Chapter – 26
Statics

प्रस्तावना (Introduction)

स्थिति विज्ञान यांत्रिकी की वह शाखा है, जिसमें उन बलों के परस्पर सम्बन्धों का अध्ययन किया जाता है जो किसी पिण्ड अथवा पिण्ड निकाय पर क्रिया कर उसे विरामावस्था में रखते हैं।

द्रव्य : द्रव्य वह है, जिसे हम इन्द्रियों द्वारा महसूस कर सकते हैं और जो बल उत्पन्न करता है या बल द्वारा प्रभावित होता है।

बल : बल वह बाह्य कारक है, जो किसी पिण्ड की स्थिति में परिवर्तन करता है या परिवर्तन करने का प्रयास करता है। बल को व्यक्त करने के लिए चार बातें आवश्यक हैं, द्रव्यमान, दिशा, आभास, कार्यकारी बिन्दु। बल एक सदिश राशि है।

भार : किसी वस्तु का भार वह बल है, जिससे वह पृथ्वी के केन्द्र की ओर आकर्षित होती है। यदि पिंड का द्रव्यमान m तथा गुरूत्वीय त्वरण g हो, तब पिंड का भार $W = mg$.

तनाव तथा प्रणोद : जब किसी डोरी से कोई भार संतुलित किया जाता है या लटकाया जाता है, तब डोरी के अनुदिश एक खिंचाव बल कार्य करता है यह बल तनाव कहलाता है। इसी प्रकार, यदि किसी छड़ को संकुचित किया जाता है, तब एक बल उत्पन्न होता है। यह बल प्रणोद कहलाता है।

क्रिया तथा प्रतिक्रिया : जब एक पिंड किसी दूसरे पिंड के सम्पर्क में आता है तब क्रिया के सम्पर्क बिंदु पर बराबर तथा विपरीत बल कार्य करते हैं इस प्रकार के बलों को क्रिया तथा प्रतिक्रिया कहते हैं।

बलों का समान्तर चतुर्भुज का नियम (Parallelogram law of forces)

यदि एक बिन्दु पर लगे दो बल परिमाण एवं दिशा में किसी समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष से खींची गई दो भुजाओं से निरुपित हों तो उनका परिणामी बल परिमाण एवं दिशा में उस शीर्ष से खींचे गये विकर्ण से निरूपित होगा।

माना बिन्दु O पर लगे बल P और Q परिमाण एवं दिशा में समान्तर चतुर्भुज की भुजाओं OA और OB से निरूपित होते हैं और $\angle AOB = \alpha$, तब इनका परिणामी बल R परिमाण एवं दिशा में समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण OC द्वारा निरूपित होगा।

यदि R, बल P के साथ θ कोण बनाता है, अर्थात् $\angle COA = \theta$ तब

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$ तथा $\tan\theta = \dfrac{Q.\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$.

यदि परिणामी R, बल Q के साथ θ_1 कोण बनाता है, तब $\theta_1 = \tan^{-1}\left(\dfrac{P\sin\alpha}{Q + P\cos\alpha}\right)$.

स्थिति I : यदि $P = Q$,

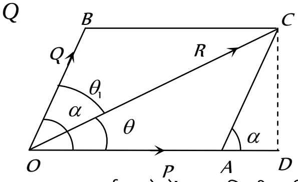
$\therefore\ R = 2P\cos(\alpha/2)$ तथा $\tan\theta = \tan(\alpha/2)$ या $\theta = \alpha/2$

स्थिति II : यदि $\alpha = 90^o$ अर्थात् दोनों बल लम्बवत् हैं

$\therefore\ R = \sqrt{P^2 + Q^2}$ तथा $\tan\theta = \dfrac{Q}{P}$

स्थिति III : यदि $\alpha = 0^o$ अर्थात् दोनों बल एक ही दिशा में कार्यरत् हैं

$\therefore\ R_{\max} = P + Q$



स्थिति IV : यदि $\alpha = 180^o$ अर्थात् दोनों बल विपरीत दिशा में कार्यरत् हैं

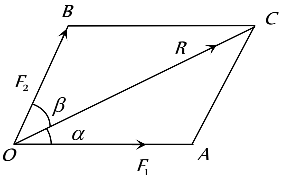
$\therefore\ R_{\min} = P - Q$

- दो बलों का परिणामी बड़े बल के समीप होता है।
- दो समान परिमाण P के बल जिनके मध्य कोण α है, का परिणामी $2P\cos\dfrac{\alpha}{2}$ होता है तथा यह परिणामी दोनों बलों के मध्य कोण को समद्विभाजित करता है।
- यदि α कोण पर कार्यरत् दो बलों P तथा Q का परिणामी R, P की दिशा से θ कोण बनाता है, तब $\sin\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{R}$ तथा $\cos\theta = \dfrac{P + Q\cos\alpha}{R}$.
- यदि α कोण पर कार्यरत् दो बलों P तथा Q का परिणामी R, Q की दिशा से θ कोण बनाता है, तब $\sin\theta = \dfrac{P\sin\alpha}{R}$ तथा $\cos\theta = \dfrac{Q + P\sin\alpha}{R}$.

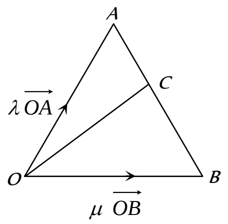
दो दिशाओं में किसी बल के घटक : बल R के, इसकी क्रिया रेखा से α और β कोण (विपरीत दिशाओं में) बनाने वाली दिशाओं में घटक क्रमशः निम्न हैं,

$$F_1 = \frac{OC \,.\, \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{R \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

तथा $F_2 = \dfrac{OC.\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{R.\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.



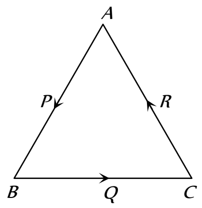
***λ-μ* प्रमेय :** बिन्दु O पर OA और OB दिशाओं में कार्यरत् दो बलों, जिनके परिमाण क्रमशः $\lambda.OA$ और $\mu.OB$ हैं, के परिणामी का परिमाण $(\lambda+\mu)OC$ होता है और यह OC दिशा में लगता है जहाँ C, AB पर स्थित बिन्दु है और $\lambda.CA = \mu.CB$.

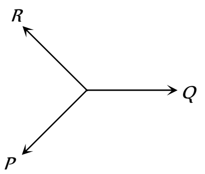


बलों का त्रिभुज नियम (Triangle law of force)

यदि किसी बिन्दु पर कार्यरत् तीन बलों के परिमाण तथा दिशाये किसी त्रिभुज की भुजाओं द्वारा प्रदर्शित हों, तब वे साम्यावस्था में होंगे।

यहाँ $\overrightarrow{AB} = P,\ \ \overrightarrow{BC} = Q,\ \ \overrightarrow{CA} = R$





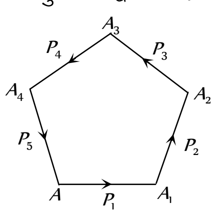
त्रिभुज ABC में, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0 \Rightarrow P + Q + R = 0$

अतः बल P, Q तथा R साम्यावस्था में हैं।

विलोम: यदि किसी बिन्दु पर कार्यरत तीन बल साम्यावस्था में हैं, तब वे परिमाण तथा दिशा में त्रिभुज की भुजाओं द्वारा प्रदर्शित किये जा सकते हैं।

बलों का बहुभुज नियम (Polygon law of forces)

यदि किसी बिन्दु पर कार्यरत् एक से अधिक बलों के परिमाण तथा दिशा में किसी बहुभुज की भुजाओं द्वारा प्रदर्शित हों, तब वे साम्यावस्था में होंगे।

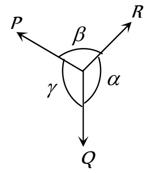


लॉमी की प्रमेय (Lami's theorem)

यदि किसी बिन्दु पर कार्यरत् तीन समतलीय बल संतुलन में हों, तो उनमें से प्रत्येक बल का परिमाण शेष दो बलों के बीच के कोण की ज्या (sine) के समानुपाती होता है।

यदि P, Q, R बल है तथा α, β, γ क्रमशः Q तथा R, R तथा P, P तथा Q के मध्य कोण हों तब संतुलन की स्थिति में,

$$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$$

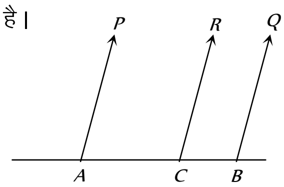


इस प्रमेय का विलोम भी सत्य है।

समान्तर बल (Parallel forces)

(1) **समदिश समान्तर बल :** दो समान्तर बल समदिश समान्तर बल होते हैं, जब दोनों बल एक ही दिशा में कार्यरत् हों।

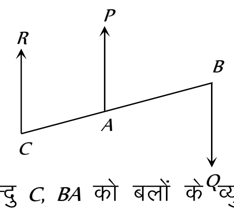
दो समान्तर समदिश बलों P तथा Q का परिणामी बल R परिमाण में बलों P तथा Q के परिमाणों के योग के बराबर होता है तथा परिणामी R की दिशा बलों P तथा Q की दिशा होती है।



परिणामी R उस बिन्दु पर कार्य करता है, जो P तथा Q को मिलाने वाली रेखा को $Q : P$ में अन्तःविभाजित करता है।

(2) **असमदिश (विपरीतदिश) समान्तर बल :** दो समान्तर बल असमदिश समान्तर बल होते हैं, यदि दोनों बल विपरीत दिशा में कार्यरत् हों।

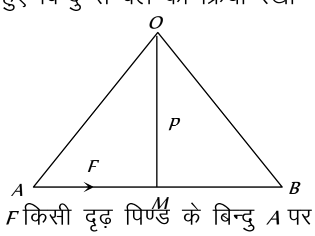
यदि दो असमदिश समान्तर बल P तथा Q क्रमशः बिन्दुओं A तथा B पर कार्यरत हों एवं P का परिमाण Q से अधिक है $(P > Q)$, तब इनका परिणामी R, P की दिशा में बिन्दु C पर कार्य करता है। तब $R = P - Q$, $P.CA = Q.CB$.



इस स्थिति में बिन्दु C, BA को बलों के व्युत्क्रम अनुपातों में बाह्यतः विभाजित करता है, $\dfrac{P}{CB} = \dfrac{Q}{CA} = \dfrac{P-Q}{CB-CA} = \dfrac{R}{AB}$.

आघूर्ण (Moment)

किसी दिए हुये बल का किसी बिन्दु O के सापेक्ष आघूर्ण का परिमाण उस बल और दिए हुए बिन्दु से बल की क्रिया रेखा पर लम्ब के गुणनफल के बराबर होता हैं।



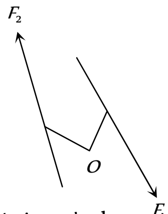
यदि एक बल F किसी दृढ़ पिण्ड के बिन्दु A पर रेखा AB के अनुदिश कार्यरत् है तथा AB से स्थिर बिन्दु O की लम्बवत् दूरी $OM\ (= P)$ हो, तब बिन्दु O के परितः बल F का आघूर्ण

$$= F.P = AB \times OM = 2\left[\frac{1}{2}(AB \times OM)\right] = 2\ (\Delta AOB \text{ क्षेत्रफल})$$

आघूर्ण का S.I. मात्रक न्यूटन मीटर (N-m) है।

(1) **आघूर्ण का चिन्ह :** किसी बल का दिये गये बिन्दु के सापेक्ष आघूर्ण धनात्मक उस अवस्था में कहा जाता है जबकि उसकी उस बिन्दु के परितः

घुमाने की प्रवृत्ति वामावर्त (Anti-clockwise) है। यदि घुमाने की प्रवृत्ति दक्षिणावर्त (Clockwise) है, तो आघूर्ण ऋणात्मक होता है।



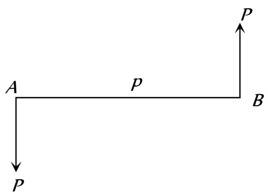
(2) **वेरीगनॉन की प्रमेय** (Varignon's theorem)**:** बलों के समतल में स्थित किसी बिन्दु के सापेक्ष बलों के आघूर्णों का बीजगणितीय योग, उसी बिन्दु के सापेक्ष उनके परिणामी के आघूर्ण के बराबर होता है।

- किसी बिन्दु के परितः दो बलों के आघूर्णों का बीजगणितीय योग, इनके परिणामी की क्रियारेखा पर शून्य होता है।
- विलोमतः यदि दो समतलीय बलों (जो कि संतुलन में नही है), के आघूर्णों का बीजगणितीय योग, तल में स्थित किसी बिंदु के सापेक्ष शून्य हो, तब उनका परिणामी उसी बिन्दु से गुजरता है।
- यदि कोई पिंड, जिसका एक बिंदु स्थिर है पर दो बल क्रियाशील हैं तथा पिंड विरामावस्था में है, तब स्थिर बिंदु के परितः दोनों बलों का आघूर्ण बराबर तथा विपरीत होता है।

बलयुग्म (Couples)

यदि परिमाण में समान, समान्तर एवं असमदिश दो बल विभिन्न बिन्दुओं पर लगे हों, तो उस युग्म को बलयुग्म कहते हैं।

***उदाहरणार्थ*:** घड़ी में चाबी देने में, पेचकस घुमाने में, कम्पास द्वारा वृत्त की रचना करने में आदि।



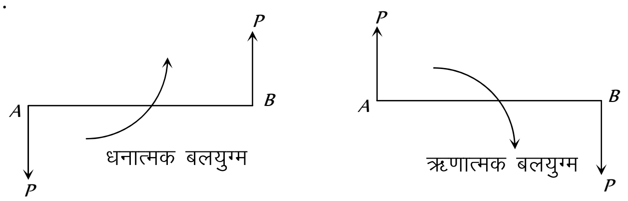
(1) **बलयुग्म की भुजा :** बलयुग्म का निर्माण करने वाले बलों की क्रिया रेखाओं के मध्य लम्बवत् दूरी बलयुग्म की भुजा कहलाती है।

(2) **बलयुग्म का आघूर्ण :** किसी बलयुग्म का आघूर्ण, परिमाण में बलयुग्म बनाने वाले बलों में से एक बल और दोनों बलों की क्रिया रेखाओं के बीच की लम्बवत् दूरी के गुणनफल के बराबर होता है।

(3) बलयुग्म के आघूर्ण को धनात्मक कहते हैं, यदि बलयुग्म की प्रवृत्ति वामावर्त (Anticlockwise) घुमाने की होती है। यदि इसकी प्रवृत्ति दक्षिणावर्त (Clock wise) घुमाने की है, तो आघूर्ण ऋणात्मक होता है।

बलयुग्म का आघूर्ण = बल × बलयुग्म की भुजा = $P.p$

.

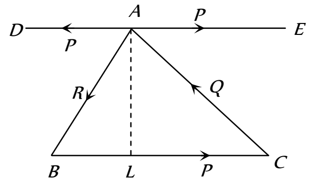


- एक बलयुग्म एकल बल द्वारा संतुलित नहीं हो सकता किन्तु विपरीत चिन्हों के दो बलों द्वारा इसे संतुलित कर सकते हैं।

बलयुग्म का त्रिभुज प्रमेय (Triangle theorem of couples)

यदि किसी पिण्ड पर कार्यरत् तीन बलों को परिमाण, दिशा तथा क्रिया रेखा में किसी त्रिभुज की भुजाओं द्वारा क्रम से निरुपित किया जा सके, तब वे एक बलयुग्म के समतुल्य होंगे, जिसका आघूर्ण त्रिभुज के क्षेत्रफल का दुगुना होता है।

माना बल P, Q तथा R क्रमशः AE, CA तथा AB के अनुदिश हैं, जो A पर कार्यरत् तीन संगामी बल हैं तथा इन बलों के परिमाण तथा दिशा त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA तथा AB द्वारा निरुपित होते हैं। अतः त्रिभुज नियम से, ये बल साम्यावस्था में कहे जाते हैं।



शेष दो बल P तथा Q जो क्रमशः AD तथा BC के अनुदिश हैं, एक बलयुग्म बनाते हैं, जिसका आघूर्ण है, $m = P.AL = BC.AL$

$\because \frac{1}{2}(BC.AL) = 2\left(\frac{1}{2}\text{ त्रिभुज } ABC \text{ का क्षेत्रफल}\right)$

$\therefore$ आघूर्ण = $BC.AL = 2$ (ΔABC का क्षेत्रफल)

समतलीय बलों की साम्यावस्था (Equilibrium of coplanar forces)

(1) यदि तीन बल, एक दृढ़ पिण्ड को साम्यावस्था में रखते हैं, तब वे समतलीय होंगे।

(2) यदि किसी तल में एक दृढ़ पिण्ड पर कार्यरत् तीन बल इसे साम्यावस्था में रखते हैं, तब वे संगामी या समान्तर होंगे।

(3) जब तीन से अधिक बल एक दृढ़ पिण्ड को संतुलन में रखते हैं, तब यह आवश्यक नहीं है कि वे एक बिन्दु पर मिलें। बलों का निकाय साम्यावस्था में होगा, यदि पिण्ड में न तो रेखीय गति हो तथा न ही घूर्णी गति हो। अर्थात् $X = 0, Y = 0, G = 0$ या $R = 0, G = 0$.

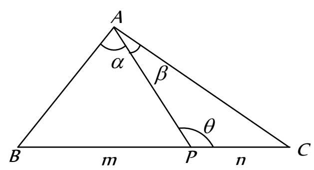
(4) यदि एक दृढ़ पिण्ड समतलीय बलों के निकाय के अन्तर्गत संतुलन में है, जो कि एक बिन्दुगामी नहीं हैं, तो किन्हीं दो परस्पर लम्ब रेखाओं की दिशा में बलों के वियोजित भागों के बीजीय योग अलग-अलग शून्य होंगे तथा बलों के तल में उपस्थित किसी भी बिन्दु के परितः सभी बलों के आघूर्णों का बीजीय योग भी शून्य होगा।

(5) यदि एक दृढ़ पिण्ड समतलीय बलों के निकाय के अन्तर्गत संतुलनावस्था में है, तब तीन असंरेखीय बिन्दुओं में से प्रत्येक के परितः बलों के आघूर्णों का बीजगणितीय योग शून्य होगा।

(6) **त्रिकोणमितीय प्रमेय (m–n प्रमेय) :** माना ΔABC के आधार BC पर P कोई ऐसा बिन्दु है कि

$BP : CP = m : n.$

यदि $\angle BAP = \alpha, \angle CAP = \beta$ और $\angle APC = \theta$, तब

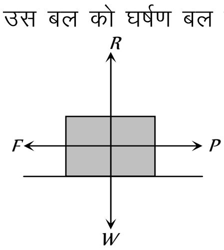


(i) $(m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta$

(ii) $(m+n)\cot\theta = n\cot B - m\cot C$

घर्षण (Friction)

परिभाषा : वस्तुओं का वह गुण जिसके कारण दो रूक्ष (Rough) पिण्डों के सम्पर्क बिन्दु पर एक गति विरोधी बल स्वतः उत्पन्न हो जाता है जो कि एक पिंड को दूसरे पिंड पर फिसलने से रोकने की प्रवृत्ति रखता है, घर्षण कहलाता है और उस बल को घर्षण बल कहते हैं।



(1) **घर्षण एक स्वः व्यवस्थित** (Self-adjusting) : माना एक W भार का भारी पिण्ड है, जो चिकने क्षैतिज तल पर रखा हुआ है तथा इसे एक क्षैतिज बल P द्वारा खींचा जाता है। P के एक निश्चित मान तक पिण्ड गति नहीं करता है। तल की अभिलंब प्रतिक्रिया R तथा पिण्ड का भार W ऊर्ध्वाधर कार्य करते हैं तथा क्षैतिज बल पर प्रभाव नहीं डालते हैं।

घर्षण बल F क्षैतिज दिशा में कार्य करता है, जो P को संतुलित करता है तथा पिंड को गति करने से रोकता है।

जैसे-जैसे P का मान बढ़ाते हैं, F का मान बढ़ता है जो कि P को सन्तुलित करता है। इस प्रकार एक स्थिति ऐसी आती है कि P का मान थोड़ा सा भी अधिक होने पर पिंड गति कर सकता है इस स्थिति में F का मान अधिक होता है तथा P के बराबर होता है इसके पश्चात् P का मान बढ़ाने पर F का मान नहीं बढ़ता है और पिंड गति प्रारम्भ कर देता है।

यह प्रदर्शित करता है कि घर्षण एक स्वःव्यवस्थित बल है, अर्थात् उत्पन्न होने वाला घर्षण नियत नहीं है, किन्तु शून्य से एक निश्चित अधिकतम मान तक बढ़ता है।

(2) **स्थैतिक घर्षण** : जब एक पिण्ड को दूसरे पिण्ड पर चलाने का प्रयास किया जाता है और पहला पिण्ड चलने की स्थिति में नहीं हो, तो इस स्थिति में घर्षण को स्थैतिक घर्षण कहते हैं।

(3) **सीमान्त घर्षण** : जब एक पिण्ड को दूसरे पिण्ड पर चलाने का प्रयास किया जाता है और पहला पिण्ड ठीक चलने को तैयार होता है, तो इस स्थिति को सीमान्त सन्तुलन की स्थिति कहते हैं। सीमान्त सन्तुलन की स्थिति में कार्य करने वाले घर्षण को सीमान्त घर्षण कहते हैं। सीमान्त घर्षण का मान अधिकतम होता है।

(4) **गतिक घर्षण** : जब एक पिण्ड दूसरे पिण्ड के ऊपर चलता है, तो दोनों पिण्डों के सम्पर्क तलों के मध्य कार्य करने वाले घर्षण को गतिक घर्षण कहते हैं। गतिक घर्षण का मान सदैव सीमान्त घर्षण से कम होता है। गतिक घर्षण दो प्रकार का होता है अर्थात् सर्पी (Sliding) घर्षण तथा बेल्लन (Rolling) घर्षण।

(5) **घर्षण के नियम**

(i) घर्षण सदैव गति का विरोध करता है, तथा इसकी दिशा सदैव पिण्ड की गति की दिशा के विपरीत होती है।

(ii) घर्षण का परिमाण सम्पर्क तलों की प्रकृति पर निर्भर करता है।

(iii) घर्षण सम्पर्क तलों के क्षेत्रफल या आकृति पर निर्भर नहीं करता है यदि अभिलम्ब प्रतिक्रिया नियत हो।

(iv) सीमान्त घर्षण का मान f_s, अभिलम्ब प्रतिक्रिया R के समानुपाती होता है, अर्थात् $f_s \propto R$.

