકાની સ્થિતિ P'Q' અને P"Q" જુઓ. તે આપેલી વર્તુળના છેદિકા PQ ને સમાંતર સ્પર્શક છે. આ માહિતી તમને એ જોવામાં પણ ઉપયોગી છે કે, આપેલી છેદિકાને સમાંતર હોય તેવા બે થી વધારે સ્પર્શક ન હોય.

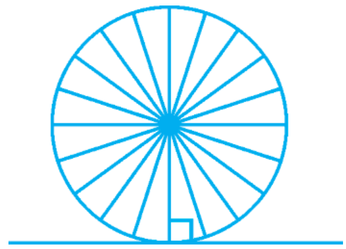


આકૃતિ 10.3 (ii)

તમે જોયું છે કે, જ્યારે તમે પ્રવૃત્તિ 1 કરતા હો ત્યારે આ પ્રવૃત્તિ એ પણ પ્રસ્થાપિત કરે છે કે, અનુરૂપ જીવાનાં બંને અંત્યબિંદુઓ સંપાતી હોય ત્યારે છેદિકા એ સ્પર્શક બને છે.

વર્તુળ અને સ્પર્શકના સામાન્ય બિંદુને સ્પર્શબિંદુ કહે છે. (આકૃતિ 10.1 (iii) માં બિંદુ A) અને સ્પર્શક વર્તુળને તે બિંદુમાં સ્પર્શે છે તેમ કહેવાય.

હવે તમારી આસપાસ જુઓ. તમે સાઇકલ કે લારી ફરતી જોઈ છે ? તેનાં પૈડાં જુઓ. પૈડાંના બધા સળિયા તેની ત્રિજ્યાના સ્થાને છે. હવે પૈડું જમીન પર ફરે છે તેની સ્થિતિ પર ધ્યાન આપો. તમે ક્યાંય કોઈ સ્પર્શક જોયો છે ? (જુઓ આકૃતિ 10.4.) ખરેખર તો પૈડું દર્શાવતા વર્તુળને સ્પર્શક હોય, તેવી રેખા પર પૈડું ફરે છે. અહીં એ પણ નોંધો કે, દરેક સ્થિતિમાં સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થતી ત્રિજ્યા જમીન પરના સ્પર્શક સાથે કાટખૂણો બનાવે છે. (જુઓ આકૃતિ 10.4.) હવે, આપણે સ્પર્શકના આ ગુણધર્મને સાબિત કરીશું.



આકૃતિ 10.4

પ્રમેય 10.1 : ***વર્તુળના કોઈ બિંદુએ દોરેલ સ્પર્શક, સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થતી ત્રિજ્યાને લંબ હોય છે.***

સાબિતી : O કેન્દ્રવાળું એક વર્તુળ અને વર્તુળના બિંદુ P આગળ સ્પર્શક XY આપેલાં છે.

અહીં એવું સાબિત કરવાનું છે કે, OP એ XY ને લંબ છે.

XY પર P સિવાયનું કોઈ બિંદુ Q લો અને O તથા Q ને જોડતી રેખા દોરો. (જુઓ આકૃતિ 10.5.)

બિંદુ Q વર્તુળની બહારનું બિંદુ જ હોઈ શકે. (કેમ ?)

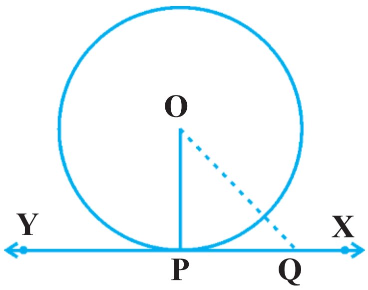
જો Q વર્તુળની અંદર હોય, તો XY છેદિકા બને અને વર્તુળનો સ્પર્શક ન બને.

તેથી, OQ એ વર્તુળની ત્રિજ્યા OP કરતાં મોટી છે.

એટલે કે, OQ > OP

બિંદુ P સિવાય, રેખા XY નાં બધાં બિંદુઓ માટે આ બને છે. OP એ O થી XY પરનાં બિંદુઓથી બધાં અંતરો પૈકી ટૂંકામાં ટૂંકું અંતર છે.

તેથી, OP એ XY ને લંબ છે. (પ્રમેય A 1.7 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે) ■



આકૃતિ 10.5

નોંધ :

1. **ઉપરના પ્રમેય પરથી, આપણે એ તારણ પણ કાઢીએ કે, વર્તુળના કોઈ પણ બિંદુએ એક અને માત્ર એક જ સ્પર્શક છે.**
2. **સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થતી અને ત્રિજ્યાને સમાવતી રેખાને તે સ્પર્શબિંદુ આગળનો વર્તુળનો અભિલંબ પણ કહે છે.**

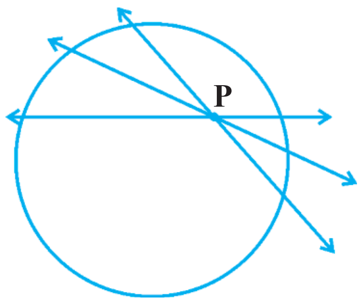
સ્વાધ્યાય 10.1

1. વર્તુળને કેટલા સ્પર્શક હોય ?
2. ખાલી જગ્યા પૂરો :
   (i) સ્પર્શક વર્તુળને .... બિંદુમાં છેદે.
   (ii) વર્તુળને બે બિંદુમાં છેદતી રેખાને .... કહે છે.
   (iii) વર્તુળને વધુમાં વધુ .... સમાંતર સ્પર્શક હોય.
   (iv) વર્તુળ અને સ્પર્શકના સામાન્ય બિંદુને .... કહે છે.
3. 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના કોઈ બિંદુ P આગળ દોરેલ એક સ્પર્શક PQ, કેન્દ્ર O માંથી પસાર થતી રેખાને Q બિંદુએ છેદે છે. OQ = 12 સેમી હોય, તો PQ ની લંબાઈ :
   (A) 12 સેમી (B) 13 સેમી (C) 8.5 સેમી (D) $\sqrt{119}$ સેમી
4. એક વર્તુળ દોરો જે પૈકી એક વર્તુળનો સ્પર્શક અને બીજી વર્તુળની છેદિકા હોય તેવી આપેલ રેખાને સમાંતર હોય તેવી બે રેખાઓ દોરો.

10.3 સમતલના કોઈ બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકની સંખ્યા

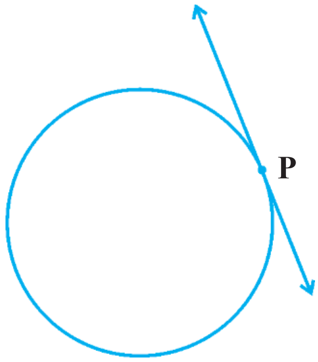
વર્તુળ પરના બિંદુમાંથી સ્પર્શકની સંખ્યાનો ખ્યાલ મેળવવા, આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 3 : કાગળ પર એક વર્તુળ દોરો. તેની અંદર બિંદુ P લો. આ બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શક દોરી શકો ? તમે જોશો કે આ બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા વર્તુળને બે બિંદુમાં છેદશે. તેથી વર્તુળની અંદરના બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શક દોરી શકાય તે શક્ય નથી (જુઓ આકૃતિ 10.6 (i)).



(i)

હવે વર્તુળ પર એક બિંદુ P લો. અને આ બિંદુમાંથી સ્પર્શક દોરો. તમે એ જોયું છે કે, આ બિંદુમાંથી વર્તુળને એક અને ફક્ત એક જ સ્પર્શક મળે. (જુઓ આકૃતિ 10.6(ii).)



(ii)

છેલ્લે વર્તુળની બહાર બિંદુ P લો. અને આ બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શક દોરવાનો પ્રયત્ન કરો. તમે શું જોયું ? તમે જોયું હશે કે, આ બિંદુમાંથી તમે વર્તુળને બે સ્પર્શકો દોરી શકો. (જુઓ આકૃતિ 10.6 (iii).)

આ હકીકતનો સારાંશ નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

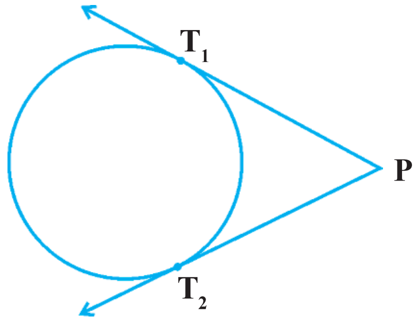
વિકલ્પ 1 : ***વર્તુળની અંદર આપેલા બિંદુમાંથી વર્તુળને કોઈ સ્પર્શક ન મળે.***

વિકલ્પ 2 : ***વર્તુળ પરના બિંદુએ વર્તુળનો એક અને માત્ર એક જ સ્પર્શક મળે.***

વિકલ્પ 3 : વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને બે સ્પર્શકો મળે.

આકૃતિ 10.6 (iii) માં, T_1 અને T_2 એ અનુક્રમે સ્પર્શકો PT_1 અને PT_2 નાં સ્પર્શબિંદુઓ છે.

સ્પર્શકના બહારના બિંદુ P અને વર્તુળ સાથેના સ્પર્શબિંદુને જોડતા રેખાખંડની લંબાઈને P થી વર્તુળ પરના સ્પર્શકની લંબાઈ કહે છે.



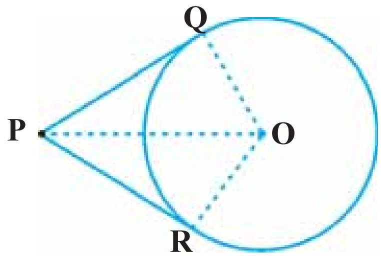
(iii)

આકૃતિ 10.6

જુઓ કે, આકૃતિ 10.6 (iii) માં PT_1 અને PT_2, P થી વર્તુળ સુધીના સ્પર્શકની લંબાઈ છે. લંબાઈ PT_1 અને PT_2 નો એક સામાન્ય ગુણધર્મ છે. તે તમે શોધી શકો ? PT_1 અને PT_2 માપો. શું તે સમાન છે ? હકીકતમાં તે હંમેશાં સમાન હોય છે. હવે આ હકીકતની સાબિતી નીચે દર્શાવેલા પ્રમેયમાં આપીએ :

પ્રમેય 10.2 : *વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે.*

સાબિતી : O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ, વર્તુળની બહારનું બિંદુ P અને બહારના બિંદુ P માંથી વર્તુળને સ્પર્શકો PQ, PR આપેલાં છે (જુઓ આકૃતિ 10.7.) સાબિત કરવું છે કે PQ = PR.



આકૃતિ 10.7

આ માટે, OP, OQ અને OR જોડો. ∠OQP અને ∠ORP કાટખૂણા છે, કારણ કે, તે સ્પર્શકો અને સંગત ત્રિજ્યા વચ્ચેના ખૂણા છે, અને પ્રમેય 10.1 ના આધારે તેઓ કાટખૂણા છે. હવે કાટકોણ ત્રિકોણો OQP અને ORP માં,

$OQ = OR$ (એક વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

$OP = OP$ (સામાન્ય)

તેથી, $\Delta\, OQP \cong \Delta\, ORP$ (કાકબા)

આથી, $PQ = PR$ (એકરૂપ ત્રિકોણોના અનુરૂપ ભાગ)

■

નોંધ :

1. આ પ્રમેયને પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને નીચે પ્રમાણે સાબિત કરી શકાશે :

$PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2$ (કેમ કે $OQ = OR$)

તેથી, PQ = PR મળે.

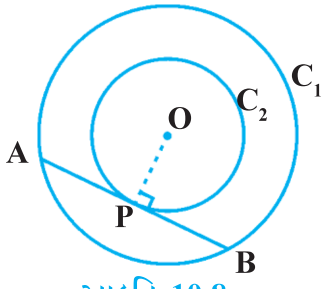
2. એ પણ ધ્યાન આપો કે, ∠OPQ = ∠OPR તેથી, OP એ ∠QPR નો કોણદ્વિભાજક છે.

એટલે કે, કેન્દ્ર બે સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાના દ્વિભાજક પર છે.

હવે, કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 1 : સાબિત કરો કે, બે સમકેન્દ્રી વર્તુળોમાં મોટા વર્તુળની જીવા નાના વર્તુળને સ્પર્શતી હોય, તો સ્પર્શબિંદુ તેને દુભાગે છે.

ઉકેલ : O કેન્દ્રવાળાં બે સમકેન્દ્રીય વર્તુળો C_1 અને C_2 આપ્યાં છે અને મોટા વર્તુળ C_1 ની જીવા AB નાના વર્તુળ C_2 ને બિંદુ P માં સ્પર્શે છે. (જુઓ આકૃતિ 10.8.)



આકૃતિ 10.8

અહીં, એ સાબિત કરવાનું છે કે, AP = BP.

અહીં, OP જોડો. AB એ P બિંદુએ C_2નો સ્પર્શક છે અને OP તેની ત્રિજ્યા છે.

તેથી, પ્રમેય 10.1 પરથી,

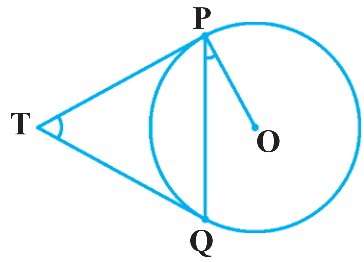
$$OP \perp AB$$

હવે, AB એ વર્તુળ C_1 ની જીવા છે અને $OP \perp AB$. તેથી, OP એ જીવા AB નો દ્વિભાજક છે, કારણ કે, કેન્દ્રમાંથી જીવાને દોરેલો લંબ જીવાને દુભાગે છે.

એટલે કે, AP = BP

ઉદાહરણ 2 : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની બહારના બિંદુ T માંથી વર્તુળને બે સ્પર્શકો TP અને TQ દોરેલા છે. સાબિત કરો કે, $\angle PTQ = 2\angle OPQ$.

ઉકેલ : O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ, તેની બહારનું બિંદુ T અને વર્તુળના બે સ્પર્શકો TP અને TQ આપેલા છે. P અને Q સ્પર્શબિંદુઓ છે. (જુઓ આકૃતિ 10.9.) અહીં, એ સાબિત કરવું છે કે,



આકૃતિ 10.9

$\angle PTQ = 2\angle OPQ$

ધારો કે, $\angle PTQ = \theta$

હવે, પ્રમેય 10.2 પરથી TP = TQ

તેથી, ત્રિકોણ TPQ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

તેથી, $\angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180° - \theta) = 90° - \frac{1}{2}\theta$

તેમજ, પ્રમેય 10.1 પરથી $\angle OPT = 90$

તેથી, $\angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ = 90° - \left(90° - \frac{1}{2}\theta\right)$

$$= \frac{1}{2}\theta$$

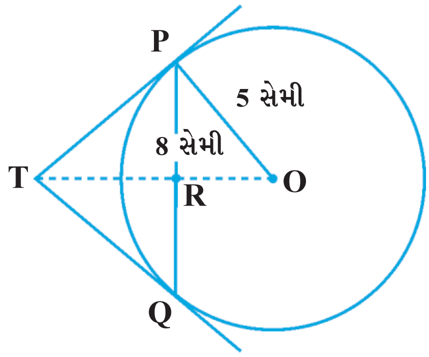
$$= \frac{1}{2}\angle PTQ$$

તેથી $\angle PTQ = 2\angle OPQ$

ઉદાહરણ 3 : PQ એ 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની 8 સેમી લંબાઈની જીવા છે. P અને Q માંથી પસાર થતા સ્પર્શકો બિંદુ T માં છેદે છે. (જુઓ આકૃતિ 10.10.) TP ની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : OT જોડો. ધારો કે તે PQ ને R માં છેદે છે.

Δ TPQ સમદ્વિબાજુ છે અને TO એ $\angle$PTQ નો દ્વિભાજક છે. તેથી, OT $\perp$ PQ અને OT એ PQ ને દુભાગે છે. તેથી PR = RQ = 4 સેમી.



આકૃતિ 10.10

તેમજ, $OR = \sqrt{OP^2 - PR^2}$

$= \sqrt{5^2 - 4^2}$ સેમી

= 3 સેમી

હવે, $\angle TPR + \angle RPO = 90° = \angle TPR + \angle PTR$ (કેમ ?)

તેથી, $\angle RPO = \angle PTR$ (ખૂખૂ)

તેથી, ખૂખૂ સમરૂપતા પરથી,

કાટકોણ ત્રિકોણ TRP એ કાટકોણ ત્રિકોણ PRO ને સમરૂપ છે.

જેથી, $\frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO}$

એટલે કે, $\frac{TP}{5} = \frac{4}{3}$

અથવા $TP = \frac{20}{3}$ સેમી

નોંધ : પાયથાગોરસના પ્રમેયના ઉપયોગથી પણ TP નીચે પ્રમાણે મળી શકે :

ધારો કે, TP = x અને TR = y

તેથી, $x^2 = y^2 + 16$ (કાટકોણ ΔPRT લેતાં) (1)

$x^2 + 5^2 = (y + 3)^2$ (કાટકોણ ΔOPT લેતાં) (2)

(2)માંથી (1) બાદ કરતાં

$25 = 6y - 7$

$\therefore y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$

તેથી, $x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16$

$= \frac{16}{9}(16 + 9)$

$= \frac{16 \times 25}{9}$ ((1) પરથી)

$x = \frac{20}{3}$

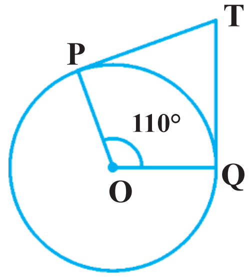
સ્વાધ્યાય 10.2

પ્રશ્ન 1 થી 3 માં સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો અને તે માટે કારણ આપો :

1. બિંદુ Q માંથી દોરેલા વર્તુળના સ્પર્શકની લંબાઈ 24 સેમી અને વર્તુળના કેન્દ્રથી તેનું અંતર 25 સેમી હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા .... છે.

(A) 7 સેમી (B) 12 સેમી

(C) 15 સેમી (D) 24.5 સેમી



આકૃતિ 10.11

2. આકૃતિ 10.11 માં, જો TP અને TQ એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળના $\angle POQ = 110°$ બને એવા સ્પર્શકો છે. $\angle PTQ$ .... છે.

(A) 60° (B) 70°

(C) 80° (D) 90°

3. જો O કેન્દ્રવાળા વર્તુળને બિંદુ P માંથી દોરેલા સ્પર્શકો PA અને PB વચ્ચે 80° નો ખૂણો રચાતો હોય, તો $\angle POA$ .... છે.

(A) 50° (B) 60° (C) 70° (D) 80°

4. સાબિત કરો કે, વર્તુળના વ્યાસનાં અંત્યબિંદુઓએ દોરેલા સ્પર્શકો પરસ્પર સમાંતર હોય છે.

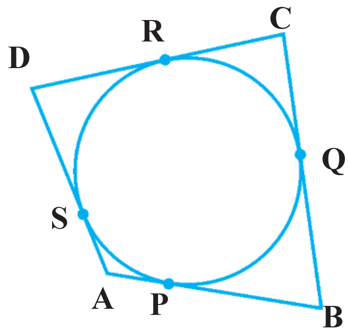
5. સાબિત કરો કે, વર્તુળના સ્પર્શકના સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલો લંબ વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થાય છે.

6. વર્તુળના કેન્દ્રથી 5 સેમી અંતરે આવેલા બિંદુ A થી દોરેલા સ્પર્શકની લંબાઈ 4 સેમી છે. વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

7. બે સમકેન્દ્રી વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ 5 સેમી અને 3 સેમી છે. મોટા વર્તુળની જીવા નાના વર્તુળને સ્પર્શે છે, તો તેની લંબાઈ શોધો.

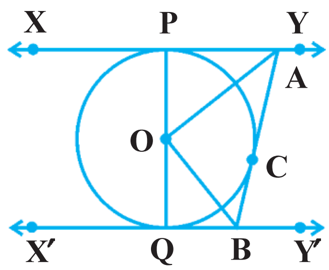
8. ચતુષ્કોણ ABCD એક વર્તુળને પરિગત છે (જુઓ આકૃતિ 10.12) સાબિત કરો કે,

$AB + CD = AD + BC$



આકૃતિ 10.12

9. આકૃતિ 10.13માં, O કેન્દ્રવાળા વર્તુળના બે સ્પર્શકો XY અને X′Y′ સમાંતર છે અને વર્તુળ પરના સ્પર્શબિંદુ C આગળ દોરેલો ત્રીજો સ્પર્શક XYને A બિંદુએ અને X′Y′ ને B બિંદુએ છેદે છે. સાબિત કરો કે $\angle AOB = 90$.

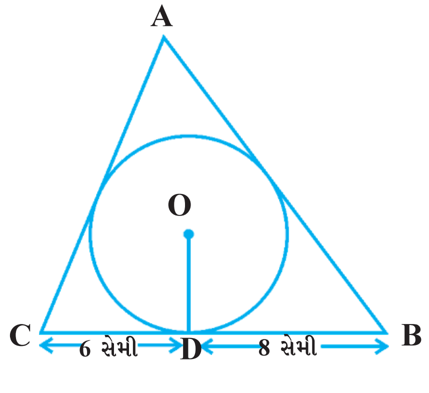


આકૃતિ 10.13

10. સાબિત કરો કે, વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા બે સ્પર્શકો વચ્ચેનો ખૂણો અને સ્પર્શબિંદુઓને કેન્દ્રને જોડતા રેખાખંડ વચ્ચેનો ખૂણો એકબીજાને પૂરક હોય છે.

11. સાબિત કરો કે, વર્તુળને પરિગત સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

12. ત્રિકોણ ABC એ 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને પરિગત છે. રેખાખંડ BD અને DC એ BCનું સ્પર્શબિંદુ D આગળ અનુક્રમે 8 સેમી અને 6 સેમી લંબાઈના રેખાખંડમાં વિભાજન કરે છે. (આકૃતિ 10.14) બાજુઓ AB અને AC શોધો.



આકૃતિ 10.14

13. સાબિત કરો કે વર્તુળને પરિગત ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓથી વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ રચાતા ખૂણાઓ પૂરક હોય છે.

10.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં, તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો.

1. વર્તુળના સ્પર્શકનો અર્થ
2. સ્પર્શબિંદુમાંથી વર્તુળની ત્રિજ્યાને દોરેલો સ્પર્શક ત્રિજ્યાને લંબ હોય છે.
3. વર્તુળના બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે.

રચના 11

11.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં, સીધી પટ્ટી અને પરિકરની મદદથી તમે કેટલીક રચનાઓ કરી હતી તથા તેમની યથાર્થતાની ચર્ચા પણ કરી હતી. ઉદાહરણ તરીકે, આપણે ખૂણાનો દ્વિભાજક દોરવો, રેખાખંડનો લંબદ્વિભાજક દોરવો, ત્રિકોણ પરની કેટલીક રચનાઓ કરી હતી. આ પ્રકરણમાં આપણે અગાઉ અભ્યાસ કરેલ રચનાઓના જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરી કેટલીક વધારે રચનાઓનો અભ્યાસ કરીશું. આવી રચનાઓ શું કાર્ય કરે છે તેની પાછળના ગાણિતિક તર્ક આપવાની અપેક્ષા પણ તમારી પાસે હશે.