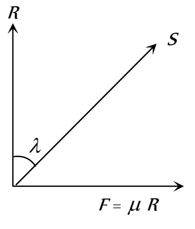
$f_s = \mu_s . R$; $\mu_s = f_s / R$, जहाँ μ_s एक नियतांक है, जिसे स्थैतिक घर्षण गुणांक कहते हैं।

गतिक घर्षण के लिये $\mu_k = \dfrac{f_k}{R}$, जहाँ μ_k गतिक घर्षण गुणांक है।

(6) **घर्षण कोण** : सीमान्त घर्षण और अभिलम्ब प्रतिक्रिया का परिणामी, अभिलम्ब प्रतिक्रिया से जो कोण बनाता है, उसे घर्षण कोण कहते हैं तथा इसे सामान्यतः λ से प्रदर्शित करते हैं।

इस प्रकार α का सीमान्त मान λ है, जबकि घर्षण बल f अधिकतम मान ग्रहण करता है।

$$\tan \lambda = \frac{\text{अधिकतम घर्षण बल}}{\text{अभिलम्ब प्रतिक्रिया}}$$



चूँकि R तथा μR, S के घटक हैं

अतः $S \cos \lambda = R$, $S \sin \lambda = \mu R$

वर्ग करके जोड़ने पर,

$S = R\sqrt{1+\mu^2}$ तथा $\tan \lambda = \mu$,

जहाँ μ घर्षण गुणांक है।

अतः घर्षण गुणांक का मान घर्षण कोण की स्पर्शज्या के बराबर होता है।

घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

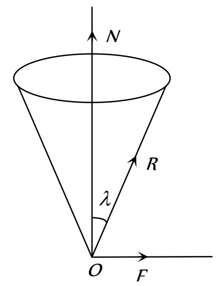
जब एक रुक्ष पिण्ड, दूसरे रुक्ष पिण्ड के ऊपर फिसलने की अवस्था में होता है, तो इस समय लगने वाला घर्षण, सीमांत घर्षण कहलाता है और यह अभिलम्ब प्रतिक्रिया से एक अचर अनुपात में होता है। इस अचर अनुपात को **घर्षण गुणांक** (coefficient of friction) कहते हैं। जिसे μ से प्रदर्शित करते हैं।

अतः $\mu = \tan \lambda = \dfrac{\text{अधिकतम घर्षण बल}}{\text{अभिलम्ब प्रतिक्रिया}} \Rightarrow \mu = \dfrac{F}{R} \Rightarrow F = \mu R,$

जहाँ F सीमान्त घर्षण तथा R अभिलम्ब प्रतिक्रिया है।

μ का मान पिण्डों के पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है। μ का मान सदैव 0 से 1 के मध्य होता है। इसका मान पूर्णतः घर्षणरहित पिण्ड के लिये शून्य होता है।

- **घर्षण शंकु** (Cone of friction) : एक शंकु जिसका शीर्ष दो रुक्ष पिण्डों के सम्पर्क बिन्दु पर, अक्ष अभिलम्ब प्रतिक्रिया के अनुदिश तथा अर्धशीर्ष कोण, घर्षण कोण के बराबर है, घर्षण शंकु कहलाता है।



नतसमतल पर सीमान्त सन्तुलनावस्था (Limiting equilibrium on an inclined plane)

माना W भार का पिण्ड एक नतसमतल, जिसका क्षैतिज से झुकाव α है, पर सीमान्त सन्तुलन की अवस्था में है।

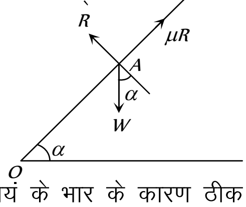
माना R अभिलम्ब प्रतिक्रिया है तथा नतसमतल पर कार्यरत् सीमान्त घर्षण μR है।

अतः पिण्ड तीन बलों R, μR तथा W के अधीन सीमान्त सन्तुलन की अवस्था में होगा।

बलों को तल के अनुदिश तथा तल के लम्बवत् वियोजित करने पर, $\mu R = W \sin \alpha$ तथा $R = W \cos \alpha$

$\Rightarrow \dfrac{\mu R}{R} = \dfrac{W \sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \mu = \tan \alpha$

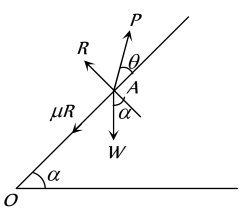
$\Rightarrow \tan \lambda = \tan \alpha \Rightarrow \alpha = \lambda$



अतः, यदि एक पिण्ड नतसमतल पर स्वयं के भार के कारण ठीक फिसलने की अवस्था में हो, तब तल का झुकाव घर्षण कोण के बराबर होता है।

(1) **रुक्ष नतसमतल पर पिण्ड के ऊपर की ओर गति के लिये आवश्यक न्यूनतम बल :** माना W भार का एक पिण्ड बिन्दु A पर है, क्षैतिज से रुक्ष नतसमतल का झुकाव α है तथा घर्षण कोण λ है। माना तल से θ कोण पर कार्यरत् बल P पिण्ड को नतसमतल पर ऊपर की ओर गति कराने के लिये आवश्यक है।

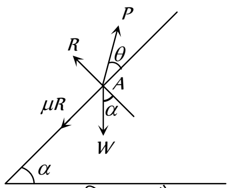
$$P = W \frac{\sin(\alpha + \lambda)}{\cos(\theta - \lambda)}, \quad \{\because \mu = \tan \lambda\}$$



स्पष्टतः जब $\cos(\theta-\lambda)$ अधिकतम है, तब बल P न्यूनतम होगा अर्थात् जब $\cos(\theta-\lambda)=1$ अर्थात् $\theta-\lambda=0$ या $\theta=\lambda$. अतः P का न्यूनतम मान $W\sin(\alpha+\lambda)$ है।

(2) **रुक्ष नतसमतल पर नीचे की ओर गति के लिये आवश्यक न्यूनतम बल :** माना W भार का एक पिण्ड बिन्दु A पर है, क्षैतिज से रुक्ष नतसमतल का झुकाव α है तथा घर्षण कोण λ है। माना तल से θ कोण पर कार्यरत् बल P पिण्ड को नतसमतल पर नीचे की ओर गति कराने के लिए आवश्यक है।

$$P=\frac{W\sin(\lambda-\alpha)}{\cos(\theta-\lambda)}, \qquad [\because \mu=\tan\lambda]$$



स्पष्टतः, जब $\cos(\theta-\lambda)$ अधिकतम है, तब बल P न्यूनतम होगा अर्थात् जब $\cos(\theta-\lambda)=1$ अर्थात् $\theta=\lambda$. अतः P का न्यूनतम मान $W\sin(\lambda-\alpha)$ है।

यदि $\alpha=\lambda$, तब नतसमतल पर रखा पिण्ड सीमांत संतुलन की अवस्था में है और इसकी प्रवृत्ति नीचे की ओर फिसलने की है।

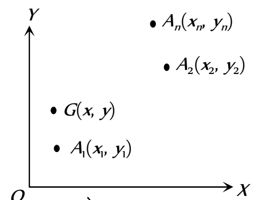
यदि $\alpha<\lambda$, तब नत समतल पर रखे W भार के पिण्ड को नीचे की ओर गति कराने के लिए आवश्यक न्यूनतम बल $W\sin(\lambda-\alpha)$ होता है।

यदि $\alpha=\lambda, \alpha>\lambda$ या $\alpha<\lambda$ तब नतसमतल पर रखे W भार के पिण्ड को ऊपर की ओर गति कराने के लिए आवश्यक न्यूनतम बल $W\sin(\alpha+\lambda)$ होता है।

यदि $\alpha>\lambda$, तब नतसमतल पर रखा पिण्ड, अपने भार और अभिलम्ब प्रतिक्रिया के अधीन नीचे को फिसलेगा।

गुरूत्व केन्द्र (Centre of gravity)

गुरुत्व केन्द्र वह बिन्दु होता है जिस पर किसी पिण्ड या निकाय का सम्पूर्ण भार केन्द्रित होता है। किसी भी निकाय या पिंड का एक और केवल एक गुरूत्व केन्द्र होता है।



यदि $w_1, w_2, ..., w_n$ भार के कण क्रमशः बिन्दुओं $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, ..., $A_n(x_n,y_n)$ पर रखे हों, तो उनके गुरूत्वकेन्द्र G के निर्देशांक $(\bar{x},\bar{y})$ निम्न द्वारा ज्ञात होते हैं

$$\bar{x}=\frac{\sum w_1x_1}{\sum w_1},\ \bar{y}=\frac{\sum w_1y_1}{\sum w_1}.$$

संयुक्त पिंड तथा शेष भाग का गुरूत्व केन्द्र (Centre of gravity of a compound body and remainder)

(1) **संयुक्त पिंड का गुरूत्व केन्द्र** (Centre of gravity of a compound body) : माना किसी पिंड के दो भागों के गुरुत्व केन्द्र G_1 व G_2 हैं तथा इनके भार क्रमशः w_1 व w_2 हैं।

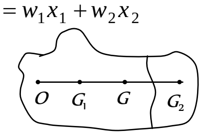
माना G सम्पूर्ण पिंड का गुरूत्व केन्द्र है। तब पिंड का सम्पूर्ण भार (w_1+w_2), बिंदु G पर कार्य करता है।

G_1G_2 को मिलाने पर; बिंदु G, G_1G_2 पर स्थित होगा।

माना G_1G_2 पर कोई स्थिर बिन्दु O है तथा $OG_1=x_1, OG_2=x_2$ तथा $OG=\bar{x}$.

O के परितः आघूर्ण लेने पर, $(w_1+w_2)\bar{x}=w_1x_1+w_2x_2$

या $\bar{x}=\dfrac{w_1x_1+w_2x_2}{w_1+w_2}$.



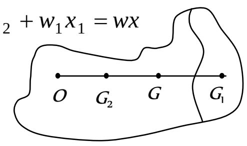
(2) **शेष भाग का गुरूत्व केन्द्र** (Centre of gravity of the remainder) : माना सम्पूर्ण पिंड का भार w है। माना पिंड से w_1 भार का एक भाग B इस प्रकार अलग किया जाता है कि $w-w_1$ भार का भाग A शेष रह जाता है।

माना सम्पूर्ण पिंड का गुरूत्वकेन्द्र G तथा अलग किये गये भाग B का गुरूत्वकेन्द्र G_1 है। माना शेष भाग A का गुरूत्व केन्द्र G है तथा G_1G_2 पर एक बिंदु O है, जिसे मूलबिन्दु माना गया है।

माना $OG_1=x_1, OG=x$, $OG_2=x_2$.

O के परितः आर्घूण लेने पर, $(w-w_1)x_2+w_1x_1=wx$

या $x_2=\dfrac{wx-w_1x_1}{w-w_1}$.



कुछ विशेष स्थितियों मे पिंडों के गुरूत्व केन्द्र की स्थितियाँ (Position of centre of gravity in some special cases)

(1) **एकसमान छड़ का गुरूत्व केन्द्रः** इसका गुरूत्व छड़ के मध्य बिन्दु पर स्थित होता है।

(2) **समान्तर चर्तुभुज का गुरूत्व केन्द्रः** इसका गुरूत्व केन्द्र, विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु पर स्थित होता है।

(3) **त्रिभुजीय समपटल का गुरूत्व केन्द्र :** त्रिभुज का गुरूत्व केन्द्र माध्यिकाओं का प्रतिच्छेद बिंदु अर्थात् केन्द्रक होता है।

(4) एक समचतुष्फलक का गुरूत्वकेन्द्र, उसके शीर्ष को सम्मुख फलक के केंद्र से मिलाने वाली रेखा पर स्थित होता है, तथा इस रेखा को 3 : 1 में विभाजित करता है।

(5) लम्ब वृत्तीय शंकु का गुरूत्व केन्द्र उसके अक्ष पर आधार के केंद्र से $\dfrac{h}{4}$ की दूरी पर होता है तथा इसे 3 : 1 में विभाजित करता है।

(6) खोखले लम्ब वृत्तीय शंकु का गुरूत्व केंद्र उसके अक्ष पर आधार के केन्द्र से $\dfrac{h}{3}$ की दूरी पर होता है तथा इसे 2 : 1 में विभाजित करता है।

(7) खोखले अर्धगोलार्द्ध का गुरूत्व केंद्र सममित त्रिज्या पर, केंद्र से $\dfrac{a}{2}$ दूरी पर (जहाँ a गोलार्द्ध की त्रिज्या है) होता है।

(8) अर्धगोलार्द्ध का गुरूत्व केन्द्र सममित त्रिज्या पर, केन्द्र से $\dfrac{3a}{8}$ दूरी पर (जहाँ a गोलार्द्ध की त्रिज्या है) होता है।

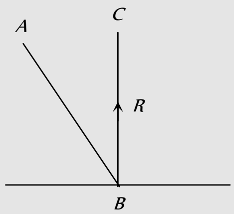
(9) वृत्तीय चाप का गुरूत्व केंद्र समदिश त्रिज्या पर, केन्द्र से $\dfrac{a\sin\alpha}{\alpha}$ दूरी पर होता है जहाँ a वृत्त की त्रिज्या और 2α वृत्तीय चाप के द्वारा केन्द्र पर बना कोण (रेडियन में) है।

(10) वृत्तखण्ड का गुरूत्व केन्द्र सममित त्रिज्या पर, केन्द्र से $\frac{2a}{3}.\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ की दूरी पर होता है, जहाँ a वृत्त की त्रिज्या और 2α वृत्तीय खण्ड के द्वारा केन्द्र पर बना कोण (रेडियन में) है।

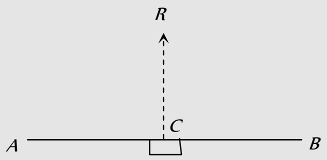
(11) अर्धवृत्ताकार चाप का गुरूत्व केन्द्र सममित त्रिज्या पर, केन्द्र से $\frac{2a}{\pi}$ की दूरी पर होता है, जहाँ a वृत्त की त्रिज्या है।

Tips & Tricks

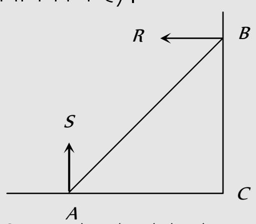
✍ जब एक छड़ AB जिसका एक सिरा B चिकने तल पर है, विरामावस्था में रखी है तब सम्पर्क बिंदु पर तल के अभिलम्ब के अनुदिश प्रतिक्रिया होती है।



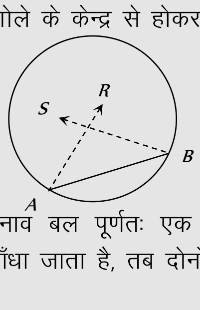
✍ किसी चिकनी खूँटी (peg) पर रखी एक छड़ विरामावस्था में हो, तब सम्पर्क बिन्दु पर प्रतिक्रिया, छड़ के लम्बवत् होती है।



✍ यदि किसी पिंड का एक बिंदु दूसरे पिंड की सतह के सम्पर्क में है, तब सम्पर्क बिंदु पर प्रतिक्रिया सतह के लम्बवत् होती है। उदाहरणार्थ भूमि तथा दीवार के सम्पर्क में रखी सीढ़ी की साम्यावस्था (दीवार तथा भूमि दोनों चिकने हैं)।



✍ जब एक छड़ किसी खोखले गोले के भीतर पूर्णतः विरामावस्था में हो, तब छड़ के सिरों पर प्रतिक्रियाएँ इन बिन्दुओं पर अभिलम्बों के अनुदिश तथा खोखले गोले के केन्द्र से होकर गुजरती है।



✍ किसी डोरी में तनाव बल पूर्णतः एक समान होता है। जब दो डोरियों को एक साथ बाँधा जाता है, तब दोनों भागों में तनाव बल भिन्न-भिन्न होता है।

✍ जब एक भार W किसी डोरी द्वारा लटकाया जाता है तब डोरी में तनाव लटकाये गये भार के बराबर होता है, अर्थात् $T = W$.

✍ किसी डोरी का तनाव पिंड से दूर अपसारी दिशा में तथा डोरी के अनुदिश कार्य करता है।

✍ त्रिभुज ΔABC की भुजाओं BC, CA तथा AB के अनुदिश तीन बल P, Q तथा R कार्यरत् हैं, तब इनका परिणामी

(i) अंतः केन्द्र से होकर गुजरता है, यदि $P+Q+R=0$

(ii) परिकेन्द्र से होकर गुजरता है, यदि

$P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$

(iii) लम्बकेन्द्र से होकर गुजरता है, यदि

$P\sec A + Q\sec B + R\sec C = 0$

(iv) केन्द्रक से होकर गुजरता है, यदि

$P \text{ cosec } A + Q \text{ cosec } B + R \text{ cosec } C = 0$

या $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$.

✍ यदि तीन समदिश बल P, Q, R क्रमशः किसी त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B, C पर कार्यरत् हैं, तब इनका परिणामी

(i) ΔABC के अंतःकेन्द्र पर कार्यरत् होगा, यदि $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$

(ii) ΔABC के परिकेन्द्र पर कार्यरत् होगा, यदि

$$\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$$

(iii) ΔABC के लम्बकेन्द्र पर कार्यरत् होगा यदि

$$\frac{P}{\tan A} = \frac{Q}{\tan B} = \frac{R}{\tan C}$$

(iv) ΔABC के केन्द्रक पर कार्यरत् होगा, यदि $P = Q = R$.

आघूर्ण घूर्णन की प्रवृत्ति को निर्धारित करता है। आघूर्ण के अधिक होने पर घूर्णन गति की प्रवृत्ति अधिक होती है।

✍ **क्षैतिज तल पर न्यूनतम बल** : W भार के किसी पिण्ड को एक रुक्ष नतसमतल के ऊपर गति कराने के लिए आवश्यक न्यूनतम बल $W\sin\lambda$ होता है।

✍ माना w भार के पिण्ड का गुरुत्वकेन्द्र x दूरी पर है। यदि पिण्ड से अलग हुये w_1, w_2, w_3 भारों के भागों के गुरुत्वकेन्द्र क्रमशः x_1, x_2, x_3 दूरियों पर हैं, तब पिण्ड के शेष बचे भाग का गुरुत्व केन्द्र $x_4 = \frac{wx - w_1x_1 - w_2x_2 - w_3x_3}{w - w_1 - w_2 - w_3}$ दूरी पर होगा।

Ordinary Thinking

Objective Questions

बलों का संयोजन एवं वियोजन तथा बलों की साम्यावस्था

1. दो बलों $3P$ तथा $2P$ का परिणामी R है। प्रथम बल को दुगुना करने पर परिणामी भी दुगुना हो जाता है। बलों के मध्य कोण है [MNR 1985; UPSEAT 2000]

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{5\pi}{6}$

2. दो बलों $\vec{P}$ तथा $\vec{Q}$ के परिणामी का परिमाण P है। यदि बल $\vec{P}$ को दुगुना किया जाये, तब $\vec{Q}$ अपरिवर्तित रहता है, तब नया परिणामी है [MNR 1995]

(a) $\vec{P}$ के अनुदिश (b) $\vec{Q}$ के अनुदिश

(c) $\vec{Q}$ से 60^o के कोण पर (d) $\vec{Q}$ से समकोण पर

3. यदि दो बलों $2P$ तथा $\sqrt{2}P$ का परिणामी $\sqrt{10}P$ है, तब इनके मध्य कोण होगा

(a) π (b) $\pi/2$

(c) $\pi/3$ (d) $\pi/4$

4. यदि दो बलों के महत्तम और न्यूनतम परिणामी क्रमशः P और Q हैं, तब इन बलों का परिणामी, जब ये परस्पर लम्बवत् दिशाओं में लगते हैं, निम्न है [Roorkee 1990]

(a) $P+Q$ (b) $P-Q$

(c) $\frac{1}{2}\sqrt{P^2+Q^2}$ (d) $\sqrt{\frac{P^2+Q^2}{2}}$

5. दो समान बल एक बिन्दु पर कार्यरत हैं। यदि इनके परिणामी के परिमाण का वर्ग, इन बलों के परिमाणों के गुणनफल का तीन गुना है, तब बलों के मध्य कोण है

(a) 30^o (b) 45^o

(c) 90^o (d) 60^o

6. एक बल, दो घटकों P तथा Q से समान कोण बनाते हुए वियोजित होता है, तब [MNR 1980]

(a) $P=2Q$ (b) $2P=Q$

(c) $P=Q$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि दो समान बलों के परिणामी का वर्ग, इनके गुणनफल का $(2-\sqrt{3})$ गुना है, तब बलों के मध्य कोण है

(a) 60^o (b) 150^o

(c) 120^o (d) 30^o

8. यदि दो समान बलों का परिणामी इनमें से किसी एक बल के बराबर है, तब बलों के मध्य कोण है

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

9. दो समान बल परस्पर 2α कोण पर झुके हैं, इन बलों का परिणामी जब ये 2β पर कार्यरत् है, से दो गुना है, तब [UPSEAT 1999]

(a) $\cos\alpha = 2\sin\beta$ (b) $\cos\alpha = 2\cos\beta$

(c) $\cos\beta = 2\cos\alpha$ (d) $\sin\beta = 2\cos\alpha$

10. 13 N और $3\sqrt{3}$ N के दो बल एक बिन्दु पर θ कोण पर कार्यरत् हैं। उनका परिणामी 14N का बल है, तो उनके बीच का कोण है

(a) 30^o (b) 60^o

(c) 45^o (d) 90^o

11. यदि दो बल $P+Q$ तथा $P-Q$ परस्पर 2α कोण बनाते हैं तथा इनका परिणामी दोनों बलों के मध्य कोणार्धक से θ कोण बनाता है, तब $\frac{P}{Q}=$

(a) $\frac{\tan\theta}{\tan\alpha}$ (b) $\frac{\tan\alpha}{\tan\theta}$

(c) $\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}$ (d) $\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$

12. किसी बिन्दु पर कार्यरत् तीन बलों 1N, 2N तथा 3N की दिशायें एक समबाहु त्रिभुज की क्रम से ली गयी भुजाओं के समान्तर हैं। इनके परिणामी का परिमाण है [Roorkee Screening 1993]

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}N$ (b) 3N

(c) $\sqrt{3}N$ (d) $\frac{3}{2}N$

13. किसी कण पर कार्यरत बलों के परिमाण 5, 10, 15 तथा 20 N क्रमशः उत्तर, दक्षिण, पूर्व तथा पश्चिम दिशा में हैं, इनके परिणामी का परिमाण है

(a) $15\sqrt{2}N$ (b) $10N$

(c) $25\sqrt{2}N$ (d) $5\sqrt{2}N$

14. किसी बिन्दु पर कार्यरत् तीन बलों $P-Q, P$ तथा $P+Q$ की दिशायें एक समबाहु त्रिभुज की क्रम से ली गयी भुजाओं के समान्तर हैं। इनके परिणामी का परिमाण है

(a) $\sqrt{3}P$ (b) $\sqrt{3}Q$

(c) $3\sqrt{3}P$ (d) $3P$

15. किसी कण पर परस्पर विपरीत दिशा में कार्यरत दो बलों का परिणामी 34 *न्यूटन* है। यदि ये बल एक दूसरे से समकोण पर कार्यरत हों, तब इनके परिणामी का परिमाण 50 *न्यूटन* हो जाता है। बलों के परिमाण हैं

(a) 48, 14 (b) 42, 8

(c) 40, 6 (d) 36, 2

16. किसी बिन्दु पर संतुलन की अवस्था में कार्यरत तीन बलों के परिमाण 30, 60 तथा P हैं। यदि पहले दो बलों के मध्य कोण 60^o है, तब P का मान है [Roorkee 1991]

(a) $30\sqrt{7}$ (b) $30\sqrt{3}$

(c) $20\sqrt{6}$ (d) $25\sqrt{2}$

17. दो बलों P तथा Q, जो θ कोण पर कार्यरत हैं, का परिणामी $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$ है। जब दोनों बल $90^o-\theta$ कोण पर कार्यरत हैं, परिणामी $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$ है, तब $\tan\theta=$ [UPSEAT 2000; SCRA 1995]

(a) $\frac{1}{m}$ (b) $\frac{m+1}{m-1}$

(c) $\frac{m-1}{m+1}$ (d) $\sqrt{1+m^2}$

18. यदि किसी बिन्दु पर कार्यरत तीन बलों का परिमाण P, Q तथा R क्रमशः एक त्रिभुज की भुजाओं BC, CA तथा AB के समान्तर है, तब इनके परिणामी का परिमाण है

(a) $\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$

(b) $\sqrt{P^2+Q^2+R^2-2PQ\cos C-2QR\cos A-2PR\cos B}$

(c) $P+Q+R$

(d) इनमें से कोई नहीं

19. एक बिन्दुगामी दो बलों के परिमाण $P+Q$ तथा $P-Q$ *न्यूटन* हैं। उनकी क्रिया रेखाओं के बीच कोण 135^o है और उनका परिणामी 2 *न्यूटन* का बल है जो कि दूसरे बल की लम्बवत् दिशा में है। तब P और Q के मान क्रमशः निम्न हैं

(a) $P=(\sqrt{2}+1), Q=(\sqrt{2}-1)$

(b) $P=(\sqrt{2}-1), Q=(\sqrt{2}+1)$

(c) $P=(\sqrt{3}+1), Q=(\sqrt{3}-1)$

(d) $P=(\sqrt{3}-1), Q=(\sqrt{3}+1)$

20. माना P तथा Q का परिणामी R है तथा यदि $\frac{P}{3}=\frac{Q}{7}=\frac{R}{5}$, तब P तथा R के मध्य कोण हैं **[BIT Ranchi 1988]**

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{11}{14}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{-11}{14}\right)$

(c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{5\pi}{6}$

21. दो बलों P तथा Q का परिणामी, P से समकोण पर है तथा समान कोण α पर कार्यरत बलों P तथा Q' का परिणामी Q' से समकोण पर है, तब

(a) P, Q, Q' गु. श्रे. में हैं (b) Q, P, Q' गु. श्रे. में हैं

(c) P, Q', Q गु. श्रे. में हैं (d) इनमें से कोई नहीं

22. दो बलों P तथा Q का परिणामी R, P से समकोण पर कार्यरत है तब बलों के मध्य कोण है **[MNR 1993]**

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{P}{Q}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{P}{Q}\right)$

(c) $\sin^{-1}\left(\frac{P}{Q}\right)$ (d) $\sin^{-1}\left(-\frac{P}{Q}\right)$

23. एक बिन्दु पर कार्यरत् दो बलों के परिमाणों का योग 18 है और उनके परिणामी का परिमाण 12 है। यदि कम परिमाण के बल के साथ परिणामी समकोण बनाता है, तब कम परिमाण वाला बल है **[MNR 1987, 1989; UPSEAT 2000]**

(a) 5 (b) 3

(c) 7 (d) 15

24. दो बलों का परिमाण 3, 5 है तथा इनके परिणामी की दिशा छोटे बल से समकोण पर है, तब बड़े बल तथा परिणामी के परिमाणों का अनुपात है

(a) 5 : 3 (b) 5 : 4

(c) 4 : 5 (d) 4 : 3

25. यदि दो बलों P तथा Q का परिणामी $\sqrt{3}Q$ है तथा P की दिशा से 30° का कोण बनाता है, तब

(a) $P=2Q$ (b) $Q=2P$

(c) $P=3Q$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. 16 *न्यूटन* परिमाण के बल का वियोजित भाग $8\sqrt{3}$ *न्यूटन* है। वियोजित भाग की दिशा का, बल की दिशा के साथ झुकाव है

(a) 30^o (b) 60^o

(c) 120^o (d) 150^o

27. तीन बल P, $2P$ तथा $3P$, ΔABC की भुजाओं AB, BC, CA के अनुदिश कार्यरत हैं। माना इन बलों के परिणामी का परिमाण R है तथा यह BC भुजा के साथ θ कोण बनाता है, तब