11.2 રેખાખંડનું વિભાજન

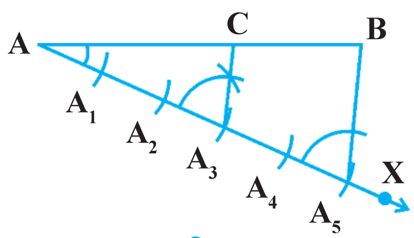
ધારો કે, એક રેખાખંડ આપ્યો છે અને તમારે તેનું આપેલા ગુણોત્તર 3:2 માં વિભાજન કરવાનું છે. તમે તેની લંબાઈ માપી આપેલા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તેવા એક બિંદુનું સ્થાન તેના પર નક્કી કરી શકો. પરંતુ, ધારો કે તેનું ચોકસાઈપૂર્વક માપ કાઢવા માટે તમારી પાસે કોઈ રસ્તો નથી, તો તમે આ બિંદુ કેવી રીતે શોધી શકશો ? આપણે આવું બિંદુ શોધવાની બે રીત નીચે પ્રમાણે આપીશું :

રચના 11.1 : *રેખાખંડનું આપેલા ગુણોત્તરમાં વિભાજન*

એક રેખાખંડ AB આપ્યો છે. ધન પૂર્ણાંકો m, n માટે આપણે તેનું m:n ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરવા ઇચ્છીએ છીએ. તમને સમજવામાં સરળતા રહે તે માટે, આપણે $m = 3$ અને $n = 2$ લઈશું.

રચનાના મુદ્દા :

1. AB સાથે લઘુકોણ બનાવે તેવું કોઈ પણ કિરણ AX દોરો.
2. AX પર $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ થાય તેવાં 5 (= $m + n$) બિંદુઓ A_1, A_2, A_3, A_4 અને A_5નાં સ્થાન નક્કી કરો.
3. BA_5 જોડો.



આકૃતિ 11.1

4. બિંદુ A_3 ($m = 3$) માંથી AB ને C માં છેદતી A_5B ને સમાંતર હોય તેવી રેખા ($\angle A A_3C$ એ $\angle A A_5B$ને સમાન ખૂણો બને તે રીતે) દોરો. (જુઓ આકૃતિ 11.1.) તેથી, AC:CB = 3:2 થશે.

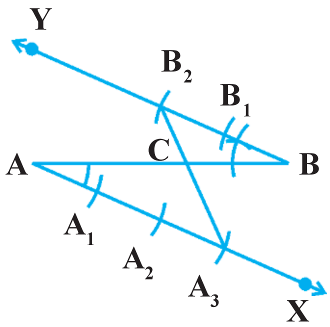
આ રીતે માંગેલ વિભાજન કેવી રીતે મળે છે તે આપણે જોઈએ.

A_3C એ A_5B ને સમાંતર છે માટે,

$$\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{AC}{CB}$$ (સપ્રમાણતાના મૂળભૂત પ્રમેય દ્વારા)

રચના પરથી, $$\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{3}{2}.$$

માટે, $$\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}.$$



આકૃતિ 11.2

આ સિદ્ધ કરે છે કે, બિંદુ C એ AB નું 3:2 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

વૈકલ્પિક રીત :

રચનાના મુદ્દા :

1. AB સાથે લઘુકોણ બનાવે તેવું કોઈક કિરણ AX દોરો.
2. $\angle BAX$ ને સમાન $\angle ABY$ બને તે રીતે કિરણ AX ને સમાંતર કિરણ BY દોરો.
3. $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = BB_1 = B_1B_2$ થાય તેવાં બિંદુઓ A_1, A_2, A_3 ($m = 3$) એ કિરણ AX ઉપર અને B_1, B_2 ($n = 2$) એ કિરણ BY ઉપર દર્શાવો.
4. A_3B_2 જોડો. ધારો કે તે AB ને બિંદુ C માં છેદે છે. (જુઓ આકૃતિ 11.2.)
   AC:CB = 3:2 થશે.

આ રીત કેવી રીતે યથાર્થ છે? ચાલો, આપણે જોઈએ :

અહીં, ΔAA_3C એ ΔBB_2C ને સમરૂપ છે. (શા માટે ?)

તેથી, $$\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{AC}{CB}$$ થશે.

રચના પરથી, $$\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{3}{2}.$$ આથી, $$\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$$

ખરેખર, રેખાખંડનું કોઈ પણ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરવાનું કાર્ય ઉપર આપેલી રીતો દ્વારા થાય છે.

હવે, જેની બાજુઓ આપેલા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરમાં હોય એવા આપેલ ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરવામાં આપણે ઉપરની રચનાની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરીશું.

રચના 11.2 : *આપેલ સ્કેલમાપન પ્રમાણેના આપેલ ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરવી.*

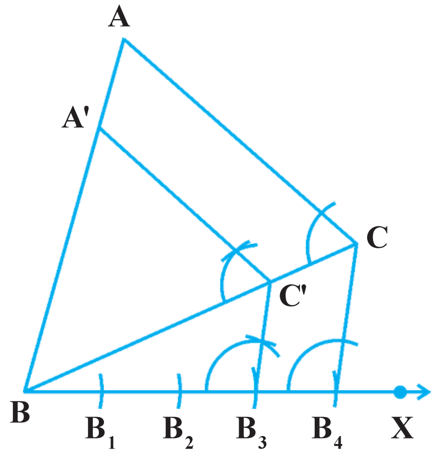
આ રચના બે ભિન્ન પરિસ્થિતિનો સમાવેશ કરે છે. એકમાં, રચેલ ત્રિકોણ આપેલા ત્રિકોણ કરતાં નાનો છે અને બીજામાં આપેલ ત્રિકોણ કરતાં મોટો છે. અહીં, ***સ્કેલમાપન (Scale factor)*** એટલે, રચિત ત્રિકોણની બાજુઓ અને આપેલા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓનો ગુણોત્તર (પ્રકરણ 6માં પણ જુઓ). ચાલો, આપણે સમાવિષ્ટ રચના સમજવા માટે આગળનું ઉદાહરણ લઈએ. આ પદ્ધતિઓનું વ્યાપક રીતે પણ પ્રયોજન કરી શકાય.

ઉદાહરણ 1 : જે ત્રિકોણની બાજુઓનો આપેલા ત્રિકોણ ABC ની અનુરૂપ બાજુઓ સાથેનો ગુણોત્તર $\frac{3}{4}$ હોય તેવા ત્રિકોણ ABC ને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરો. (એટલે કે, સ્કેલ માપન $\frac{3}{4}$ હોય તેવા)

ઉકેલ : ત્રિકોણ ABC આપેલો છે. આપણે જેની બાજુઓ ત્રિકોણ ABC ની અનુરૂપ બાજુઓ કરતાં $\frac{3}{4}$ ગણી હોય એવો બીજો ત્રિકોણ રચવો છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. BC ના જે અર્ધતલમાં A છે તેનાથી વિરુદ્ધ અર્ધતલમાં BC સાથે લઘુકોણ બનાવતું કોઈક કિરણ BX દોરો.
2. $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ થાય તેવા ચાર ($\frac{3}{4}$ માં 3 અને 4 પૈકી જે સંખ્યા મોટી હોય તેટલાં) બિંદુઓ B_1, B_2, B_3 અને B_4 એ BX પર લો.
3. B_4C જોડો અને B_3 માંથી ($\frac{3}{4}$ માં 3 અને 4 પૈકી 3 નાનો છે, આથી ત્રીજું બિંદુ) B_4C ને સમાંતર હોય તેવી BC ને C' માં છેદતી રેખા દોરો.
4. C' માંથી CA ને સમાંતર હોય તેવી BA ને A' માં છેદતી એક રેખા દોરો. (જુઓ આકૃતિ 11.3.)



આકૃતિ 11.3

Δ A'BC' એ માંગેલ ત્રિકોણ છે.

ચાલો, હવે આપણે જોઈએ કે આ રચના કેવી રીતે માંગેલ ત્રિકોણ રચે છે.

રચના 11.1 પરથી, $\frac{BC'}{C'C} = \frac{3}{1}$

આથી, $\frac{BC}{BC'} = \frac{BC' + C'C}{BC'} = 1 + \frac{C'C}{BC'} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ અર્થાત્ $\frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$

વળી, C'A' એ CA ને સમાંતર છે. આથી, $\Delta A'BC' \sim \Delta ABC$. (શા માટે?)

તેથી, $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$

ઉદાહરણ 2 : જેની બાજુઓ ત્રિકોણ ABC ની અનુરૂપ બાજુઓ સાથે $\frac{5}{3}$ ગુણોત્તર રચે એવો આપેલ ત્રિકોણ ABC ને સમરૂપ ત્રિકોણ રચો. (એટલે કે સ્કેલમાપન $\frac{5}{3}$ લો.)

ઉકેલ : ત્રિકોણ ABC આપ્યો છે. આપણે જેની બાજુઓ ત્રિકોણ ABC ની બાજુઓ કરતાં $\frac{5}{3}$ ગણી હોય એવા ત્રિકોણની રચના કરવી છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. BC ના જે અર્ધતલમાં A હોય તેનાથી વિરુદ્ધ અર્ધતલમાં BC સાથે લઘુકોણ બનાવતું કિરણ BX દોરો.

2. $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ થાય તેવાં 5 બિંદુઓ ($\frac{5}{3}$ માં 5 અને 3 પૈકી મોટી સંખ્યા) B_1, B_2, B_3, B_4 અને B_5 એ BX પર અંકિત કરો.

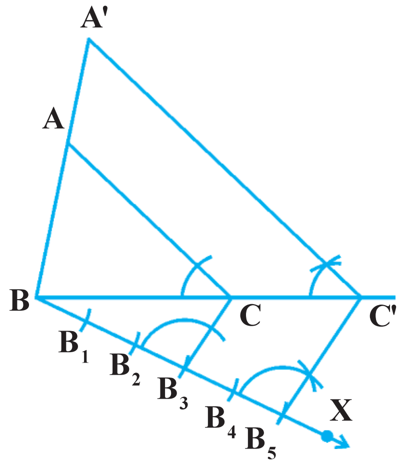
3. B_3 ને ($\frac{5}{3}$ માં 3 અને 5 પૈકી 3 નાની છે, આથી ત્રીજું બિંદુ) C સાથે જોડો. B_5 માંથી B_3C ને સમાંતર BC ને C' માં છેદતી રેખા દોરો.

4. લંબાવેલ રેખાખંડ BA ને A' માં છેદતી CA ને સમાંતર હોય તેવી C' માંથી રેખા દોરો. (જુઓ આકૃતિ 11.4.)

A'BC' એ માંગેલ ત્રિકોણ થશે.

રચનાની યથાર્થતા માટે નોંધો કે, $\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$.

(શા માટે ?)



આકૃતિ 11.4

માટે, $\frac{AB}{A'B} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{BC'}$

પરંતુ, $\frac{BC}{BC'} = \frac{BB_3}{BB_5} = \frac{3}{5}$

તેથી, $\frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$ અને તેથી, $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$

નોંધ : ઉદાહરણ 1 અને 2 માં તમે AB અથવા AC સાથે લઘુકોણ બનાવતું કિરણ લઈને પણ આ જ પ્રમાણે આગળ વધી શકો છો.

સ્વાધ્યાય 11.1

નીચેના પૈકી પ્રત્યેકની રચના કરી તેની યથાર્થતા આપો :

1. 7.6 સેમી લંબાઈનો રેખાખંડ દોરી તેનું 5:8 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરો. બંને ભાગ માપો.

2. 4 સેમી, 5 સેમી અને 6 સેમી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરી અને પછી આ ત્રિકોણની બાજુઓને અનુરૂપ તે બાજુઓથી $\frac{2}{3}$ ગણી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો.

3. 5 સેમી, 6 સેમી અને 7 સેમી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો અને પછી બીજો ત્રિકોણ રચો જેની બાજુઓ, પ્રથમ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ કરતાં $\frac{7}{5}$ ગણી હોય.

4. 8 સેમી આધાર અને 4 સેમી વેધવાળા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની રચના કરો અને પછી બીજો એવો ત્રિકોણ રચો કે જેની બાજુઓ, સમદ્વિભુજ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ કરતાં $1\frac{1}{2}$ ગણી હોય.

5. BC = 6 સેમી, AB = 5 સેમી અને $\angle ABC = 60°$ હોય તેવો ત્રિકોણ ABC દોરો. પછી ΔABC ની અનુરૂપ બાજુઓને $\frac{3}{4}$ પ્રમાણમાં હોય તેવી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો.

6. BC = 7 સેમી, $\angle B = 45°$, $\angle A = 105°$ હોય તેવો ત્રિકોણ ABC દોરો. પછી એવા ત્રિકોણની રચના કરો કે, જેની બાજુઓ, ΔABC ની અનુરૂપ બાજુઓથી $\frac{4}{3}$ ગણી હોય.

7. 4 સેમી અને 3 સેમી લંબાઈની (કર્ણ સિવાયની) બાજુવાળા કાટકોણ ત્રિકોણની રચના કરો. પછી આ ત્રિકોણની બાજુઓને અનુરૂપ તે બાજુઓથી $\frac{5}{3}$ ગણી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો.

11.3 વર્તુળના સ્પર્શકની રચના

તમે આગળના પ્રકરણમાં શીખી ગયાં છો કે, જો બિંદુ વર્તુળની અંદરના ભાગમાં આવેલું હોય, તો આ બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકનું અસ્તિત્વ નથી. તેમ છતાં, જો બિંદુ વર્તુળ ઉપર આવેલું હોય, તો આ બિંદુએ વર્તુળને માત્ર એક સ્પર્શક હોય છે અને તે આ બિંદુ આગળની ત્રિજ્યાને લંબ હોય છે. તેથી, જો વર્તુળના આ બિંદુએ તમે સ્પર્શક દોરવા ઇચ્છો, તો આ બિંદુએ માત્ર ત્રિજ્યા દોરો અને આ ત્રિજ્યાને આ બિંદુએ લંબરેખા દોરો, તે આ બિંદુએ માંગેલ સ્પર્શક થશે.

તમે એ પણ જોયું કે, જો બિંદુ વર્તુળની બહારના ભાગમાં આવેલું હોય, તો આ બિંદુમાંથી વર્તુળને બે સ્પર્શક મળશે.

આ સ્પર્શક કેવી રીતે દોરવા તે હવે આપણે જોઈશું :

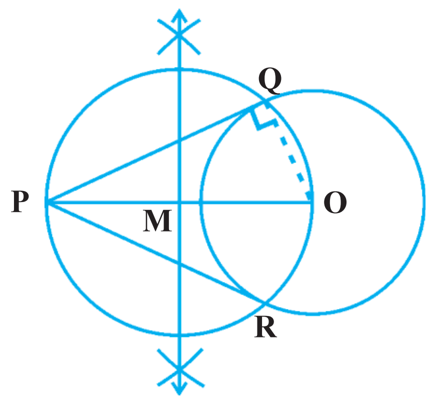
રચના 11.3 : *વર્તુળના બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકની રચના*

આપણને O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ અને તેની બહાર બિંદુ P આપ્યું છે. આપણે બિંદુ P માંથી વર્તુળના બે સ્પર્શકની રચના કરવી છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. PO જોડો અને તેને દુભાગો. ધારો કે, PO નું મધ્યબિંદુ M છે.
2. M કેન્દ્ર અને MO ને ત્રિજ્યા લઈ એક વર્તુળ દોરો. ધારો કે, તે આપેલા વર્તુળને Q અને R માં છેદે છે.
3. PQ અને PR જોડો.

PQ અને PR એ માંગેલા બે સ્પર્શક છે. (જુઓ આકૃતિ 11.5.)



આકૃતિ 11.5

ચાલો, હવે આ રચના કેવી રીતે યથાર્થ છે તે આપણે જોઈએ.

OQ જોડો. $\angle PQO$ એ અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો છે અને માટે $\angle PQO = 90°$

તમે જોઈ શકો છો કે, $PQ \perp OQ$?

આપેલ વર્તુળની ત્રિજ્યા OQ હોવાથી, PQ એ વર્તુળનો સ્પર્શક બનશે.

આ જ પ્રમાણે PR એ પણ વર્તુળનો સ્પર્શક છે.

નોંધ : જો વર્તુળનું કેન્દ્ર આપ્યું ન હોય, તો પહેલાં સમાંતર ન હોય તેવી બે જીવાઓ લઈ પછી તેમના લંબદ્વિભાજકોનું છેદબિંદુ શોધીએ. આ છેદબિંદુ કેન્દ્ર થશે. પછી તમે ઉપર પ્રમાણે આગળ વધી શકો.

સ્વાધ્યાય 11.2

નીચેની પ્રત્યેક રચના કરી તેની યથાર્થતા પણ આપો :

1. 6 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. તેના કેન્દ્રથી 10 સેમી દૂર આવેલા બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકની જોડીની રચના કરો અને તેમની લંબાઈ માપો.

2. 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને સમકેન્દ્રી બીજા 6 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળ પરના બિંદુમાંથી પ્રથમ વર્તુળના સ્પર્શકની રચના કરો અને તેની લંબાઈ માપો. વાસ્તવિક ગણતરીથી માપની ચકાસણી પણ કરો.
3. 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. તેના કેન્દ્રથી લંબાવેલા વ્યાસ પર દરેકનું અંતર 7 સેમી થાય તે રીતે બિંદુઓ P અને Q લો. બિંદુઓ P અને Q માંથી વર્તુળને સ્પર્શકો દોરો.
4. 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના જેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 60° થાય તેવા સ્પર્શકો રચો.
5. 8 સેમી લંબાઈનો રેખાખંડ AB દોરો. A ને કેન્દ્ર લઈ 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળું એક વર્તુળ દોરો. B ને કેન્દ્ર લઈ બીજું 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. પ્રત્યેક વર્તુળને બીજા વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી સ્પર્શકો દોરો.
6. AB = 6 સેમી, BC = 8 સેમી અને $\angle B = 90°$ થાય તેવો કાટકોણ ત્રિકોણ ABC લો. B માંથી AC પરનો લંબ BD છે. B, C, D માંથી પસાર થતું વર્તુળ દોરેલું છે. A માંથી આ વર્તુળને સ્પર્શકો દોરો.
7. બંગડીની મદદ લઈ એક વર્તુળ દોરો. વર્તુળની બહાર એક બિંદુ લો. આ બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકોની જોડ દોરો.

11.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં નીચેની રચનાઓ કેવી રીતે કરવી તે તમે શીખ્યાં :

1. આપેલ ગુણોત્તરમાં રેખાખંડનું વિભાજન કરવું.
2. 1 કરતાં ઓછો અથવા 1 કરતાં વધારે હોય તેવા આપેલ સ્કેલમાપન પ્રમાણે આપેલા ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરવી.
3. વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શકોની જોડની રચના કરવી.

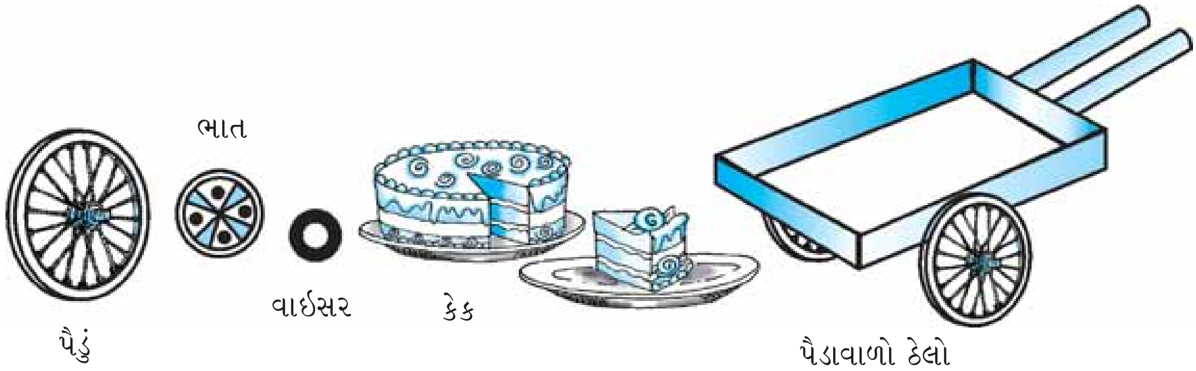
વાચક નોંધ

રચના 11.2ના ઉદાહરણ 1 અને 2માં જે મુદ્દા આપ્યા છે તેમનો ઉપયોગ કરી આપેલા સ્કેલમાપન પ્રમાણે આપેલા ચતુષ્કોણ (અથવા બહુકોણ)ને સમરૂપ ચતુષ્કોણ (અથવા બહુકોણ)ની રચના કરો.

વર્તુળ સંબંધિત ક્ષેત્રફળ 12

12.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે તમારા અગાઉના વર્ગોમાંથી લંબચોરસ, ચોરસ, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ, ત્રિકોણ અને વર્તુળના જેવી સરળ સમતલીય આકૃતિઓની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ શોધવાની કેટલીક રીતો વિશે પહેલેથી જ પરિચિત છો. આપણા દૈનિક જીવનમાં આપણે એક અથવા બીજી રીતે વર્તુળના આકારને સંબંધિત ઘણી વસ્તુઓના પરિચયમાં આવીએ છીએ. સાઇકલનું પૈડું, પૈડાવાળો ઠેલો, તીરંદાજીનું પાટિયું, ગોળાકાર કેક, પાપડ, ગટરનું ઢાંકણું, વિવિધ પ્રકારની ભાત, બંગડી, આંકડીવાળું ઘરેણું, વર્તુળાકાર રસ્તો, વાઇસર, ફૂલોની ક્યારી વગેરે આવી વસ્તુઓનાં કેટલાંક ઉદાહરણો છે (જુઓ આકૃતિ 12.1.) આકૃતિઓની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ શોધવાના કૂટપ્રશ્નનું ખૂબ જ પ્રાયોગિક મહત્ત્વ છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આપણી ચર્ચાની શરૂઆત વર્તુળની પરિમિતિ (પરિઘ) અને ક્ષેત્રફળની કલ્પનાની સમાલોચનાથી કરીશું અને વૃત્તીય ક્ષેત્રના (અથવા ટૂંકમાં વર્તુળના) બે વિશિષ્ટ 'ભાગ' વૃત્તાંશ અને વૃત્તખંડના ક્ષેત્રફળ શોધવામાં આ જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરીશું. વર્તુળ અથવા તેના ભાગનો સમાવેશ થાય તેવી કેટલીક સંયુક્ત સમતલ આકૃતિઓનું ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે શોધવું તે પણ આપણે જોઈશું.



આકૃતિ 12.1

12.2 વર્તુળની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ – એક સમીક્ષા

યાદ કરીએ કે, વર્તુળ ઉપરની એક વખતની મુસાફરીથી કપાતા અંતરને તેની પરિમિતિ અથવા સામાન્ય ભાષામાં ***પરિઘ*** કહે છે. તમે તમારા આગળના વર્ગોમાંથી એ પણ જાણો છો કે, વર્તુળના પરિઘ અને તેના વ્યાસનો ગુણોત્તર અચળ છે. આ અચળ ગુણોત્તરને ગ્રીક અક્ષર π ('પાઈ' વાંચીશું)થી દર્શાવાય છે. બીજા શબ્દોમાં,

$$\frac{\text{પરિઘ}}{\text{વ્યાસ}} = \pi$$

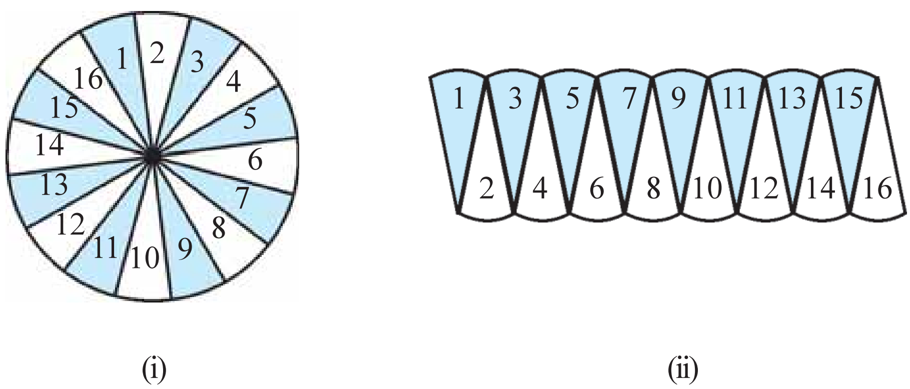
અથવા $\quad$ પરિઘ $= \pi \times$ વ્યાસ

$= \pi \times 2r$ $\quad$ (r એ વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.)

$= 2\pi r$

ભારતના મહાન ગણિતશાસ્ત્રી **આર્યભટ્ટે (C.E. 476-550)** π નું લગભગ મૂલ્ય આપ્યું હતું. તેમણે $\pi = \frac{62832}{20000}$ નું આસન્ન મૂલ્ય 3.1416 જણાવ્યું છે. એ પણ નોંધવું રસપ્રદ છે કે, ભારતના મહાન પ્રતિભાશાળી ગણિતજ્ઞ **શ્રીનિવાસ રામાનુજને (C.E.1887- C.E.1920)** આપેલા નિત્યસમના ઉપયોગથી ગણિતશાસ્ત્રીઓ π ના આસન્ન મૂલ્યની ગણતરી એક લાખ દશાંશસ્થળ સુધી કરી શક્યા. ધોરણ IX ના પ્રકરણ 1 પરથી તમે જાણો છો કે, π એ અસંમેય સંખ્યા છે અને તેનું દશાંશ વિસ્તરણ અનંત અને અનાવૃત્ત છે. તેમ છતાં સામાન્ય રીતે વ્યાવહારિક હેતુ માટે આપણે તેનું મૂલ્ય $\frac{22}{7}$ અથવા લગભગ 3.14 લઈશું.

તમને એ પણ યાદ હશે કે, r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ πr^2 છે. યાદ કરો કે, તમે ધોરણ VII માં વર્તુળને અનેક વૃત્તાંશમાં કાપી અને તેમની આકૃતિ 12.2 પ્રમાણેની પુનઃ ગોઠવણી કરીને આ ચકાસ્યું છે.



આકૃતિ 12.2

તમે જોઈ શકશો કે, આકૃતિ 12.2 (ii)નો આકાર લગભગ $\frac{1}{2} \times 2\pi r$ લંબાઈ અને r પહોળાઈવાળા લંબચોરસના જેટલો છે. આ સૂચવે છે કે, **વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$.** આપણે આગળના વર્ગોમાં કરેલી સંકલ્પનાઓને એક ઉદાહરણ દ્વારા યાદ કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : એક વર્તુળ આકારના ખેતરને વાડ કરવાનો ખર્ચ મીટરના ₹ 24 પ્રમાણે ₹ 5280 થાય છે. ખેતરને ખેડવાનો ખર્ચ ચોરસ મીટરના ₹ 0.50 છે. ખેતર ખેડવાનો ખર્ચ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

ઉકેલ : વાડની લંબાઈ (મીટરમાં) $= \frac{\text{કુલ ખર્ચ}}{\text{ભાવ}} = \frac{5280}{24} = 220$ મી

તેથી વર્તુળનો પરિઘ = 220 મી

તેથી, જો ખેતરની ત્રિજ્યા r મીટર હોય, તો

$$2\pi r = 220$$

અથવા, $2 \times \frac{22}{7} \times r = 220$

અથવા, $r = \frac{220 \times 7}{2 \times 22} = 35$

અર્થાત્, ખેતરની ત્રિજ્યા 35 મીટર છે.

તેથી, ખેતરનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 35 \times 35$ મી^{2} $= 22 \times 5 \times 35$ મી^{2}

હવે, 1મી^{2} ખેતર ખેડવાનો ખર્ચ = ₹ 0.50

આથી, ખેતર ખેડવાનો કુલ ખર્ચ = ₹ $22 \times 5 \times 35 \times 0.50$ = ₹ 1925

સ્વાધ્યાય 12.1

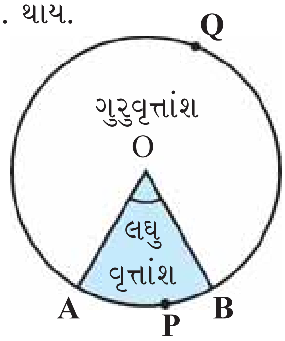
ઉલ્લેખ કર્યો ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. બે વર્તુળની ત્રિજ્યા 19 સેમી અને 9 સેમી છે. જે વર્તુળનો પરિઘ આ બે વર્તુળના પરિઘના સરવાળા જેટલો હોય, તે વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.
2. બે વર્તુળની ત્રિજ્યા 8 સેમી અને 6 સેમી છે. જે વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ આ બે વર્તુળનાં ક્ષેત્રફળના સરવાળા જેટલું હોય, તે વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.
3. આકૃતિ 12.3 માં તીરંદાજીનું લક્ષ્ય, કેન્દ્રથી બહારના ભાગ તરફ સોનેરી, લાલ, ભૂરું, કાળું અને સફેદ એમ પાંચ વિભાગમાં ગુણલક્ષણ દર્શાવે છે. ગુણની ગણતરી માટે સોનેરી રંગ દ્વારા દર્શાવાતા પ્રદેશનો વ્યાસ 21 સેમી છે અને દરેક વિભાગની પહોળાઈ 10.5 સેમી છે. ગણતરી કરવાના પાંચ પ્રદેશ પૈકી પ્રત્યેકનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

આકૃતિ 12.3

4. એક ગાડીના દરેક પૈડાનો વ્યાસ 80 સેમી છે. જો ગાડી 66 કિમી/કલાકની ઝડપે મુસાફરી કરે, તો દરેક પૈડું 10 મિનિટમાં કેટલાં પરિભ્રમણ પૂર્ણ કરશે?
5. નીચેનામાંથી સાચા જવાબ પર નિશાન કરો અને તમારી પસંદગીની યથાર્થતા ચકાસો :
   જો વર્તુળની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ સમાન સંખ્યા હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા .... થાય.
   (A) 2 એકમ (B) π એકમ (C) 4 એકમ (D) 7 એકમ

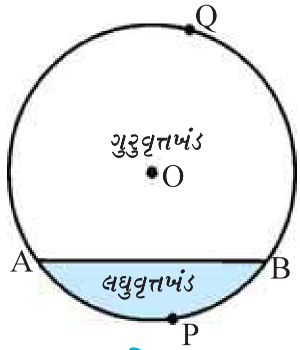
12.3 વર્તુળના વૃત્તાંશ અને વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ



આકૃતિ 12.4

તમારા આગળનાં ધોરણોમાં તમે વર્તુળ વિષયક પદો *વૃત્તાંશ (sector)* અને *વૃત્તખંડ (segment)* થી પહેલેથી પરિચિત થયા છો જ. યાદ કરો કે, **બે ત્રિજ્યાઓ અને વર્તુળના ચાપ વચ્ચે ઘેરાયેલા પ્રદેશ (અથવા ભાગ)ને વર્તુળનો *વૃત્તાંશ* કહે છે અને જીવા તથા તેને અનુરૂપ ચાપની વચ્ચે ઘેરાયેલા વર્તુળાકાર પ્રદેશના અંશ (અથવા ભાગ) ને વર્તુળનો *વૃત્તખંડ* કહે છે.**

આમ, આકૃતિ 12.4 માં O કેન્દ્રવાળા વર્તુળનો રંગીન પ્રદેશ OAPB એ ***વૃત્તાંશ*** છે. ∠AOBને ***વૃત્તાંશનો ખૂણો*** કહે છે. આ આકૃતિમાં નોંધીશું કે, રંગીન ન હોય તેવો પ્રદેશ OAQB એ પણ વર્તુળનું વૃત્તાંશ છે. OAPB ને ***લઘુવૃત્તાંશ (minor sector)*** કહે છે અને OAQB ને ***ગુરુવૃત્તાંશ (major sector)*** કહે છે. આ વસ્તુ તરત સમજી શકાય તેમ છે. તમે એ પણ જોઈ શકશો કે, **ગુરુવૃત્તાંશનો ખૂણો 360° – ∠AOB છે.**

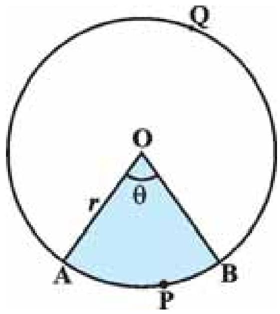


આકૃતિ 12.5

હવે, આકૃતિ 12.5 તરફ જુઓ. તેમાં O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની જીવા AB છે. આથી રંગીન પ્રદેશ APB વર્તુળનો ***વૃત્તખંડ (segment)*** છે. તમે એ પણ નોંધી શકશો કે, જીવા AB થી વર્તુળનો છાયાંકિત ન હોય તેવો બીજો વૃત્તખંડ AQB બને છે. દેખીતી રીતે APB ને ***લઘુવૃત્તખંડ (minor segment)*** કહે છે અને AQB ને ***ગુરુવૃત્તખંડ (major segment)*** કહે છે.

નોંધ : *જો દર્શાવવામાં આવ્યું ન હોય, તો આપણે 'વૃત્તખંડ' અને 'વૃત્તાંશ' લખીએ, ત્યારે આપણે તેનો અર્થ અનુક્રમે 'લઘુવૃત્તખંડ' અને 'લઘુવૃત્તાંશ' કરીશું.*

હવે આ જ્ઞાન સાથે, ચાલો આપણે તેમના ક્ષેત્રફળની ગણતરી માટે કેટલાંક સંબંધ (સૂત્રો) શોધવાનો પ્રયાસ કરીએ.



આકૃતિ 12.6

ધારો કે, OAPB એ O કેન્દ્રવાળા અને r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું વૃત્તાંશ છે. (જુઓ આકૃતિ 12.6.) ધારો કે, ∠AOBનું અંશ માપ θ છે. તમે જાણો છો કે વર્તુળ (વર્તુળાકાર પ્રદેશ અથવા તાસક)નું ક્ષેત્રફળ πr^2 છે.

આપણે આ વર્તુળાકાર પ્રદેશને કેન્દ્ર O આગળ 360° (અર્થાત્ અંશમાપ 360)નો ખૂણો બનાવતા વૃત્તાંશ તરીકે લઈએ. હવે એકમ પદ્ધતિ અપનાવતાં, આપણે નીચે પ્રમાણે વૃત્તાંશ OAPB ના ક્ષેત્રફળ સુધી પહોંચી શકીશું :

જ્યારે કેન્દ્ર આગળ 360 અંશ માપવાળો ખૂણો હોય, ત્યારે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$

આથી, જ્યારે કેન્દ્ર આગળ 1 અંશ માપવાળો ખૂણો હોય, ત્યારે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\pi r^2}{360}$

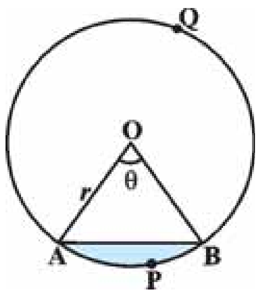
તેથી, જ્યારે કેન્દ્ર આગળ θ અંશ માપવાળો ખૂણો હોય, ત્યારે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\pi r^2}{360} \times \theta = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

આમ, આપણે વર્તુળના વૃત્તાંશના ક્ષેત્રફળ માટે નીચેનો સંબંધ (અથવા સૂત્ર) મળે છે :

θ ખૂણાવાળા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

જ્યાં r એ વર્તુળની ત્રિજ્યા અને θ એ અંશમાં વૃત્તાંશનો ખૂણો છે.

હવે, સ્વાભાવિક એક પ્રશ્ન ઉદ્ભવે : શું આપણે આ વૃત્તાંશને અનુરૂપ ચાપ APB ની લંબાઈ શોધી શકીએ? હા, ફરીથી આપણે એકમની પદ્ધતિ અપનાવતાં અને વર્તુળની પૂરેપૂરી લંબાઈ (360° ના ખૂણાથી) $2\pi r$ લેતાં, આપણે જરૂરી ચાપ APB ની લંબાઈ $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ મેળવી શકીએ.



આકૃતિ 12.7

આથી, θ ખૂણાવાળા વૃત્તાંશના ચાપની લંબાઈ $= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

ચાલો, હવે આપણે O કેન્દ્રવાળા અને r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના વૃત્તખંડ APB (જુઓ આકૃતિ 12.7) ના ક્ષેત્રફળનો વિકલ્પ લઈએ. તમે જોઈ શકશો કે,

વૃત્તખંડ APB નું ક્ષેત્રફળ = વૃત્તાંશ OAPB નું ક્ષેત્રફળ – ΔOAB નું ક્ષેત્રફળ

$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta OAB$ નું ક્ષેત્રફળ

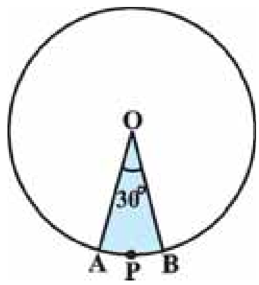
નોંધ : તમે અનુક્રમે આકૃતિ 12.6 અને આકૃતિ 12.7નું નિરીક્ષણ કરી શકશો કે,

ગુરુવૃત્તાંશ OAQB નું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2 -$ લઘુવૃત્તાંશ OAPB નું ક્ષેત્રફળ

અને ગુરુવૃત્તખંડ AQB નું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2 -$ લઘુવૃત્તખંડ APB નું ક્ષેત્રફળ

ચાલો, હવે આપણે આ સંકલ્પના સમજવા કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ :

ઉદાહરણ 2 : 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા અને કેન્દ્ર આગળ $30°$ નો ખૂણો બનાવતા વર્તુળના વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ગુરુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)



આકૃતિ 12.8

ઉકેલ : આપેલું વૃત્તાંશ OAPB છે. (જુઓ આકૃતિ 12.8.)

વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4$ સેમી^{2}

$= \frac{12.56}{3}$ સેમી^{2} $= 4.19$ સેમી^{2} (આસન્ન મૂલ્ય)

અનુરૂપ ગુરુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2 -$ લઘુવૃત્તાંશ OAPB નું ક્ષેત્રફળ

$= (3.14 \times 16 - 4.19)$ સેમી^{2}

$= 46.05$ સેમી^{2} $= 46.1$ સેમી^{2} (આસન્ન મૂલ્ય)

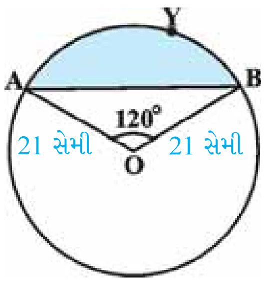
વૈકલ્પિક રીતે, ગુરુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{(360 - \theta)}{360} \times \pi r^2$

$= \left(\frac{360 - 30}{360}\right) \times 3.14 \times 16$ સેમી^{2}

$= \frac{330}{360} \times 3.14 \times 16$ સેમી^{2} $= 46.05$ સેમી^{2}

$= 46.1$ સેમી^{2} (આસન્ન મૂલ્ય)

ઉદાહરણ 3 : જો વર્તુળની ત્રિજ્યા 21 સેમી અને $\angle AOB = 120°$ હોય, તો આકૃતિ 12.9 માં દર્શાવેલ વૃત્તખંડ AYB નું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 12.9

ઉકેલ : વૃત્તખંડ AYB નું ક્ષેત્રફળ = વૃત્તાંશ OAYB નું ક્ષેત્રફળ $- \Delta OAB$ નું ક્ષેત્રફળ (1)

હવે, વૃત્તાંશ OAYB નું ક્ષેત્રફળ

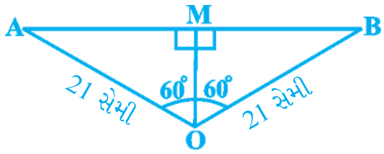
$= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ સેમી^{2}

$= 462$ સેમી^{2} (2)

ΔOAB નું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે, આકૃતિ 12.10 માં બતાવ્યા પ્રમાણે $OM \perp AB$ દોરો.

આપણે નોંધીએ કે, OA = OB. આથી, કાકબા એકરૂપતાને આધારે $\Delta AMO \cong \Delta BMO$

આથી, M એ AB નું મધ્યબિંદુ છે અને $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$



આકૃતિ 12.10

OM = x સેમી લેતાં,

ΔOMA પરથી, $\quad \dfrac{OM}{OA} = \cos 60°$

અથવા, $\quad \dfrac{x}{21} = \dfrac{1}{2} \qquad \left(\cos 60° = \dfrac{1}{2}\right)$

અથવા, $\quad x = \dfrac{21}{2}$

તેથી, $\quad OM = \dfrac{21}{2}$ સેમી

વળી, $\quad \dfrac{AM}{OA} = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

તેથી, $\quad AM = \dfrac{21\sqrt{3}}{2}$ સેમી

માટે, $\quad AB = 2AM = \dfrac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}$ સેમી $= 21\sqrt{3}$ સેમી

તેથી, $\quad \Delta$ OAB નું ક્ષેત્રફળ $= \dfrac{1}{2} AB \times OM$

$= \dfrac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \dfrac{21}{2}$ સેમી^{2}

$= \dfrac{441}{4}\sqrt{3}$ સેમી^{2} (3)

માટે, વૃત્તખંડ AYB નું ક્ષેત્રફળ $= \left(462 - \dfrac{441}{4}\sqrt{3}\right)$ સેમી^{2} [(1), (2) અને (3) પરથી]

$= \dfrac{21}{4}\left(88 - 21\sqrt{3}\right)$ સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 12.2

ઉલ્લેખ કર્યો ન હોય, તો $\pi = \dfrac{22}{7}$ લો.

1. જો 6 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના વૃત્તાંશ દ્વારા કેન્દ્ર આગળ બનતો ખૂણો 60° હોય, તો વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

2. 22 સેમી પરિઘવાળા વર્તુળના ચતુર્થાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

3. એક ઘડિયાળના મિનિટકાંટાની લંબાઈ 14 સેમી છે. મિનિટકાંટો 5 મિનિટમાં પરિભ્રમણ કરીને જે ક્ષેત્રફળ રચે તે શોધો.

4. 10 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની જીવા કેન્દ્ર આગળ કાટખૂણો આંતરે છે. તેને અનુરૂપ (i) લઘુવૃત્તખંડ (ii) ગુરુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

5. 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું એક ચાપ કેન્દ્ર આગળ 60° નો ખૂણો આંતરે છે. તેને અનુરૂપ (i) ચાપની લંબાઈ (ii) ચાપ વડે બનતા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ (iii) અનુરૂપ જીવા વડે બનતા વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

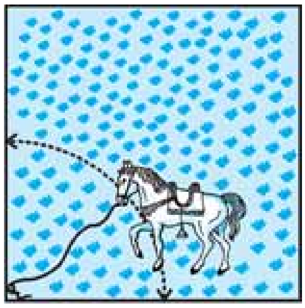
6. 15 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની જીવા કેન્દ્ર આગળ 60° નો ખૂણો આંતરે છે. તેને અનુરૂપ લઘુવૃત્તખંડ અને ગુરુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ અને $\sqrt{3} = 1.73$ લો.)

7. 12 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની જીવા કેન્દ્ર આગળ 120° નો ખૂણો આંતરે છે. તેને અનુરૂપ વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ અને $\sqrt{3} = 1.73$ લો.)

8. 15 મી બાજુવાળા ચોરસ આકારના ઘાસના ખેતરના એક ખૂણે ઘોડાને 5 મી લાંબા દોરડાથી ખીલા સાથે બાંધેલો છે. (જુઓ આકૃતિ 12.11.)

(i) ઘોડો ખેતરના જેટલા ભાગમાં ચરી શકે તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(ii) દોરડું 5 મી ને બદલે 10 મી લાંબું રાખ્યું હોત, તો ચરવાના ક્ષેત્રફળમાં થતો વધારો શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

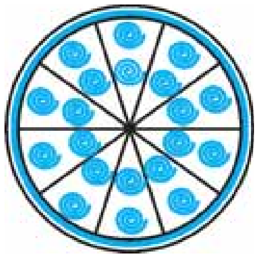


આકૃતિ 12.11

9. ચાંદીના તારથી 35 મિમી વ્યાસવાળું વર્તુળ આકારનું એક બક્કલ જેવું ઘરેણું બનાવ્યું છે. આકૃતિ 12.12 માં બતાવ્યા પ્રમાણે વર્તુળને 10 સમાન વૃત્તાંશમાં વિભાજિત કરે તેવા 5 વ્યાસ બનાવવામાં પણ તારનો ઉપયોગ કર્યો છે.

(i) જરૂરી ચાંદીના તારની કુલ લંબાઈ શોધો.

(ii) ઘરેણાના દરેક વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 12.12

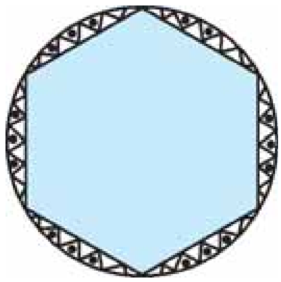
10. એક છત્રીમાં સમાન અંતરે 8 સળિયા આવેલાં છે. (જુઓ આકૃતિ 12.13.) છત્રીને 45 સેમી ત્રિજ્યાવાળું સમતલીય વર્તુળ ધારી, છત્રીના બે ક્રમિક સળિયા વચ્ચેના ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

આકૃતિ 12.13

11. એક ગાડીને એકબીજા પર આચ્છાદિત ન થાય તેવાં બે વાઈપર છે. દરેક વાઈપરને 115° ના ખૂણા જેટલી સફાઈ કરતી 25 સેમી લંબાઈની બ્લેડ છે. પ્રત્યેક વખતે વાઈપરથી સાફ થતા વિસ્તારનું કુલ ક્ષેત્રફળ શોધો.