(a) $R=P\sqrt{3}, \theta=\frac{\pi}{2}$ (b) $R=2P\sqrt{3}, \theta=\frac{\pi}{2}$

(c) $R=P\sqrt{3}, \theta=\frac{\pi}{6}$ (d) $R=2P\sqrt{3}, \theta=\frac{\pi}{6}$

28. निम्न में से किन बलों द्वारा एक कण विरामावस्था में रखा जा सकता है **[SCRA 1994]**

(a) $\uparrow 8N, \uparrow 5N, \downarrow 13N$ (b) $\uparrow 7N, \uparrow 4N, \downarrow 12N$

(c) $\uparrow 5N, \uparrow 8N, \downarrow 10N$ (d) $\uparrow 4N, \uparrow 2\sqrt{5}N, \downarrow 6N$

29. त्रिभुज ABC में, तीन बलों $3\overrightarrow{AB}, 2\overrightarrow{AC}$ तथा $6\overrightarrow{CB}$ के परिमाण क्रमशः भुजाओं AB, AC तथा CB के अनुदिश कार्यरत् हैं। यदि परिणामी AC को D पर मिलता है, तब $DC : AD$ का मान होगा **[MNR 1994]**

(a) 1 : 1 (b) 1 : 2

(c) 1 : 3 (d) 1 : 4

30. यदि 12, 5 तथा 13 इकाई भार के तीन बल किसी बिन्दु पर सन्तुलन में हैं, तब इनमें से पहले दो बलों के मध्य कोण है **[UPSEAT 1998]**

(a) 30^o (b) 45^o

(c) 90^o (d) 60^o

31. 1 और 2 मात्रक के बल, रेखाओं $x=0$ तथा $y=0$ के अनुदिश लगे हैं। उनके परिणामी की क्रिया रेखा का समीकरण निम्न हैं **[MNR 1981; UPSEAT 2000]**

(a) $y-2x=0$ (b) $2y-x=0$

(c) $y+x=0$ (d) $y-x=0$

32. यदि N को दो घटकों में इस प्रकार वियोजित किया जाता है, कि पहला भाग, दूसरे का दो गुना है। तब घटकों के मान हैं **[UPSEAT 2001]**

(a) $5N, 5\sqrt{2}N$ (b) $10N, 10\sqrt{2}N$

(c) $\frac{N}{\sqrt{5}}, \frac{2N}{\sqrt{5}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

33. ΔABC का परिकेन्द्र O है। यदि सन्तुलन की अवस्था में बल P, Q तथा R क्रमशः OA, OB तथा OC के अनुदिश हैं, तब $P:Q:R$ है

(a) $\sin A : \sin B : \sin C$

(b) $\cos A : \cos B : \cos C$

(c) $a\cos A : b\cos B : c\cos C$

(d) $a\sec A : b\sec B : c\sec C$

34. किसी कण पर साम्यावस्था में तीन बल P, Q तथा R कार्यरत् हैं। यदि P तथा Q के मध्य कोण, P तथा R के मध्य कोण का दो गुना है, तब P का मान हैं

(a) $\frac{Q^2+R^2}{R}$ (b) $\frac{Q^2-R^2}{Q}$

(c) $\frac{Q^2-R^2}{R}$ (d) $\frac{Q^2+R^2}{Q}$

35. किसी समतल में एक बिन्दु पर तीन बल *P, Q, R* कार्यरत् हैं। यदि *P* व *Q* तथा *Q* व *R* के मध्य कोण क्रमशः 150^o तथा 120^o हैं, तब साम्यावस्था में बलों *P, Q, R* में अनुपात होगा [UPSEAT 2000; MNR 1991]

(a) 1 : 2 : 3 (b) $1 : 2 : 3^{1/2}$

(c) 3 : 2 : 1 (d) $(3)^{1/2} : 2 : 1$

36. यदि सन्तुलनावस्था में तीन बल *A, B, C* एक बिन्दु पर कार्यरत् हैं तथा *A* व *B*, *B* व *C* तथा *C* व *A* के मध्य कोण क्रमशः 60^o, 150^o तथा 150^o हैं, तब बलों में अनुपात है [IAS (Pre) 1995]

(a) $\sqrt{3} : 1 : 1$ (b) $1 : 1 : \sqrt{3}$

(c) $1 : \sqrt{3} : 1$ (d) $1 : 2.5 : 2.5$

37. यदि दो समान परिमाण के बलों के मध्य कोण α से परिवर्तित होकर $\alpha - \pi/3$ हो जाता है, तब इनके परिणामी का परिमाण पहले का $\sqrt{3}$ गुना हो जाता है। कोण α का मान है [Roorkee Screening 1998]

(a) $\pi/2$ (b) $2\pi/3$

(c) $\pi/4$ (d) $4\pi/5$

38. दो बलों *P* तथा *Q* का परिणामी *R* है। यदि इनमें से एक बल की दिशा विपरीत करने पर परिणामी R' हो जाता है, तब

(a) $R'^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

(b) $R'^2 = P^2 - Q^2 - 2PQ\cos\alpha$

(c) $R'^2 + R^2 = 2(P^2 + Q^2)$

(d) $R'^2 + R^2 = 2(P^2 - Q^2)$

39. *AB, BC* तथा 2*CA* के समानुपाती बल क्रम से त्रिभुज *ABC* की भुजाओ के अनुदिश कार्यरत हैं तब इनके परिणामी का परिमाण तथा दिशा प्रदर्शित होती है [MNR 1981]

(a) $\overrightarrow{CA}$ से (b) $\overrightarrow{AC}$ से

(c) $\overrightarrow{BC}$ से (d) $\overrightarrow{CB}$ से

40. *ABCD* एक समान्तर चतुर्भुज है। एक कण क्रमशः *PA* तथा *PC* के समानुपाती बलों के द्वारा *A* तथा *C* की ओर आकर्षित होता है, तथा *PB* व *PD* के समानुपाती बलों द्वारा *B* तथा *D* से प्रतिकर्षित होता है। इन बलों का परिणामी है

(a) $2\overrightarrow{PA}$ (b) $2\overrightarrow{PB}$

(c) $2\overrightarrow{PC}$ (d) इनमें से कोई नहीं

41. एक कण, तीन बलों *P, Q* तथा *R* द्वारा कार्यरत है। यह सन्तुलन में नहीं होगा, यदि $P : Q : R =$

(a) 1 : 3 : 5 (b) 3 : 5 : 7

(c) 5 : 7 : 9 (d) 7 : 9 : 11

42. किसी कण पर कार्यरत बल 7 *N*, 5*N* तथा 3*N* संतुलनावस्था में हैं, बलों 5*N* तथा 3*N* के मध्य कोण है

(a) 30^o (b) 60^o

(c) 90^o (d) 120^o

43. किसी बिन्दु पर कार्यरत दो बलों का अधिकतम प्रभाव तब प्राप्त होता है, जब इनका परिणामी 4*N* है। यदि ये बल समकोण पर कार्यरत् है तब इनका परिणामी 3*N* है। बलों के परिमाण हैं [AIEEE 2004]

(a) $\left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)N$ तथा $\left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)N$

(b) $(2 + \sqrt{3})N$ तथा $(2 - \sqrt{3})N$

(c) $\left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)N$ तथा $\left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)N$

(d) $(2 + \sqrt{2})N$ तथा $(2 - \sqrt{2})N$

44. दो बलों *P* तथा *Q* का परिणामी $\sqrt{3}Q$, *P* की दिशा से 30^o का कोण बनाता है, तब $\frac{P}{Q} =$

(a) 1 या 2 (b) 3 या 5

(c) 3 या 4 (d) 4 या 5

45. दो व्यक्ति 240 *न्यूटन* का भार इस प्रकार उठाते हैं, कि दो रस्सियाँ भार से जुड़ी हुई हैं। पहली रस्सी ऊर्ध्वाधर से 60^o का कोण तथा दूसरी ऊर्ध्वाधर से 30^o का कोण बनाती है। रस्सियों में तनाव बल है

(a) $120\,N, 120\,N$ (b) $120\,N, 120\sqrt{3}N$

(c) $120\sqrt{3}N, 120\sqrt{3}N$ (d) इनमें से कोई नहीं

46. तीन बल, एक कण को सन्तुलनावस्था में रखते हैं। एक बल पश्चिम की ओर, दूसरा बल उत्तर-पूर्व की ओर तथा तीसरा बल दक्षिण की ओर कार्यरत है। यदि पहला बल 5*N* है, तब शेष दो बल हैं

(a) $5\sqrt{2}N, 5\sqrt{2}N$ (b) $5\sqrt{2}N, 5N$

(c) $5N, 5N$ (d) इनमें से कोई नहीं

47. एक कण तीन बिन्दुओं *A, B* तथा *C* को क्रमशः बलों $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ तथा $\overrightarrow{PC}$ द्वारा इस प्रकार आकर्षित करता है कि इनका परिणामी $\lambda\overrightarrow{PG}$ है, जहाँ *G*, ΔABC का केन्द्रक है। तब $\lambda =$

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) इनमें से कोई नहीं

48. किसी बिन्दु पर कार्यरत 8*N*, 5*N* तथा 4*N* परिमाण के बल संतुलनावस्था में हैं, तब दो छोटे बलों के मध्य कोण है

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{23}{40}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{-23}{40}\right)$

(c) $\sin^{-1}\left(\frac{23}{40}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

49. एक बिन्दु पर परस्पर α कोण बनाने वाले दो बलों *P* तथा *Q* का परिणामी *R* है। बलों $2P$ तथा *Q* का उसी कोण पर लगने पर परिणामी $2R$ है और *P* तथा $2Q$ का उपरोक्त कोण के सम्पूरक कोण (supplementary angle) पर लगने पर भी परिणामी $2R$ है, तब $P : Q : R =$

(a) 1 : 2 : 3 (b) $\sqrt{6} : \sqrt{2} : \sqrt{5}$

(c) $\sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

50. किसी कण पर कार्यरत् दो बलों के परिणामी की दिशा इनमें से एक बल के लम्बवत् है तथा परिमाण दूसरे बल के परिमाण का $\frac{1}{3}$ है। बड़े बल का छोटे बल से अनुपात है [AIEEE 2005]

(a) $3 : 2\sqrt{2}$ (b) $3\sqrt{3} : 2$

(c) $3 : 2$ (d) $4 : 3$

51. *ABCD* एक वर्ग है जिसकी भुजाओं *AB, AD* और *CA* के अनुदिश क्रमशः 2, 3 तथा 5 किग्रा. भार के बल लगे हैं तब परिणामी बल का परिमाण (दशमलव के एक स्थान तक सही) किग्रा. भार में, निम्न है

(a) 1 (b) 2

(c) 1.6 (d) इनमें से कोई नहीं

52. दो बल $P + Q, P - Q$ एक दूसरे से 2α कोण बनाते हैं और उनका परिणामी उनके बीच के कोण के अर्धक से θ कोण बनाता है, तब

(a) $P\tan\theta = Q\tan\alpha$ (b) $P\cot\alpha = Q\cot\theta$

(c) $P\tan\alpha = Q\tan\theta$ (d) इनमें से कोई नहीं

53. यदि दो बल P तथा Q एक कोण पर इस प्रकार कार्यरत् है, कि इनका परिणामी बल R, बल P के बराबर है। अब यदि P को दुगुना किया जाये, तो Q तथा नये परिणामी बल के मध्य कोण है [UPSEAT 1999]

(a) 30^o (b) 60^o

(c) 45^o (d) 90^o

54. W भार का एक मनका (Bead), एक ऊर्ध्वाधर तल में चिकने वृत्तीय तार पर फिसल सकता है। यह एक हल्के धागे द्वारा तार के उच्चतम बिन्दु से बंधा है और धागा संतुलन की अवस्था में तना हुआ है। यदि धागे की लम्बाई, तार की त्रिज्या के बराबर है, तो धागे में तनाव और तार की मनके पर प्रतिक्रिया निम्न है

(a) $W, 2W$ (b) W, W

(c) $W, 3W$ (d) इनमें से कोई नहीं

55. दो बलों P व Q का परिणामी R है। यदि Q की दिशा समान रखते हुये, P की दिशा को उलट दिया जाये, तो परिणामी अपरिवर्तित रहता है। P व Q के बीच कोण है

(a) 90° (b) 60°

(c) 45° (d) 30°

56. एक नतसमतल पर रखे भार W को दो बल P तथा Q जो कि क्रमशः नतसमतल की लम्बाई और आधार के समान्तर लगते हैं, अकेले-अकेले साध सकते हैं, तब $\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} =$

(a) $1/W^2$ (b) $2/W^2$

(c) $3/W^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

57. किसी क्षैतिज रेखा में दो स्थिर बिन्दुओं A तथा B पर एक डोरी ABC के सिरे बँधे हुये है। यदि दिये गये बिन्दु C पर एक भार W बॉध दिया जाये, तब भाग CA में तनाव है (जहाँ त्रिभुज की भुजायें a, b, c तथा क्षेत्रफल Δ है)

(a) $\frac{Wb}{4c\Delta}(a^2 + b^2 + c^2)$ (b) $\frac{Wb}{4c\Delta}(b^2 + c^2 - a^2)$

(c) $\frac{Wb}{4c\Delta}(c^2 + a^2 - b^2)$ (d) $\frac{Wb}{4c\Delta}(a^2 + b^2 - c^2)$

58. बिन्दु O पर कार्यरत् बलों M तथा N के मध्य कोण 150° है। इनका O पर कार्यरत् परिणामी जिसका परिमाण 2 इकाई है, M के लम्बवत् दिशा में है। तब इसी मात्रक में M तथा N के परिमाण हैं [BIT Ranchi 1993]

(a) $2\sqrt{3}, 4$ (b) $\sqrt{\frac{3}{2}}, 2$

(c) 3, 4 (d) 4, 5

59. यदि P तथा $2P$ परिमाण के दो बलों का परिणामी P पर लम्ब है, तो बलों के मध्य कोण है [Roorkee 1997]

(a) $2\pi/3$ (b) $3\pi/4$

(c) $4\pi/5$ (d) $5\pi/6$

60. दो बलों X तथा Y का परिणामी F है तथा X की दिशा में F के वियोजित भाग का परिमाण Y है, तब दोनों बलों के मध्य कोण है

(a) $\sin^{-1}\sqrt{\frac{X}{2Y}}$ (b) $2\sin^{-1}\sqrt{\frac{X}{2Y}}$

(c) $4\sin^{-1}\sqrt{\frac{X}{2Y}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

61. अचर परिमाण के दो बलों के महत्तम तथा न्यूनतम परिणामी क्रमशः F तथा G है। जब बल 2α के कोण पर कार्य करते हैं, तो उनके परिणामी का परिमाण है [UPSEAT 2001]

(a) $\sqrt{F^2\cos^2\alpha + G^2\sin^2\alpha}$ (b) $\sqrt{F^2\sin\alpha + G^2\cos^2\alpha}$

(c) $\sqrt{F^2 + G^2}$ (d) $\sqrt{F^2 - G^2}$

62. क्षैतिज से θ कोण पर झुके हुये नतसमतल पर रखे m द्रव्यमान के सूक्ष्म पिण्ड पर एक क्षैतिज बल F कार्यरत् है। यदि F, P को संतुलन में रखने के लिये पर्याप्त है, तो F का परिमाण है [BIT Ranchi 1993]

(a) $mg\cos^2\theta$ (b) $mg\sin^2\theta$

(c) $mg\cos\theta$ (d) $mg\tan\theta$

समान्तर बल, आघूर्ण और बलयुग्म

1. किसी त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B तथा C पर तीन समदिश समान्तर बल कार्यरत हैं तथा क्रमशः लम्बाईयों BC, AC तथा AB के समानुपाती हैं, बल का केन्द्र है [MNR 1980]

(a) केन्द्रक पर (b) परिकेन्द्र पर

(c) अंतःकेन्द्र पर (d) इनमें से कोई नहीं

2. तीन बल P, Q, R; ΔABC की भुजाओं के अनुदिश क्रम से कार्यरत हैं। यदि इनका परिणामी केन्द्रक से होकर गुजरता है, तब

(a) $P + Q + R = 0$

(b) $\frac{P}{a} + \frac{Q}{b} + \frac{R}{c} = 0$

(c) $\frac{P}{\cos A} + \frac{Q}{\cos B} + \frac{R}{\cos C} = 0$

(d) इनमें से कोई नहीं

3. त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA, AB पर तीन बिन्दु P, Q, R इस प्रकार हैं कि $BP : PC = CQ : QA = AR : RB = m : n$. यदि Δ, त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल प्रदर्शित करता है, तब बल $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{CR}$ एक बलयुग्म में परिवर्तित होते हैं, जिसका आघूर्ण है

(a) $2\frac{m+n}{m-n}\Delta$ (b) $2\frac{n-m}{n+m}\Delta$

(c) $2(m^2 - n^2)\Delta$ (d) $2(m^2 + n^2)\Delta$

4. त्रिभुज ΔABC की भुजाओं BC, CA, AB के अनुदिश लगे बलों P, Q, R का परिणामी त्रिभुज के परिकेन्द्र (Circumcentre) से होकर जाता है, तब

(a) $P\sin A + Q\sin B + R\sin C = 0$

(b) $P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$

(c) $P\sec A + Q\sec B + R\sec C = 0$

(d) $P\tan A + Q\tan B + R\tan C = 0$

5. P परिमाण के दो असमदिश समान्तर बलों का परिणामी, जो कि प्रत्येक बल से p दूरी पर कार्यरत् है, है

(a) बल P (b) बल युग्म $\phi.P$

(c) बल $2P$ (d) बल $\frac{P}{2}$

6. किसी तल में तीन संरेखीय बिन्दुओं A, B, C के परितः समतलीय बलों (संतुलनावस्था में नहीं) के निकाय के आघूर्ण G_1, G_2, G_3 हैं, तब

(a) $G_1.AB + G_2.BC + G_3.AC = 0$

(b) $G_1.BC + G_2.CA + G_3.AB = 0$

(c) $G_1.CA + G_2.AB + G_3.BC = 0$

(d) इनमें से कोई नहीं

7. दो समदिश समान्तर बलों P व Q का परिणामी बिन्दु O से गुजरता है। जब Q तथा R को क्रमशः P तथा Q से प्रतिस्थापित किया जाता है। तब भी परिणामी O से गुजरता है। तो

(a) P, Q, R गु.श्रे. में हैं (b) Q, P, R गु.श्रे. में हैं

(c) R, P, Q गु.श्रे. में हैं (d) P, Q, R स.श्रे. में हैं

8. दो समतलीय बल युग्म, जिनका आघूर्ण समान हैं

(a) एक दूसरे को संतुलित करते हैं

(b) समतुल्य हैं

(c) समतुल्य होना आवश्यक नही है

(d) इनमें से कोई नहीं

9. एक पिण्ड के बिन्दुओं A और B पर दो समदिश समान्तर बल क्रमशः P और $3P$ लगे हैं। यदि बलों को परस्पर बदल दिया जाये, तो उनके परिणामी का क्रिया बिन्दु निम्न दूरी से विस्थापित हो जायेगा [MNR 1986]

(a) $\frac{1}{2}AB$ (b) $\frac{1}{3}AB$

(c) $\frac{1}{4}AB$ (d) $\frac{3}{4}AB$

10. तीन समदिश समान्तर बल P, Q, R त्रिभुज ABC के कोनों A, B, C पर कार्यरत् हैं। यदि इन बलों का परिणामी ΔABC के अंतःकेन्द्र से होकर गुजरता है, तब

(a) $\frac{P}{a}+\frac{Q}{b}+\frac{R}{c}=0$ (b) $Pa+Qb+Rc=0$

(c) $\frac{P}{a}=\frac{Q}{b}=\frac{R}{c}$ (d) $Pa=Qb=Rc$

11. तीन बल P, Q, R; त्रिभुज ABC की क्रम से ली गयी भुजाओं BC, CA, AB के अनुदिश कार्यरत हैं। यदि इनका परिणामी ΔABC के अंतःकेन्द्र से होकर गुजरता है, तब [SCRA 1999]

(a) $P+Q+R=0$ (b) $\frac{P}{a}+\frac{Q}{b}+\frac{R}{c}$

(c) $aP+bQ+cR=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. यदि दो असमदिश समान्तर बल, जिनके परिमाण 10 N तथा 16 N हैं, का परिणाम छोटे बल की क्रिया रेखा से 24 सेमी दूरी पर स्थित रेखा के अनुदिश कार्यरत है। तब बलों की क्रिया रेखा के मध्य दूरी है

(a) 12 सेमी (b) 8 सेमी

(c) 9 सेमी (d) 18 सेमी

13. यदि दो समदिश समान्तर बलों P तथा Q के परिणामी की स्थिति अपरिवर्तित रहती है, जबकि P तथा Q की स्थितियों में परस्पर परिवर्तन किया जाये, तब

(a) $P=Q$ (b) $P=2Q$

(c) $2P=Q$ (d) इनमें से कोई नहीं

14. तीन समान्तर बल P, Q, R किसी छड़ के एक सिरे से 2 मी, 8 मी तथा 6मी की दूरियों पर स्थित बिन्दुओं क्रमशः A, B, C पर कार्यरत हैं। यदि छड़ सन्तुलनावस्था में है, तब $P:Q:R=$

(a) $1:2:3$ (b) $2:3:1$

(c) $3:2:1$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. दो समदिश समान्तर बलों का परिणामी 12N है। बलों के बीच की दूरी 18 मीटर है। यदि एक बल 4N है, तब परिणामी की छोटे बल से दूरी है [UPSEAT 2002]

(a) 4 मीटर (b) 8 मीटर

(c) 12 मीटर (d) इनमें से कोई नहीं

16. दो बल, जिनके परिमाण 12N है, एक बलयुग्म बनाते हैं तथा बलयुग्म की भुजा 8 मी है। यदि इनमें से एक बल 4N है, तब छोटे बल से परिणामी की दूरी है

(a) 8N (b) 16N

(c) 12N (d) 4N

17. तीन समान समदिश समान्तर बल, जो त्रिभुज के शीर्षों पर कार्यरत हैं, का परिणामी क्रियारत होगा

(a) अंतःकेन्द्र पर (b) परिकेन्द्र पर

(c) लम्बकेन्द्र पर (d) केन्द्रक पर

18. यदि क्रम से ली गई त्रिभुज की भुजाओं के अनुदिश कार्यरत बल, एक बलयुग्म के समतुल्य हैं, तब बल होंगे

(a) समान

(b) त्रिभुज की भुजाओं के समानुपाती

(c) संतुलनावस्था में

(d) समान्तर श्रेणी में

19. यदि दो समदिश समान्तर बलों $\frac{P}{Q}$ *न्यूटन* तथा $\frac{Q}{P}$ *न्यूटन* का परिणामी 2 *न्यूटन* हो, तो

(a) $P=Q$ (b) $P=2Q$

(c) $2P=Q$ (d) इनमें से कोई नहीं

20. दो समान्तर बल,जिनकी क्रिया रेखा समान नहीं है, एक बलयुग्म का निर्माण करते हैं, यदि वे हैं [MNR 1978]

(a) समदिश तथा असमदिश (b) समदिश तथा समान

(c) असमान तथा असमदिश (d) समान तथा असमदिश

21. किसी तल में असमान्तर बलों का परिणामी तथा एक बलयुग्म सदैव बनाते हैं

(a) एक एकल बल (b) एक बलयुग्म

(c) दो बल (d) इनमें से कोई नहीं

22. दो समदिश समान्तर बल P तथा $3P$, 40 सेमी की दूरी पर हैं। यदि P की दिशा विपरीत कर दी जायें तब इनका परिणामी निम्न दूरी पर स्थानान्तरित हो जायेगा [Roorkee Screening 1998]

(a) 30 सेमी (b) 40 सेमी

(c) 50 सेमी (d) 60 सेमी

23. माना एक बल P, सरल रेखा AB द्वारा प्रदर्शित होता है तथा O कोई बिन्दु है। तब O के परितः P के आघूर्ण का परिमाण निम्न में से किसके द्वारा व्यक्त होता है

(a) ΔAOB (b) $2\Delta AOB$

(c) $3\Delta AOB$ (d) $\left(\frac{1}{2}\right)\Delta AOB$

24. A तथा B पर कार्य कर रहे दो समान्तर बलों का परिणामी C पर कार्यरत् है, जब बल समदिश हैं तथा D पर कार्यरत् है, जब बल असमदिश हैं। यदि $P>Q$, तब $CD=$

(a) $\frac{PQ}{P^2-Q^2}AB$ (b) $\frac{2PQ}{P^2-Q^2}AB$

(c) $\frac{2PQ}{P^2+Q^2}AB$ (d) इनमें से कोई नहीं

25. दो समदिश समान्तर बल 5N तथा 15 N एक भार रहित छड़ के A तथा B दो बिन्दुओं पर, जो परस्पर 6 मीटर की दूरी पर हैं, लगे हैं, उनके परिणामी बल और इनके आरोपित होने के बिन्दु की A से दूरी क्रमशः होगी [Roorkee Screning 1993]

(a) $10\,N$,4.5 मीटर (b) $20\,N$,4.5 मीटर

(c) $20\,N$,1.5 मीटर (d) $10\,N$,15 मीटर

26. एक उत्तोलक (lever) जिसकी लम्बाई 1 मीटर तथा भार 4 ग्राम है, के सिरों से 10 ग्राम तथा 2 ग्राम के दो भार लटके हुये हैं। उत्तोलक पर उस बिन्दु की 10 ग्राम के भार से दूरी, जिसके परितः यह सन्तुलन में होगा, है