12. પાણીની નીચેના ખડકો વિશે જહાજને ચેતવણી આપવા માટે, એક દીવાદાંડી 16.5 કિમી અંતર સુધી 80° વૃત્તાંશના ખૂણે લાલ રંગનો પ્રકાશ પાથરે છે. સમુદ્રના જેટલા ક્ષેત્રફળ પર જહાજને ચેતવણી અપાતી હોય તે શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

13. આકૃતિ 12.14 માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક વર્તુળાકાર મેજ પર છ ભાતવાળું એક આવરણ પાથરેલું છે. જો આવરણની ત્રિજ્યા 28 સેમી હોય, તો ₹ 0.35 પ્રતિ સેમી^{2} ના દરે ડિઝાઈન બનાવવાનો ખર્ચ શોધો. ($\sqrt{3} = 1.7$ લો.)



આકૃતિ 12.14

14. નીચેનામાં સાચા જવાબ આગળ નિશાની કરો :

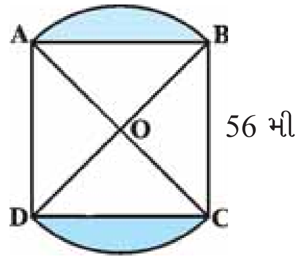
R ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનો વૃત્તાંશ ખૂણો $p°$ હોય, તો વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ .... થાય.

(A) $\frac{p}{180} \times 2\pi R$ (B) $\frac{p}{180} \times \pi R^2$ (C) $\frac{p}{360} \times 2\pi R$ (D) $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$

12.4 સંયોજિત સમતલ આકૃતિઓનું ક્ષેત્રફળ

અત્યાર સુધી આપણે ભિન્ન-ભિન્ન આકૃતિઓનાં ક્ષેત્રફળની પૃથક રીતે ગણતરી કરી. ચાલો, હવે આપણે કેટલીક સંયોજિત સમતલીય આકૃતિના ક્ષેત્રફળની ગણતરીનો પ્રયત્ન કરીએ. આપણા રોજિંદા જીવનમાં આપણે આ પ્રકારની આકૃતિઓ અને વિવિધ રસપ્રદ ભાત સ્વરૂપના સંપર્કમાં પણ આવીએ છીએ. ફૂલોની ક્યારી, ગટરનાં ઢાંકણા, બારીની ભાત, ટેબલ પરના આવરણની ભાત એ કેટલાંક આવાં ઉદાહરણ છે. આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ દ્વારા આ આકૃતિઓના ક્ષેત્રફળની ગણતરીની પ્રક્રિયા સમજીએ.

ઉદાહરણ 4 : 56 મી બાજુવાળી ચોરસ લોન ABCD ની બે સામસામેની બાજુઓ પર ફૂલની બે વર્તુળાકાર ક્યારી આકૃતિ 12.15 માં બતાવી છે તે રીતે બનાવી છે. જો ચોરસ લોનના વિકર્ણનું છેદબિંદુ O એ ફૂલની વર્તુળાકાર ક્યારીનું કેન્દ્ર હોય, તો લોન અને ફૂલની ક્યારીના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો શોધો.



આકૃતિ 12.15

ઉકેલ : ચોરસ લોન ABCD નું ક્ષેત્રફળ $= 56 \times 56$ મી^{2} (1)

ધારો કે $OA = OB = x$ મીટર

આથી, $x^2 + x^2 = 56^2$

અથવા $2x^2 = 56 \times 56$

અથવા $x^2 = 28 \times 56$

હવે, વૃત્તાંશ OAB નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{90}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{1}{4} \times \pi r^2$ (2)

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56$ મી^{2} [(2) પરથી] (3)

વળી, Δ AOB નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{4} \times 56 \times 56$ મી^{2} ($\angle AOB = 90°$) (4)

તેથી, ફૂલોની ક્યારી AB નું ક્ષેત્રફળ $= \left(\frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 - \frac{1}{4} \times 56 \times 56\right)$ મી^{2}

[(3) અને (4) પરથી]

$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left(\frac{22}{7} - 2\right)$ મી^{2}

$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7}$ મી^{2} (5)

આ જ પ્રમાણે, બીજી ફૂલની ક્યારીનું ક્ષેત્રફળ

$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7}$ મી^{2} (6)

માટે, કુલ ક્ષેત્રફળ $= \left(56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7}\right)$ મી^{2}

[(1), (5) અને (6) પરથી]

$= 28 \times 56 \left(2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{7}\right)$ મી^{2}

$= 28 \times 56 \times \frac{18}{7}$ મી^{2} $= 4032$ મી^{2}

વૈકલ્પિક રીતે ઉકેલ :

કુલ ક્ષેત્રફળ = વૃત્તાંશ OAB નું ક્ષેત્રફળ + વૃત્તાંશ ODCનું ક્ષેત્રફળ + ΔOADનું ક્ષેત્રફળ + ΔOBCનું ક્ષેત્રફળ

$$= \left(\frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 + \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56\right.$$

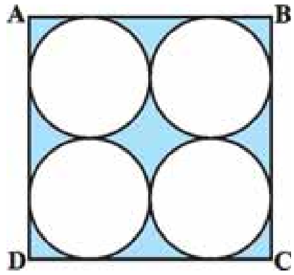
$$\left. + \frac{1}{4} \times 56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 56 \times 56\right) \text{ મી}^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left(\frac{22}{7} + \frac{22}{7} + 2 + 2\right) \text{ મી}^2$$

$$= \frac{7 \times 56}{7} (22 + 22 + 14 + 14) \text{ મી}^2$$

$$= 56 \times 72 \text{ મી}^2 = 4032 \text{ મી}^2$$

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિ 12.16 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેના 14 સેમી બાજુવાળા ચોરસ ABCD માં આવેલા રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 12.16

ઉકેલ : ચોરસ ABCD નું ક્ષેત્રફળ = 14 × 14 સેમી² = 196 સેમી²

પ્રત્યેક વર્તુળનો વ્યાસ $= \frac{14}{2}$ સેમી = 7 સેમી

આથી, પ્રત્યેક વર્તુળની ત્રિજ્યા $= \frac{7}{2}$ સેમી

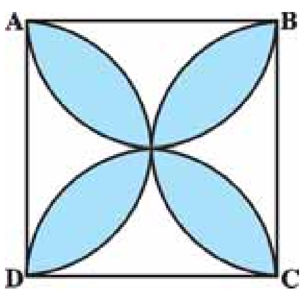
તેથી, એક વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$ સેમી²

$= \frac{154}{4}$ સેમી² $= \frac{77}{2}$ સેમી²

માટે, ચાર વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= 4 \times \frac{77}{2}$ સેમી² = 154 સેમી²

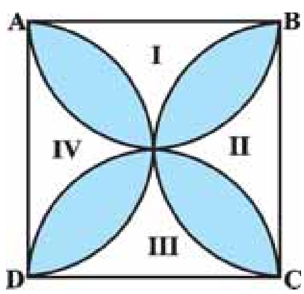
આથી, રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = (196 – 154) સેમી² = 42 સેમી²

ઉદાહરણ 6 : 10 સેમી બાજુવાળા ચોરસ ABCD ની પ્રત્યેક બાજુ વ્યાસ હોય તેવાં અર્ધવર્તુળ આકૃતિ 12.17 માં દોરેલાં છે. આકૃતિમાં દર્શાવેલા રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π = 3.14 લો.)



10 સેમી

આકૃતિ 12.17



આકૃતિ 12.18

ઉકેલ : ચાલો, આપણે રંગીન પ્રદેશ ન હોય તેવા ચાર પ્રદેશને I, II, III અને IV થી અંકિત કરીએ. (જુઓ આકૃતિ 12.18.)

I નું ક્ષેત્રફળ + III નું ક્ષેત્રફળ

= ABCD નું ક્ષેત્રફળ – પ્રત્યેક 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા બે અર્ધવર્તુળનું ક્ષેત્રફળ

= $(10 \times 10 - 2 \times \frac{1}{2} \times \pi \times 5^2)$ સેમી^{2}

= $(100 - 3.14 \times 25)$ સેમી^{2}

= $(100 - 78.5)$ સેમી^{2} = 21.5 સેમી^{2}

આ જ પ્રમાણે, II નું ક્ષેત્રફળ + IV નું ક્ષેત્રફળ = 21.5 સેમી^{2}

આથી, રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = ABCD નું ક્ષેત્રફળ – (I + II + III + IV) નું ક્ષેત્રફળ

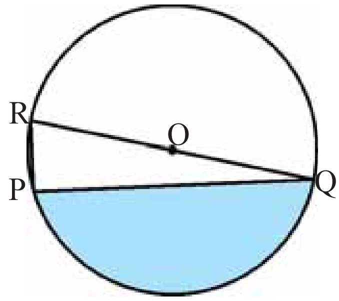
= $(100 - 2 \times 21.5)$ સેમી^{2}

= $(100 - 43)$ સેમી^{2} = 57 સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 12.3

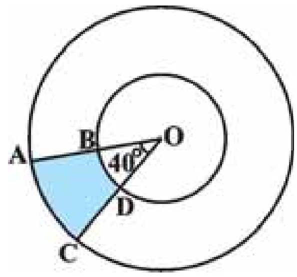
ઉલ્લેખ કર્યો ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. જો PQ = 24 સેમી, PR = 7 સેમી અને વર્તુળનું કેન્દ્ર O હોય, તો આકૃતિ 12.19 માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



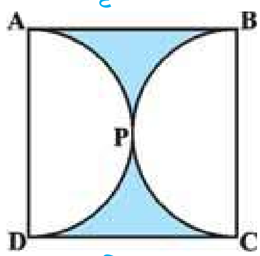
આકૃતિ 12.19

2. જો O કેન્દ્રવાળાં બે સમકેન્દ્રી વર્તુળોની ત્રિજ્યા અનુક્રમે 7 સેમી અને 14 સેમી તથા ∠ AOC = 40° હોય, તો આકૃતિ 12.20 માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



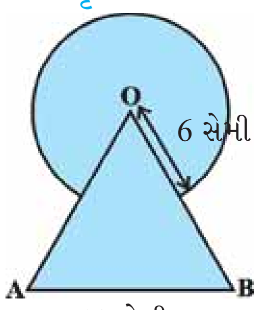
આકૃતિ 12.20

3. 14 સેમી બાજુવાળા ચોરસ ABCD માં જો અર્ધવર્તુળો APD અને BPC આવેલાં હોય, તો આકૃતિ 12.21 માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



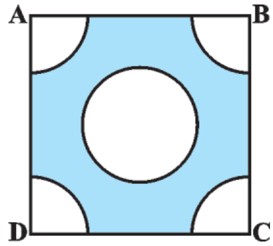
આકૃતિ 12.21

4. 12 સેમી બાજુવાળા સમભુજ ત્રિકોણ OAB ના શિરોબિંદુ O ને કેન્દ્ર તરીકે અને ત્રિજ્યા 6 સેમી લઈ, વર્તુળાકાર ચાપ દોર્યું છે. આકૃતિ 12.22 માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 12.22

5. આકૃતિ 12.23 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે 4 સેમી બાજુવાળા ચોરસના પ્રત્યેક ખૂણે 1 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનો ચતુર્થાંશ ભાગ કપાયેલો છે તથા 2 સેમી વ્યાસવાળું એક વર્તુળ પણ કાપેલું છે. ચોરસના બાકીના ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

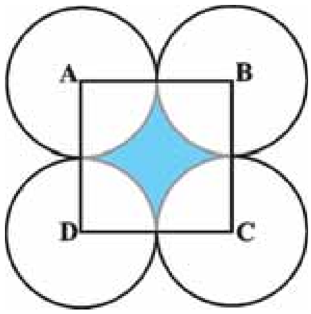


આકૃતિ 12.23

6. આકૃતિ 12.24 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ટેબલના એક 32 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર આવરણના વચ્ચેના ભાગમાં એક સમભુજ ત્રિકોણ ABC છોડી બાકીના ભાગમાં ભાત બનાવી છે. આ ભાતનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

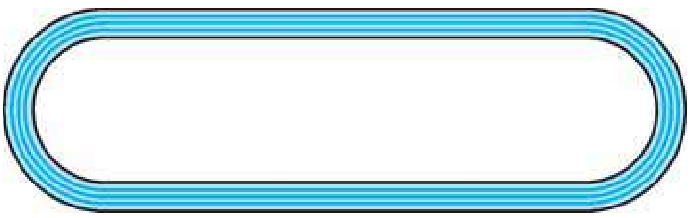
આકૃતિ 12.24

7. આકૃતિ 12.25 માં 14 સેમી બાજુવાળો ચોરસ ABCD છે. પ્રત્યેક વર્તુળ બાકીનાં ત્રણ વર્તુળોમાંથી બે વર્તુળને બહારથી સ્પર્શે તેમ A, B, C અને D કેન્દ્રવાળાં ચાર વર્તુળ દોર્યા છે. દર્શાવેલા રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

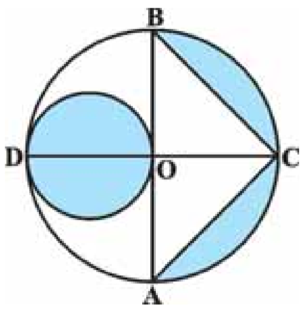


આકૃતિ 12.25

8. આકૃતિ 12.26 માં દોડમાર્ગનું નિરૂપણ કરેલું છે. તેના ડાબા અને જમણા છેડા અર્ધવર્તુળાકાર છે. અંદરના બે સમાંતર રેખાખંડ વચ્ચેનું અંતર 60 મી છે અને તે પ્રત્યેકની લંબાઈ 106 મી છે. જો માર્ગ 10 મી પહોળો હોય, તો (i) માર્ગની અંદરની ધારનું ચારેય તરફનું અંતર શોધો. (ii) માર્ગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.


આકૃતિ 12.26

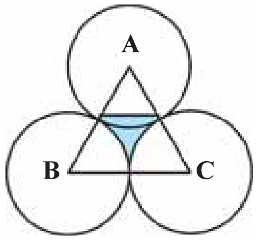
9. આકૃતિ 12.27 માં O કેન્દ્રવાળા વર્તુળના બે વ્યાસ AB અને CD પરસ્પર લંબ છે અને નાના વર્તુળનો વ્યાસ OD છે. જો OA = 7 સેમી હોય, તો દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 12.27

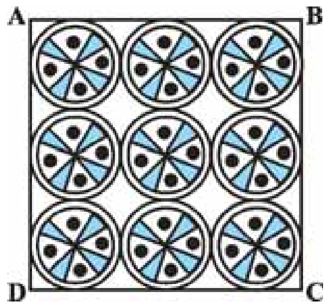
10. એક સમભુજ ત્રિકોણ ABCનું ક્ષેત્રફળ 17320.5 સેમી^{2} છે. ત્રિકોણની બાજુની લંબાઈથી અડધી ત્રિજ્યાવાળાં અને પ્રત્યેક શિરોબિંદુ કેન્દ્ર હોય તેવાં વર્તુળ દોર્યા છે. (જુઓ આકૃતિ 12.28.) દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(π = 3.14 અને $\sqrt{3}$ = 1.73205 લો.)



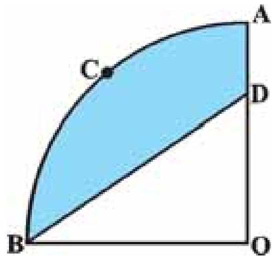
આકૃતિ 12.28

11. એક ચોરસ હાથરૂમાલ પર 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળી નવ વર્તુળાકાર ભાત બનાવી છે. (જુઓ આકૃતિ 12.29.) હાથરૂમાલના બાકીના ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



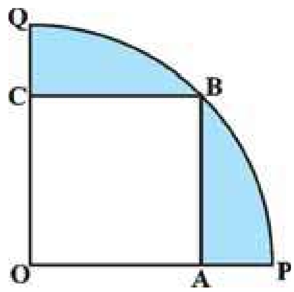
આકૃતિ 12.29

12. આકૃતિ 12.30 માં દર્શાવેલ, ચતુર્થાંશ OACB નું કેન્દ્ર O છે અને ત્રિજ્યા 3.5 સેમી છે. જો OD = 2 સેમી હોય, તો (i) ચતુર્થાંશ OACB નું ક્ષેત્રફળ શોધો. (ii) દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



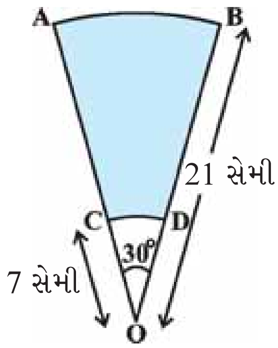
આકૃતિ 12.30

13. આકૃતિ 12.31 માં, એક વર્તુળના ચતુર્થાંશ OPBQ ની અંતર્ગત ચોરસ OABC છે. જો OA = 20 સેમી હોય, તો દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π = 3.14 લો.)



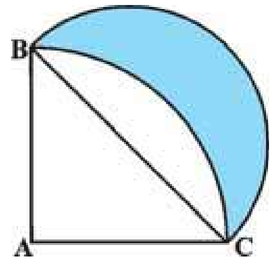
આકૃતિ 12.31

14. O કેન્દ્રવાળા, 21 સેમી અને 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળા બે સમકેન્દ્રી વર્તુળનાં ચાપ અનુક્રમે AB અને CD છે. (જુઓ આકૃતિ 12.32.) જો $\angle AOB = 30°$ હોય, તો દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



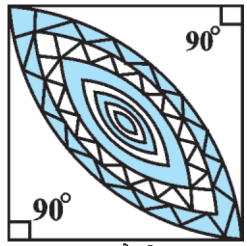
આકૃતિ 12.32

15. આકૃતિ 12.33 માં, ABC એ 14 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનો ચતુર્થાંશ છે. BC ને વ્યાસ તરીકે લઈ વર્તુળ દોરવામાં આવ્યું છે. તો દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 12.33

16. આકૃતિ 12.34 માં, 8 સેમી ત્રિજ્યાવાળા બે વર્તુળના સામાન્ય ચતુર્થાંશની ભાતના પ્રદેશના ક્ષેત્રફળની ગણતરી કરો.



આકૃતિ 12.34

12.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. વર્તુળનો પરિઘ $= 2\pi r$

2. વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$

3. r ત્રિજ્યાવાળા અને θ માપનો ખૂણો બનાવતા વર્તુળના વૃત્તાંશના ચાપની લંબાઈ $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ છે.

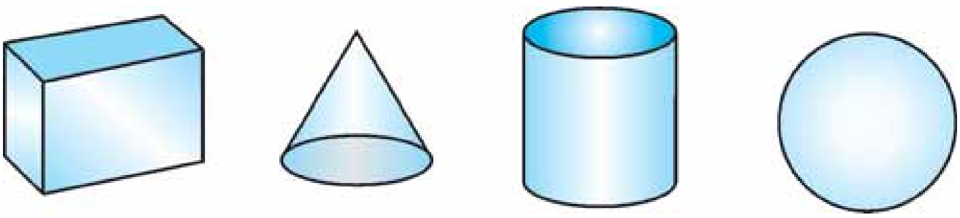
4. r ત્રિજ્યાવાળા અને θ માપનો ખૂણો બનાવતા વર્તુળના વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ છે.

5. વર્તુળના વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ = અનુરૂપ વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ – અનુરૂપ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ 13

13.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉ ધોરણ IX માં તમે કેટલાક નિયમિત આકારના ઘન પદાર્થો જેવા કે લંબઘન, શંકુ, નળાકાર અને ગોલક વિશે પરિચિત થયાં છો. (જુઓ આકૃતિ 13.1.) તમે એ પણ જાણો છો કે, આપણે તેમનાં પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ કેવી રીતે શોધી શકીએ.

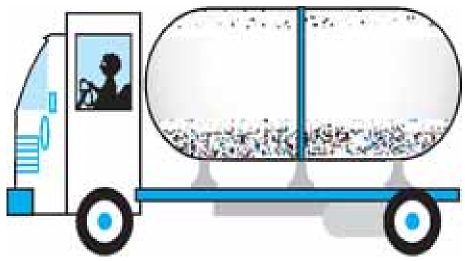


(i) (ii) (iii) (iv)

આકૃતિ 13.1

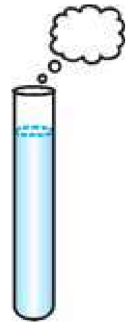
આપણે દૈનિક જીવનમાં ઉપર દર્શાવેલ મૂળભૂત ઘન પદાર્થો પૈકી બે કે તેથી વધુ ઘન પદાર્થોના સંયોજનથી બનેલા પદાર્થો જોઈએ છીએ.

તમે કોઈ ખટારાની પાછળ રાખેલું મોટું પાત્ર (container) અવશ્ય જોયું હશે. (જુઓ આકૃતિ 13.2), તેમાં એક જગ્યાએથી બીજી જગ્યાએ તેલ અથવા પાણી લઈ જવાય છે. શું ઉપરના ચાર મૂળભૂત ઘન આકારમાંથી કોઈ આકાર જોવા મળે છે ? તમે કલ્પી શકો કે, તે નળાકાર અને બે અર્ધગોલકમાંથી બનેલો છે.



આકૃતિ 13.2

પુનઃ તમે આકૃતિ 13.3 માં બતાવ્યું છે તેવું કોઈ પાત્ર જોયું હશે. તમે તેનું નામ આપી શકશો ? તે એક કસનળી છે. સાચું છે ! તમે તેનો તમારી વિજ્ઞાનની પ્રયોગશાળામાં ઉપયોગ કર્યો હશે. આ કસનળી પણ એક નળાકાર અને અર્ધગોળાનું સંયોજન છે. તેવી જ રીતે મુસાફરી કરતી વખતે કેટલાંક મોટાં અને સુંદર બિલ્ડિંગ અથવા સ્મારકો તમને ઉપર જણાવેલા જેવાં ઘન પદાર્થોના સંયોજનથી બનેલાં જોવા મળે છે.



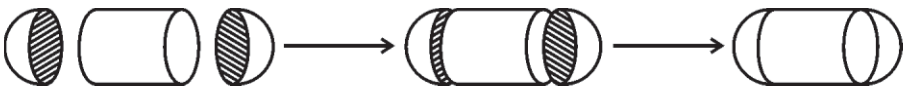
આકૃતિ 13.3

જો તમને આ પદાર્થોનું પૃષ્ઠફળ અથવા ઘનફળ અથવા તેની ક્ષમતા શોધવાની જરૂર પડે, તો તે કેવી રીતે શોધી શકશો ? આપણે આવા ઘનાકાર પદાર્થોનું અગાઉ શીખી ગયાં તેવા ઘનાકારોમાં વર્ગીકરણ કરી શકતા નથી.

આ પ્રકરણમાં તમે કેટલાક પદાર્થોનું પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ કેવી રીતે શોધી શકાય તે શીખશો.

13.2 સંયોજિત ઘન પદાર્થોનું કુલ પૃષ્ઠફળ

આવો આપણે આકૃતિ 13.2માં જોયેલા પાત્ર ઉપર વિચાર કરીએ. આ પ્રકારના ઘન પદાર્થોનું પૃષ્ઠફળ કેવી રીતે શોધીશું ? જ્યારે આપણી સમક્ષ કોઈ નવી સમસ્યા આવે છે, ત્યારે આપણે સૌપ્રથમ તેને અગાઉ ઉકેલેલી નાની સમસ્યાઓમાં વિભાજિત કરીશું. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, આ ઘન પદાર્થ નળાકારના બંને છેડા અર્ધગોલકથી બંધ કરીને બનાવવામાં આવ્યો છે. ટુકડાઓ એક સાથે ભેગા કરવાથી આ ઘન પદાર્થ કેવી રીતે બને છે તે આકૃતિ 13.4માં દર્શાવ્યું છે.



આકૃતિ 13.4

જો આપણે નવી બનેલી વસ્તુની સપાટી જોઈશું, તો આપણને માત્ર બે અર્ધગોલકના વક્રપૃષ્ઠ તથા નળાકારનું વક્રપૃષ્ઠ દેખાશે.

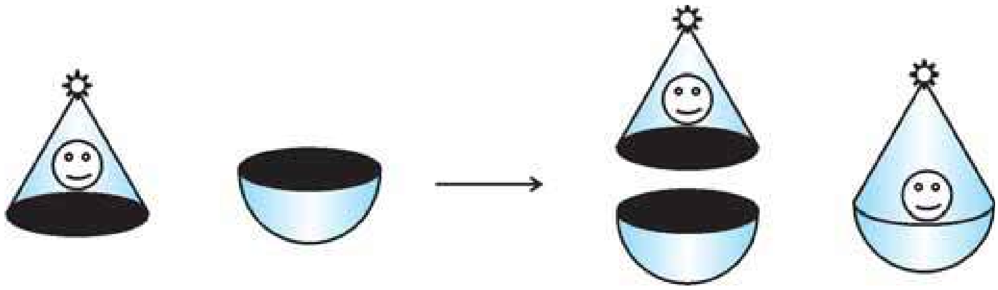
તેથી, નવા પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠફળ એ ત્રણ સ્વતંત્ર વક્ર ક્ષેત્રફળોના સરવાળા બરાબર થશે. તેનાથી આપણને નીચેનું સૂત્ર પ્રાપ્ત થશે :

નવા પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠફળ (TSA) = એક અર્ધગોલકની વક્ર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (CSA) + નળાકારની વક્ર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (CSA) + બીજા અર્ધગોલકની વક્ર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (CSA)

અહીં ***TSA (Total surface area), CSA (Curved surface area)*** નો અર્થ અનુક્રમે 'કુલ પૃષ્ઠફળ' અને 'વક્ર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ' છે.

ચાલો, આપણે હવે બીજી પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ. ધારો કે, આપણે અર્ધગોલક અને શંકુ સાથે મૂકીને એક રમકડું બનાવીએ, તો તે કેવી રીતે થાય તેનાં સોપાન જોઈએ.

પહેલા આપણે શંકુ અને અર્ધગોલક લઈ તેમની સમતલીય સપાટી એક સાથે રાખીએ. અલબત્ત, આપણે રમકડાની સપાટી સરખી રહે તે માટે શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા અને અર્ધગોલકની ત્રિજ્યા સમાન લઈએ છીએ. તે બનાવવાનાં પગલાં આકૃતિ 13.5માં બતાવ્યા છે.



આકૃતિ 13.5

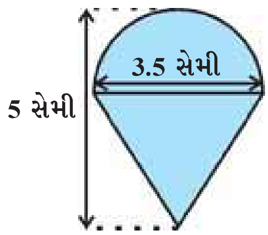
અંતમાં આપણને એક સુંદર અર્ધગોળાકાર આધારવાળું રમકડું મળશે. હવે, જો આપણે આ રમકડાની વક્ર સપાટીને રંગવા માંગતા હોઈએ, તો કેટલા જથ્થામાં રંગની જરૂર પડે તે માટે આપણી પાસે શું માહિતી હોવી જોઈએ ? આપણને રમકડાના કુલ પૃષ્ઠફળની આવશ્યકતા પડશે. તે અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ બંનેનો સરવાળો કરવાથી મળશે.

તેથી, આપણે કહીશું :

રમકડાનું કુલ પૃષ્ઠફળ = અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

હવે, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈશું.

ઉદાહરણ 1 : રશીદને તેના જન્મદિવસે ભેટ સ્વરૂપે એક ભમરડો મળ્યો તે રંગેલો ન હતો. તે પોતાના ક્રેયોન રંગોથી ભમરડાને રંગ કરવા માગતો હતો. આ ભમરડો એક શંકુ ઉપર અર્ધગોળા જેવા ભાગથી બનેલો છે. (જુઓ આકૃતિ 13.6) ભમરડાની કુલ ઊંચાઈ 5 સેમી છે અને અર્ધગોળાનો વ્યાસ 3.5 સેમી છે તો ભમરડાને રંગ કરવાના સંપૂર્ણ ભાગનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 13.6

ઉકેલ : આપણે જેની ચર્ચા કરી છે તે ભમરડો આકૃતિ 13.6 માં દર્શાવ્યો છે. આપણે સરળતા ખાતર ગણતરી નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ.

ભમરડાનું કુલ પૃષ્ઠફળ = અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

હવે, અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\ (4\pi r^2) = 2\pi r^2$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{ સેમી}^2$$

વળી, શંકુની ઊંચાઈ = ભમરડાની ઊંચાઈ – અર્ધગોલકની ઊંચાઈ (ત્રિજ્યા)

$$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) \text{ સેમી} = 3.25 \text{ સેમી}$$

તેથી, શંકુની તિર્યક ઊંચાઈ $(l) = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2}$ સેમી = 3.7 સેમી (આશરે)

$\therefore$ શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = πrl

$$= \left(\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times3.7\right) \text{ સેમી}^2$$

$\therefore$ ભમરડાનું પૃષ્ઠફળ = $\left(2\times\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times\frac{3.5}{2}\right)$ સેમી^{2} + $\left(\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times3.7\right)$ સેમી^{2}

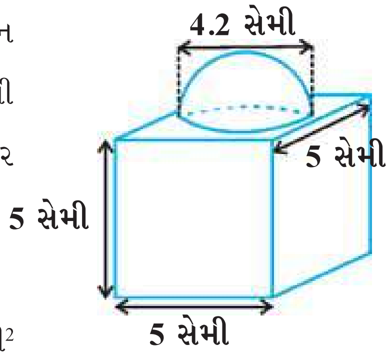
$$= \frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}(3.5 + 3.7) \text{ સેમી}^2$$

$$= \frac{11}{2} \times (3.5 + 3.7) \text{ સેમી}^2$$

$$= 39.6 \text{ સેમી}^2 \text{ (આશરે)}$$

ચકાસો કે, 'ભમરડાનું કુલ પૃષ્ઠફળ' એ શંકુ અને અર્ધગોલકના કુલ પૃષ્ઠફળોના સરવાળા બરાબર નથી.

ઉદાહરણ 2 : બાજુની આકૃતિ 13.7 માં બતાવેલ એક શો-પીસ એ સમઘન અને અર્ધગોલકનો બનેલો છે. આ શો-પીસનો પાયો સમઘન છે, અને તેની પ્રત્યેક ધાર 5 સેમી છે અને 4.2 સેમી વ્યાસવાળો અર્ધગોલક તેની ઉપર બેસાડેલો છે. આ શો-પીસનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 13.7

ઉકેલ : સમઘનનું કુલ પૃષ્ઠફળ = 6 × (બાજુનું માપ)^2 = 6 × 5 × 5 સેમી^{2}

= 150 સેમી^{2}

અહીં, અર્ધગોલકના પાયાના ક્ષેત્રફળનો સમઘનના કુલ પૃષ્ઠફળમાં સમાવેશ થઈ જાય છે.

તેથી, શો-પીસનું પૃષ્ઠફળ = સમઘનનું કુલ પૃષ્ઠફળ – અર્ધગોલકના વર્તુળાકાર આધારનું ક્ષેત્રફળ

+ અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

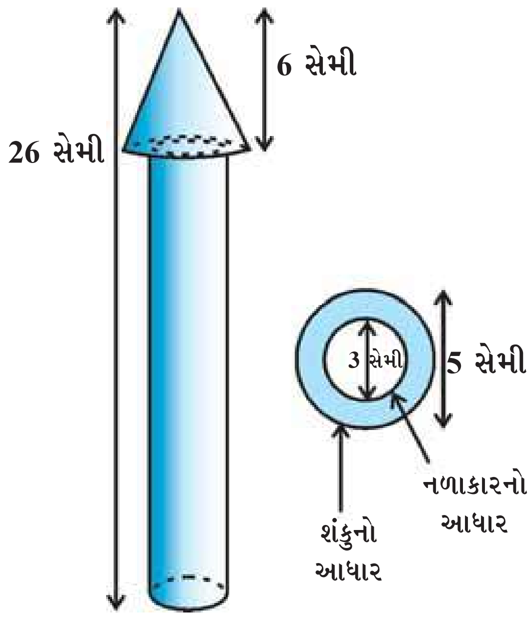
$$= 150 - \pi r^2 + 2\pi r^2 \text{ સેમી}^2$$

$$= (150 + \pi r^2) \text{ સેમી}^2$$

$$= 150 \text{ સેમી}^2 + \left(\frac{22}{7}\times\frac{4.2}{2}\times\frac{4.2}{2}\right) \text{ સેમી}^2$$

$$= (150 + 13.86) \text{ સેમી}^2 = 163.86 \text{ સેમી}^2$$

ઉદાહરણ 3 : બાજુમાં આકૃતિ 13.8 માં બતાવેલ એક લાકડાનું રૉકેટ એક નળાકાર ઉપર શંકુ મૂકી બનાવેલું છે. રૉકેટની કુલ ઊંચાઈ 26 સેમી છે, જ્યારે શંકુની ઊંચાઈ 6 સેમી છે. શંકુના પાયાનો વ્યાસ 5 સેમી અને નળાકાર ભાગનો વ્યાસ 3 સેમી છે. જો શંકુ આકાર ભાગને નારંગી રંગ કરવો હોય અને નળાકાર ભાગને પીળો રંગ કરવો હોય, તો રંગ પ્રમાણે રોકેટના પ્રત્યેક ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π = 3.14 લો.)



આકૃતિ 13.8

ઉકેલ : શંકુની ત્રિજ્યાને r વડે, શંકુની તિર્યક ઊંચાઈને l વડે, શંકુની ઊંચાઈને h વડે, નળાકારની ત્રિજ્યાને r' વડે, નળાકારની ઊંચાઈને h' વડે દર્શાવ્યાં છે. r = 2.5 સેમી, h = 6 સેમી, r' = 1.5 સેમી, h' = 26 – 6 = 20 સેમી તથા

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2} \text{ સેમી} = 6.5 \text{ સેમી}$$

અહીં, શંકુનો પાયાનો ભાગ નળાકારની વર્તુળાકાર સપાટી ઉપર મુકાયેલો છે, પરંતુ શંકુના પાયાનો ભાગ નળાકારના વર્તુળાકાર ભાગ કરતાં વધારે છે. તેથી શંકુના આધારની વધારાની સપાટીને પણ રંગવાની છે.

તેથી નારંગી રંગના ભાગનું ક્ષેત્રફળ = શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + શંકુના આધારનું ક્ષેત્રફળ – નળાકારના આધારનું ક્ષેત્રફળ

$= \pi rl + \pi r^2 - \pi(r')^2$

$= \pi\ [(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2]$ સેમી^{2}

$= \pi\ [20.25]$ સેમી^{2}

$= 3.14 \times 20.25$ સેમી^{2}

$= 63.585$ સેમી^{2}

હવે, પીળા રંગના ભાગનું ક્ષેત્રફળ = નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + નળાકારના પાયાનું ક્ષેત્રફળ

$= 2\pi r'h' + \pi(r')^2$

$= \pi r'\ (2h' + r')$

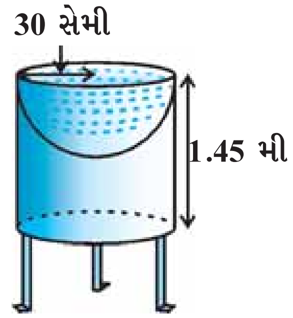
$= (3.14 \times 1.5)\ (2 \times 20 + 1.5)$ સેમી^{2}

$= 4.71 \times 41.5$ સેમી^{2}

$= 195.465$ સેમી^{2}

ઉદાહરણ 4 : મયંકે તેના બગીચામાં પક્ષીઓને પાણી પીવા માટે નળાકારના એક છેડે અર્ધગોળાકાર હોય તેવું પક્ષીકુંડ બનાવ્યું છે. (જુઓ આકૃતિ 13.9.) જો નળાકારની ઊંચાઈ 1.45 મીટર અને તેની ત્રિજ્યા 30 સેમી હોય, તો પક્ષીઓ માટે પાણી પીવાના આ પાત્રનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.

($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 13.9

ઉકેલ : ધારો કે નળાકારની ઊંચાઈ h છે અને નળાકાર અને અર્ધગોળાની ત્રિજ્યા r સમાન છે.

તેથી, પક્ષીઓને પાણી પીવાના પાત્રનું કુલ પૃષ્ઠફળ = નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + અર્ધગોળાની વક્ર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h + r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30\ (145 + 30)$ સેમી^{2}

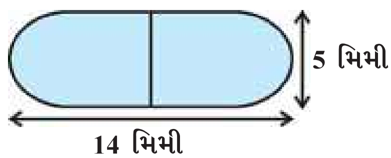
$= 33000$ સેમી^{2}

$= 3.3$ મીટર^2

સ્વાધ્યાય 13.1

(જો π નું મૂલ્ય આપેલ ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

1. બે ઘન પૈકી પ્રત્યેકનું ઘનફળ 64 સેમી^{3} હોય તેવા બે ઘનને જોડવાથી બનતા લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ શોધો.
2. એક અર્ધગોલક ઉપર એક પોલો નળાકાર બેસાડેલો હોય તેવું એક પાત્ર છે. અર્ધગોલકનો વ્યાસ 14 સેમી છે અને વાસણની કુલ ઊંચાઈ 13 સેમી છે વાસણની અંદરની સપાટીનું પૃષ્ઠફળ શોધો.
3. અર્ધગોલકની ઉપર શંકુ લગાવેલો હોય તેવું એક રમકડું છે. તે બંનેની ત્રિજ્યા 3.5 સેમી છે. રમકડાની કુલ ઊંચાઈ 15.5 સેમી હોય, તો રમકડાનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.
4. 7 સેમી બાજુના માપવાળા સમઘનની ઉપર અર્ધગોલક મૂકેલો છે. તો અર્ધગોલકનો મહત્તમ વ્યાસ શું હોઈ શકે ? આ રીતે બનેલા પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.
5. એક સમઘન લાકડાના ટુકડાના એક પૃષ્ઠમાંથી એક અર્ધગોલક કાપવામાં આવે છે. અર્ધગોલકનો વ્યાસ l એ સમઘનની બાજુના માપ બરાબર છે, બાકી પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.
6. દવાની એક કેપ્સૂલનો આકાર નળાકારની બંને બાજુએ અર્ધગોલક લગાડેલો હોય તે રીતનો છે. (જુઓ આકૃતિ 13.10.) કેપ્સૂલની લંબાઈ 14 મિમી છે અને તેનો વ્યાસ 5 મિમી છે. તો કેપ્સૂલનું પૃષ્ઠફળ શોધો.



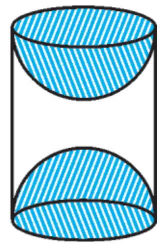
આકૃતિ 13.10

7. એક તંબુનો આકાર નળાકાર ઉપર શંકુ મૂકવામાં આવેલ હોય તેવો છે. જો નળાકાર ભાગની ઊંચાઈ અને વ્યાસ અનુક્રમે 2.1 મીટર અને 4 મીટર હોય તથા ઉપરના ભાગની તિર્યક ઊંચાઈ 2.8 મીટર હોય, તો આ તંબુ

બનાવવા વપરાતા કેનવાસનું ક્ષેત્રફળ શોધો અને જો કેનવાસનો ભાવ ₹ 500 પ્રતિ મીટર^2 હોય, તો તેમાં વપરાતા કેનવાસની કિંમત પણ શોધો. (તંબુના તળિયાને કેનવાસથી ઢાંકવામાં આવતો નથી તે ધ્યાનમાં લેવું.)

8. નળાકાર પદાર્થની ઊંચાઈ 2.4 સેમી અને વ્યાસ 1.4 સેમી છે. તેમાંથી તેટલી જ ઊંચાઈ અને વ્યાસવાળો શંકુ કાપી લેવામાં આવે તો વધેલા પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠફળ નજીકના સેમી^{2} માં શોધો.

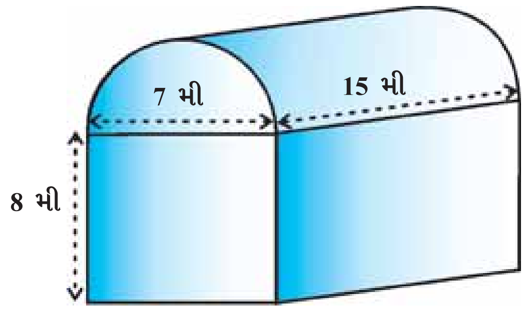
9. બાજુમાં આકૃતિ 13.11 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે લાકડાના નળાકારમાંથી બંને બાજુએથી અર્ધગોલક કાઢી એક લાકડાનો શો-પીસ બનાવ્યો છે. જો નળાકારની ઊંચાઈ 10 સેમી હોય અને પાયાની ત્રિજ્યા 3.5 સેમી હોય તો શો-પીસનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.


આકૃતિ 13.11

13.3 સંયોજિત ઘન પદાર્થોનું ઘનફળ

પ્રકરણની શરૂઆતમાં આપણે બે જાણીતા ઘન પદાર્થોના સંયોજનથી બનતા ઘન પદાર્થોનું પૃષ્ઠફળ કેવી રીતે મેળવવું તે જોઈ ગયા. અહીં આપણે આવા ઘન પદાર્થોનું ઘનફળ શોધતાં શીખીશું. આપણે જોઈશું કે પૃષ્ઠફળની ગણતરીમાં આપણે બે ઘટક પદાર્થોના પૃષ્ઠફળને ઉમેરી શકતા નથી, કારણ કે તેમનો કેટલોક ભાગ બે ઘન પદાર્થોને જોડવાથી દૂર થાય છે. પરંતુ ઘનફળ શોધવામાં આવું નહિ થાય. બે મૂળભૂત ઘન પદાર્થોને જોડવાથી મળતા ઘન પદાર્થનું ઘનફળ એ આપેલા બંને ઘન પદાર્થોના ઘનફળના સરવાળા બરાબર થશે. હવે આપણે નીચેનાં ઉદાહરણોમાં આ સત્ય જોઈશું.

ઉદાહરણ 5 : શાંતા શેડમાં એક ઉદ્યોગ ચલાવે છે. આ શેડનો આકાર લંબઘન ઉપર અર્ધનળાકારથી બંધ છે. (જુઓ આકૃતિ 13.12.) તે શેડના પાયાનું માપ 7 મી × 15 મી અને લંબઘનાકારની ઊંચાઈ 8 મીટર હોય, તો આ શેડમાં સમાતી હવાનું ઘનફળ શોધો. ઉપરાંત શેડમાં મશીનરીના ભાગનું કુલ ઘનફળ 300 મી^{3} અને 20 કારીગરો પૈકી પ્રત્યેક કારીગરે રોકેલી જગ્યાનું ઘનફળ 0.08 મીટર^3 છે. તો શેડમાં કેટલી હવા હશે ? ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 13.12

ઉકેલ : શેડની હવાનું ઘનફળ (જ્યારે શેડમાં કારીગરો અને મશીનરી ન હોય) એ લંબઘન અને અર્ધનળાકારની અંદર રહેલી હવાના ઘનફળના સરવાળા જેટલું છે.

હવે, લંબઘનની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 15 મીટર, 7 મીટર અને 8 મીટર છે.

તથા અર્ધનળાકારનો વ્યાસ 7 મીટર અને તેની ઊંચાઈ 15 મીટર છે.

તેથી માંગેલ ઘનફળ = લંબઘનનું ઘનફળ + $\frac{1}{2}$ નળાકારનું ઘનફળ

$$= \left[15\times7\times8+\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times15\right] \text{મીટર}^3$$

$$= 1128.75 \text{ મીટર}^3$$

હવે, મશીનરીએ રોકેલી જગ્યાનું ઘનફળ = 300 મીટર^3

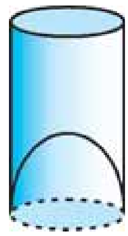
અને કારીગરોએ રોકેલી જગ્યાનું કુલ ઘનફળ = 20 × 0.08 મીટર^3 = 1.6 મીટર^3

તેથી, મશીનરી અને કારીગરોની સાથે શેડમાં રહેલી હવાનું ઘનફળ

= [1128.75 – (300.00 + 1.60)] મીટર^3

= 827.15 મીટર^3

ઉદાહરણ 6 : એક જ્યૂસ વેચવાવાળો તેના ગ્રાહકોને આકૃતિ 13.13 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેના પ્યાલામાં જ્યૂસ આપતો હતો. નળાકાર પ્યાલાનો અંદરનો વ્યાસ 5 સેમી છે, પરંતુ પ્યાલાના પાયામાં અર્ધગોલક ભાગ ઊપસી આવેલો હતો. જેથી, પ્યાલાની ક્ષમતા ઓછી થતી હતી. જો પ્યાલાની ઊંચાઈ 10 સેમી હોય, તો તેની આભાસી ક્ષમતા તથા તેની વાસ્તવિક ક્ષમતા શોધો. (π = 3.14 લો.)



આકૃતિ 13.13

ઉકેલ : પ્યાલાની અંદરનો વ્યાસ = 5 સેમી અને ઊંચાઈ = 10 સેમી છે,

જેથી પ્યાલાની આભાસી ક્ષમતા = $\pi r^2 h$

= 3.14 × 2.5 × 2.5 × 10 સેમી^{3}

= 196.25 સેમી^{3}

પણ પ્યાલાની વાસ્તવિક ક્ષમતા એ પ્યાલાના ઉપસી આવેલા અર્ધગોલકના કદ જેટલી ઓછી થાય છે.