(a) 5 सेमी (b) 25 सेमी

(c) 45 सेमी (d) 65 सेमी

27. किसी समकोण त्रिभुज ABC में $\angle A = 90^o$ तथा भुजायें a, b, c क्रमशः 5 सेमी, 4 सेमी तथा 3 सेमी हैं। यदि शीर्षों A, B तथा C के परितः बल के आघूर्ण क्रमशः 0, 9 तथा 16 (न्यूटन-सेमी में) हैं, तब $\vec{F}$ का परिमाण है [AIEEE 2004]

(a) 9 (b) 4
(c) 5 (d) 3

28. यदि समकोणीय कार्तीय निर्देशांक में बिन्दु (2, 3) पर X तथा Y अक्ष की धनात्मक दिशा के समान्तर क्रमशः $6W$ तथा $5W$ बल कार्य कर रहे हैं, तब मूलबिन्दु के परितः परिणामी बल का आघूर्ण है

(a) $8W$ (b) $-3W$
(c) $3W$ (d) $-8W$

29. एक मनुष्य एक हथौड़े को अपने कंधे पर रखे हुये है और उसके हल्के हत्थे के दूसरे छोर को अपने हाथ में पकड़े हुए है। यदि वह कन्धे पर हत्थे की टेक के बिन्दु को बदलता है और यदि इस बिन्दु की हाथ से दूरी x है, तब उसके कन्धे पर दबाव निम्न के समानुपाती होगा [Roorkee 1992; UPSEAT 2001]

(a) x (b) x^2
(c) $\frac{1}{x}$ (d) $\frac{1}{x^2}$

30. 4 मी लम्बी छड़ जो केन्द्र के परितः घूम सकती है, के प्रत्येक सिरे पर 1 किग्रा के दो पिण्ड संलग्न है। छड़ पर एक बलयुग्म आरोपित करने पर, यदि निकाय का केन्द्र के परितः कोणीय त्वरण 1 रेडियन/से² है, तब बल का परिमाण है [UPSEAT 2002]

(a) $2N$ (b) $4N$
(c) $1N$ (d) इनमें से कोई नहीं

31. एक पिण्ड के बिन्दुओं A तथा B पर दो समदिश समान्तर बल P तथा Q लगे हैं। यदि P तथा Q को परस्पर बदल दिया जाये, तो दिखाइयें कि उनका परिणामी AB के अनुदिश दूरी d तक विस्थापित हो जाता है, जहाँ $d =$

(a) $\frac{P+Q}{P-Q}AB$ (b) $\frac{2P+Q}{2P-Q}AB$
(c) $\frac{P-Q}{P+Q}AB$ (d) $\frac{P-Q}{2P+Q}AB$

32. दो असमदिश समान्तर बल 5 मी की दूरी पर स्थित बिन्दुओं पर कार्यरत हैं। यदि परिणामी बल $9N$, बड़े बल से 10 मी की दूरी पर कार्यरत है, तब

(a) $P = 16\,N, Q = 7\,N$
(b) $P = 15\,N, Q = 6\,N$
(c) $P = 27\,N, Q = 18\,N$
(d) $P = 18\,N, Q = 9\,N$

33. $\sqrt{5}$ मात्रक का बल रेखा $\frac{(x-3)}{2} = \frac{(y-4)}{-1}$ के अनुदिश कार्यरत् है। बल का बिन्दु (4,1) के सापेक्ष z-अक्ष की दिशा में आघूर्ण निम्न है [UPSEAT 2000]

(a) 0 (b) $5\sqrt{5}$
(c) $-\sqrt{5}$ (d) 5

34. खम्बे के आधार से इस पर स्थित किसी बिन्दु B की दूरी कितनी होनी चाहिये, कि दी गई लम्बाई की रस्सी AB, जो बिन्दु B से जुड़ी है, को धरातल पर खड़ा व्यक्ति दूसरे सिरे पर दिये गये बल से खींचे तो इसके गिराने की प्रवृत्ति अधिकतम हो

(a) AB (b) $AB/2$
(c) $AB/\sqrt{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

35. यदि दो असमदिश समान्तर बल P तथा Q ($P > Q$) जो एक दूसरे से d दूरी पर कार्यरत हैं, को S बढ़ा दिया जाता है, तब परिणामी का क्रिया बिन्दु कितनी दूरी पर खिसक जायेगा

(a) $\frac{d}{P-Q}$ (b) $\frac{S}{P-Q}$
(c) $\frac{Sd}{P-Q}$ (d) $\frac{S}{d(P-Q)}$

36. एक बलयुग्म का आघूर्ण $\vec{G}$ है तथा बल $\vec{P}$ एक बलयुग्म का निर्माण करता है। यदि $\vec{P}$ एक समकोण से घूमता है, तब निर्मित बलयुग्म का आघूर्ण $\vec{H}$ है। यदि बल $\vec{P}$ को α कोण से घुमा दिया जाये, तब बलयुग्म का आघूर्ण हो जायेगा [AIEEE 2003]

(a) $G\sin\alpha - H\cos\alpha$
(b) $H\cos\alpha + G\sin\alpha$
(c) $G\cos\alpha + H\sin\alpha$
(d) $H\sin\alpha - G\cos\alpha$

37. भुजा a के वर्ग $ABCD$ की भुजाओं AB, BC, CD तथा DA के अनुदिश लगे हुये 4, 3, 4 तथा 3 मात्रक के बलों का परिणामी निम्न होगा

(a) वर्ग के केन्द्र से जाने वाला, $5\sqrt{2}$ मात्रक का बल
(b) आघूर्ण $7a$ का एक बल युग्म
(c) शून्य बल
(d) इनमें से कोई नहीं

38. तीन समदिश समान्तर बल त्रिभुज ABC के शीर्ष बिन्दुओं पर कार्यरत् हैं। इन बलों का परिणामी त्रिभुज के परिकेन्द्र से होकर गुजरता है, यदि [Roorkee 1995]

(a) $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$ (b) $P = Q = R$
(c) $P + Q + R = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

39. बिन्दुओं A तथा B पर कार्यरत् दो असमदिश समान्तर बल एक बलयुग्म बनाते हैं, जिसका आघूर्ण G है। यदि इनकी क्रिया रेखा एक समकोण से घुमा दी जायें तब वे H आघूर्ण का बलयुग्म बनाते हैं। जब दोनों AB से समकोण पर कार्यरत् हैं, तब वे निम्न आघूर्ण का बलयुग्म बनायेंगे

(a) GH (b) $G + H$
(c) $\sqrt{G^2 + H^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

40. A व B दो समदिश समान्तर बल हैं। एक आघूर्ण युग्म A व B के तल पर स्थित है तथा उनमें संग्रहित है। संयोजन के बाद A व B का परिणामी किस दूरी द्वारा विस्थापित होगा [AIEEE 2005]

(a) $\frac{H}{2(A+B)}$ (b) $\frac{H}{A-B}$
(c) $\frac{2H}{A-B}$ (d) $\frac{H}{A+B}$

समतलीय बलों का सन्तुलन

1. 15 सेमी लम्बाई की एकसमान छड़, एक स्थिर बिन्दु से 9 तथा 12 सेमी लम्बी दो डोरियों के सहारे, जो उसके सिरों से बँधी हैं, लटकायी जाती है। यदि छड़ का ऊर्ध्वाधर से झुकाव θ है, तो $\sin\theta =$

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{8}{9}$
(c) $\frac{19}{20}$ (d) $\frac{24}{25}$

2. एक ही तल में 'a' दूरी पर स्थित बिन्दुओं A तथा B से l लम्बाई की एक डोरी बँधी हुई है। एक W भार का वलय डोरी पर फिसल सकता है तथा एक क्षैतिज बल P इस प्रकार आरोपित किया गया है, कि वलय B के ऊर्ध्वाधरतः नीचे साम्यावस्था में हो। डोरी में तनाव बल है

(a) $\frac{aW}{l}$ (b) laW

(c) $\frac{W(l^2+a^2)}{2l^2}$ (d) $\frac{2W(l^2+a^2)}{2a^2}$

3. क्षैतिज तल में 13 मीटर दूरी पर स्थित दो बिन्दुओं से 5 मीटर तथा 12 मीटर लम्बाई की दो डोरियों के सहारे 6.5 कि.ग्रा. द्रव्यमान का एक पिण्ड लटका हुआ है। डोरी का तनाव बल (कि.ग्रा. भार में) है

(a) 3,5 (b) 2.5, 6

(c) 4, 5 (d) 3, 4

4. r त्रिज्या तथा W भार का एक गोला चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे विराम में है। l लम्बाई की एक डोरी, जिसका एक सिरा दीवार के किसी बिन्दु पर तथा दूसरा गोले की सतह से जुड़ा हुआ है, तब डोरी में तनाव बल है

(a) $\frac{W(l-r)}{\sqrt{(l^2+2lr)}}$ (b) $\frac{W(l-r)}{l+r}$

(c) $\frac{W(l+r)}{\sqrt{(l^2+2lr)}}$ (d) इनमें से कोई नही

5. पाँच बलों वाला एक निकाय, जिसके बलों की दिशायें तथा उनका परिमाण स्वेच्छा से लिये जा सकते हैं, n बलों के संगामी होने पर अवश्य ही असन्तुलन में होगा, जबकि [Roorkee Screening 1990]

(a) $n=2$ (b) $n=3$

(c) $n=4$ (d) $n=5$

6. भार W और लम्बाई $2l$ की एक समान छड़, त्रिज्या r के एक चिकने गोलीय प्याले के भीतर संतुलन की अवस्था में रखी है। छड़ क्षैतिज से निम्न कोण पर झुकी हुई है [Roorkee Screening 1997]

(a) 0 (b) $\pi/4$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{l}{r}\right)$ (d) $\frac{l}{\sqrt{(r^2-l^2)}}$

7. एक दृढ़ पिण्ड पर तीन बल कार्यरत् हैं। यदि बल साम्यावस्था में हैं, तो वे बल होंगे

(a) समान्तर (b) एक बिन्दुगामी

(c) एक बिन्दुगामी या समान्तर (d) सभी विकल्प सही हैं

8. यदि समतलीय बलों का निकाय एक दृढ़ पिण्ड पर कार्यरत है, जिन्हें परिमाण व दिशा में क्रमशः एक बहुभुज की भुजाओं द्वारा निरूपित किया जाता है, तो यह निकाय समतुल्य (Equivalent) होगा [MNR 1995]

(a) एक एकल शून्येतर (non-zero) बल के

(b) एक शून्य बल के

(c) एक बलयुग्म, जिसका आघूर्ण बहुभुज के क्षेत्रफल के बराबर है

(d) एक बलयुग्म के जिसका आघूर्ण बहुभुज के क्षेत्रफल का दो गुना है

9. तीन समतलीय बल, प्रत्येक P के बराबर हैं, एक बिन्दु पर कार्यरत हैं। मध्य में स्थित बल, शेष दोनों बलों से 60^o का कोण बनाता है। यदि मध्य बल के विपरीत दिशा में स्थित बिन्दु पर Q बल आरोपित करने पर सन्तुलनावस्था प्राप्त होती है, तब

(a) $P=Q$ (b) $P=2Q$

(c) $2P=Q$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. 2 मीटर लम्बाई की एक समान छड़ ABC, बिन्दु A पर एक चिकनी दीवार के सहारे और बिन्दु B पर एक चिकनी खूंटी के सहारे संतुलन की अवस्था में टिकी हुई है। यदि B की दीवार से दूरी 0.3 मीटर है, तब [Roorkee Screening 1996]

(a) $AB<0.3$ मीटर (b) $AB<1.0$ मीटर

(c) $AB>0.3$ मीटर (d) $AB>1.0$ मीटर

11. एक समरूप छड़ AB, जिसकी लम्बाई 17 मीटर तथा द्रव्यमान 120 किग्रा है, का एक सिरा चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे तथा दूसरा सिरा एक चिकने क्षैतिज फर्श पर है। यह सिरा 8 मीटर लम्बी एक जीवा द्वारा, दीवार के तल पर एक खूँटी से बंधा हुआ है। जीवा का तनाव बल है

(a) 32 किग्रा भार (b) 16 किग्रा भार

(c) 64 किग्रा भार (d) 8 किग्रा भार

12. एक समान छड़ AB, जिसकी लम्बाई a है का एक सिरा, एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर रखा है और दूसरा सिरा लम्बाई l की डोरी द्वारा दीवार के किसी बिन्दु से बंधा है जो कि B के ऊर्ध्वाधरतः ऊपर है। यदि छड़ दीवार से θ कोण बनाते हुये सन्तुलन में है, तब $\cos^2\theta =$

(a) $(l^2-a^2)/a^2$ (b) $(l^2-a^2)/2a^2$

(c) $(l^2-a^2)/3a^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB व AC के अनुदिश कार्यरत् दो बलों $\sec B$ व $\sec C$ का परिणामी AD के अनुदिश कार्यरत बल है, जहाँ D है [MNR 1995]

(a) BC का मध्य बिन्दु

(b) A से BC पर डाला गया लम्ब पाद

(c) D, BC को $\cos B : \cos C$ के अनुपात में विभाजित करता है

(d) D, BC को $\cos C : \cos B$ के अनुपात में विभाजित करता है

14. तीन समतलीय बल, प्रत्येक का भार 10 कि.ग्रा. है, एक बिन्दु पर कार्यरत् है। यदि इनकी क्रिया रेखायें समान कोण बनाती हैं, तब इनका परिणामी बल होगा [UPSEAT 1999]

(a) शून्य (b) $5\sqrt{2}$

(c) $10\sqrt{2}$ (d) 20

15. 3 सेमी त्रिज्या के वृत्ताकार वलय को इसके केन्द्र से 4 सेमी ऊपर परिधि के समान अंतरालों पर बँधी चार डोरियों द्वारा लटकाया गया है। यदि दो क्रमागत डोरियों के मध्य कोण θ है, तब $\cos\theta$ का मान है [AMU 2005]

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{4}{25}$

(c) $\frac{16}{25}$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. एक समरूप त्रिभुजीय समपटल जिसकी भुजायें 3 सेमी, 4 सेमी तथा 5 सेमी हैं, सबसे बड़ी भुजा के मध्य बिन्दु से एक डोरी द्वारा लटकी है। साम्यावस्था में इस भुजा का ऊर्ध्वाधर से झुकाव निम्न है [UPSEAT 1999]

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\right)$ (b) $\sin^{-1}\left(\frac{12}{25}\right)$

(c) $\cos^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

17. यदि दो परस्पर लम्बवत् दिशाओं के अनुदिश समतलीय बलों के निकाय के वियोजित भागों का योग शून्य है, तब दिये गये बिन्दु के परितः बलों के आघूर्णों का योग है

(a) सदैव शून्य (b) सदैव धनात्मक

(c) सदैव ऋणात्मक (d) कोई भी मान हो सकता है

18. एक समकोण त्रिभुजाकार सम पटल ऐसा है कि समकोण बनाने वाली भुजाओं में से एक दूसरे की तिगुनी हैं। त्रिभुजीय समपटल को समकोण पर एक डोरी द्वारा बाँधकर लटका दिया जाता हैं। संतुलन की अवस्था में त्रिभुज के कर्ण द्वारा ऊर्ध्वाधर से बनाया गया कोण निम्न है

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (b) $\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

(c) 60^o (d) इनमें से कोई नहीं

19. $2a$ लम्बाई की एक समान छड़ चिकने ऊर्ध्वाधर तल के सहारे तथा तल से h दूरी पर एक चिकनी खूँटी पर साम्यावस्था में रखी है। यदि ऊर्ध्वाधर से छड़ का झुकाव θ है, तब $\sin\theta =$ [MNR 1996]

(a) $\frac{h}{a}$ (b) $\frac{h^2}{a^2}$

(c) $\frac{a}{h}$ (d) $\frac{a^2}{h^2}$

घर्षण

1. एक रूक्ष समतल क्षैतिज से α कोण पर झुका हुआ है। एक पिण्ड स्वयं के भार के कारण ठीक फिसलने की अवस्था में है, घर्षण कोण है [BIT Ranchi 1994]

(a) $\tan^{-1}\alpha$ (b) α

(c) $\tan\alpha$ (d) 2α

2. क्षैतिज से α कोण पर झुके नत समतल पर एक कण विराम में है। घर्षण कोण λ है। कण संतुलन में रहेगा यदि और केवल यदि [UPSEAT 2000; MNR 1991]

(a) $\alpha > \lambda$ (b) $\alpha \ge \lambda$

(c) $\alpha \le \lambda$ (d) $\alpha < \lambda$

3. घर्षण गुणांक (μ) तथा घर्षण कोण (λ) में सम्बन्ध है

(a) $\mu = \cos\lambda$ (b) $\mu = \sin\lambda$

(c) $\mu = \tan\lambda$ (d) $\mu = \cot\lambda$

4. एक रूक्ष नत समतल का क्षैतिज से झुकाव 45^o और $\mu = 0.5$ है तो नत समतल के समान्तर लगने वाले उस न्यूनतम बल का किग्रा भार में परिमाण, जो कि 4 किग्रा के पिण्ड को ऊपर की ओर खींच सकेगा, है

(a) $3\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}$

(c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. क्षैतिज से α कोण पर झुके रूक्ष समतल, जिसका घर्षण गुणांक μ है, पर W भार का एक पिण्ड विरामावस्था में है। पिण्ड को ऊपर की ओर खींचने के लिये अभीष्ट न्यूनतम बल है

(a) $2W\sin(\alpha+\lambda)$ (b) $W\sin(\alpha+\lambda)$

(c) $W\sin(\alpha-\lambda)$ (d) $2W\sin(\alpha-\lambda)$

6. रूक्ष क्षैतिज समतल पर रखे W भार के पिंड की गति के लिए आवश्यक न्यूनतम बल होगा

(a) $W\sin\lambda$ (b) $W\cos\lambda$

(c) $W\tan\lambda$ (d) $W\cot\lambda$

7. एक पिण्ड, जिसका भार 4 किग्रा है, क्षैतिज से 30^o का कोण बनाते हुये रखा है। यह सीमांत सन्तुलन की अवस्था में है तब घर्षण गुणांक का मान है

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\sqrt{3}$

(c) $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

8. किसी रूक्ष नतसमतल पर एक भार W, एक बल P, जो या तो तल के अनुदिश या क्षैतिजतः कार्यरत् है, के द्वारा रखा गया है। घर्षण कोण ϕ के लिये अनुपात $\frac{P}{W}$ है

(a) $\tan\phi$ (b) $\sec\phi$

(c) $\sin\phi$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. एक छड़ AB जिसका भार W है, एक सीढ़ी की तरह रखी है। छड़ AB का ऊपरी सिरा A चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे तथा निचला सिरा B रूक्ष क्षैतिज समतल पर है। यदि छड़ ठीक फिसलने की अवस्था के बिन्दु पर है, तब A पर प्रतिक्रिया का मान है (μ घर्षण गुणांक है)

(a) μW (b) W

(c) B पर अभिलंब प्रतिक्रिया (d) W/μ

10. एक पिण्ड एक रूक्ष नतसमतल (आनत समतल) पर साम्यावस्था में है और उसका घर्षण गुणांक $\frac{1}{\sqrt{3}}$ है। यदि समतल का आनत कोण धीरे-धीरे बढ़ाया जाये तो नीचे की ओर फिसलने वाले बिन्दु पर पिण्ड के पहुँचने पर यह कोण होगा [MNR 1995]

(a) 15^o (b) 30^o

(c) 45^o (d) 60^o

11. 40 किग्रा भार का एक पिण्ड एक रूक्ष क्षैतिज समतल पर, जिसका घर्षण गुणांक 0.25 है, विरामावस्था में है। वह न्यूनतम क्षैतिज बल जो कि पिण्ड को खींच सकेगा, निम्न है

(a) 10 किग्रा भार (b) 20 किग्रा भार

(c) 30 किग्रा भार (d) 40 किग्रा भार

12. एक अर्धगोलीय कोश (Hemi spherical shell) एक रूक्ष नतसमतल पर, जिसका घर्षण कोण λ है, विरामावस्था में है। रिम (Rim) के समतल आधार का क्षैतिज से झुकाव निम्न से अधिक नहीं हो सकता है

(a) $\sin^{-1}(2\sin\lambda)$ (b) $\cos^{-1}(2\cos\lambda)$

(c) $\tan^{-1}(2\tan\lambda)$ (d) $\cot^{-1}(2\cot\lambda)$

13. एक समरूप सीढ़ी जिसकी लम्बाई 70 मी तथा भार W है, ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे, दीवार से 45^o का कोण बनाते हुये रखी है। सीढ़ी का घर्षण गुणांक फर्श तथा दीवार से क्रमशः $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{1}{3}$ है। एक व्यक्ति, जिसका भार $\frac{W}{2}$ है, सीढ़ी पर बिना फिसले चढ़ता है। तब वह ऊँचाई (मीटर में), जो कि वह व्यक्ति चढ़ सकता है, है

(a) 30 (b) 40

(c) 50 (d) 60

14. किसी नतसमतल पर एक पिण्ड स्वयं के भार के कारण फिसलने की अवस्था में है। यदि समतल का क्षैतिज से झुकाव 30^o है, तब घर्षण कोण का मान होगा [MNR 1978]

(a) 30^o (b) 60^o

(c) 45^o (d) 15^o

15. किसी भारी समांग छड़ AB का एक सिरा A, क्षैतिज रूक्ष छड़ AC पर, जिससे यह एक छल्ले द्वारा यह जुड़ा है, सरक सकता है। B तथा C एक डोरी द्वारा जुड़े हैं। जब छड़ फिसलने की अवस्था में है तब, यदि $\angle ABC = 90^o$, μ घर्षण कोण तथा α, AB और ऊर्ध्वाधर के बीच का कोण है, तो

(a) $\mu = \frac{2\tan\alpha}{(2+\tan^2\alpha)}$ (b) $\mu = \frac{\tan\alpha}{(2+\tan^2\alpha)}$

(c) $\mu = \frac{2\cot\alpha}{(1+\cot^2\alpha)}$ (d) $\mu = \frac{\cot\alpha}{(2+\cot^2\alpha)}$

16. अर्ध शीर्ष कोण θ का एक ठोस शंकु, रूक्ष नत समतल पर रखा है। यदि नतसमतल के झुकाव को धीरे-धीरे बढ़ाते हैं और $\mu < 4\ \tan\theta$, तब

(a) शंकु लुढ़कने से पहले नीचे को फिसलेगा
(b) शंकु नीचे को फिसलने से पहले लुढ़केगा
(c) शंकु एक ही साथ फिसलेगा और लुढ़केगा
(d) शंकु सीमान्त संतुलन की अवस्था में होगा

17. एक वृत्ताकार बेलन, जिसकी त्रिज्या r तथा ऊँचाई h है, एक रूक्ष क्षैतिज तल पर इस प्रकार रखा है कि उसका एक समतल सिरा क्षैतिज तल के सम्पर्क में है। ऊपरी सिरे के केन्द्र से होकर लगातार बढ़ता हुआ एक क्षैतिज बल बेलन पर लगाया जाता है। यदि घर्षण गुणांक μ हो, तो बेलन फिसलने से पहले लुढ़क जायेगा, यदि [MNR 1994]

(a) $r < \mu h$ (b) $r \ge \mu h$
(c) $r \ge 2\mu h$ (d) $r = 2\mu h$

18. एक समान छड़ AB, जिसका भार W है। इस छड़ का B सिरा क्षैतिज फर्श पर तथा A सिरा ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे झुका हुआ है। छड़ ऊर्ध्वाधर तल में दीवार के लम्बवत् ऊर्ध्वाधर से 45^o का कोण बनाते हुये सीमान्त सन्तुलन की अवस्था में रखी है। यदि दोनों स्पर्श बिन्दु समान रूप से रूक्ष (rough) हैं, तब इनमें से प्रत्येक का घर्षण गुणांक है [Roorkee 1970]

(a) $\sqrt{2}-1$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. एक पिण्ड, रूक्ष नतसमतल पर ऊपर की ओर खींचा जाता है। माना घर्षण कोण λ है। जब यह नतसमतल से $k\lambda$ कोण बनाता है, तब अभीष्ट बल न्यूनतम है, जहाँ $k =$ [MNR 1993]

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$
(c) 1 (d) 2

20. एक 35 किग्रा का बल, रुक्ष क्षैतिज तल पर रखे 140 किग्रा के लकड़ी के एक गुटके को खींचने के लिये आवश्यक है। घर्षण गुणांक का मान है [BIT Ranchi 1995]

(a) 1 (b) 0
(c) 4 (d) $\frac{1}{4}$

21. एक समरुप सीढ़ी सीमान्त सन्तुलन की अवस्था में है। इस सीढ़ी का निचला सिरा रुक्ष क्षैतिज तल पर तथा ऊपरी सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे रखा है। यदि सीढ़ी का ऊर्ध्वाधर दीवार से झुकाव θ तथा घर्षण गुणांक μ है, तब $\tan\theta =$ [MNR 1991; UPSEAT 2000]

(a) μ (b) 2μ
(c) $\frac{3\mu}{2}$ (d) $\mu + 1$

22. एक 6 किग्रा का पिण्ड, किसी नतसमतल पर जिसका झुकाव 30° है, सीमान्त सन्तुलन की अवस्था में है। यदि नतसमतल का झुकाव 60° कर दिया जाये, तब इस पिण्ड को सहारा देने के लिये तल के अनुदिश आवश्यक बल (कि.ग्रा. भार में) है [MNR 1987]