એટલે કે, $\frac{2}{3}\pi r^3$ જેટલી ઓછી છે તેનું મૂલ્ય = $\frac{2}{3}$ × 3.14 × 2.5 × 2.5 × 2.5 સેમી^{3}

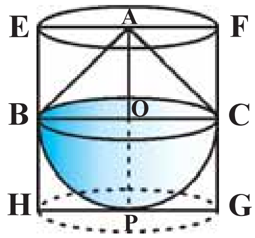
= 32.71 સેમી^{3}

તેથી, પ્યાલાની વાસ્તવિક ક્ષમતા = પ્યાલાની આભાસી ક્ષમતા – પ્યાલામાં સમાવિષ્ટ અર્ધગોલકનું ઘનફળ

= (196.25 – 32.71) સેમી^{3}

= 163.54 સેમી^{3}

ઉદાહરણ 7 : એક નક્કર રમકડું એ અર્ધગોલકની ઉપર શંકુ લગાવ્યો હોય તેવા સ્વરૂપે છે. શંકુની ઊંચાઈ 2 સેમી અને પાયાનો વ્યાસ 4 સેમી છે, તો રમકડાનું ઘનફળ શોધો. જો એક લંબવૃત્તીય નળાકાર રમકડાને પરિગત હોય, તો નળાકારના અને રમકડાના ઘનફળનો તફાવત શોધો. (π = 3.14 લો.)



આકૃતિ 13.14

ઉકેલ : ધારો કે, BPC અર્ધગોલક અને ABC એ અર્ધગોલકના પાયા ઉપર રાખેલો શંકુ છે. (જુઓ આકૃતિ 13.14) અર્ધગોલકની ત્રિજ્યા OB (= શંકુની ત્રિજ્યા) છે.

તે $\frac{1}{2}$ × 4 સેમી = 2 સેમી છે.

તેથી, રમકડાનું ઘનફળ = $\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \left[\frac{2}{3}\times3.14\times(2)^3+\frac{1}{3}\times3.14\times(2)^2\times2\right] \text{ સેમી}^3 = 25.12 \text{ સેમી}^3$$

હવે, ધારો કે, લંબવૃત્તીય નળાકાર EFGH એ રમકડાને પરિગત છે.

તે લંબવૃત્તીય નળાકારના પાયાની ત્રિજ્યા = HP = BO = 2 સેમી અને

તેની ઊંચાઈ EH = AO + OP = (2 + 2) સેમી = 4 સેમી

તેથી, માંગેલું ઘનફળ = લંબવૃત્તીય નળાકારનું ઘનફળ – રમકડાનું ઘનફળ

$= [3.14 \times 2^2 \times 4 - 25.12]$ સેમી^{3}

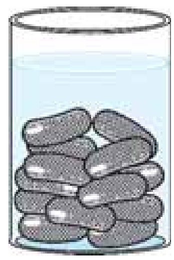
$= 25.12$ સેમી^{3}

તેથી, માંગેલા બે ઘનફળોનો તફાવત = 25.12 સેમી^{3}

સ્વાધ્યાય 13.2

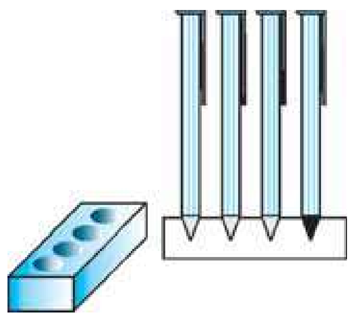
(જો π નું મૂલ્ય આપેલ ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

1. એક ઘન પદાર્થ એ 1 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતા અર્ધગોલક ઉપર તેટલી જ ત્રિજ્યાવાળો શંકુ ગોઠવીને બનાવાયો છે. શંકુની ઊંચાઈ એ તેની ત્રિજ્યા જેટલી હોય, તો આ ઘન પદાર્થનું ઘનફળ π ના ગુણિતમાં શોધો.
2. એન્જિનિયરિંગના વિદ્યાર્થી રશેલને નળાકારના બંને છેડે પાતળી ઍલ્યુમિનિયમની શીટમાંથી બનેલો શંકુ બેસાડી એક નમૂનો તૈયાર કરવાનું કહેવામાં આવ્યું. નમૂનાનો વ્યાસ 3 સેમી અને લંબાઈ 12 સેમી છે. જો શંકુની ઊંચાઈ 2 સેમી હોય, તો રશેલે બનાવેલ નમૂનામાં કેટલી હવા સમાશે તે શોધો. (ધારી લો કે નમૂનાના બહારનાં અને અંદરનાં માપો લગભગ સમાન છે.)
3. ગુલાબજાંબુમાં તેના કદના 30 % જેટલી ખાંડની ચાસણી છે. દરેક ગુલાબજાંબુનો આકાર નળાકારના બંને છેડે અર્ધગોલક લગાવ્યા હોય તેવો છે. તેની કુલ લંબાઈ 5 સેમી અને વ્યાસ 2.8 સેમી છે. તો આવાં 45 ગુલાબજાંબુમાં આશરે કેટલી ખાંડની ચાસણી હશે તે શોધો. (જુઓ આકૃતિ 13.15.)



આકૃતિ 13.15

4. એક લાકડાનું લંબઘન પેન-સ્ટૅન્ડ ચાર શંકુ આકારના છિદ્રવાળું બનાવેલું છે. લંબઘનનાં માપ 15 સેમી × 10 સેમી × 3.5 સેમી છે. છિદ્રવાળા દરેક ભાગની ત્રિજ્યા 0.5 સેમી અને ઊંડાઈ 1.4 સેમી છે, તો લાકડાના આ સ્ટૅન્ડનું ઘનફળ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 13.16.)
5. એક વાસણનું સ્વરૂપ ઊંધા શંકુ જેવું છે. તેની ઊંચાઈ 8 સેમી અને ઉપરના ખુલ્લા ભાગની ત્રિજ્યા 5 સેમી છે. તે ઉપરની ધાર સુધી પાણીથી ભરેલું છે. જ્યારે વાસણમાં 0.5 સેમી ત્રિજ્યાવાળી ધાતુની ગોળીઓ નાખવામાં આવે છે, ત્યારે એક ચતુર્થાંશ જેટલું પાણી બહાર નીકળે છે તો વાસણમાં નાખેલી ધાતુની ગોળીઓની સંખ્યા શોધો.



આકૃતિ 13.16

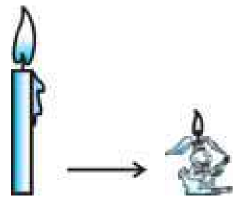
6. એક લોખંડના નળાકાર સ્વરૂપના નક્કર થાંભલાની ઊંચાઈ 220 સેમી છે અને પાયાનો વ્યાસ 24 સેમી છે. તેની ઉપર 60 સેમી ઊંચાઈ અને 8 સેમી ત્રિજ્યાવાળા બીજા નળાકારને મૂકવામાં આવે છે, તો થાંભલાનું દળ શોધો. 1 સેમી^{3} લોખંડનું દળ આશરે 8 ગ્રામ છે. ($\pi = 3.14$ લો.)

7. 60 સેમી ત્રિજ્યાવાળા અર્ધગોલક પર સ્થિત લંબવૃત્તીય શંકુની ઊંચાઈ 120 સેમી અને ત્રિજ્યા 60 સેમી છે. તેને પાણીથી સંપૂર્ણ ભરેલા એક લંબવૃત્તીય નળાકારમાં તેના તળિયાને સ્પર્શે તે રીતે ઊભો મૂક્યો છે. જો નળાકારની ત્રિજ્યા 60 સેમી અને ઊંચાઈ 180 સેમી હોય, તો નળાકારમાં બાકી રહેલા પાણીનું ઘનફળ શોધો.

8. એક ગોળાકાર કાચના વાસણની ઉપરનો ભાગ નળાકાર છે. તે નળાકારની ઊંચાઈ 8 સેમી છે અને વ્યાસ 2 સેમી છે. ગોળાકાર ભાગનો વ્યાસ 8.5 સેમી છે. એક બાળક માહિતી પ્રાપ્ત કરે છે કે તેમાં ભરેલા પાણીનું ઘનફળ 345 સેમી^{3} છે. બાળકનો જવાબ સાચો છે કે નહિ તે ચકાસો. ઉપરનાં માપો તેના અંદરના ભાગના છે. $\pi = 3.14$ લો.

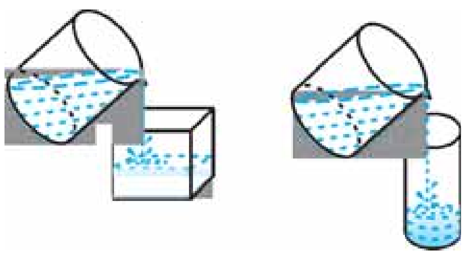
13.4 એક ઘનાકારનું બીજા ઘનાકારમાં રૂપાંતર

નિશ્ચિત રીતે તમે મીણબત્તી જોઈ હશે. સામાન્ય રીતે તે નળાકાર સ્વરૂપે હોય છે. તમે કેટલીક મીણબત્તી પ્રાણીઓના આકારની પણ જોઈ હશે. (જુઓ આકૃતિ 13.17.)



આકૃતિ 13.17

એ કેવી રીતે બનાવી હશે ? જો તમે મીણબત્તી બીજા વિશિષ્ટ આકારમાં બનાવવા માંગતા હો તો તમારે ધાતુના વાસણમાં તે સંપૂર્ણપણે પીગળી ન જાય ત્યાં સુધી મીણ ગરમ કરવું પડશે. પછી મીણને તમે જે આકારમાં ઢાળવા માગતા હો તે આકારના વાસણમાં રેડવું પડશે. આથી તમને જોઈતા આકારની મીણબત્તી મળશે. ઉદાહરણ તરીકે, એક નળાકાર આકારની મીણબત્તી લો, તેને પૂર્ણ રીતે પીગાળો તથા પીગાળેલું સંપૂર્ણ મીણ સસલા આકારના પાત્રમાં નાખો. ઠંડું કરવાથી સસલા આકારની મીણબત્તી તૈયાર થઈ જશે. નવી મીણબત્તીનું ઘનફળ પહેલાની મીણબત્તીના ઘનફળ જેટલું જ થશે. કોઈ પદાર્થને એક આકારમાંથી બીજા આકારમાં પરિવર્તિત કરતાં હોઈએ અથવા જ્યારે કોઈ એક આકારના પાત્રમાંથી પ્રવાહીને બીજા આકારના પાત્રમાં ભરતાં હોઈએ છીએ, ત્યારે આ વાત યાદ રાખવી જોઈએ. તે તમે આકૃતિ 13.18 માં આ વસ્તુ જોઈ શકો છો.



આકૃતિ 13.18

ઉપર્યુક્ત ચર્ચા સમજવા માટે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 8 : નમૂના બનાવવાની માટીમાંથી 24 સેમી ઊંચાઈ અને 6 સેમી પાયાની ત્રિજ્યાવાળો એક શંકુ બનાવેલો છે. એક બાળકે તેને ગોળાકાર સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરી નાખ્યો છે, તો ગોળાની ત્રિજ્યા શોધો.

ઉકેલ : શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$ સેમી^{3}

જો ગોળાની ત્રિજ્યા r હોય, તો તેનું ઘનફળ $\frac{4}{3}\pi r^3$ છે.

શંકુની અને ગોળાની માટીનું ઘનફળ સમાન છે.

એટલે કે $\frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$

અર્થાત્, $r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3^3 \times 2^3$

તેથી, $r = 3 \times 2 = 6$

એટલે કે, ગોળાની ત્રિજ્યા 6 સેમી છે.

ઉદાહરણ 9 : સેલ્વીના ઘરની છત ઉપર નળાકાર આકારની એક ટાંકી છે. આમાં ભોંયતળિયાની લંબઘન ટાંકીમાંથી પંપ દ્વારા પાણી ભરવામાં આવે છે. આ ભૂગર્ભની ટાંકી ઘનાકાર છે. ટાંકીનાં માપ 1.57 મીટર × 1.44 મીટર × 95 સેમી છે. છત ઉપરની ટાંકીની ત્રિજ્યા 60 સેમી છે અને ઊંચાઈ 95 સેમી છે. જો ભોંયતળિયાની ટાંકી પાણીથી પૂરેપૂરી ભરેલી હોય, તો તેમાંથી છત ઉપરની ટાંકીને પૂરેપૂરી ભરી લીધા પછી ભોંયતળિયાની ટાંકીમાં પાણીની ઊંચાઈ કેટલી બાકી રહેશે ? છતની ટાંકીની ક્ષમતાની સાથે ભોંયતળિયાની ટાંકીની ક્ષમતાની સરખામણી કરો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ : છતની ટાંકીનું ઘનફળ = ભૂગર્ભની ટાંકીમાંથી નીકળેલા પાણીનું ઘનફળ

હવે, છતની ટાંકી (નળાકાર)નું ઘનફળ = πr^2h

$= 3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95$ મીટર^3

પાણીથી પૂર્ણ ભરેલી ભોંયતળિયાની ટાંકીનું ઘનફળ = $l \times b \times h = 1.57 \times 1.44 \times 0.95$ મીટર^3

છતની ટાંકી પાણીથી પૂરી ભરાયા બાદ ભોંયતળિયાની ટાંકીમાં બાકી રહેલા પાણીનું ઘનફળ

$= [(1.57 \times 1.44 \times 0.95) - (3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95)]$ મીટર^3 $= (1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2)$ મીટર^3

એટલે કે, ભૂગર્ભની ટાંકીમાં બાકી રહેલા પાણીની ઊંચાઈ $= \dfrac{\text{બાકી રહેલા પાણીનું ઘનફળ}}{l \times b}$

$= \dfrac{1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2}{1.57 \times 1.44}$ મીટર

$= 0.475$ મીટર $= 47.5$ સેમી

$$\frac{\text{છતની ટાંકીની ક્ષમતા}}{\text{ભોંયતળિયાની ટાંકીની ક્ષમતા}} = \frac{3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95}{1.57 \times 1.44 \times 0.95} = \frac{1}{2}$$

તેથી, છતની ટાંકીની ક્ષમતા ભોંયતળિયાની ટાંકીની ક્ષમતા કરતાં અડધી છે.

ઉદાહરણ 10 : 1 સેમી વ્યાસ અને 8 સેમી લંબાઈવાળો એક તાંબાનો સળિયો છે. તેમાંથી 18 મીટર લંબાઈનો એકસરખી જાડાઈવાળો તાર બનાવવો છે, તો તારની જાડાઈ શોધો.

ઉકેલ : સળિયાનું ઘનફળ $= \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 8$ સેમી^{3}

$= 2\pi$ સેમી^{3}

સમાન ઘનફળવાળા નવા તારની લંબાઈ = 18 મીટર = 1800 સેમી

જો તારના આડછેદની ત્રિજ્યા r સેમી હોય, તો તારનું ઘનફળ $= \pi \times r^2 \times 1800$ સેમી^{3}

તેથી, $\pi \times r^2 \times 1800 = 2\pi$

$$r^2 = \frac{1}{900}$$

$$r = \frac{1}{30}$$

તેથી, આડછેદનો વ્યાસ એટલે કે તારની જાડાઈ $\frac{1}{15}$ સેમી છે. એટલે કે, 0.67 મિમી (લગભગ)

ઉદાહરણ 11 : પાણીથી પૂર્ણ ભરેલી એક અર્ધગોળાકાર ટાંકી છે. તેને પાઈપ દ્વારા $3\frac{4}{7}$ લિટર/સેકન્ડના દરથી ખાલી કરવામાં આવે છે. જો ટાંકીનો વ્યાસ 3 મીટર હોય, તો તેને અડધી ખાલી કરવા માટે કેટલો સમય જોઈએ ? ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

ઉકેલ : અર્ધગોળાકાર ટાંકીની ત્રિજ્યા $= \frac{3}{2}$ મીટર

ટાંકીનું ઘનફળ $= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$ મીટર^3

$= \frac{99}{14}$ મીટર^3

તેથી, ખાલી કરેલા પાણીનું ઘનફળ $= \frac{1}{2} \times \frac{99}{14}$ મીટર$^3 = \frac{99}{28} \times 1000$ લિટર

$= \frac{99000}{28}$ લિટર

$\frac{25}{7}$ લિટર પાણી ખાલી કરવા લાગતો સમય 1 સેકન્ડ છે.

તો, $\frac{99000}{28}$ લિટર પાણી ખાલી કરવા માટે $\frac{99000}{28} \times \frac{7}{25}$ સેકન્ડની જરૂર પડે અથવા 16.5 મિનિટમાં પાણી ખાલી થાય.

સ્વાધ્યાય 13.3

(જો π નું મૂલ્ય આપેલ ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

1. 4.2 સેમી ત્રિજ્યાવાળા ધાતુના ગોલકને ઓગાળીને 6 સેમી ત્રિજ્યાવાળા નળાકાર સ્વરૂપમાં રૂપાંતરિત કરવામાં આવે છે. નળાકારની ઊંચાઈ શોધો.
2. 6 સેમી, 8 સેમી અને 10 સેમી ત્રિજ્યાવાળા ધાતુના ગોળાઓને ઓગાળીને એક મોટો નક્કર ગોળો બનાવવામાં આવે છે, તો આ રીતે બનતા ગોળાની ત્રિજ્યા શોધો.

3. એક કૂવો 7 મીટર વ્યાસવાળા વર્તુળ પર 20 મીટર સુધી ખોદવામાં આવે છે, અને તે ખોદવાથી નીકળેલી માટીને એક સરખી રીતે પાથરી 22 મીટર × 14 મીટરની એક વ્યાસપીઠ બનાવવામાં આવે છે, તો વ્યાસપીઠની ઊંચાઈ શોધો.

4. 3 મીટર વ્યાસવાળા એક વર્તુળ પર એક કૂવો 14 મીટર સુધી ખોદવામાં આવે છે. તેમાંથી નીકળેલી માટીને કૂવાની આસપાસ 4 મીટર પહોળા વર્તુળાકાર વલયમાં સમાન રીતે પાથરીને ઓટલો બનાવ્યો છે. તો ઓટલાની ઊંચાઈ શોધો.

5. 12 સેમી વ્યાસ અને 15 સેમી ઊંચાઈવાળા એક પાત્રનો આકાર લંબવૃત્તીય નળાકાર છે. તે આઇસક્રીમથી સંપૂર્ણ ભરેલો છે. તેમાંથી 12 સેમી ઊંચાઈ અને 6 સેમી વ્યાસવાળા શંકુ આકારના કોન પર અર્ધગોળાકાર સ્વરૂપમાં આઇસક્રીમ ભરવામાં આવે છે. તો આ આઇસક્રીમ દ્વારા કેટલા કોન ભરી શકાય તે શોધો.

6. 5.5 સેમી × 10 સેમી × 3.5 સેમી ના માપનો લંબઘન બનાવવા 1.75 સેમી વ્યાસ અને 2 મિમી જાડાઈવાળા ચાંદીના કેટલા સિક્કા ઓગાળવા પડે ?

7. 32 સેમી ઊંચાઈ અને પાયાની ત્રિજ્યા 18 સેમી હોય તેવી એક નળાકાર ડોલ રેતીથી ભરેલી છે, આ ડોલને જમીન પર ખાલી કરી શંકુ આકારનો ઢગલો બનાવ્યો છે. જો શંકુ આકારના ઢગલાની ઊંચાઈ 24 સેમી હોય, તો ઢગલાની ત્રિજ્યા અને તિર્યક ઊંચાઈ શોધો.

8. 6 મીટર પહોળી અને 1.5 મીટર ઊંડી એક પાણીની નહેરમાં પાણી 10 કિમી/કલાકની ઝડપે વહે છે. 30 મિનિટમાં આ નહેરમાંથી કેટલા ક્ષેત્રફળની સિંચાઈ કરી શકાશે. સિંચાઈ માટે 8 સેમી પાણીની ઊંચાઈ આવશ્યક છે.

9. એક ખેડૂત પોતાના ખેતરમાં 10 મીટર વ્યાસવાળી અને 2 મીટર ઊંડી એક નળાકાર ટાંકીને અંદરથી 20 સેમી વ્યાસવાળી એક પાઈપ દ્વારા એક નહેર સાથે જોડે છે. જો પાઈપમાં પાણીનો પ્રવાહ 3 કિમી/કલાકની ઝડપે વહેતો હોય છે, તો કેટલા સમયમાં ટાંકી પાણીથી પૂર્ણ રીતે ભરાઈ જશે ?

13.5 શંકુનો આડછેદ

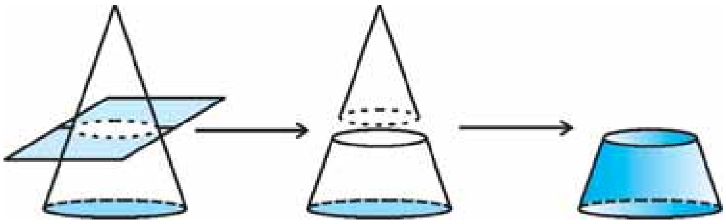
વિભાગ 13.2 માં આપણે બે જાણીતા ઘન પદાર્થોને એક સાથે જોડતાં મળતા ઘન પદાર્થો જોયા છે. અહીં આપણે કાંઈક વિશેષ કરીશું. આપણે એક ઊભો શંકુ લઈશું અને તેનો થોડોક ભાગ કાઢી નાખીશું. આ કાર્ય આપણે ઘણી બધી રીતે કરી શકીએ છીએ. પરંતુ અહીં આપણે તેમાંનો એક વિશિષ્ટ પ્રકાર લઈશું તેમાં પાયાને સમાંતર સમતલ વડે નાનો શંકુ કાપી નાખવાનો છે. તમે સામાન્ય રીતે પાણી પીવાના પ્યાલા વગેરે જોયા છે. તે આવા આકારના હોય છે. (જુઓ આકૃતિ 13.19.)

આકૃતિ 13.19

પ્રવૃત્તિ 1 : થોડી ભીની મસળેલી માટી લો અથવા બીજો કોઈ પદાર્થ (પ્લાસ્ટિક જેવો વગેરે) લો અને શંકુ આકાર બનાવો. તેને પાયાને સમાંતર એક છરી વડે કાપો. ઉપરનો નાનો શંકુ દૂર કરો. કયો ભાગ બાકી વધ્યો ? બાકી વધેલા ભાગને શંકુનો આડછેદ કહે છે. તમારી પાસે *શંકુનો આડછેદ* કહેવાતો ઘન પદાર્થ વધશે. તમે જોઈ શકશો કે, તેને ભિન્ન ત્રિજ્યાવાળા બે વર્તુળાકાર છેડા છે.

જો શંકુ આપેલો હોય અને તેને પાયાને સમાંતર સમતલ વડે કાપીએ તથા સમતલની એક બાજુ બનતા શંકુને દૂર કરીએ તો સમતલની બીજી બાજુએ શંકુનો આડછેદ* (Frustum) કહેવાતો ભાગ બચે છે. (જુઓ આકૃતિ 13.20.)

* 'Frustum' એક લેટિન શબ્દ છે, તેના અર્થ 'કાપેલા ટુકડા' અને તેનું બહુવચન 'Frusta' છે.

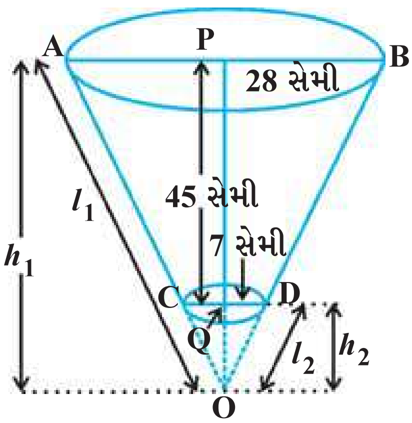


આકૃતિ 13.20

આપણે શંકુના આડછેદની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળ કેવી રીતે શોધી શકીએ તે માટે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 12 : શંકુના આડછેદના બે છેડાની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 28 સેમી અને 7 સેમી છે અને તેની ઊંચાઈ 45 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 13.21.) તેનું ઘનફળ, વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને કુલ ક્ષેત્રફળ શોધો.

($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 13.21

ઉકેલ : શંકુનો આડછેદ એ ઊભા બે શંકુઓ OAB અને OCD નો તફાવત છે. (જુઓ આકૃતિ 13.21.)

ધારો કે શંકુ OAB ની ઊંચાઈ (સેમીમાં) h_1 અને તિર્યક ઊંચાઈ l_1 છે. તેથી OP = h_1 અને OA = OB = l_1. ધારો કે શંકુ OCD ની ઊંચાઈ h_2 અને તિર્યક ઊંચાઈ l_2 છે.

અહીં, આપણે $r_1 = 28$ સેમી, $r_2 = 7$ સેમી અને આડછેદની ઊંચાઈ $h = 45$ સેમી છે.

તેથી $h_1 = 45 + h_2$ (1)

સૌથી પહેલાં શંકુઓ OAB અને OCD ની ઊંચાઈઓ અનુક્રમે h_1 અને h_2 નિશ્ચિત કરવી આવશ્યક છે.

બંને ત્રિકોણો OPB અને OQD સમરૂપ છે. (શા માટે ?)

તેથી, $\frac{h_1}{h_2} = \frac{28}{7} = \frac{4}{1}$ (2)

(1) અને (2) ઉપરથી, આપણને $h_2 = 15$ અને $h_1 = 60$ મળશે.

હવે, શંકુના આડછેદનું ઘનફળ = શંકુ OABનું ઘનફળ – શંકુ OCD નું ઘનફળ

$$= \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot(28)^2\cdot(60) - \frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}(7)^2\cdot(15)\right] \text{ સેમી}^3$$

$$= 48510 \text{ સેમી}^3$$

શંકુઓ OCD અને OAB ની તિર્યક ઊંચાઈઓ અનુક્રમે l_2 અને l_1 છે.

$l_2 = \sqrt{(7)^2 + (15)^2}$ = 16.55 સેમી (લગભગ)

$l_1 = \sqrt{(28)^2 + (60)^2} = 4\sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 4 \times 16.55 = 66.20$ સેમી

શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2$

$= \frac{22}{7}$ (28) (66.20) $- \frac{22}{7}$ (7) (16.55)

= 5461.5 સેમી^{2}

શંકુના આડછેદનું કુલ ક્ષેત્રફળ = વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + $\pi r_1^2 + \pi r_2^2$

= 5461.5 સેમી^{2} + $\frac{22}{7}$ $(28)^2$ સેમી^{2} + $\frac{22}{7}$ $(7)^2$ સેમી^{2}

= 5461.5 સેમી^{2} + 2464 સેમી^{2} + 154 સેમી^{2}

= 8079.5 સેમી^{2}

વ્યાપક રીતે, ધારો કે શંકુના આડછેદની ઊંચાઈ h, તિર્યક ઊંચાઈ l, છેડાની ત્રિજ્યાઓ r_1 અને r_2 છે. ($r_1 > r_2$) તો આપણે શંકુના આડછેદનું ઘનફળ, વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને કુલ ક્ષેત્રફળ નીચે આપેલ સૂત્રો દ્વારા મેળવીશું.

(i) શંકુના આડછેદનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

(ii) શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi\,(r_1 + r_2)\,l$

જ્યાં $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

(iii) શંકુના આડછેદની કુલસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

જ્યાં $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

આ સૂત્રો ત્રિકોણની સમરૂપતાના ખ્યાલ પરથી મેળવી શકાય પરંતુ આપણે તેને અહીં તારવીશું નહિ.

ચાલો, આપણે ઉદાહરણ 12 ને સૂત્રોના ઉપયોગથી ગણીશું.

(i) શંકુના આડછેદનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot 45\,[(28)^2 + (7)^2 + (28)\,(7)]$ સેમી^{3}

= 48510 સેમી^{3}

(ii) આપણી પાસે $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$= \sqrt{(45)^2 + (28 - 7)^2}$ સેમી

$= 3\sqrt{(15)^2 + (7)^2}$ સેમી

$= 49.65$ સેમી

તેથી શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= \pi (r_1 + r_2) l$

$= \frac{22}{7} (28 + 7) (49.65)$

$= 5461.5$ સેમી^{2}

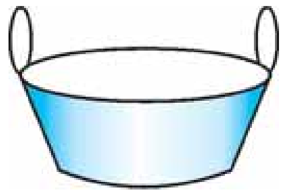
(iii) શંકુના આડછેદની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi (r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$= [5461.5 + \frac{22}{7} (28)^2 + \frac{22}{7} (7)^2]$ સેમી^{2}

$= 8079.5$ સેમી^{2}

ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોમાં આ સૂત્રોનો ઉપયોગ કરીએ.

ઉદાહરણ 13 : હનુમપ્પા અને તેની પત્ની ગંગામ્મા શેરડીના રસમાંથી ગોળ બનાવે છે. તેમણે શેરડીના રસને ગરમ કરી રાબ બનાવેલી છે. તેને શંકુના આડછેદ આકારના નમૂનામાં નાખવામાં આવી છે. તેમાં અનુકૂળ બે વર્તુળાકાર સપાટીના વ્યાસ 30 સેમી અને 35 સેમી અને નમૂનાની શિરોલંબ ઊંચાઈ 14 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 13.22) જો 1 સેમી^{3} રાબનું દળ 1.2 ગ્રામ હોય, તો પ્રત્યેક નમૂનામાં ભરી શકાય તેટલી રાબનું દ્રવ્યમાન શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 13.22

ઉકેલ : આપેલ નમૂનાનો આકાર શંકુના આડછેદ જેવો છે. તેથી તેમાં ભરી શકાય તેટલી

રાબનું ઘનફળ $= \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

જ્યાં r_1 મોટા પાયાની ત્રિજ્યા અને r_2 એ નાના પાયાની ત્રિજ્યા છે.

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 + \left(\frac{35}{2} \times \frac{30}{2}\right)\right]$ સેમી^{3}

$= 11641.7$ સેમી^{3}

અહીં આપેલ છે કે, 1 સેમી^{3} રાબનું દ્રવ્યમાન 1.2 ગ્રામ છે,

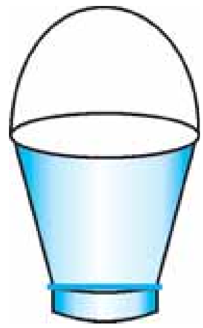
તેથી, પ્રત્યેક નમૂનામાં ભરેલી રાબનું દ્રવ્યમાન $= (11641.7 \times 1.2)$ ગ્રામ

$= 13970.04$ ગ્રામ

$= 13.97$ કિલોગ્રામ

$= 14$ કિલોગ્રામ (લગભગ)

ઉદાહરણ 14 : એક ધાતુની ખુલ્લી ડોલ શંકુના આડછેદના આકારની છે, અને તે એક ધાતુના ખુલ્લા નળાકારના આધાર પર છે. (જુઓ આકૃતિ 13.23) આ ડોલના બંને વર્તુળાકાર છેડાના વ્યાસ 45 સેમી અને 25 સેમી છે અને ડોલની કુલ શિરોલંબ ઊંચાઈ 40 સેમી છે. ખુલ્લી ડોલના પાયાના નળાકારની ઊંચાઈ 6 સેમી છે. આ ડોલ બનાવવા માટે કેટલા ક્ષેત્રફળવાળી ધાતુની શીટ જોઈએ તે શોધો. ડોલના હેન્ડલની ગણતરી કરવામાં આવી નથી તથા તે ડોલમાં સમાઈ શકતા પાણીનું ઘનફળ કેટલું હશે તે પણ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 13.23

ઉકેલ : ડોલની કુલ ઊંચાઈ 40 સેમી છે. તેમાં પાયાની ઊંચાઈનો સમાવેશ થાય છે. તેથી શંકુના આડછેદની ઊંચાઈ (40 –6) સેમી = 34 સેમી છે.

તેથી, શંકુના આડછેદની તિર્યક ઊંચાઈ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

જ્યાં $r_1 = 22.5$ સેમી, $r_2 = 12.5$ સેમી અને $h = 34$ સેમી.

તેથી, $l = \sqrt{(34)^2 + (22.5 - 12.5)^2}$ સેમી

$= \sqrt{(34)^2 + (10)^2}$ સેમી

$= 35.44$ સેમી

અહીં વપરાયેલ ધાતુની શીટનું ક્ષેત્રફળ = શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + આડછેદના વર્તુળાકાર પાયાનું ક્ષેત્રફળ + નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= [\pi \times 35.44 (22.5 + 12.5) + \pi \times (12.5)^2 + 2\pi \times 12.5 \times 6]$ સેમી^{2}

$= \frac{22}{7} [1240.4 + 156.25 + 150]$ સેમી^{2}

$= 4860.9$ સેમી^{2}

હવે, ડોલમાં સમાઈ શકતા પાણીનું ઘનફળ (જેને ડોલની ક્ષમતા પણ કહે છે.)

$= \frac{\pi \times h}{3} \times (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times [(22.5)^2 + (12.5)^2 + 22.5 \times 12.5]$ સેમી^{3}

$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times 943.75$

$= 33615.48$ સેમી^{3}

$= 33.62$ લિટર (લગભગ)

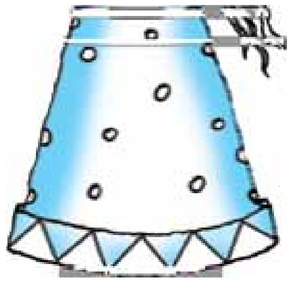
સ્વાધ્યાય 13.4

(જો π નું મૂલ્ય આપેલ ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

1. 14 સેમી ઊંચાઈવાળા પીવાના પાણીનો પ્યાલો શંકુના આડછેદના આકારનો છે. બંને વર્તુળાકાર છેડાના વ્યાસ 4 સેમી અને 2 સેમી હોય, તો આ પ્યાલાની ક્ષમતા શોધો.

2. એક શંકુના આડછેદની તિર્યક ઊંચાઈ 4 સેમી છે તથા તેના વર્તુળાકાર છેડાની પરિમિતિ (પરિઘ) 18 સેમી અને 6 સેમી છે. તો શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

3. એક તુર્કી ટોપીનો આકાર શંકુના આડછેદ જેવો છે. (જુઓ આકૃતિ 13.24.) જો તેની ખુલ્લી બાજુની ત્રિજ્યા 10 સેમી અને ઉપરની બાજુના વર્તુળની ત્રિજ્યા 4 સેમી હોય અને તિર્યક ઊંચાઈ 15 સેમી હોય, તો તેને બનાવવા માટે વપરાતા કાપડનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 13.24

4. એક વાસણ એક ધાતુની શીટમાંથી બનાવવામાં આવ્યું છે. તે ઉપરથી ખુલ્લું છે અને શંકુના આડછેદ જેવા આકારનું છે. તેની ઊંચાઈ 16 સેમી તથા બંને અંત્ય વર્તુળોની નીચેની અને ઉપરની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 8 સેમી અને 20 સેમી છે. દૂધથી સંપૂર્ણ ભરેલા વાસણમાં ₹ 20 પ્રતિ લિટર કિંમતવાળા આ વાસણમાં સમાઈ શકતા દૂધની કિંમત શોધો. આ વાસણ બનાવવા માટે વપરાયેલ ધાતુની શીટની કિંમત ₹ 8 પ્રતિ 100 સેમી^{2} ના દરે શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

5. ધાતુના લંબવૃત્તીય શંકુની ઊંચાઈ 20 સેમી તથા શિરઃકોણ 60° છે. પાયાને સમાંતર સમતલથી તેના ઊંચાઈના બે સમાન ભાગ થાય તે રીતે કાપવામાં આવ્યો છે. જો આડછેદનું $\frac{1}{16}$ સેમી વ્યાસવાળા તાર સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કરવામાં આવે તો તારની લંબાઈ શોધો.

સ્વાધ્યાય 13.5 (વૈકલ્પિક)*

1. 3 મિમી વ્યાસવાળા તાંબાના તારને 12 સેમી ઊંચાઈ અને 10 સેમી વ્યાસવાળા નળાકાર પર એવી રીતે વીંટવામાં આવે છે કે નળાકારની વક્રસપાટી સંપૂર્ણપણે ઢંકાઈ જાય છે. તો તારની લંબાઈ અને દળ શોધો. તાંબાની ઘનતા 8.88 ગ્રામ/સેમી^{3} સ્વીકારવામાં આવી છે.

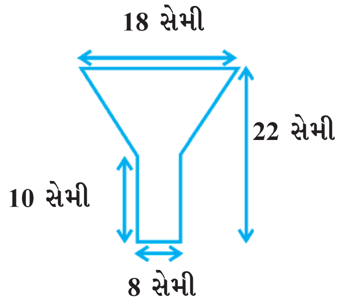
2. એક કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓ 3 સેમી અને 4 સેમી (કર્ણ સિવાયની બાજુઓ) છે. તેને તેના કર્ણ આસપાસ પરિભ્રમણ કરાવવામાં આવે છે. તેનાથી પ્રાપ્ત થતા બે શંકુનું ઘનફળ અને તેમની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π ની કિંમત તમને અનુકૂળ પસંદ કરો.)

3. એક ટાંકીનાં આંતરિક માપ 150 સેમી × 120 સેમી × 110 સેમી છે. તેમાં 129600 સેમી^{3} પાણી છે. ટાંકી પૂરેપૂરી ભરાય ન જાય ત્યાં સુધી તે પાણીમાં છિદ્રવાળી ઇંટો નાખવામાં આવે છે. પ્રત્યેક ઇંટ તેના $\frac{1}{17}$ ઘનફળ જેટલું પાણી શોષી લે છે. પ્રત્યેક ઇંટનું માપ 22.5 સેમી × 7.5 સેમી × 6.5 સેમી છે, તો પાણી બહાર ન આવે તે રીતે તે ટાંકીમાં કેટલી ઇંટો નાખી શકાય ?

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના હેતુથી બનાવેલ નથી.

4. આપેલા મહિનાના કોઈ એક પખવાડિયામાં એક નદીની ઘાટીમાં 10 સેમી વરસાદ પડ્યો છે. જો તે ઘાટીનું ક્ષેત્રફળ 97280 કિમી^{2} હદ્દોય, તો બતાવો કે, કુલ વરસાદ લગભગ ત્રણ નદીઓના સામાન્ય પાણીના સરવાળા બરાબર હતો. પ્રત્યેક નદી 1072 કિમી લાંબી, 75 મીટર પહોળી અને 3 મીટર ઊંડી છે.

5. પતરાની એક ચીમની 10 સેમી લાંબા નળાકારના છેડે શંકુના આડછેદથી બનેલી છે. જો તેની કુલ ઊંચાઈ 22 સેમી હોય તથા નળાકાર ભાગનો વ્યાસ 8 સેમી અને ચીમનીના ઉપરના ભાગનો વ્યાસ 18 સેમી હોય, તો ચીમની બનાવવામાં વપરાતા પતરાનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 13.25.)



આકૃતિ 13.25

6. વિભાગ 13.5 માં આપવામાં આવેલા સંકેતોની મદદથી શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને કુલ પૃષ્ઠફળનું સૂત્ર તારવો.

7. વિભાગ 13.5 માં આપેલા સંકેતોની મદદથી શંકુના આડછેદનું ઘનફળ શોધવાનું સૂત્ર તારવો.

13.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચે આપેલા મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. બે જાણીતા પદાર્થો જેવા કે લંબઘન, શંકુ, નળાકાર, ગોલક અને અર્ધગોલકના સંયોજનથી બનતા પદાર્થનું પૃષ્ઠફળ શોધવું.
2. કોઈપણ બે પદાર્થો જેવા કે લંબઘન, શંકુ, નળાકાર, ગોલક અને અર્ધગોલકના સંયોજનથી બનતા પદાર્થનું ઘનફળ શોધવું.
3. આપેલા શંકુના પાયાને સમાંતર સમતલ દ્વારા કાપીએ તથા સમતલની એક બાજુના શંકુને દૂર કરવાથી મળતા ઘનાકારને શંકુનો આડછેદ કહેવાય છે.
4. શંકુના આડછેદ સંબંધી સૂત્રો નીચે પ્રમાણે છે :

(i) શંકુના આડછેદનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

(ii) શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીના પૃષ્ઠફળનું ક્ષેત્રફળ $= \pi l\,(r_1 + r_2)$

જ્યાં $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

(iii) શંકુના આડછેદનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= \pi l\,(r_1 + r_2) + \pi(r_1^2 + r_2^2)$

ઉપરના સૂત્રોમાં h = આડછેદની ઊંચાઈ, l = આડછેદની તિર્યક ઊંચાઈ તથા શંકુના આડછેદના બંને છેડાની ત્રિજ્યાઓ r_1 અને r_2 છે.

આંકડાશાસ્ત્ર 14

14.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે ધોરણ IX ના અભ્યાસમાં આપેલ માહિતીનું અવર્ગીકૃત તેમજ વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણોમાં વર્ગીકરણ કરવાનો અભ્યાસ કર્યો છે. તમે માહિતીને વિવિધ સચિત્ર આલેખો જેવા કે, લંબાલેખો, સ્તંભાલેખો (જેમની પહોળાઈ બદલાતી હોય તેવા સ્તંભાલેખો સહિત) અને આવૃત્તિ બહુકોણોને ચિત્રાત્મક રીતે દર્શાવવાનો અભ્યાસ પણ કર્યો છે. વાસ્તવમાં, તમે અવર્ગીકૃત માહિતીના સંખ્યાત્મક પ્રતિનિધિ સ્વરૂપે ***મધ્યક (mean), મધ્યસ્થ (median)*** અને ***બહુલક (mode)*** જેવા મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપોનો અભ્યાસ કરીને એક ડગલું આગળ વધ્યા હતા. આ પ્રકરણમાં આપણે આ માપો મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકનો અભ્યાસ અવર્ગીકૃત માહિતી પરથી વર્ગીકૃત માહિતી સુધી વિસ્તૃત કરીશું. આપણે સંચયી આવૃત્તિ અને સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણની સંકલ્પનાની પણ ચર્ચા કરીશું. વળી, **સંચયી આવૃત્તિ વક્રો (Ogives)** કેવી રીતે દોરવા, તે શીખીશું.

14.2 વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક

આપણે જાણીએ છીએ તેમ અવલોકનોનો મધ્યક એ તમામ અવલોકનોના સરવાળાનું અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગફળ છે. ધોરણ IX ના અભ્યાસમાંથી, યાદ કરો કે, જો અવલોકનો $x_1, x_2, \ldots, x_n$ હોય અને તેમને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ હોય, તો એનો અર્થ, અવલોકન x_1 એ f_1 વખત આવે છે, x_2 એ f_2 વખત આવે છે અને આ જ રીતે આગળ પણ અર્થઘટન કરી શકાય.

હવે, તમામ અવલોકનોનો સરવાળો $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$ અને

અવલોકનોની સંખ્યા $= f_1 + f_2 + \ldots + f_n$

તેથી, માહિતીનો મધ્યક $\bar{x}$, નીચેના સૂત્રથી આપવામાં આવે છે :

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

યાદ કરો કે, જેનો અર્થ સરવાળો છે તેવા ગ્રીક અક્ષર Σ (sigma)નો ઉપયોગ કરીને આપણે આ સૂત્રને સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં લખી શકીએ. એટલે કે,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

જો એ સ્પષ્ટ હોય કે, i એ 1 થી n સુધી કિંમતો લે છે, તો આ સૂત્રને સંક્ષિપ્તમાં, $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$ તરીકે પણ લખી શકાય.

ચાલો, આપણે આ સૂત્રનો ઉપયોગ નીચેના ઉદાહરણમાં મધ્યક શોધવા માટે કરીએ :

ઉદાહરણ 1 : એક શાળામાં ધોરણ X ના 30 વિદ્યાર્થીઓએ ગણિતના 100 ગુણના પ્રશ્નપત્રમાં મેળવેલા ગુણ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલા છે. વિદ્યાર્થીએ મેળવેલા ગુણનો મધ્યક શોધો :

મેળવેલ ગુણ (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

ઉકેલ : યાદ કરો કે, ગુણનો મધ્યક શોધવા માટે, આપણને પ્રત્યેક x_i ના તેને અનુરુપ આવૃત્તિ f_i સાથેના ગુણાકારની આવશ્યક્તા છે. તેથી, ચાલો, આપણે કોષ્ટક 14.1માં બતાવ્યા પ્રમાણે તે સંખ્યાઓને સ્તંભમાં મૂકીએ.

કોષ્ટક 14.1

મેળવેલ ગુણ (x_i)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
કુલ	$\Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_i x_i = 1779$

હવે, $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$

તેથી, મેળવેલ ગુણનો મધ્યક 59.3 છે.

આપણા જીવનની મોટા ભાગની વાસ્તવિક પરિસ્થિતિઓમાં, નિયમિત માહિતી એટલી વિશાળ હોય છે કે, તેના અર્થપૂર્ણ અભ્યાસ માટે વર્ગીકૃત માહિતીનું સંક્ષેપન અનિવાર્ય હોય છે. તેથી, આપેલ અવર્ગીકૃત માહિતીને વર્ગીકૃત માહિતીમાં પરિવર્તિત કરવાની આવશ્યકતા રહે છે અને તેનો મધ્યક શોધવા માટે કોઈક રીતની પ્રાપ્તિ આવશ્યક છે.