(a) 3 (b) $2\sqrt{3}$
(c) $\sqrt{3}$ (d) $3\sqrt{3}$

23. 1 टन भार के बॉक्स तथा फर्श के मध्य घर्षण कोण का मान क्या होगा, यदि इस बॉक्स को गति कराने के लिये न्यूनतम 600 किग्रा भार बल आवश्यक है [SCRA 1995]

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{4}$
(c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

गुरुत्व केन्द्र

1. किसी त्रिभुज के शीर्षों पर रखे तीन बराबर कणों का गुरुत्व केन्द्र है [MNR 1979]

(a) अन्तःकेन्द्र (b) गुरुत्व केन्द्र
(c) परिकेन्द्र (d) लम्बकेन्द्र

2. एक समरुप धातु की वृत्ताकार चकती (Circular disc) जिसकी त्रिज्या 10 सेमी तथा केन्द्र O है, पर 5 सेमी तथा 2.5 सेमी त्रिज्या के दो वृत्ताकार छिद्र किये जाते हैं। इन वृत्ताकार छिद्रों के केन्द्र G_1 तथा G_2, वृत्ताकार चकती के व्यास पर हैं। यदि इस छिद्रित चकती का गुरुत्व केन्द्र G है, तब $OG =$

(a) $\frac{22}{25}$ सेमी (b) $\frac{55}{22}$ सेमी
(c) $\frac{25}{22}$ सेमी (d) इनमें से कोई नहीं

3. 'a' सेमी लम्बाई की छड़ का द्रव्यमान केन्द्र, जिसका घनत्व इसके एक सिरे से दूरी के वर्ग के अनुसार परिवर्तित होता है, होगा

(a) इस सिरे से $\frac{a}{2}$ दूरी पर (b) इस सिरे से $\frac{a}{3}$ दूरी पर
(c) इस सिरे से $\frac{2a}{3}$ दूरी पर (d) इस सिरे से $\frac{3a}{4}$ दूरी पर

4. AB एक 150 सेमी लम्बी रेखा है। A से 15 सेमी और B से 50 सेमी की दूरी पर क्रमशः 1 किग्रा तथा 3 किग्रा के दो कण रखे हुये हैं। A से 2 किग्रा के तीसरे कण की दूरी, जिससे कि निकाय का गुरुत्व केन्द्र AB के मध्य बिन्दु पर हो, निम्न है

(a) 40 सेमी (b) 50 सेमी
(c) 67.5 सेमी (d) इनमें से कोई नहीं

5. एक 4 सेमी व्यास के वृत्ताकार पटल पर एक वर्गाकार छिद्र किया गया है। यदि वर्ग का विकर्ण वृत्त की त्रिज्या हो, तो वृत्त के केन्द्र से शेष भाग के गुरुत्व केन्द्र की दूरी होगी [MNR 1993]

(a) $\frac{1}{2\pi+1}$ (b) $\frac{1}{2\pi-1}$
(c) $\frac{1}{\pi+1}$ (d) $\frac{1}{\pi-1}$

6. एक खोखले शंकु के वक्रपृष्ठ का गुरुत्व केन्द्र शंकु के अक्ष पर होता है और इसे निम्न अनुपात में बाँटता है।

(a) 1 : 2 (b) 1 : 3
(c) 2 : 3 (d) 1 : 1

7. त्रिज्या a के एक ठोस अर्धगोले पर त्रिज्या a और ऊँचाई a का एक ठोस बेलन रखा है, इस पूरे पिण्ड का गुरुत्व केन्द्र होगा [UPSEAT 1995]

(a) बेलन के भीतर
(b) अर्ध गोले के भीतर
(c) दोनों के अन्तःपृष्ठ (Interface) पर
(d) दोनों के बाहर

8. समकोण समद्विबाहु त्रिभुज के तीन शीर्षों पर रखे तीन समान द्रव्यमान के कणों का गुरुत्व केन्द्र G है। इस समकोण समद्विबाहु त्रिभुज का कर्ण A से होकर जाने वाली माध्यिका पर 8 इकाई के बराबर इस प्रकार है, कि $AG =$

(a) 4/3 (b) 5/3
(c) 8/3 (d) 10/3

9. 6 फुट लम्बी एक छड़ के एक सिरे से 1, 2, 3 तथा 4 फुट की दूरियों पर क्रमशः 2, 3, 4 तथा 5 पाउन्डल के भार रखे हुये हैं। यदि छड़ का भार 11 पाउन्डल है, तब इस सिरे से, उस बिन्दु की दूरी जिस पर छड़ सन्तुलित होगी, निम्न है [BIT Rnachi 1989]

(a) 53/25 (b) 63/25
(c) 73/25 (d) इनमें से कोई नहीं

10. एक ही आधार AB पर इसकी विपरीत दिशाओं में क्रमशः 12 सेमी तथा 6 सेमी ऊँचाई के दो समद्विबाहु त्रिभुज CAB तथा DAB बनाये जाते हैं। AB से चतुर्भुज $CADB$ के गुरुत्व केन्द्र की दूरी होगी

(a) 0.5 सेमी (b) 1 सेमी
(c) 1.5 सेमी (d) 2 सेमी

11. त्रिभुज ABC में, जो कि C पर समकोण है, भुजाओं AC और BC की लम्बाईयाँ क्रमशः 3 सेमी तथा 4 सेमी हैं। समान्तर बल प्रत्येक P के बराबर, शीर्षों A, B, C पर और समान्तर बल प्रत्येक $2P$ के बराबर त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं पर कार्यरत् हैं। शीर्ष C से गुरुत्व केन्द्र की दूरी है

(a) $\frac{2}{3}$ सेमी (b) $\frac{4}{3}$ सेमी
(c) $\frac{5}{3}$ सेमी (d) इनमें से कोई नहीं

Critical Thinking

Objective Questions

1. यदि दो बलों P तथा Q का परिणामी इनके मध्य के कोण को 1 : 2 के अनुपात में बाँटता है, तब परिणामी का परिमाण है [Roorkee 1993]

(a) $\frac{P^2+Q^2}{P}$ (b) $\frac{P^2+Q^2}{Q}$
(c) $\frac{P^2-Q^2}{P}$ (d) $\frac{P^2-Q^2}{Q}$

2. दो समदिश समान्तर बल P तथा Q हैं। यदि P को स्वयं के समान्तर इसके क्रिया बिन्दु से x दूरी पर विस्थापित कर दिया जाये, तब P तथा Q का परिणामी निम्न दूरी तक विस्थापित होगा [Roorkee 1995]

(a) $\frac{Px}{P+Q}$ (b) $\frac{Px}{P-Q}$
(c) $\frac{Px}{P+2Q}$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. एक ऊर्ध्वाधर स्तम्भ के आधार से किस ऊँचाई पर 6 मीटर लम्बाई की डोरी बाँधी जाये, जिससे जमीन पर बैठा व्यक्ति डोरी के दूसरे सिरे पर कम से कम बल लगाकर स्तम्भ को गिरा सके [Roorkee 1997, SCRA 2000]

(a) 1.5 मीटर (b) $3\sqrt{2}$ मीटर
(c) $3\sqrt{3}$ मीटर (d) $4\sqrt{2}$ मीटर

4. दो चिकने मनके (Beads) A तथा B जो एक डोरी से जुड़े हैं, एक ऊर्ध्वाधर चिकने वृत्तीय तार पर स्वतंत्रतापूर्वक घूम सकते हैं। A, B तथा डोरी के बिन्दु C पर क्रमशः भार W, W तथा W लटके हैं। साम्यावस्था में, A तथा B क्षैतिज रेखा में हैं। यदि $\angle BAC = \alpha$ तथा $\angle ABC = \beta$ है, तब [Roorkee 1996, UPSEAT 2001]

(a) $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{W-W_1+W_2}{W+W_1-W_2}$ (b) $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{W+W_1-W_2}{W-W_1+W_2}$
(c) $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{W+W_1+W_2}{W+W_1-W_2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. एक लोहे की छड़ जिसका गुरुत्वकेन्द्र इसे दो बराबर भागों a तथा b में विभाजित करता है; एक चिकने क्षैतिज गोले के भीतर रखी हुई है। यदि साम्यावस्था की स्थिति में क्षैतिज से छड़ का झुकाव θ है तथा छड़ द्वारा गोले के केन्द्र पर अन्तरित कोण 2α है, तब [Roorkee 1994]

(a) $\tan\theta = (b-a)(b+a)\tan\alpha$ (b) $\tan\theta = \frac{(b-a)}{(b+a)}\tan\alpha$
(c) $\tan\theta = \frac{(b+a)}{(b-a)}\tan\alpha$ (d) $\tan\theta = \frac{1}{(b-a)(b+a)}\tan\alpha$

6. किसी रुक्ष नतसमतल के शिखर पर विरामावस्था में रखा 2 किग्रा द्रव्यमान का पिण्ड नीचे की ओर फिसलना प्रारम्भ करता है। यदि क्षैतिज से तल का झुकाव θ है, जहाँ $\tan\theta = \frac{4}{5}$, घर्षण गुणांक का मान 0.3 तथा गुरुत्वीय त्वरण $g = 9.8 m/sec$ है। तब पिण्ड का वेग, जब यह नतसमतल के निचले बिन्दु पर पहुँचता है, है

(a) 6.3 (b) 5.2
(c) 7 (d) 8.1

7. दो बलों P तथा Q का परिणामी R है। यदि Q को दुगुना किया जाये, तो R भी दो गुना हो जाता है तथा यदि Q की दिशा पलट दी जायें तो R पुनः दो गुना हो जाता है।
यदि $P^2 : Q^2 : R^2 = 2 : 3 : x$, तब x का मान है [MNR 1993; UPSEAT 2001; AIEEE 2003]

(a) 5 (b) 4
(c) 3 (d) 2

8. बलों P तथा Q का परिणामी R है। यदि Q को अपरिवर्तित रखते हुये, P की दिशा विपरीत कर दी जाती है तो परिणामी R' हो जाता है। यदि R, R' पर लम्बवत् है, तो

(a) $2P = Q$ (b) $P = Q$
(c) $P = 2Q$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. ABC एक समबाहु त्रिभुज है। भुजाओं CA तथा AB के मध्य बिन्दु E तथा F हैं। किसी बिन्दु पर रेखाओं BC, BE, CA, CF तथा AB के अनुदिश कार्यरत बलों के परिमाण क्रमशः $4N, PN, 2N, PN$ तथा QN हैं। यदि निकाय सन्तुलनावस्था में है, तब

(a) $P = 2\sqrt{3}N, Q = 6N$ (b) $P = 6N, Q = 2\sqrt{3}N$
(c) $P = \sqrt{3}N, Q = 6N$ (d) $P = 2\sqrt{3}N, Q = 3N$

10. एक समरूप छड़ (Uniform rod) दो चिकने समतलों के बीच साम्यावस्था में रखी है। छड़ का एक सिरा एक समतल पर और दूसरा सिरा दूसरे समतल पर है। दोनों समतल परस्पर क्षैतिज समतल में प्रतिच्छेदित करते है और क्षैतिज से क्रमशः α और β कोणों पर झुके हैं। तब छड़ का ऊर्ध्वाधर से झुकाव θ निम्न समीकरण से दिया जाता है

(a) $2\cot\theta = \cot\beta - \cot\alpha$
(b) $\tan\theta = 2\tan\alpha\tan\beta/(\tan\alpha - \tan\beta)$
(c) $\cot\theta = \sin(\alpha-\beta)/2\sin\alpha\sin\beta$
(d) उपरोक्त सभी

11. IA, IB तथा IC के अनुदिश तीन बल क्रमशः $\vec{P}, \vec{Q}$ तथा $\vec{R}$ कार्यरत् हैं, जहाँ ΔABC का अंतःकेन्द्र I है। तब $\vec{P} : \vec{Q} : \vec{R}$ है [AIEEE 2004; UPSEAT 1998]

(a) $\text{cosec}\frac{A}{2} : \text{cosec}\frac{B}{2} : \text{cosec}\frac{C}{2}$ (b) $\sec\frac{A}{2} : \sec\frac{B}{2} : \sec\frac{C}{2}$

(c) $\sin\frac{A}{2} : \sin\frac{B}{2} : \sin\frac{C}{2}$ (d) $\cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

12. उस बल का मान क्या होगा, जो किसी नतसमतल के अनुदिश 10 किग्रा भार को रोकता है, (दिया गया है कि बल, तल की प्रतिक्रिया तथा पिण्ड का भार समान्तर श्रेणी में हैं) [UPSEAT 1999]

(a) 4 किग्रा भार (b) 6 किग्रा भार

(c) 8 किग्रा भार (d) 7 किग्रा भार

13. किसी वर्ग $ABCD$ की भुजाओं AB, BC, CD तथा DA के अनुदिश बल P, $3P$, $2P$ तथा $5P$ कार्यरत हैं। यदि AD को बढ़ाने पर बिन्दु E पर परिणामी प्राप्त होता है, तब $AD : DE$ है

(a) 1 : 2 (b) 1 : 3

(c) 1 : 4 (d) 1 : 5

14. एक भाररहित दृढ़ तार जो वृत्त के चाप के रूप में हैं, केन्द्र पर α कोण अन्तरित करता है तथा इसके सिरों पर दो भार P तथा Q विरामावस्था में हैं जबकि इसकी उत्तलता क्षैतिज तल पर नीचे की ओर है। यदि जिस सिरे पर P लटका है, उससे जाने वाली त्रिज्या का ऊर्ध्वाधर से झुकाव θ है, तब $\tan\theta =$

(a) $\frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ (b) $\frac{P\sin\alpha}{Q + P\cos\alpha}$

(c) $\frac{Q\cos\alpha}{P + Q\sin\alpha}$ (d) $\frac{P\cos\alpha}{Q + P\sin\alpha}$

15. एक आयत $ABCD$ इस प्रकार है कि $AB = CD = a$ तथा $BC = DA = b$. बल P तथा P, AD तथा CB के अनुदिश तथा बल Q तथा Q, AB तथा CD के अनुदिश कार्यरत हैं। बिन्दु A पर बलों P,Q तथा बिन्दु C पर बलों P, Q के परिणामियों के मध्य लम्बवत् दूरी है

(a) $\frac{Pa + Qb}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$ (b) $\frac{Pa - Qb}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$

(c) $\frac{Pb + Qa}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$ (d) $\frac{Pb - Qa}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$

16. एक 5 मीटर लम्बी और 4 N भार की छड़ दो डोरियों के द्वारा क्षैतिज अवस्था में लटकी हुई है। छड़ के एक सिरे से क्रमशः 1 मीटर, 2मीटर, 3 मीटर तथा 4 मीटर की दूरियों पर क्रमशः $8N$, $12N$, $16N$ तथा $20N$ के भार रखे जाते हैं तो डोरियों में तनाव होगा

(a) $26\,N, 34\,N$ (b) $20\,N, 30\,N$

(c) $10\,N, 40\,N$ (d) इनमें से कोई नहीं

17. दो बराबर छड़ें जिनमें से प्रत्येक का भार W और लम्बाई $2a$ है, स्वतन्त्रतापूर्वक घूम सकने योग्य कब्जे द्वारा परस्पर जुड़ी हैं, तथा r त्रिज्या के स्थिर चिकने गोले पर सन्तुलनावस्था में हैं। प्रत्येक छड़ का क्षैतिज से झुकाव θ निम्न संबंध से दिया जाता है

(a) $r\tan\theta\sec^2\theta = a$ (b) $r(\tan^3\theta + \tan\theta) = a$

(c) $r\sin\theta = a\cos^3\theta$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. एक समरूप छड़ AB, A पर स्थित कब्जे (hinge) के परितः घूम सकती है। छड़ का एक सिरा चिकनी दीवार के सम्पर्क में है। यदि छड़ क्षैतिज से α कोण बनाती है, तब कब्जे पर प्रतिक्रिया बल है

(a) $\frac{W}{2}\sqrt{3 + \cos ec^2\alpha}$ (b) $\frac{W}{2}\sqrt{3 + \sin^2\alpha}$

(c) $W\sqrt{3 + \cos ec^2\alpha}$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. आयत $ABCD$ की भुजाओं AB, BC, CD, AD तथा विकर्ण CA के अनुदिश क्रमशः 3, P, 5, 10 तथा Q न्यूटन परिमाण के बल कार्यरत हैं, जहाँ AB = 4मी तथा BC = 3मी। यदि परिणामी दूसरे विकर्ण BD के अनुदिश एक एकल बल है, तब P,Q तथा परिणामी क्रमशः हैं

(a) $4, 10\frac{5}{12}, 12\frac{11}{12}$ (b) 5, 6, 7

(c) $3\frac{1}{2}, 8, 9\frac{1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

20. एक समरूप सीढ़ी का एक सिरा एक रूक्ष क्षैतिज फर्श पर और दूसरा सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे रखा है। सीढ़ी का भार 400 मात्रक है। 800 मात्रक भार का एक व्यक्ति, सीढ़ी के नीचे के सिरे से, सीढ़ी की लम्बाई की चौथाई दूरी पर खड़ा है। यदि सीढ़ी का क्षैतिज से झुकाव 30^o है तो दीवार का प्रतिक्रिया बल होगा [BIT Ranchi 1993]

(a) 0 (b) $1200\sqrt{3}$

(c) $800\sqrt{3}$ (d) $400\sqrt{3}$

21. एक सीढ़ी, जिसकी लम्बाई 10 मीटर है, का एक सिरा चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे तथा दूसरा सिरा रूक्ष फर्श पर है। घर्षण गुणांक 1/2 है। सीढ़ी का पाद दीवार से 2 मीटर पर है। एक व्यक्ति, जिसकी ऊँचाई सीढ़ी की चार गुनी है, फिसलने के पहले कितनी दूरी (मीटर में) तक चढ़ सकता है

(a) $\frac{3}{4}(10\sqrt{6} - 1)$ (b) $\frac{5}{4}(10\sqrt{6} - 1)$

(c) $2/3(5\sqrt{2} - 1)$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. एक ठोस लम्ब वृत्तीय बेलन समान आधार के एक ठोस अर्ध गोले के साथ जोड़ दिया गया है। यदि पूरे पिण्ड का गुरुत्व केन्द्र आधार के केन्द्र पर हो, तो बेलन की त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात है

(a) 1 : 2 (b) $\sqrt{2} : 1$

(c) 1 : 3 (d) इनमें से कोई नहीं

23. ABC एक सम त्रिभुजाकार पटल है, जिसका गुरुत्व केन्द्र G पर है। यदि भाग GBC को काटकर निकाल दिया जाये तो बचे हुए भाग का गुरुत्व केन्द्र G' पर है। तब GG' = [MNR 1994]

(a) $\frac{1}{3}AG$ (b) $\frac{1}{4}AG$

(c) $\frac{1}{2}AG$ (d) $\frac{1}{6}AG$

24. 1 फुट लम्बाई की सीधी छड़ AB, A से 5 इंच की दूरी पर स्थित बिन्दु के परितः संतुलित है, जब A तथा B से क्रमशः 9 तथा 6 पाउन्डल द्रव्यमान के दो पिण्ड लटके हैं। यह छड़ B से $3\frac{1}{2}$ इंच दूरी पर स्थित बिन्दु के परितः संतुलित होती है, जब 6 पाउन्डल द्रव्यमान के पिण्ड को 23 पाउन्डल द्रव्यमान के पिण्ड से प्रतिस्थापित करते हैं। B सिरे से छड़ के गुरुत्वकेन्द्र की दूरी है।

(a) $3\frac{1}{2}$ इंच (b) $5\frac{1}{2}$ इंच

(c) $2\frac{1}{2}$ इंच (d) इनमें से कोई नहीं

25. एक छड़ जिसकी लम्बाई $2\frac{1}{2}$ फीट है, 10 इंच की दूरी पर स्थित दो खूँटियों (pegs), जिनका केन्द्र इनके मध्य में है, पर विरामावस्था में है। संतुलनावस्था को परिवर्तित किये बिना क्रमिक रुप से इसके दो सिरों पर क्रमशः 4 तथा 6 पाउन्डल द्रव्यमान के पिण्ड लटकायें जाते हैं, छड़ का भार है

(a) 2 पाउन्डल (b) 4 पाउन्डल

(c) 3 पाउन्डल (d) इनमें से कोई नहीं

Answers

बलों का संयोजन एवं वियोजन तथा बलों की साम्यावस्था

1	b	2	d	3	d	4	d	5	d
6	c	7	b	8	d	9	b	10	d
11	b	12	c	13	d	14	b	15	a
16	a	17	c	18	b	19	a	20	c
21	b	22	b	23	a	24	b	25	a
26	a	27	c	28	a	29	b	30	c
31	b	32	c	33	c	34	b	35	d
36	b	37	b	38	c	39	a	40	d
41	a	42	b	43	c	44	a	45	b
46	b	47	c	48	a	49	b	50	a
51	c	52	a,b	53	d	54	b	55	a
56	a	57	c	58	a	59	a	60	b
61	a	62	d						

समान्तर बल, आघूर्ण और बलयुग्म

1	c	2	b	3	b	4	b	5	b
6	b	7	a	8	b	9	a	10	c
11	a	12	c	13	a	14	a	15	c
16	b	17	d	18	b	19	a	20	d
21	a	22	a	23	b	24	b	25	b
26	b	27	c	28	d	29	c	30	a
31	c	32	c	33	d	34	c	35	c
36	c	37	b	38	c	39	c	40	d

समतलीय बलों का सन्तुलन

1	d	2	c	3	b	4	c	5	c
6	a	7	d	8	d	9	c	10	b,c
11	a	12	c	13	b	14	a	15	c
16	ac	17	d	18	a	19	a		

घर्षण

1	b	2	c	3	c	4	a	5	b
6	a	7	a	8	a	9	a	10	b
11	a	12	a	13	c	14	a	15	b
16	a	17	a	18	a	19	c	20	d
21	b	22	b	23	b				

गुरुत्व केन्द्र

1	b	2	c	3	d	4	c	5	b
6	a	7	a	8	c	9	c	10	b
11	c								

Critical Thinking Questions

1	d	2	a	3	b	4	a	5	b
6	c	7	d	8	b	9	a	10	d
11	d	12	b	13	c	14	a	15	b
16	a	17	a,b,c	18	a	19	a	20	d
21	b	22	b	23	d	24	b	25	b

Answers and Solutions

बलों का संयोजन एवं वियोजन तथा बलों की साम्यावस्था

1. (b) $R = \sqrt{(3P)^2 + (2P)^2 + 2(3P)(2P)\cos\alpha}$ ......(i)

एवं $2R = \sqrt{(6P)^2 + (2P)^2 + 2(6P)(2P)\cos\alpha}$ .....(ii)

(i) को 2 से गुणा कर वर्ग करके (ii) को (i) में से घटाने पर,

$4(9P^2 + 4P^2 + 12P^2\cos\alpha) - 36P^2 - 4P^2 - 24P^2\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow 12 + 24\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-1}{2}$; $\therefore \alpha = \frac{2\pi}{3}$.

2. (d) माना कि बल $\vec{P}$ एवं $\vec{Q}$ के बीच का कोण α है। यह दिया गया है कि $\vec{P}$ एवं $\vec{Q}$ के परिणामी का परिमाण P है।

इसलिए $P^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\Rightarrow Q(Q + 2P\cos\alpha) = 0 \Rightarrow Q + 2P\cos\alpha = 0$

माना कि बल $\vec{Q}$ एवं नये परिणामी के बीच का कोण θ है,

तब $\tan\theta = \frac{2P\sin\alpha}{Q + 2P\cos\alpha} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

अर्थात्, नया परिणामी $\vec{Q}$ से समकोण पर है।

3. (d) $\sqrt{10}P = \sqrt{(2P)^2 + (\sqrt{2}P)^2 + 2(2P)(\sqrt{2}P)\cos\theta}$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$10P^2 = (6 + 4\sqrt{2}\cos\theta)P^2$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

4. (d) माना कि दो बल F_1 एवं F_2 हैं

अधिकतम परिणामी = $P = F_1 + F_2$

एवं न्यूनतम परिणामी = $Q = F_1 - F_2$.

अतः $F_1 = \frac{P+Q}{2}$ एवं $F_2 = \frac{P-Q}{2}$

$\therefore\ R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{\dfrac{P^2 + Q^2}{2}}$.

5. (d) माना कि दो बल F एवं F है, तथा R इनका परिणामी है, अर्थात् $R^2 = 2F^2 + 2F^2 \cos\theta$, जहाँ दोनों बलों के बीच का कोण θ है।

अतः $R^2 = 2F^2(1 + \cos\theta) = 3F^2$,

($\because\ R^2 = 3F^2$ दिया गया है)

$\therefore\ 1 + \cos\theta = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$.

6. (c) यह स्पष्ट है।

7. (b) प्रश्नानुसार, $2F^2(1+\cos\theta) = (2-\sqrt{3})F^2$

अतः $2\cos\theta = -\sqrt{3}$ या $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $\theta = \dfrac{5\pi}{6} = 150°$.