ચાલો, આપણે ઉદાહરણ 1ની અવર્ગીકૃત માહિતીને વર્ગીકૃત માહિતીમાં પરિવર્તિત કરીએ. તે માટે વર્ગ-અંતરાલોની લંબાઈ, કહો કે 15 ની લઈએ. યાદ રાખો, પ્રત્યેક વર્ગ-અંતરાલને આવૃત્તિની ફાળવણી કરતી વખતે, વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા કોઈ પણ ઊર્ધ્વ વર્ગ-સીમા જેટલી હોય, તો તેમને તે પછીના વર્ગમાં ગણવામાં આવશે. ઉદાહરણ તરીકે, જે 4 વિદ્યાર્થીઓએ 40 ગુણ મેળવ્યા છે, તે 4 વિદ્યાર્થીઓને વર્ગ-અંતરાલ 40-55 માં ગણવામાં આવશે અને 25-40 માં નહિ. હવે આપણે આ રૂઢિ ધ્યાનમાં રાખીને વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણનું કોષ્ટક તૈયાર કરીએ. (જુઓ કોષ્ટક 14.2.)

કોષ્ટક 14.2

વર્ગ-અંતરાલ	10 - 25	25 - 40	40 - 55	55 - 70	70 - 85	85 - 100
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	3	7	6	6	6

હવે, પ્રત્યેક વર્ગ-અંતરાલ માટે, જેને સમગ્ર વર્ગના પ્રતિનિધિ તરીકે ઉપયોગમાં લઈ શકાય એવી એક સંખ્યાની આપણને જરૂર છે. આપણે એવું માની લઈએ છીએ કે, ***દરેક વર્ગ-અંતરાલની આવૃત્તિ તેની મધ્યકિંમતની આસપાસ કેન્દ્રિત થાય છે.*** તેથી, પ્રત્યેક વર્ગની મધ્યકિંમતને વર્ગમાં આવતાં અવલોકનોને દર્શાવવા માટે પસંદ કરી શકાય. યાદ કરો કે, આપણે વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા અને અધઃસીમાની સરેરાશ શોધીને તે વર્ગની મધ્યકિંમત શોધીએ છીએ એટલે કે,

$$\text{કોઈપણ વર્ગની મધ્યકિંમત} = \frac{\text{તે જ વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા} + \text{તે જ વર્ગની અધઃસીમા}}{2}$$

કોષ્ટક 14.2ના સંદર્ભમાં વર્ગ 10-25 માટે, મધ્યકિંમત $\frac{10+25}{2}$, એટલે કે, 17.5 છે. આ જ પ્રમાણે, બાકીના વર્ગ-અંતરાલો માટે આપણે મધ્યકિંમત શોધી શકીએ. આપણે તેમને કોષ્ટક 14.3 માં મૂકીએ. આ મધ્યકિંમત આપણા માટે x_i જેવું કાર્ય કરે છે. હવે, વ્યાપક રીતે, i માં વર્ગ-અંતરાલ માટે, આપણી પાસે મધ્યકિંમત x_i ને અનુરુપ આવૃત્તિ f_i છે. હવે, આપણે મધ્યકની ગણતરી, ઉદાહરણ 1 ની રીતે જ કરીએ.

કોષ્ટક 14.3

વર્ગ-અંતરાલ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f_i)	મધ્યકિંમત (x_i)	$f_i x_i$
10 - 25	2	17.5	35.0
25 - 40	3	32.5	97.5
40 - 55	7	47.5	332.5
55 - 70	6	62.5	375.0
70 - 85	6	77.5	465.0
85 - 100	6	92.5	555.0
કુલ	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 1860.0$

છેલ્લા સ્તંભની કિંમતોનો સરવાળો આપણને $\Sigma f_i x_i$ આપે છે. તેથી, આપેલ માહિતીનો મધ્યક $\bar{x}$, નીચેના સૂત્ર પ્રમાણે મળે છે :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

મધ્યક શોધવાની આ નવી રીત **પ્રત્યક્ષ રીત** તરીકે ઓળખાય છે.

આપણે નિરીક્ષણ કરીએ કે કોષ્ટક 14.1 અને 14.3 માં મધ્યકની ગણતરી માટે એક જ માહિતીનો ઉપયોગ કરી રહ્યા છીએ અને ગણતરી માટે સમાન સૂત્રને લાગુ કરીએ છીએ. પરંતુ મળતાં પરિણામો ભિન્ન છે. આપ કલ્પી શકશો કે, આવું કેમ બને છે અને કયું પરિણામ વધારે ચોક્કસ છે? બે કિંમતોમાં તફાવત, એ કોષ્ટક 14.3 માં મધ્યકિંમતની ધારણાને કારણે છે. 59.3 એ સાચો મધ્યક છે, જ્યારે 62 એ આસન્ન (અંદાજિત) મધ્યક છે.

કેટલીક વાર જ્યારે x_i અને f_i નાં સંખ્યાત્મક મૂલ્યો મોટાં હોય, ત્યારે x_i અને f_i નો ગુણાકાર શોધવાનું કંટાળાજનક થઈ જાય છે અને વધુ સમય માંગી લે છે. તેથી ચાલો, આ પ્રકારની પરિસ્થિતિમાં આપણે ગણતરીની સરળ રીતનો વિચાર કરીએ.

આપણે f_i ને કશું જ કરી શકતાં નથી, પરંતુ આપણી ગણતરી સરળ બને તે રીતે આપણે પ્રત્યેક x_i ને નાની સંખ્યામાં પરિવર્તિત કરી શકીએ, જેથી આપણી ગણતરી સરળ બને. આ આપણે કેવી રીતે કરી શકીશું? આ પ્રત્યેક x_i માંથી નિયત સંખ્યાને બાદ કરવા અંગે વિચારી શકીએ. ચાલો, આપણે આ રીતનો પ્રયત્ન કરીએ.

પ્રથમ પગલું એ છે કે, બધાં x_i માંથી એકને ***ધારી લીધેલ મધ્યક*** તરીકે પસંદ કરો અને તેને 'a' વડે દર્શાવો. વળી, આગળ ઉપર આપણું ગણતરીનું કાર્ય ઓછું કરવા, આપણે 'a' ને જે $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ની મધ્યે રહેલો હોય એવો x_i લઈ શકીએ. તેથી, આપણે $a = 47.5$ અથવા $a = 62.5$ પસંદ કરી શકીએ. ચાલો, આપણે $a = 47.5$ પસંદ કરીએ.

(આ જરૂરી નથી. a કોઈપણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોઈ શકે. આ માત્ર અનુકૂળતા માટે છે.)

પછીનું પગલું છે, a અને પ્રત્યેક x_i વચ્ચેનો તફાવત d_i શોધવાનું એટલે કે, પ્રત્યેક x_i થી a નું વિચલન શોધવાનું.

અર્થાત્, $d_i = x_i - a = x_i - 47.5$

ત્રીજું પગલું છે, d_i નો અનુરૂપ f_i સાથેનો ગુણાકાર શોધવાનો અને તમામ $f_i d_i$ નો સરવાળો કરવાનો છે. આ ગણતરીઓ કોષ્ટક 14.4 માં દર્શાવેલ છે.

કોષ્ટક 14.4

વર્ગ-અંતરાલ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f_i)	મધ્યકિંમત (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10 - 25	2	17.5	–30	–60
25 - 40	3	32.5	–15	–45
40 - 55	7	47.5 = a	0	0
55 - 70	6	62.5	15	90
70 - 85	6	77.5	30	180
85 - 100	6	92.5	45	270
કુલ	$\Sigma f_i = 30$			$\Sigma f_i d_i = 435$

તેથી, કોષ્ટક 14.4 પરથી, વિચલનોનો મધ્યક, $\bar{d} = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$.

હવે ચાલો, આપણે $\bar{d}$ અને $\bar{x}$ વચ્ચેનો સંબંધ શોધીએ. d_i મેળવવા માટે, આપણે પ્રત્યેક x_i માંથી 'a' ની બાદબાકી કરી છે. તેથી, $\bar{x}$ મેળવવા માટે, આપણને $\bar{d}$ માં 'a' ઉમેરવાની જરૂર છે. આ હકીકત, ગાણિતિક રીતે નીચે પ્રમાણે વર્ણવી શકાય :

વિચલનનો મધ્યક, $$\bar{d} = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$$

તેથી, $$\bar{d} = \frac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a \frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a$$

તેથી, $$\bar{x} = a + \bar{d}$$

એટલે કે, $$\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$$

a, $\Sigma f_i d_i$ અને Σf_i ની કિંમતો કોષ્ટક 14.4 માંથી મૂકતાં, આપણને

$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$ મળે છે. આમ, વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા મેળવેલા ગુણનો મધ્યક 62 છે.

ઉપર્યુક્ત વર્ણવેલ રીતને ***ધારી લીધેલ મધ્યકની રીત (Assumed Mean Method)*** કહે છે.

પ્રવૃત્તિ 1 : કોષ્ટક 14.3 પરથી પ્રત્યેક x_i (એટલે કે, 17.5, 32.5, અને આમ આગળ)ને 'a' તરીકે લઈને મધ્યક શોધો. તમે શું નિરીક્ષણ કરો છો? તમે જોઈ શકશો કે, પ્રત્યેક કિસ્સામાં પ્રાપ્ત થતો મધ્યક એક જ (સમાન) છે, એટલે કે, 62. (કેમ?)

નોંધ : ખરેખર તો 'a' તરીકે કોઈ પણ અનુકૂળ સંખ્યા લઈ શકાય. તેથી, આપણે કહી શકીએ કે મેળવેલા મધ્યકની કિંમત, 'a' ની પસંદગી પર આધારિત નથી.

કોષ્ટક 14.4 માં નિરીક્ષણ કરો કે, સ્તંભ 4 ની બધી જ કિંમતો 15 ની ગુણક છે. તેથી જો આપણે આખા સ્તંભ 4 ની બધી જ કિંમતોનો 15 વડે ભાગાકાર કરીએ, તો આપણે f_i સાથે ગુણાકાર કરવા માટે નાની સંખ્યાઓ પ્રાપ્ત કરી શકીએ. (અહીં દરેક વર્ગઅંતરાલની વર્ગલંબાઈ 15 છે.)

તેથી, $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ લો. અહીં a ધારી લીધેલ મધ્યક અને h એ વર્ગલંબાઈ છે.

હવે, આપણે આ પ્રમાણે u_i ની ગણતરી કરીએ અને ગણતરી આગળ પ્રમાણે ચાલુ રાખીએ (એટલે કે, f_iu_i શોધીએ અને પછી Σf_iu_i). ચાલો આપણે $h = 15$ લઈને કોષ્ટક 14.5 રચીએ.

કોષ્ટક 14.5

વર્ગ-અંતરાલ	f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$	f_iu_i
10 - 25	2	17.5	– 30	–2	– 4
25 - 40	3	32.5	–15	–1	– 3
40 - 55	7	47.5=a	0	0	0
55 - 70	6	62.5	15	1	6
70 - 85	6	77.5	30	2	12
85 - 100	6	92.5	45	3	18
	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_iu_i = 29$

$$\bar{u} = \frac{\Sigma f_iu_i}{\Sigma f_i} \text{ લો.}$$

અહીં, ચાલો આપણે ફરીથી $\bar{u}$ અને $\bar{x}$ વચ્ચેનો સંબંધ શોધીએ.

આપણી પાસે, $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ છે.

તેથી,
$$\bar{u} = \frac{\Sigma f_i \dfrac{(x_i - a)}{h}}{\Sigma f_i} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_ix_i - a\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_ix_i}{\Sigma f_i} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}[\bar{x} - a]$$

તેથી,
$$h\bar{u} = \bar{x} - a$$

એટલે કે $\overline{x} = a + h\overline{u}$

તેથી, $\overline{x} = a + h\left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right)$

હવે, a, h, $\Sigma f_i u_i$ અને Σf_i નાં મૂલ્યો કોષ્ટક 14.5 માંથી મૂકતાં, આપણને

$$\overline{x} = 47.5 + 15 \times \left(\frac{29}{30}\right)$$

$= 47.5 + 14.5 = 62$ મળે છે.

તેથી, વિદ્યાર્થી દ્વારા મેળવેલ ગુણનો મધ્યક 62 છે.

ઉપર્યુક્ત દર્શાવેલ રીતને ***પદ-વિચલનની રીત (Step-deviation method)*** કહેવાય છે.

આપણે નોંધ કરીએ :

- જો તમામ d_i માં સામાન્ય અવયવ હોય તો પદ-વિચલનની રીતનો ઉપયોગ અનુકૂળ રહેશે.
- ત્રણે ય રીતો દ્વારા મેળવેલ તમામ મધ્યક સમાન છે.
- ધારી લીધેલ મધ્યકની રીત અને પદ-વિચલનની રીત એ પ્રત્યક્ષ રીતનાં સહેલાઈથી સમજાય એવાં સ્વરૂપો માત્ર છે.
- જો a અને h ઉપર પ્રમાણે આપેલ ન હોય, પરંતુ, તે કોઈ પણ શૂન્યેતર સંખ્યાઓ હોય કે જેથી, $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ હોય, તો પણ સૂત્ર $\overline{x} = a + h\overline{u}$ સત્ય રહે છે.

ચાલો, આપણે આ રીતનો અન્ય ઉદાહરણમાં ઉપયોગ કરીએ.

ઉદાહરણ 2 : નીચે આપેલ કોષ્ટક, ભારતનાં કેટલાંક રાજ્યોનાં ગ્રામીણ વિસ્તારો અને કેન્દ્રશાસિત પ્રદેશો (Union Territories) ની પ્રાથમિક શાળાઓમાં સ્ત્રી શિક્ષકોનું ટકાવાર વિતરણ આપે છે. આ વિભાગમાં વર્ણવેલ ત્રણે ય રીતો દ્વારા સ્ત્રી શિક્ષકોની સંખ્યાનો મધ્યક ટકામાં શોધો.

સ્ત્રી શિક્ષકોની ટકાવારી	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
રાજ્યો/કેન્દ્રશાસિત પ્રદેશોની સંખ્યા	6	11	7	4	4	2	1

સ્ત્રોત : *NCERT દ્વારા હાથ ધરાયેલ સાતમું ઑલ ઇન્ડિયા શાળાશિક્ષણ સર્વેક્ષણ*

ઉકેલ : ચાલો, આપણે પ્રત્યેક વર્ગ માટે મધ્યકિંમત x_i શોધીએ, અને તેને સ્તંભમાં મૂકીએ. (જુઓ કોષ્ટક 14.6.)

કોષ્ટક 14.6

સ્ત્રી શિક્ષકોની ટકાવારી	રાજ્યો/કેન્દ્રશાસિત પ્રદેશોની સંખ્યા (f_i)	x_i
15-25	6	20
25-35	11	30
35-45	7	40
45-55	4	50
55-65	4	60
65-75	2	70
75-85	1	80

અહીં આપણે $a = 50$ તથા $h = 10$ લઈએ. આથી $d_i = x_i - 50$ અને $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$ થશે. હવે, આપણે d_i અને u_i શોધીએ અને તેમને કોષ્ટક 14.7 માં મૂકીએ.

કોષ્ટક 14.7

સ્ત્રી શિક્ષકોની ટકાવારી	રાજ્યો/કે.શા. પ્રદેશોની સંખ્યા (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	f_ix_i	f_id_i	f_iu_i
15 - 25	6	20	– 30	– 3	120	– 180	– 18
25 - 35	11	30	– 20	– 2	330	– 220	– 22
35 - 45	7	40	– 10	– 1	280	– 70	– 7
45 - 55	4	$50 = a$	0	0	200	0	0
55 - 65	4	60	10	1	240	40	4
65 - 75	2	70	20	2	140	40	4
75 - 85	1	80	30	3	80	30	3
કુલ	$\Sigma f_i = 35$				**1390**	**– 360**	$\Sigma f_iu_i = -36$

ઉપરના કોષ્ટક પરથી આપણને $\Sigma f_i = 35$, $\Sigma f_ix_i = 1390$ મળે. $\Sigma f_id_i = -360$, $\Sigma f_iu_i = -36$ મળે છે.

પ્રત્યક્ષ રીતનો ઉપયોગ કરતાં, $\bar{x} = \frac{\Sigma f_ix_i}{\Sigma f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

ધારી લીધેલ મધ્યકની રીતનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_id_i}{\Sigma f_i} = 50 + \frac{(-360)}{35} = 39.71$$

પદ-વિચલનની રીતનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\overline{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h = 50 + \left(\frac{-36}{35}\right) \times 10 = 39.71$$

તેથી, ગ્રામીણ વિસ્તારોની પ્રાથમિક શાળાઓમાં સ્ત્રી શિક્ષકોની ટકાવારીનો મધ્યક 39.71 છે.

નોંધ : ત્રણે રીતો દ્વારા મેળવેલ તમામ પરિણામ સમાન છે. તેથી ઉપયોગમાં લેવાની રીતની પસંદગી સંખ્યાત્મક કિંમતો x_i અને f_i પર આધારિત છે. જો x_i અને f_i ની કિંમતો પર્યાપ્ત રીતે નાની હોય, તો પ્રત્યક્ષ રીત યોગ્ય પસંદગી છે. જો x_i અને f_i સંખ્યાત્મક રીતે મોટી સંખ્યાઓ હોય, તો આપણે ધારી લીધેલ મધ્યકની રીત અથવા પદ-વિચલનની રીતનો ઉપયોગ કરી શકીએ. જો વર્ગલંબાઈ અસમાન હોય અને x_i સંખ્યાત્મક રીતે મોટી સંખ્યાઓ હોય, તો તેવા સંજોગોમાં તમામ h ને d_i ના યોગ્ય ભાજક તરીકે લઈને પદ-વિચલનની રીતનો ઉપયોગ કરી શકીએ.

ઉદાહરણ 3 : નીચે આપેલ વિતરણ એક-દિવસીય ક્રિકેટ મૅચોમાં બૉલરો દ્વારા લેવાયેલી વિકેટોની સંખ્યા બતાવે છે. યોગ્ય રીત પસંદ કરીને વિકેટોની સંખ્યાનો મધ્યક શોધો. મધ્યક શું સૂચવે છે ?

વિકેટોની સંખ્યા	20-60	60-100	100-150	150-250	250-350	350-450
બોલરોની સંખ્યા	7	5	16	12	2	3

ઉકેલ : અહીં, વર્ગલંબાઈ અચળ નથી અને x_i મોટા છે. ચાલો આપણે અહીં પણ $a = 200$ અને $h = 20$ લઈને પદ-વિચલનની રીતનો ઉપયોગ કરીએ. આપણને કોષ્ટક 14.8 દર્શાવ્યા પ્રમાણેની માહિતી મળે છે.

કોષ્ટક 14.8

લીધેલ વિકેટોની સંખ્યા	**બૉલરોની સંખ્યા (f_i)**	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{d_i}{20}$	$f_i u_i$
20 - 60	7	40	– 160	– 8	– 56
60 - 100	5	80	– 120	– 6	– 30
100 - 150	16	125	– 75	– 3.75	– 60
150 - 250	12	$a = 200$	0	0	0
250 - 350	2	300	100	5	10
350 - 450	3	400	200	10	30
કુલ	$\Sigma f_i = 45$				$\Sigma f_i u_i = -106$

તેથી, $\overline{u} = \frac{-106}{45}$. આને કારણે, $\overline{x} = 200 + 20\left(\frac{-106}{45}\right) = 200 - 47.11 = 152.89$

આ માહિતી આપણને કહે છે કે, આ 45 બૉલરો દ્વારા એક દિવસીય ક્રિકેટમાં, સરેરાશ 152.89 વિકેટો લેવામાં આવી છે.

હવે, આપણે જોઈએ કે, આ વિભાગમાં જેની ચર્ચા કરેલ તે સંકલ્પનાનો તમે કેટલી સારી રીતે ઉપયોગ કરી શકો છો !

પ્રવૃત્તિ 2 :

તમારા વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને ત્રણ સમૂહમાં વિભાજિત કરો અને પ્રત્યેક સમૂહને કહો કે, નીચે આપેલ પ્રવૃત્તિઓમાંથી કોઈ એક પ્રવૃત્તિ કરે.

1. તમારી શાળાએ તાજેતરમાં લીધેલ પરીક્ષામાં તમારા વર્ગના બધા જ વિદ્યાર્થીઓએ ગણિતમાં મેળવેલા ગુણ પ્રાપ્ત કરે. મેળવેલ માહિતી પરથી વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરે.
2. તમારા શહેરમાં 30 દિવસોના ગાળા દરમિયાન દરરોજ નોંધાયેલ મહત્તમ તાપમાન મેળવે. આ માહિતીને વર્ગીકૃત આવૃત્તિકોષ્ટકના રૂપમાં પ્રસ્તુત કરે.
3. તમારા વર્ગના બધા જ વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ (સેમીમાં) માપે અને આ માહિતીનું વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક રચે.

તમામ સમૂહો દ્વારા માહિતી એકઠી થાય અને વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટકોની રચના થાય તે પછી, સમૂહો માટે યોગ્ય લાગે તે રીતનો ઉપયોગ કરીને પ્રત્યેક કિસ્સામાં મધ્યક શોધો.

સ્વાધ્યાય 14.1

1. વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહ દ્વારા તેમના પર્યાવરણ જાગૃતિ કાર્યક્રમના ભાગરૂપે એક સર્વેક્ષણ હાથ ધરવામાં આવ્યું. તેમાં તેમણે એક વિસ્તારનાં 20 ઘરોમાં વનસ્પતિના છોડની સંખ્યા વિશે નીચેની માહિતી એકઠી કરી. ઘર દીઠ છોડની સંખ્યાઓનો મધ્યક શોધો.

છોડની સંખ્યા	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
ઘરોની સંખ્યા	1	2	1	5	6	2	3

મધ્યક શોધવા માટે કઈ રીતનો ઉપયોગ કરશો ? શા માટે ?

2. એક ફેક્ટરીમાં 50 કારીગરોના દૈનિક વેતનના નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણનો વિચાર કરો :

દૈનિક વેતન (₹ માં)	500-520	520-540	540-560	560-580	580-600
કારીગરોની સંખ્યા	12	14	08	06	10

યોગ્ય રીતનો ઉપયોગ કરીને કારખાનાના કારીગરોના દૈનિક વેતનનો મધ્યક શોધો.

3. નીચેનું આવૃત્તિ વિતરણ વસ્તીનાં બાળકોનું દૈનિક ખિસ્સાભથ્થું દર્શાવે છે. ખિસ્સાભથ્થાનો મધ્યક ₹ 18 છે. ખૂટતી આવૃત્તિ f શોધો.

દૈનિક ખિસ્સાભથ્થું (₹ માં)	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
બાળકોની સંખ્યા	7	6	9	13	f	5	4

4. એક હૉસ્પિટલમાં દાક્તરે ત્રીસ મહિલાઓની શારીરિક તપાસ કરી અને પ્રતિ મિનિટ હૃદયના ધબકારાની નોંધ કરી તથા નીચે પ્રમાણે સારાંશ તૈયાર કર્યો. યોગ્ય રીત પસંદ કરીને, આ મહિલાઓના પ્રતિ મિનિટ હૃદયના ધબકારાનો મધ્યક શોધો.

પ્રતિ મિનિટ હૃદયના ધબકારાની સંખ્યા	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
મહિલાઓની સંખ્યા	2	4	3	8	7	4	2