8. (d) माना कि दो बलों में प्रत्येक का परिमाण P है एवं एक दूसरे पर α कोण से झुके हैं। तब उनका परिणामी R दिया गया है $R = 2P\cos\dfrac{\alpha}{2}$, किन्तु $R = P$

$\therefore\ P = 2P\cos\alpha \Rightarrow \cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{3}$

$\therefore\ \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.

9. (b) माना कि प्रत्येक बल का परिमाण P है, तब R_1 = दो बराबर बल जिसमें प्रत्येक का परिमाण P है एवं एक दूसरे पर 2α कोण पर झुके है $= 2P\cos\alpha$ एवं R_2 = दो बराबर बल जिनमें प्रत्येक का परिमाण P है एवं एक दूसरे पर 2β कोण झुके हैं $= 2P\cos\beta$.यह दिया गया है कि $R_1 = 2R_2$

$\Rightarrow\ 2P\cos\alpha = 4P\cos\beta \Rightarrow \cos\alpha = 2\cos\beta$.

10. (d) $(14)^2 = (13)^2 + (3\sqrt{3})^2 + 2\times(13)(3\sqrt{3})\cos\theta$

$\Rightarrow\ \cos\theta = 196 - 169 - 27 = 0$

$\therefore\ \theta = \dfrac{\pi}{2} = 90°$.

11. (b) चूँकि $P+Q > P-Q$ इसलिए परिणामी बल $P+Q$ के निकट है। अतः परिणामी $P+Q$ के साथ $\alpha-\theta$ एवं $P-Q$ के साथ $\alpha+\theta$ कोण बनाते हैं

$\therefore \tan(\alpha-\theta) = \dfrac{(P-Q)\sin 2\alpha}{(P+Q)+(P-Q)\cos 2\alpha}$

$\Rightarrow\ \dfrac{\tan\alpha - \tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta} = \dfrac{(P-Q)2\sin\alpha\cos\alpha}{P(1+\cos 2\alpha)+Q(1-\cos 2\alpha)}$

$\Rightarrow\ \dfrac{\tan\alpha - \tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta} = \dfrac{(P-Q)\sin\alpha\cos\alpha}{P\cos^2\alpha + Q\sin^2\alpha}$

$\Rightarrow \dfrac{\tan\alpha - \tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta} = \dfrac{\tan\alpha - \dfrac{Q}{P}\tan\alpha}{1+\tan\alpha\left(\dfrac{Q}{P}\tan\alpha\right)}$

$\Rightarrow\ \tan\theta = \dfrac{Q}{P}\tan\alpha$

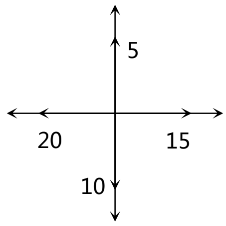
$\therefore\ \dfrac{P}{Q} = \dfrac{\tan\alpha}{\tan\theta}$.

12. (c) $F_1 = 1\,\mathbf{i}$

$F_2 = -\dfrac{2}{2}\mathbf{i} + \dfrac{2\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$ एवं $F_3 = \dfrac{-3}{2}\mathbf{i} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$

$\therefore F = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ या $F = \sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}}$; $\therefore F = \sqrt{3}$ न्यूटन।

13. (d) प्रश्नानुसार,



$F = \sqrt{(15-20)^2 + (5-10)^2}$

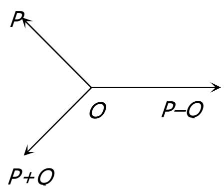
$\therefore\ F = \sqrt{50}$

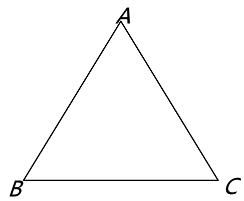
$\Rightarrow\ F = 5\sqrt{2}N$.

14. (b) यहाँ, $R\cos\theta = (P-Q)\cos 0° + P\cos 120° + (P+Q)\cos 240°$

$\Rightarrow\ R\cos\theta\ =\ (P-Q) - \dfrac{P}{2} - \left(\dfrac{P+Q}{2}\right) = -\dfrac{3}{2}Q$ .....(i)

$R\sin\theta = (P-Q)\sin 0° + P\sin 120° + (P+Q)\sin 240°$





$\Rightarrow\ R\sin\theta\ = P\dfrac{\sqrt{3}}{2} - (P+Q)\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ =\ -Q\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .....(ii)

(i) एवं (ii) को वर्ग कर जोड़ने पर,

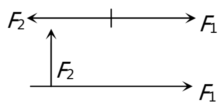
$\therefore\ R^2 = \dfrac{9}{4}Q^2 + \dfrac{3}{4}Q^2 = 3Q^2$

$\therefore R = \sqrt{3}Q$.

15. (a) दी गई शर्तों के अनुसार,

$F_1 - F_2 = 34$

$\sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 50$



विकल्पों की जाँच करने पर केवल विकल्प (a) संतुष्ट होता है।

16. (a) चूँकि बल साम्यावस्था में हैं, अतः कोई बल है जो कि दूसरे दोनों बलों के परिणामी के परिमाण के बराबर एवं चिन्ह में विपरीत है।

$\therefore$ परिणामी $= \sqrt{(30)^2 + (60)^2 + 2\times 30\times 60\times\cos 60°} = 30\sqrt{7}$

अतः $P = 30\sqrt{7}$.

17. (c) यहाँ, $\left\{(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}\right\}^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$

एवं $\left((2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}\right)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(90°-\theta)$

$\therefore\ (2m+1)^2(P^2+Q^2)-(P^2+Q^2)=2PQ\cos\theta$ .....(i)

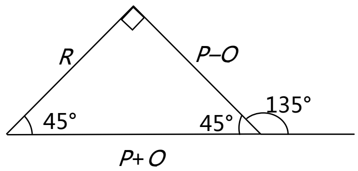
एवं $(2m-1)^2(P^2+Q^2)-(P^2+Q^2)=2PQ\sin\theta$ .....(ii)

समीकरण (ii) को (i) से भाग देने पर,

$\tan\theta=\dfrac{\{(2m-1)^2-1^2\}(P^2+Q^2)}{\{(2m+1)^2-1^2\}(P^2+Q^2)}$ या $\tan\theta=\dfrac{m-1}{m+1}$.

18. (b) यह स्पष्ट है।

19. (a)



$\therefore\ \tan\alpha=\dfrac{(P-Q)\sin 135°}{P+Q+(P-Q)\cos 135°}=\tan\dfrac{\pi}{4}$ .....(i)

एवं $2=\sqrt{(P+Q)^2+(P-Q)^2+2(P+Q)(P-Q)\cos 135°}$ .....(ii)

$\therefore$ (i) एवं (ii) द्वारा, $P=(\sqrt{2}+1)$ एवं $Q=(\sqrt{2}-1)$.

20. (c) $\dfrac{P}{3}=\dfrac{Q}{7}=\dfrac{R}{5}=\lambda$, (माना)

$\Rightarrow P=3\lambda,\ \ Q=7\lambda$ एवं $R=5\lambda$

$\Rightarrow R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=-\dfrac{11}{14}$ ......(i)

P एवं R के बीच कोण 'α' है

अतः $\cos\alpha=\dfrac{P+Q\cos\theta}{R}\Rightarrow\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$.

21. (b) P एवं Q का परिणामी P से समकोण बनाता है

$\therefore\ \tan\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}\Rightarrow P+Q\cos\alpha=0$

$\Rightarrow \cos\alpha=-\dfrac{P}{Q}$ .....(i)

P एवं Q' का परिणामी Q' से समकोण बनाता है।

$\therefore\ \tan\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{P\sin\alpha}{Q'+P\cos\alpha}\Rightarrow Q'+P\cos\alpha=0$

$\Rightarrow \cos\alpha=-\dfrac{Q'}{P}$ ......(ii)

(i) एवं (ii) से,

$-\dfrac{P}{Q}=-\dfrac{Q'}{P}\Rightarrow P^2=QQ'\Rightarrow Q,P,Q'$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

22. (b) माना कि बल P एवं Q के बीच का कोण α है, तब

$\tan\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}\Rightarrow P+Q\cos\alpha=0\Rightarrow\cos\alpha=-\dfrac{P}{Q}$

$\therefore\ \alpha=\cos^{-1}\left(\dfrac{-P}{Q}\right)$.

23. (a) माना कि दोनों बलों P एवं Q के बीच कोण α है।

तब $P+Q=18$ एवं परिणामी =12 .....(i)

$\Rightarrow P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha=144$ .....(ii)

चूँकि परिणामी, छोटे बल P पर लम्बवत् है

इसलिए $\tan\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}\Rightarrow P+Q\cos\alpha=0$

$\therefore\ \cos\alpha=\dfrac{-P}{Q}$ .....(iii)

(ii) एवं (iii) से, $P^2+Q^2-2P^2=144$

$\Rightarrow Q^2-P^2=144$ या $Q-P=8$ .....(iv)

(i) एवं (iv) को हल करने पर, $P=5$ एवं $Q=13$

24. (b) $\tan\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{5\sin\alpha}{3+5\cos\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$

$R^2=3^2+5^2+2\times3\times5\cos\alpha\Rightarrow R^2=16\Rightarrow R=4$

अतः अभीष्ट अनुपात = 5 : 4.

25. (a) $(\sqrt{3}Q)^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\theta$ .....(i)

एवं $\tan 30°=\dfrac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta}$ .....(ii)

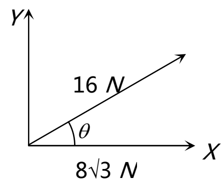
(i) से, $2Q^2-2PQ\cos\theta=P^2$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{2Q^2-P^2}{2PQ}$ .....(iii)

θ का मान समीकरण (ii) में रखने पर,

$P=2Q$, (विकल्पों की जाँच द्वारा).

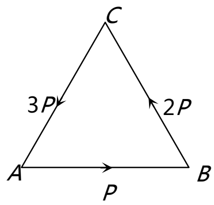
26. (a) स्पष्टतः, $16\cos\theta=8\sqrt{3}$



$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{6}=30°$.

27. (c) $\overrightarrow{AB}=P\mathbf{i}$,



$\overrightarrow{BC}=-\dfrac{2P}{2}\mathbf{i}+\dfrac{2P\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$,

$\overrightarrow{CA}=\dfrac{-3P}{2}\mathbf{i}-\dfrac{3P\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$

$\Rightarrow R=\sqrt{\left(P-\dfrac{2P}{2}-\dfrac{3P}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2P\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}P}{2}\right)^2}$

$\Rightarrow R=P\sqrt{3}$

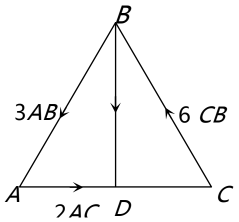
अब $\tan\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore\ \overrightarrow{BC}$ भुजा के साथ कोण $=\dfrac{\pi}{6}$.

28. (a) चूँकि $8N+5N=13N$

$\therefore 13\ N\downarrow, 8N\uparrow$ व $5\uparrow$ के परिणामी के बराबर एवं विपरीत है।

29. (b) चित्र से यह स्पष्ट है, कि $DC : AD = 1 : 2$.

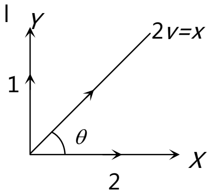


30. (c) $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

अतः $(13)^2 = (12)^2 + (5)^2 + 2\times 12\times 5\cos\alpha$ या $\cos\alpha = 0$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2}$.

31. (b) बलों के वियोजन से यह स्पष्ट है अतः परिणामी की क्रिया रेखा $2y - x = 0$ है।



32. (c) माना कि N के दो घटक N_x एवं N_y हैं

जहाँ $N_x = N\cos\theta$

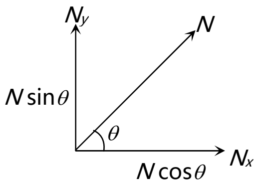
$N_y = N\sin\theta$

दिया गया है, $N_x = 2N_y$,

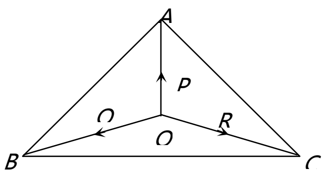
तब $N_x^2 + N_y^2 = N^2$

$\Rightarrow 4N_y^2 + N_y^2 = N^2$

$\Rightarrow 5N_y^2 = N^2 \Rightarrow N_y = \frac{N}{\sqrt{5}}$ एवं $N_x = \frac{2N}{\sqrt{5}}$.



33. (c)

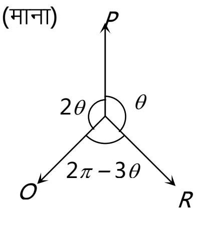


$\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$, (लॉमी प्रमेय से)

$\because \sin 2A = \frac{a\cos A}{R}, \sin 2B = \frac{b\cos B}{R}, \sin 2C = \frac{c\cos C}{R}$

$\therefore P : Q : R :: a\cos A : b\cos B : c\cos C$.

34. (b) $\frac{P}{\sin(2\pi - 3\theta)} = \frac{Q}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin 2\theta} = k$, (माना)



$\therefore P = -(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)k$

$\Rightarrow P = -(3 - 4\sin^2\theta)k\sin\theta$

हल करने पर, $P = \frac{Q^2 - R^2}{Q}$.

35. (d) स्पष्टतः P एवं R के बीच का कोण है,

$360^o - (150^o + 120^o) = 90^o$.

लॉमी प्रमेय द्वारा, $\frac{P}{\sin 120°} = \frac{Q}{\sin 90°} = \frac{R}{\sin 150°}$

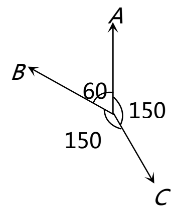
$\Rightarrow \frac{P}{\sqrt{3}/2} = \frac{Q}{1} = \frac{R}{1/2} \Rightarrow \frac{P}{\sqrt{3}} = \frac{Q}{2} = \frac{R}{1}$

$\therefore$ बलों P, Q, R का अनुपात $\sqrt{3} : 2 : 1$ है।

36. (b) लॉमी प्रमेय द्वारा,

$\frac{A}{\sin 150°} = \frac{B}{\sin 150°} = \frac{C}{\sin 60°}$

$\therefore A : B : C = 1 : 1 : \sqrt{3}$.



37. (b) माना $R = \sqrt{F^2 + F^2 + 2F^2\cos\alpha}$

अब $R' = \sqrt{F^2 + F^2 + 2F^2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}$

$R' = \sqrt{3}R$, (दिया गया है)

$\Rightarrow \sqrt{3}R = \sqrt{3}\sqrt{F^2 + F^2 + 2F^2\cos\alpha}$

$= \sqrt{F^2 + F^2 + 2F^2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}$

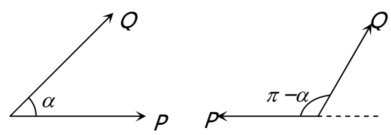
दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$3(2F^2 + 2F^2\cos\alpha) = 2F^2 + 2F^2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow 3(1 + \cos\alpha) = 1 + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$

अब विकल्पों की जाँच करने पर $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

38. (c) $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$ .....(i)



यदि एक बल की दिशा बदल दी जाए

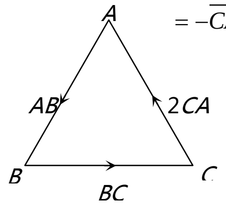
$R'^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\pi - \alpha)$

या $R'^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha$ .....(ii)

(i) एवं (ii) को जोड़ने पर

$R^2 + R'^2 = 2(P^2 + Q^2)$.

39. (a) परिणामी $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CA}$



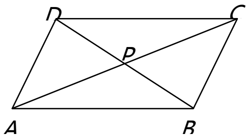
$= -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}$

40. (d) परिणामी सदिश

$= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PD}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \mathbf{0}$

अतः परिणामी शून्य है।

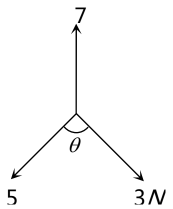


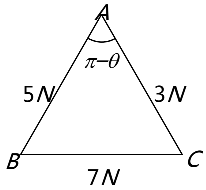
41. (a) $\because$ बलों 1, 3 एवं 5 इकाई को एक त्रिभुज की भुजाओं द्वारा प्रदर्शित नहीं कर सकते हैं।

42. (b) प्रश्नानुसार,

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = \left(\frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 3}\right) = \left(\frac{34 - 49}{30}\right)$$

$$-\cos\theta = \left(\frac{-15}{30}\right) = -\frac{1}{2}$$





अतः, $\theta = 60°$.

43. (c) जब प्रभाव अधिकतम हो, परिणामी बल = $F_1 + F_2 = 4$ .....(i)

यदि बल समकोण पर कार्यरत् हो, तब परिणामी बल

$= \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 3$ .....(ii)

(i) एवं (ii) को हल करने पर हम पाते हैं,

$F_1 = \left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)N$ एवं $F_2 = \left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)N$.

44. (a) प्रश्नानुसार,

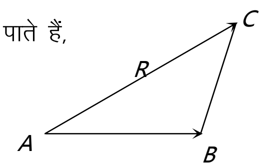
$(\sqrt{3}Q)^2 = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$ .....(i)

एवं $\tan\alpha = \frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}$ .....(ii)

(i) एवे (ii) को हल करने पर हम पाते हैं,

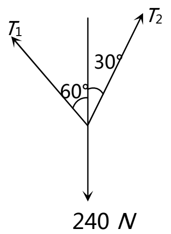
$\left(\frac{P}{Q} - 1\right)\left(\frac{P}{Q} - 2\right) = 0$

$\therefore \frac{P}{Q} = 1$ या 2.



45. (b) लॉमी प्रमेय से,

$$\frac{T_1}{\sin 150°} = \frac{T_2}{\sin 120°} = \frac{240}{\sin 90°}$$



$$\frac{T_1}{1/2} = \frac{T_2}{\sqrt{3}/2} = \frac{240}{1}$$

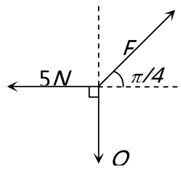
$T_1 = 120$ न्यूटन, $T_2 = 120\sqrt{3}$ न्यूटन.

46. (b) चित्र से, $F\cos\frac{\pi}{4} = 5$

$\therefore F = 5\sqrt{2}N$.

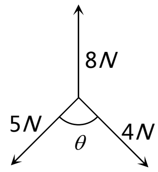
$Q = F\sin\theta = 5\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

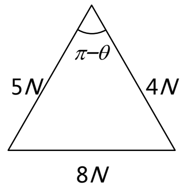
$\therefore Q = 5N$.



47. (c) यह स्पष्ट है।

48. (a)





$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = \frac{5^2 + 4^2 - 8^2}{2 \times 5 \times 4}$$

$$-\cos\theta = \frac{25 + 16 - 64}{40} = -\frac{23}{40}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{23}{40}; \therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{23}{40}\right).$$

49. (b) $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$ .....(i)

$4R^2 = 4P^2 + Q^2 + 4PQ\cos\alpha$ .....(ii)

$4R^2 = P^2 + 4Q^2 - 4PQ\cos\alpha$ .....(iii)

(ii) – 2 (i) से एवं (ii) + (iii) से हम पाते हैं,

$2R^2 = 2P^2 - Q^2$ .....(iv)

$8R^2 = 5P^2 + 5Q^2$ .....(v)

(iv) को 4 से गुणा करके (v) से घटाने पर हम पाते हैं,

$0 = -3P^2 + 9Q^2 \Rightarrow 9Q^2 = 3P^2 \Rightarrow P^2 = 3Q^2$

$2R^2 = 6Q^2 - Q^2 = 5Q^2 \Rightarrow R^2 = \frac{5Q^2}{2}$

$\therefore P^2 : Q^2 : R^2 :: 6 : 2 : 5 \Rightarrow P : Q : R :: \sqrt{6} : \sqrt{2} : \sqrt{5}$.

50. (a) माना *P* एवं *Q* दो बल हैं एवं *R* परिणामी बल है, तब प्रश्नानुसार $\tan\frac{\pi}{2} = \frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}$

$\Rightarrow P + Q\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{P}{Q}$ .....(i)

$R = \frac{Q}{3}$

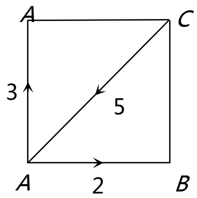
अब, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$

$\Rightarrow \frac{Q^2}{9} = P^2 + Q^2 + 2PQ\left(-\frac{P}{Q}\right)$

$\Rightarrow \frac{Q^2}{9} = Q^2 - P^2 \Rightarrow P^2 = \frac{8Q^2}{9}$

$\therefore \ \frac{P^2}{Q^2} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{Q^2}{P^2} = \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{Q}{P} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

51. (c) $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i}, \ \overrightarrow{CA} = -\frac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{j}, \ \overrightarrow{AD} = 3\mathbf{j}$



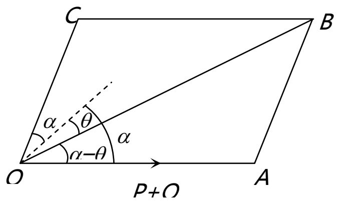
$\vec{R} = \left(2 - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \left(3 - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}$

$|\vec{R}| = \sqrt{\left(2 - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(3 - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$= \sqrt{4 + \frac{25}{2} - \frac{20}{\sqrt{2}} + 9 + \frac{25}{2} - \frac{30}{\sqrt{2}}}$

$= \sqrt{38 - \frac{50}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{38\sqrt{2} - 50}{\sqrt{2}}} = 1.6$ (लगभग).

52. (a,b) ΔAOC में, $\frac{OA}{\sin OCA} = \frac{AC}{\sin AOC}$ या



$\frac{P+Q}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{P-Q}{\sin(\alpha-\theta)}$

या $\frac{P+Q}{P-Q} = \frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha-\theta)}$

$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\sin\alpha\cos\theta}{\cos\alpha\sin\theta}$

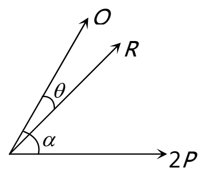
या $P\cot\alpha = Q\cot\theta$

या $P\tan\theta = Q\tan\alpha$.

53. (d) स्पष्टत: $P^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\Rightarrow Q^2 + 2PQ\cos\alpha = 0$ .....(i)

$\Rightarrow Q + 2P\cos\alpha = 0$



अब P को $2P$ से बदलने पर तथा Q को पूर्ववत् रखने पर,

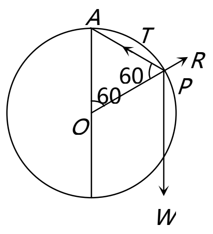
$\tan\theta = \frac{2P\sin\alpha}{Q + 2P\cos\alpha} = \frac{2P\sin\alpha}{0} = \infty$

$\therefore \ \theta = \frac{\pi}{2} = 90°$.

54. (b) माना कि मणिका (bead) की साम्य स्थिति P है

$\because \ OP = OA = AP$

$\therefore \ \Delta OAP$ समबाहु त्रिभुज है।



बिन्दु P पर लॉमी प्रमेय से,

$\frac{T}{\sin(\hat{RW})} = \frac{W}{\sin(\hat{TR})} = \frac{R}{\sin(\hat{TW})}$

$\Rightarrow \frac{T}{\sin(120°)} = \frac{W}{\sin(120°)} = \frac{R}{\sin(120°)}$

$\Rightarrow T = W, R = W$.

55. (a) दिया है $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$ .....(i)

$-\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$ .....(ii)

(i) से, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$ .....(iii)

(ii) से, $R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha$ .....(iv)

(iii) एवं (iv) से हम पाते हैं,

$P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha$

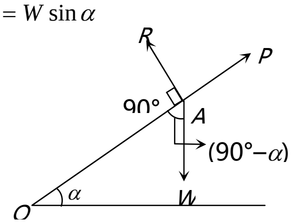
$\Rightarrow 4PQ\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = 0, (\because P, Q \neq 0) \Rightarrow \cos\alpha = \cos 90° \Rightarrow \alpha = 90°$.

56. (a) **स्थिति I:** लॉमी प्रमेय से,

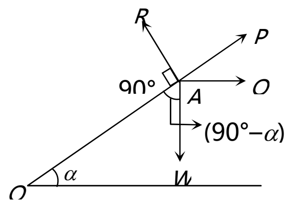
$\frac{P}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{W}{\sin 90°} = \frac{R}{\sin(90° + \alpha)}$

$\therefore \ P = W\sin\alpha$ .....(i)



स्थिति II : लॉमी प्रमेय से,

$\frac{Q}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{W}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{R}{\sin 90°}$

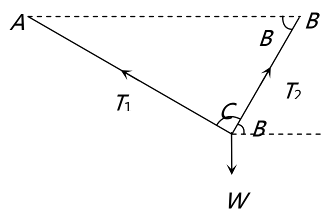


$\therefore \ Q = W\tan\alpha$ .....(ii)

(i) एवं (ii) से,

$\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{W^2}(\text{cosec}^2\alpha - \cot^2\alpha) = \frac{1}{W^2}$.

57. (c) C पर लॉमी प्रमेय से, $\frac{T_1}{\sin(90^o + B)} = \frac{W}{\sin C}$



$\Rightarrow T_1 = \frac{W\cos B}{\sin C} = \frac{W.(c^2 + a^2 - b^2)}{2ca\sin C} = \frac{Wb}{4c\Delta}(c^2 + a^2 - b^2)$.

58. (a) $2^2 = M^2 + N^2 + 2MN\cos 150°$

$\Rightarrow 4 = M^2 + N^2 - \sqrt{3}MN$ .....(i)

एवं $\tan\frac{\pi}{2} = \frac{N\sin 150°}{M + N\cos 150°} \Rightarrow M + N\cos 150° = 0$

$\Rightarrow M - N\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow M = \dfrac{N\sqrt{3}}{2}$ .....(ii)

(i) एवं (ii) को हल करने पर, $M = 2\sqrt{3}$ एवं $N = 4$.

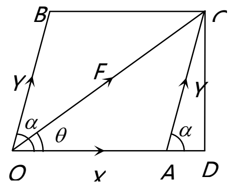
59. (a) माना कि बल *P* एवं 2*P* के बीच का कोण α है, चूँकि *P* एवं 2*P* का परिणामी *P* के लम्बवत् है, इसलिए

$$\tan\frac{\pi}{2} = \frac{2P\sin\alpha}{P + 2P\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow P + 2P\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

60. (b) माना कि *OA* एवं *OB* क्रमशः दो बलों *X* एवं *Y* को निरूपित करते हैं। माना कि उनके बीच का कोण α एवं परिणामी (*OC* द्वारा निरूपित) *OA* के साथ θ कोण बनाता है।



अब *OA* के अनुदिश *F* का घटक

$= F\cos\theta = OC \times \dfrac{OD}{OC} = OD$

$= OA + AD = OA + AC\cos\alpha$

$= X + Y\cos\alpha$

किन्तु *OA* के अनुदिश *F* का घटक *Y* द्वारा दिया गया है

$\therefore Y = X + Y\cos\alpha$ या $Y(1-\cos\alpha) = X$

$\Rightarrow Y.2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = X,$

$\Rightarrow \sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{X}{2Y}$

अर्थात्, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{X}{2Y}}$ या $\dfrac{\alpha}{2} = \sin^{-1}\sqrt{\dfrac{X}{2Y}}$

अतः $\alpha = 2\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{X}{2Y}}$.

61. (a) माना कि *A* एवं *B* बल है तब अधिकतम परिणामी

$= F = A + B$ एवं न्यूनतम परिणामी $= G = A - B$

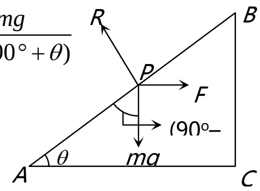
हल करने पर हम पाते हैं, $A = \dfrac{F+G}{2}$, $B = \dfrac{(F-G)}{2}$;

जहाँ *A* व *B* के बीच का कोण 2α है।

अतः परिणामी $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos 2\alpha}$

$\Rightarrow R = \sqrt{F^2\cos^2\alpha + G^2\sin^2\alpha}$.

62. (d) बिन्दु *P* पर लॉमी प्रमेय से,



$$\frac{R}{\sin 90^\circ} = \frac{F}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{mg}{\sin(90^\circ + \theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{1} = \frac{F}{\sin\theta} = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow F = mg\tan\theta.$$

समान्तर बल, आघूर्ण और बलयुग्म

1. (c) माना बिन्दु A, B, C पर कार्यरत् बल क्रमशः $\lambda a, \lambda b, \lambda c$ हैं।। माना ΔABC के भीतर बिन्दु *O* पर इन बलों का परिणामी $\lambda(a+b+c)$ है।

माना $AD \perp BC$ और $OL \perp BC$

BC के परितः बलों के आघूर्णों का योग = *BC* के परितः परिणामी बल का आघूर्ण

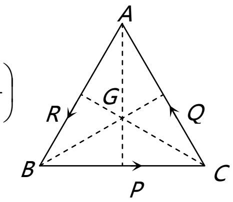
$\Rightarrow \lambda a.AD = \lambda(a+b+c).OL$

$\Rightarrow \lambda(BC.AD) = \lambda(a+b+c)OL$

$\Rightarrow 2\Delta = 2s.OL \Rightarrow OL = \dfrac{\Delta}{s} \Rightarrow OL = r$

अतः बलों का केन्द्र अन्तःकेन्द्र होगा।

2. (b) *G* के परितः परिणामी बल आघूर्ण = दिये हुए बल का *G* के परितः आघूर्ण($\dfrac{2\Delta}{3a}, \dfrac{2\Delta}{3b}$ और $\dfrac{2\Delta}{3c}$ भुजाओं से *G* की दूरियाँ हैं।)

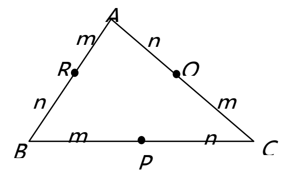


$\Rightarrow 0 = P\left(\dfrac{2\Delta}{3a}\right) + Q\left(\dfrac{2\Delta}{3b}\right) + R\left(\dfrac{2\Delta}{3c}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{P}{a} + \dfrac{Q}{b} + \dfrac{R}{c} = 0$

या $\dfrac{P}{\sin A} + \dfrac{Q}{\sin B} + \dfrac{R}{\sin C} = 0$.

3. (b)



$m(\overrightarrow{AC}) + n(\overrightarrow{AB}) = (m+n)\overrightarrow{AP}$ .....(i)

$n\overrightarrow{BC} + m\overrightarrow{BA} = (m+n)\overrightarrow{BQ}$ .....(ii)

$m\overrightarrow{CB} + n\overrightarrow{CA} = (m+n)\overrightarrow{CR}$ .....(iii)

(i), (ii) एवं (iii) को जोड़ने पर,

$(m+n)(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR}) = (n-m)(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$

$\therefore \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = \frac{n-m}{n+m}$ (2 × ΔABC का क्षेत्रफल)

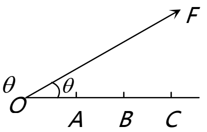
$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 2 \times \Delta ABC$ का क्षे.)

$\therefore \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = 2\left(\frac{n-m}{n+m}\right)\Delta$.

4. (b) यदि ΔABC की परित्रिज्या R है तो इसका परिकेन्द्र भुजा BC, CA तथा AB से क्रमशः $R\cos A, R\cos B$ तथा $R\cos C$ दूरी पर है। परिकेन्द्र के परितः आघूर्ण लेने पर हमें ज्ञात होता है कि सभी बलों का परिकेन्द्र के परितः आघूर्ण = परिणामी का इसके परितः आघूर्ण अर्थात् $P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$.

5. (b) यह बलयुग्म की परिभाषा है।

6. (b) यहाँ, $G_1 = F.OA\sin\theta$



$G_2 = F.OB\sin\theta \Rightarrow G_3 = F.OC\sin\theta$

$\therefore G_1 BC + G_2.CA + G_3.AB$

$= F\sin\theta[OA.BC + OB.CA + OC.AB]$

$= F\sin\theta[OA(OC-OB) + OB(OA-OC) + OC(OB-OA)] = 0$.

7. (a) माना कि समदिश समान्तर बल P एवं Q किसी ठोस पिंड के बिन्दु A एवं B पर कार्यरत हैं। चूँकि P एवं Q का परिणामी O से भी गुजरता है, इसलिए $AO = \left(\frac{AB}{P+Q}\right)Q$ .....(i)

समदिश समान्तर बल Q एवं R का परिणामी क्रमशः A एवं B पर कार्यरत् है एवं O से भी गुजरता है, इसलिए

$$AO = \left(\frac{AB}{Q+R}\right)R \quad .....(ii)$$

(i) एवं (ii) से, $\left(\frac{AB}{P+Q}\right)Q = \left(\frac{AB}{Q+R}\right)R$

$\Rightarrow Q^2 + QR = PR + QR$

$\Rightarrow Q^2 = PR \Rightarrow P, Q$ एवं R गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

8. (b) यह मूलभूत सिद्धांत है।

9. (a) प्रथम स्थिति में यदि परिणामी C पर कार्यरत है, तब

$AC = \left(\frac{AB}{P+3P}\right)3P = \frac{3}{4}AB$

दूसरी स्थिति में यदि परिणामी D पर कार्यरत है, तब

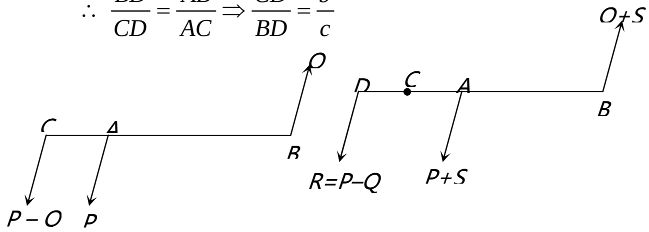
$AD = \left(\frac{AB}{3P+P}\right)P = \frac{1}{4}AB$

$\therefore CD = AC - AD = \frac{3}{4}AB - \frac{1}{4}AB = \frac{1}{2}AB$.

10. (c) माना कि ΔABC का अन्तःकेन्द्र I है। चूँकि दिये गये बलों का परिणामी I से होकर गुजरता है तथा एक बल P, A पर कार्यरत है अतः Q तथा R का परिणामी A पर कार्यरत होगा समदिश समान्तर बलों Q तथा R, जो कि क्रमशः B व C पर कार्यरत हैं, का परिणामी BC पर किसी बिन्दु पर कार्यरत होगा। अतः Q तथा R का परिणामी D पर कार्यरत होगा जो कि AI तथा BC का प्रतिच्छेदन बिन्दु है।

$\because AD, \angle A$ का समद्विभाजक है।

$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{b}{c}$



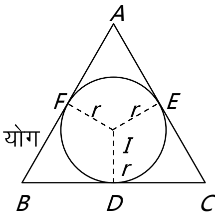
अब $Q.BD = R.CD \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{b}{c}$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं, $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b}$.

अतः $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$.

11. (a) $\because$ परिणामी का I के सापेक्ष आघूर्ण

= सभी बलों के आघूर्णों का I के सापेक्ष योग

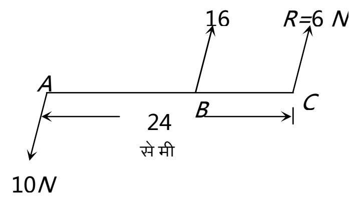


$\therefore P.ID + Q.IE + R.IF = 0$

या $P.r + Q.r + R.r = 0$

$\Rightarrow P + Q + R = 0$.

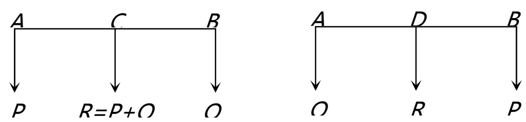
12. (c)



माना कि बल जिनके परिमाण $10N$ एवं $16N$ है क्रमशः A एवं B पर कार्यरत हैं। माना कि परिणामी C पर कार्यरत है, तब

$AC = \left(\frac{AB}{16-10}\right)16 \Rightarrow 24 = \frac{AB}{6} \times 16 \Rightarrow AB = 9$ सेमी.

13. (a)

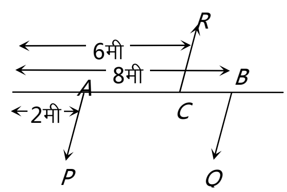


$AC = \left(\frac{AB}{P+Q}\right)Q$ एवं $AD = \left(\frac{AB}{P+Q}\right)P$

चूँकि परिणामी की स्थिति अपरिवर्तित है

$\therefore AC = AD \Rightarrow \left(\frac{AB}{P+Q}\right)Q = \left(\frac{AB}{P+Q}\right)P \Rightarrow P = Q$.

14. (a)



चूँकि बल सन्तुलन में हैं

$\therefore R = P + Q$ एवं $AC = \left(\frac{AB}{P+Q}\right)Q$

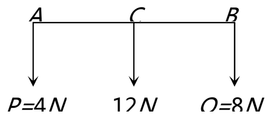
$\Rightarrow R = P + Q$ एवं $4 = \left(\frac{6}{P+Q}\right)Q$

$\Rightarrow R = P + Q$ एवं $2P + 2Q = 3Q$

$\Rightarrow R = P + Q$ एवं $2P = Q \Rightarrow 2P = Q$ एवं $R = 3P$

$\Rightarrow P : Q : R = P : 2P : 3P = 1 : 2 : 3$.

15. (c)



परिणामी $= 12\,N \Rightarrow P + Q = 12 \Rightarrow 4 + Q = 12 \Rightarrow Q = 8$

अब $AC = \left(\frac{AB}{P+Q}\right)Q \Rightarrow AC = \frac{18}{12} \times 8$

$\therefore AC = 12$ सेमी.

16. (b) चूँकि दोनों बलयुग्म समतुल्य हैं, इसलिए इनका आघूर्ण समान है। अतः $12 \times 8 = F \times 6 \Rightarrow F = 16\,N$.

17. (d) यह मूलभूत सिद्धांत है।

18. (b) यह मूलभूत सिद्धांत है।

19. (a) $\frac{P}{Q} + \frac{Q}{P} = 2$, (दिया गया है)

$\Rightarrow P^2 + Q^2 - 2PQ = 0 \Rightarrow (P - Q)^2 = 0 \Rightarrow P = Q$.

20. (d) यह मूलभूत सिद्धांत है।

21. (a) यह स्पष्ट है।

22. (a) दो समदिश समान्तर बल P एवं $3P$ है। यदि P की दिशा उलट दी जाए तब उनके परिणामी की दूरी

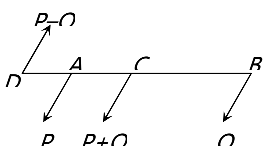
$= \left(\frac{AB}{P+3P}\right).3P = \frac{3}{4}AB$

$= \frac{3}{4} \times 40 = 30$ सेमी, ($\because AB = 40$ सेमी).

23. (b) यह स्पष्ट है।

24. (b) $AC = \left(\frac{AB}{P+Q}\right)Q$ एवं $AD = \left(\frac{AB}{P-Q}\right)Q$

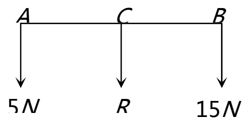
$\therefore CD = AC + AD = Q\left(\frac{AB}{P+Q}\right) + Q\left(\frac{AB}{P-Q}\right)$



$\therefore CD = \left(\frac{2PQ}{P^2 - Q^2}\right)AB$.

25. (b) दिए गए बलों का परिणामी = (5+15) N = 20 N

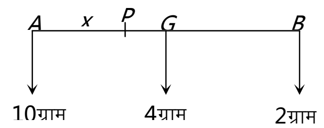
माना कि यह C पर कार्यरत है, तब



$AC = \left(\frac{AB}{5+15}\right)15 = \frac{6}{20} \times 15$

$\therefore AC = 4.5$ मी.

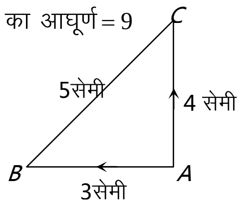
26. (b) माना कि छड़ बिन्दु P पर संतुलित है जो कि A से x सेमी दूरी पर है



$\therefore$ P के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर, $10.PA = 4.PG + 2.PB$

$\Rightarrow 10x = 4(50 - x) + 2(100 - x) \Rightarrow x = 25$ सेमी.

27. (c) चूँकि $\vec{F}$ का A के सापेक्ष आघूर्ण शून्य है, इसलिए $\vec{F}$, A से गुजरेगा। माना कि $\vec{F}$ के AB एवं AC के अनुदिश घटक क्रमशः X एवं Y हैं, तब B के परितः $\vec{F}$ का आघूर्ण $= 9$



$\Rightarrow 3Y = 9 \Rightarrow Y = 3$

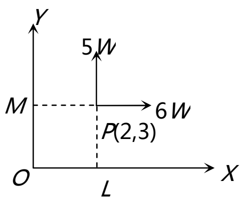
C के परितः $\vec{F}$ का आघूर्ण = 16

$\Rightarrow 4X = 16 \Rightarrow X = 4$

अतः $F^2 = X^2 + Y^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

$\Rightarrow F = 5$.

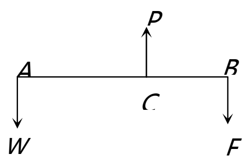
28. (d) मूलबिन्दु के परितः परिणामी बल का आघूर्ण



= $O(0, 0)$ के सापेक्ष बल आघूर्ण का बीजगणितीय योग

= $5W.OL - 6W.OM = 5W.2 - 6W.3 = -8W$.

29. (c) B के परितः आघूर्ण लेने पर,



$P.BC = W.BA \Rightarrow P = W.AB/x \Rightarrow P \propto \frac{1}{x}$.

30. (a) $2F \times \mathbf{r} = I \times \alpha \Rightarrow 2F \times 2 = 2 \times (2)^2 \times 1 \Rightarrow F = 2N$.

31. (c) पहली स्थिति में माना कि परिणामी C पर कार्यरत है, तब

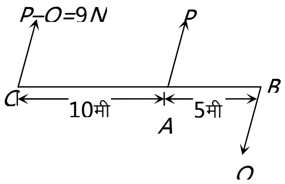
$AC = \left(\frac{AB}{P+Q}\right)Q$ .....(i)

जब P एवं Q को आपस में बदल दिया जाए, माना कि परिणामी D पर कार्यरत है, तब $AD = \left(\frac{AB}{P+Q}\right)P$ .....(ii)

(i) एवं (ii) से,

$CD = AD - AC = \left(\frac{AB}{P+Q}\right)P - \left(\frac{AB}{P+Q}\right)Q = \left(\frac{P-Q}{P+Q}\right)AB$.

32. (c)



यहाँ, $P - Q = 9N$ .....(i)

P एवं Q का परिणामी C पर कार्यरत है।

$\therefore AC = \left(\frac{AB}{P-Q}\right)Q \Rightarrow 10 = \left(\frac{5}{9}\right)Q \Rightarrow Q = 18$ न्यूटन

समीकरण (i) में Q का मान रखने पर,

$P - 18 = 9 \Rightarrow P = 27$ न्यूटन एवं $Q = 18$ न्यूटन.

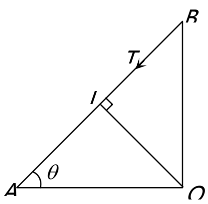
33. (d) बल xy-तल में रेखा के अनुदिश कार्यरत है। चूँकि बल आघूर्ण, बल के तल के लंबवत् है, इसलिए अभीष्ट आघूर्ण z-अक्ष के सापेक्ष है। रेखा का समीकरण $x + 2y - 11 = 0$ है।

$\therefore (4, 1)$ से रेखा की लंबवत् दूरी $= \left|\frac{4 + 2.1 - 11}{\sqrt{1+4}}\right| = \sqrt{5} = p$

अतः अभीष्ट आघूर्ण $= \sqrt{5}p = \sqrt{5}\sqrt{5} = 5$ इकाई.

34. (c) O के सापेक्ष T का आघूर्ण $= T.OL = T.AO \sin\theta$

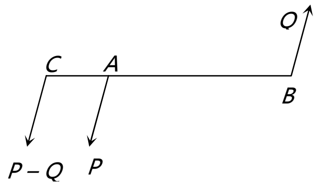
$= T.AB \cos\theta \sin\theta = \frac{1}{2} T.AB \sin 2\theta$



चूँकि T एवं AB द्वारा दिया गया आघूर्ण अधिकतम है जब $\sin 2\theta = 1$ अर्थात् जब $\theta = 45°$

$\therefore OB = AB \sin\theta = \frac{AB}{\sqrt{2}}$.

35. (c)



माना P तथा Q दो असमदिश समान्तर बल हैं, जो कि दृढ़ पिंड A तथा B पर कार्यरत है। माना कि परिणामी बल $P - Q$, बिन्दु C पर कार्यरत है, तब $AC = \left(\frac{AB}{P-Q}\right)Q$ .....(i)

अब प्रत्येक बल P और Q को S द्वारा बढ़ाया जाता है तथा माना कि परिणामी D पर कार्यरत है, तब

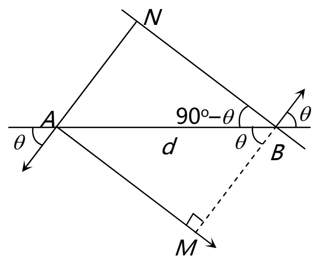
$AD = \left(\frac{AB}{(P+S)-(Q+S)}\right)(Q+S) = \left(\frac{AB}{P-Q}\right)(Q+S)$

अब, $CD = AD - AC = \left(\frac{AB}{P-Q}\right)(Q+S) - \left(\frac{AB}{P-Q}\right)Q$

$= \left(\frac{AB}{P-Q}\right)S = \frac{dS}{P-Q}$.

36. (c) माना $AB = d$ एवं AM, A से P तक की लम्बवत् दूरी है।

ΔABM में, $\sin\theta = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AM = d\sin\theta$



बल युग्म का आघूर्ण $G = P.AM = P.d \sin\theta$ ......(i)

जब P को समकोण से घुमाया जाता है, तब

बल युग्म का आघूर्ण $H = P.d \sin(90 + \theta) = Pd\cos\theta$

जब P को α कोण से घुमाया जाता है, तब

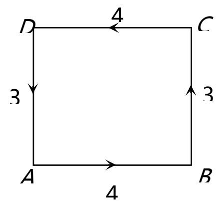
बल युग्म का आघूर्ण $= P.d \sin(\alpha + \theta)$

$= P.d(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)$

$= (P.d\cos\theta)\sin\alpha + (Pd\sin\theta)\cos\alpha = H\sin\alpha + G\cos\alpha$.

37. (b) 4 इकाई बल AB के अनुदिश और 4 इकाई बल CD के अनुदिश, एक $4a$ इकाई का बल युग्म बनाते हैं। इसी प्रकार

BC के अनुदिश 3 इकाई और DA के अनुदिश 3 इकाई, $3a$ इकाई का एक बल युग्म बनाते हैं।



चूँकि दोनों बल युग्म एक ही दिशा में हैं अतः दोनों बल युग्मों का परिणामी एक $7a$ इकाई का बल युग्म होगा।

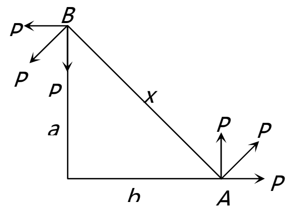
38. (c) चूँकि परिणामी ΔABC के परिकेन्द्र से गुजरता है, इसलिए उसके सापेक्ष आघूर्णों का बीजगणितीय योग शून्य है।

अतः $P + Q + R = 0$.

39. (c) $Pa = G$ एवं $Pb = H$ .....(i)

स्पष्टतः, $a^2 + b^2 = x^2$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{G^2}{P^2} + \frac{H^2}{P^2}} \Rightarrow Px = \sqrt{G^2 + H^2}$, [(i) से]

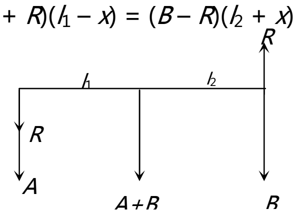


अतः अभीष्ट आघूर्ण = $\sqrt{G^2 + H^2}$.

40. (d) $Al_1 = Bl_2$, $H = (l_1 + l_2)R$

माना परिवर्तित दूरी = x

$(A + R)(l_1 - x) = (B - R)(l_2 + x)$

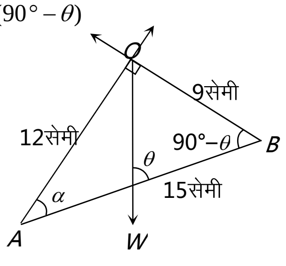


$\Rightarrow x = \frac{H}{A + B}$.

समतलीय बलों का सन्तुलन

1. (d) ΔAOB में $m - n$ प्रमेय के प्रयोग से,

$(1 + 1)\cot\theta = 1.\cot\alpha - 1\cot(90° - \theta)$



$\Rightarrow 2\cot\theta = \cot\alpha - \tan\theta$

$\Rightarrow 2\cot\theta = \frac{12}{9} - \frac{9}{12} = \frac{7}{12}$

$\Rightarrow \cot\theta = \frac{7}{24}$

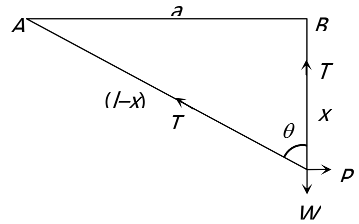
$\therefore \sin\theta = \frac{24}{25}$.

2. (c) माना डोरी में तनाव T है।

बल को क्षैतिजतः एवं उर्ध्वाधरतः वियोजित करने पर,

$T\cos\theta + T = W \Rightarrow T(1 + \cos\theta) = W$

किन्तु $(l - x)^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{l^2 - a^2}{2l}$

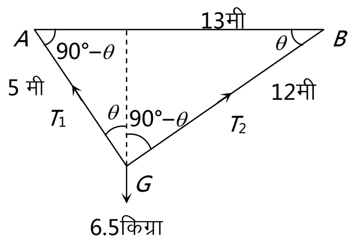


अब $\cos\theta = \frac{x}{l - x} = \frac{\frac{l^2 - a^2}{2l}}{l - \frac{l^2 - a^2}{2l}} = \frac{l^2 - a^2}{l^2 + a^2}$

$\therefore 1 + \cos\theta = 1 + \frac{l^2 - a^2}{l^2 + a^2} = \frac{2l^2}{l^2 + a^2}$

$\therefore T = \frac{W}{1 + \cos\theta} = \frac{W}{\frac{2l^2}{l^2 + a^2}} = \left(\frac{l^2 + a^2}{2l^2}\right)W$.

3. (b)



यहाँ, $\sin\theta = \frac{5}{13}$, $\cos\theta = \frac{12}{13}$

$T_1\sin\theta = T_2\cos\theta$ एवं $T_1\cos\theta + T_2\sin\theta = 6.5$

$\therefore \frac{T_1 \times 5}{13} = \frac{T_2 \times 12}{13} \Rightarrow 5T_1 = 12T_2$ .....(i)

एवं $5T_2 + 12T_1 = 6.5 \times 13$ .....(ii)

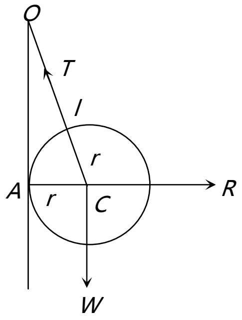
(i) एवं (ii) को हल करने पर,

$T_1 = 6$ एवं $T_2 = 2.5$.

4. (c) माना कि डोरी में तनाव T है।

अब, $T\sin\theta = W$

$\Rightarrow T = \frac{W}{\sin\theta} \Rightarrow T = \frac{W}{OA/OC} = \frac{W.OC}{\sqrt{OC^2 - AC^2}}$



$\therefore T = \frac{W(l+r)}{\sqrt{(l+r)^2 - r^2}} = \frac{W(l+r)}{\sqrt{l^2 + 2lr}}$.

5. (c) चूँकि पाँचवा बल प्रथम चारों बलों के परिणामी के बराबर एवं विपरीत हो भी सकता है और नहीं भी

$\therefore$ स्पष्टतः $n = 4$.

6. (a) सतह घर्षणरहित है, अतः छड़ क्षैतिज से न्यूनतम झुकाव पर होगी, अर्थात् छड़ क्षैतिज से 0^o कोण पर झुकी होगी।

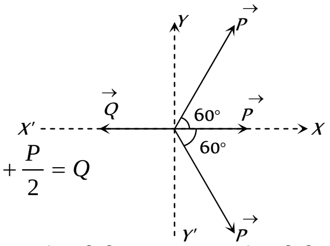
7. (d) यह मूलभूत सिद्धांत है।

8. (d) यह स्पष्ट है।

9. (c) माना कि आरोपित बल चित्रानुसार है। बलों के X-अक्ष एवं Y-अक्ष के अनुदिश घटक निम्न होंगे,

$P + P\cos 60^o + P\cos 60^o = Q$ (X-अक्ष के अनुदिश) .....(i)

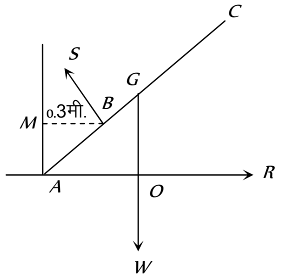
$P\cos 60^o = P\sin 60^o$, (Y-अक्ष के अनुदिश) .....(ii)



इस प्रकार, $P + \frac{P}{2} + \frac{P}{2} = Q$

$\therefore\ 2P = Q$.

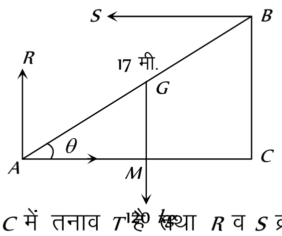
10. (b,c) साम्यावस्था के लिए A की प्रतिक्रिया R एवं B की प्रतिक्रिया S, O पर मिलती है इसलिए W भार की कार्यकारी रेखा O से गुजरती है।



स्पष्टतः, $AB > BM$ अर्थात् $AB > 0.3$ मीटर

$AB < AG \Rightarrow AB < \frac{1}{2}AC \Rightarrow AB < 1.0$ मीटर.

11. (a)



माना डोरी AC में तनाव T है तथा R व S क्रमशः A तथा B पर अभिलंब प्रतिक्रिया है। बल को क्षैतिजतः तथा ऊर्ध्वाधरतः वियोजित करने पर,

$T = S, R = 120$

A के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर, $S.BC = 120\ AM$

$\Rightarrow S.BC = 120\ AG\cos\theta \Rightarrow S \times 17\sin\theta = 120 \times \frac{17}{2}\cos\theta$

$\Rightarrow S = 60\cot\theta \Rightarrow S = 60 \times \frac{AC}{BC}$

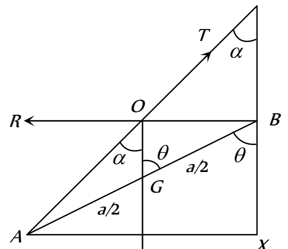
$\Rightarrow S = 60 \times \frac{8}{\sqrt{17^2 - 8^2}} = 32$, ($\because$ दिया है AC = 8 मी)

$\therefore T = 32$ किग्रा भार.

12. (c) माना छड़ का मध्य बिन्दु G है जिस पर भार W नीचे की दिशा में कार्यरत है। माना भार की क्रिया रेखा तथा अभिलंब प्रतिक्रिया R दीवार तथा छड़ के बीच O पर मिलते हैं। चूँकि यह दोनों बल O से होकर गुजरते हैं अतः डोरी में तनाव अर्थात् तीसरा बल भी O से ही होकर गुजरेगा तथा AS वह डोरी है जहाँ S ऊर्ध्वाधरतः B के ऊपर है।

A से होकर, दीवार पर लंब AX खींचा। अब $\Delta\ ABO$ में GO, SB के समान्तर खींची गयी है जो कि AB के मध्य बिन्दु से होकर गुजरती है।

अतः $SB = 2.OG = 2BG\cos\theta = a\cos\theta$



अब $\Delta\ ABS$ पर कोज्या (cosine) सूत्र लगाने पर,

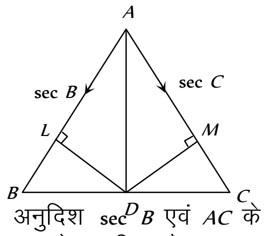
$\cos(180° - \theta) = \frac{AB^2 + SB^2 - AS^2}{2AB.SB}$

या $-\cos\theta = \frac{a^2 + (a\cos\theta)^2 - l^2}{2a.a\cos\theta}$, ($\because AS = l$ एवं $AB = a$)

या $-2a^2\cos^2\theta = a^2 + a^2\cos^2\theta - l^2$

$\therefore\ l^2 - a^2 = 3a^2\cos^2\theta$ या $\cos^2\theta = \frac{l^2 - a^2}{3a^2}$.

13. (b)



चूँकि AB के अनुदिश $\sec B$ एवं AC के अनुदिश $\sec C$ का परिणामी बल AD के अनुदिश है। $\sec B$ एवं $\sec C$ का बल आघूर्ण D के परितः शून्य है।

$\therefore\ \sec B.DL = \sec C.DM$

$\Rightarrow \sec B.BD\sin B = \sec C.CD\sin C$

या $\frac{BD\sec B}{CD\sec C} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$ या $\frac{BD}{c\cos B} = \frac{CD}{b\cos C} = k$

$\therefore\ a = BC = BD + CD = k(c\cos B + c\cos C)$

$\Rightarrow a = k.a \Rightarrow k = 1$

$\therefore\ BD = c\cos B, CD = b\cos C$. अतः $\angle BDA = \frac{\pi}{2}$

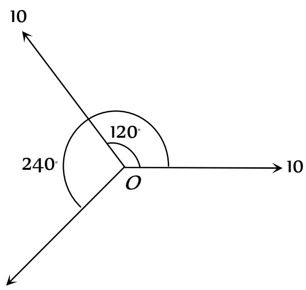
अर्थात् A से BC पर लम्ब का पाद बिन्दु D है।

14. (a) $R\cos\theta = 10\cos 0^o + 10\cos 120^o + 10\cos 240^o$

$R\cos\theta = 10 - \frac{10}{2} - \frac{10}{2} = 0$

एवं $R\sin\theta = 10\sin 0^o + 10\sin 120^o + 10\sin 240^o$

$R\sin\theta = 10\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{10\sqrt{3}}{2} = 0$



अतः $R^2[\cos^2\theta + \sin^2\theta] = 0 \Rightarrow R = 0$.

15. (c) अंगूठी (Ring) की त्रिज्या = 3 सेमी

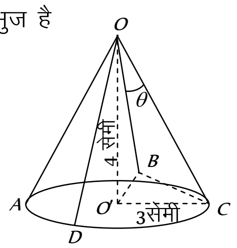
$OO' = 4$ सेमी

माना कि डोरी की लम्बाई = $OB = l$ सेमी

तब $\Delta O'BC$ में, $\angle BO'C = \frac{\pi}{2}$

(डोरी समान अंतराल पर जुड़ी है)

अतः $\Delta O'BC$ समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है



$\therefore \; BC = 3\sqrt{2}$ सेमी

$\Delta OO'B$ में, $\angle BO'O = \dfrac{\pi}{2}$

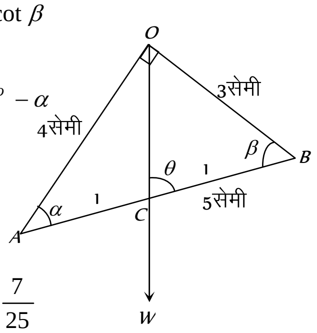
$\therefore \; OB = l = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ सेमी

माना कि $\angle BOC = \theta$, तब

$$\cos\theta = \frac{OC^2 + OB^2 - BC^2}{2.OC.OB} = \frac{5^2 + 5^2 - (3\sqrt{2})^2}{2 \times 5 \times 5} = \frac{16}{25}.$$

16. (a,c) $(m-n)$ प्रमेय द्वारा

$(1+1)\cot\theta = 1.\cot\alpha - 1.\cot\beta$



$\Rightarrow \; 2\cot\theta = \cot\alpha - \cot\beta$

$\because \; \angle AOB = 90^o$, $\beta = 90^o - \alpha$

अतः $\cot\beta = \tan\alpha$

$\therefore \; 2\cot\theta = \cot\alpha - \tan\alpha$

$\Rightarrow \; 2\cot\theta = \dfrac{4}{3} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{12}$

$\Rightarrow \cot\theta = \dfrac{7}{24}$, $\therefore \; \cos\theta = \dfrac{7}{25}$

$\sin\theta = \dfrac{24}{25}$. अतः $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{7}{25}\right) = \sin^{-1}\left(\dfrac{24}{25}\right)$.

17. (d) यह स्पष्ट है।

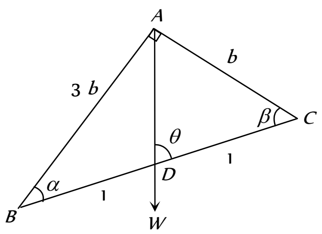
18. (a) समकोण त्रिभुज में कर्ण का मध्य बिन्दु शीर्ष से बराबर दूरी पर होता है।

$\therefore DB = DC = DA$ एवं $\angle BAC = 90^o$

$(m-n)$ प्रमेय द्वारा, $(1+1)\cot\theta = 1.\cot\alpha - 1.\cot\beta$

$\Rightarrow \; 2\cot\theta = \cot\alpha - \tan\alpha$, $\quad (\because \beta = 90^o - \alpha)$

$\Rightarrow \; 2\cot\theta = \dfrac{3b}{b} - \dfrac{b}{3b}$



$\Rightarrow \; 2\cot\theta = \dfrac{8}{3}$

$\Rightarrow \; \cot\theta = \dfrac{4}{3}$

अतः $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow \; \theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)$.

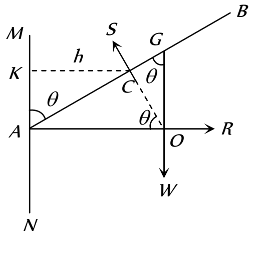
19. (a) माना कि *AB*, $2a$ लम्बाई तथा *W* भार की एक छड़ है। यह किसी चिकनी (घर्षण रहित) दीवार के सहारे *A* तथा खूँटी *C* के ऊपर स्थित है जो कि दीवार से *h* दूरी पर है। छड़ निम्न बलों के प्रभाव में संतुलन में होगी :

(i) *G* पर भार *W*

(ii) *A* पर प्रतिक्रिया *R*

(iii) *C* पर, *AB* के लम्बवत् प्रतिक्रिया *S*

चूँकि छड़ संतुलन में है अतः यह तीनों बल बिन्दु *O* पर संगामी हैं।



ΔACK में, $\sin\theta = \dfrac{h}{AC}$

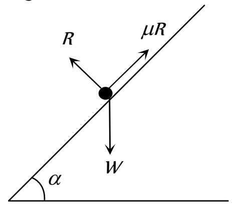
ΔACO में, $\sin\theta = \dfrac{AC}{AO}$

ΔAGO में, $\sin\theta = \dfrac{AO}{a}$

$$\therefore \sin^3\theta = \frac{h}{AC}.\frac{AC}{AO}.\frac{AO}{a} = \frac{h}{a}.$$

घर्षण

1. (b) यदि किसी नत समतल पर कोई वस्तु अपने भार के कारण ठीक नीचे फिसलने की स्थिति में हो, तो नत समतल के झुकाव कोण का मान घर्षण कोण के बराबर होता है।



वैकल्पिक : माना *W* वस्तु का भार है तब $W\cos\alpha = R$;

$W\sin\alpha = \mu R$

$\therefore \; \mu = \tan\alpha \; \Rightarrow \; \tan\lambda = \tan\alpha \Rightarrow \lambda = \alpha$, जहाँ λ घर्षण कोण है।

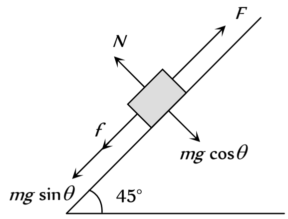
2. (c) यदि $\alpha \le \lambda$, तब पिंड सीमांत साम्य में है एवं ठीक फिसलने की अवस्था में है।

3. (c) यह स्पष्ट है।

4. (a) दिया गया है, $\mu = 0.5$ एवं $\theta = 45^o$

सभी बलों को तल के लम्बवत् तथा अनुदिश वियोजित करने पर, $(mg\sin\theta + f) = F$

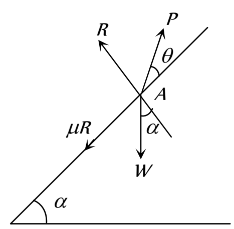
एवं $f = N\mu = \mu mg\cos\theta$



$\therefore \; F = mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)$

$= 4g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}$ किग्रा भार.

5. (b) माना कि वस्तु को नत समतल पर ऊपर की ओर गति कराने के लिए आवश्यक बल *P* है जो कि समतल के साथ θ कोण पर कार्यरत है, तब

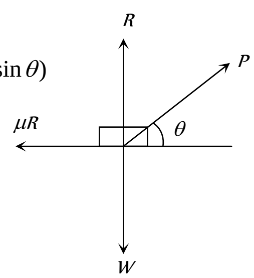


$P = W\dfrac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)}$, $\quad (\because \mu = \tan\lambda)$

बल *P* न्यूनतम होगा जब $\cos(\theta - \lambda)$ का मान अधिकतम होगा अर्थात् $\cos(\theta-\lambda) = 1$, अतः *P* का न्यूनतम मान $W\sin(\alpha+\lambda)$ है।

6. (a) यहाँ $P\cos\theta = \mu R$ .....(i)

तथा $R + P\sin\theta = W$ ....(ii)



(i) व (ii) से, $P\cos\theta = \mu(W - P\sin\theta)$

$\Rightarrow \; P(\cos\theta + \mu\sin\theta) = \mu W$

$\Rightarrow \; P = \dfrac{\mu W}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$

$\Rightarrow P = \dfrac{W.\tan\lambda}{\cos\theta + \tan\lambda.\sin\theta}$, ($\because \mu = \tan\lambda$)

$\Rightarrow P = \dfrac{W\sin\lambda}{\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda} \Rightarrow P = \dfrac{W\sin\lambda}{\cos(\theta-\lambda)}$

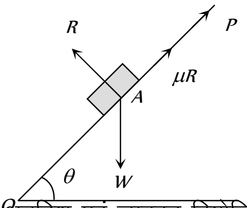
P न्यूनतम होगा जब $\cos(\theta-\lambda)$ अधिकतम होगा अर्थात् $\cos(\theta-\lambda)=1$. अतः न्यूनतम $P = W\sin\lambda$.

7. (a) $\mu = \tan\theta$, (सीमान्त साम्य)

$\mu = \tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ घर्षण का गुणांक $= \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

8. (a) **स्थिति I :** जब बल P तल के अनुदिश कार्यरत् हो :



बलों को तल के अनुदिश एवं लम्बवत् वियोजित करने पर,

$P + \mu R = W\sin\theta$ and $R = W\cos\theta$

$\Rightarrow P + \mu W\cos\theta = W\sin\theta \Rightarrow P = W(\sin\theta - \mu\cos\theta)$

$\Rightarrow \dfrac{P}{W} = \sin\theta - \mu\cos\theta$ .....(i)

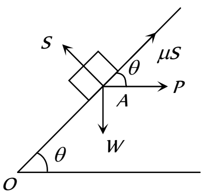
स्थिति II : जब बल P क्षैतिज तल में कार्यरत् हो : बल को तल के अनुदिश एवं उसके लंबवत् वियोजित करने पर,

$P\cos\theta + \mu S = W\sin\theta$ एवं $S = P\sin\theta + W\cos\theta$

$\Rightarrow P\cos\theta + \mu(P\sin\theta + W\cos\theta) = W\sin\theta$

$\Rightarrow P = \dfrac{W(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$

$\Rightarrow \dfrac{P}{W} = \dfrac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$ .....(ii)



(i) एवं (ii) से,

$\sin\theta - \mu\cos\theta = \dfrac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$

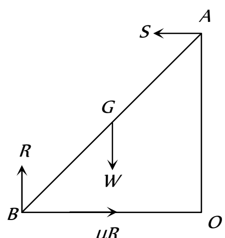
$\cos\theta + \mu\sin\theta = 1 \Rightarrow \mu = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ .....(iii)

(i) एवं (iii) से, $\dfrac{P}{W} = \sin\theta - \cos\theta\dfrac{(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$

$\Rightarrow \dfrac{P}{W} = \dfrac{\sin^2\theta - \cos\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta}$

$\Rightarrow \dfrac{P}{W} = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \dfrac{P}{W} = \mu$, ((iii) से)

$\dfrac{P}{W} = \tan\phi$, [$\because \mu = \tan\phi$].



9. (a)

बलों को क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर तल में वियोजित करने पर,

$S = \mu R$ एवं $R = W$. अतः $S = \mu W$.

10. (b) पिंड उस बिन्दु से नीचे की ओर फिसलेगा जब $\alpha = \lambda$, जहाँ α समतल का झुकाव है।

अतः $\tan\alpha = \tan\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30°$.

11. (a) न्यूनतम क्षैतिज बल

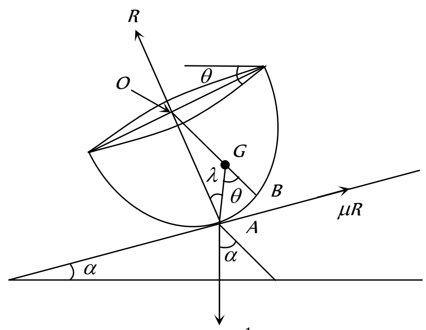
$= \mu.R = \mu(40) = 0.25 \times 40 = 10$ किग्रा भार.

12. (a) माना अर्द्धगोलाकार आवरण किसी रूक्ष नतसमतल पर इस प्रकार रखा है कि बिन्दु A नतसमतल को स्पर्श करता है। R तथा μR का परिणामी, AO के साथ λ कोण बनाता है एवं साम्यावस्था के लिये आवरण W के भार के बराबर एवं विपरीत है। इस प्रकार AG ऊर्ध्वाधर है अतः $\lambda = \alpha$, जहाँ क्षैतिज से नतसमतल का झुकाव α है।

यदि परिधि के आधार तल का क्षैतिज से झुकाव θ है, तब $\angle AGB = \theta$

ΔOAG में, ज्या नियम (sine rule) से,

$\dfrac{OA}{\sin OGA} = \dfrac{OG}{\sin\lambda}$ या $\dfrac{a}{\sin(\pi-\theta)} = \dfrac{a/2}{\sin\lambda}$



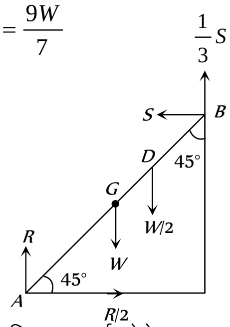
$\therefore \sin\theta = 2\sin\lambda \Rightarrow \theta = \sin^{-1}(2\sin\lambda)$.

13. (c) माना कि सीढ़ी AB का मध्यबिन्दु G है। माना कि D उच्चतम बिन्दु है, जहाँ तक व्यक्ति चढ़ सकता है एवं $AD = x$.

बलों का क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर तल में वियोजन करने पर,

$S = \dfrac{1}{2}R$ एवं $R + \dfrac{1}{3}S = W + \dfrac{W}{2} \Rightarrow R + \dfrac{1}{6}R = \dfrac{3W}{2}$

$\Rightarrow R = \dfrac{9W}{7}$ .....(i)



B के परितः आघूर्ण लेने पर,

$R.(70\sin 45^o) = \frac{R}{2}(70\cos 45^o) + W.(35\sin 45^o)$

$+\frac{W}{2}(70-x)\sin 45^o$

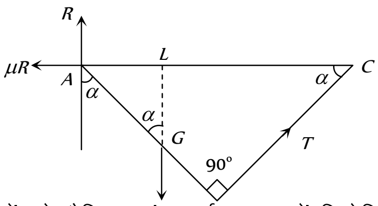
$\Rightarrow 35R = W\left(35+35-\frac{x}{2}\right) = W\left(70-\frac{x}{2}\right)$

$\therefore 35\times\frac{9W}{7} = W\left(70-\frac{x}{2}\right)$, ((i)से)

$\therefore x = 50$ मीटर.

14. (a) सीमान्त सन्तुलन की स्थिति में,
झुकाव कोण = घर्षण कोण
$\therefore$ घर्षण कोण = 30°.

15. (b)



बलों को क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर तल में वियोजित करने पर,

$T\cos\alpha - \mu R = 0$ .....(i)

$R + T\sin\alpha - W = 0$ .....(ii)

A के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर, $T.AB = W.AL$

$\Rightarrow T.AB = W.AG\sin\alpha \Rightarrow T = (W/2)\sin\alpha$ .....(iii)

(i) एवं (ii) से, R का विलोपन करने पर

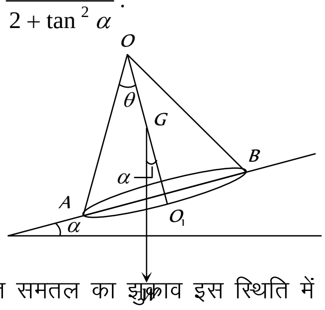
$T\cos\alpha - \mu(W - T\sin\alpha) = 0$

(iii) से, $\left(\frac{W}{2}\right)\sin\alpha\cos\alpha - \mu\left[W - \left(\frac{W}{2}\right)\sin^2\alpha\right] = 0$

या $\mu = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2-\sin^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{2\sec^2\alpha - \tan^2\alpha}$

या $\mu = \frac{\tan\alpha}{2+\tan^2\alpha}$.

16. (a)



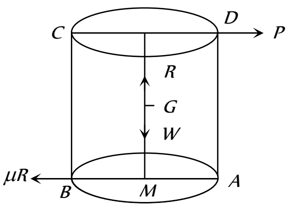
यदि नत समतल का झुकाव इस स्थिति में α है, तब $\angle AGO_1 = \alpha$

$\therefore \tan\alpha = \frac{AO_1}{O_1G} = \frac{a}{h/4} = \frac{4a}{h} = 4\tan\theta$

अब $\mu < 4\tan\theta \Rightarrow \tan\lambda < \tan\alpha \Rightarrow \lambda < \alpha$

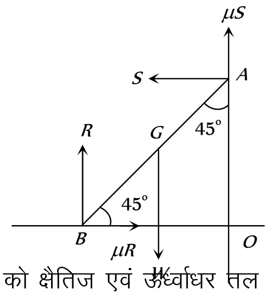
अतः शंकु लुढ़कने से पहले फिसलेगा।

17. (a) सीमान्त सन्तुलन की स्थिति में,
$R = W$ एवं $P = \mu R$,



A के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर, बेलन फिसलने से पहले लुढ़केगा यदि $P.AD > W.AM$ अर्थात् $\mu Rh > R.r \Rightarrow \mu h > r$.

18. (a)



बलों को क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर तल में वियोजित करने पर,

$S = \mu R$, $R + \mu S = W$. अतः $\frac{S}{\mu} + \mu S = W$

B के परितः आघूर्ण लेने पर,

$S.2a\cos 45° + \mu S.2a\sin 45° = W.a\sin 45°$

या $2S(1+\mu) = W$

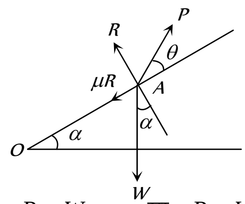
या $2S(1+\mu) = S\left(\frac{1}{\mu}+\mu\right)$ या $\mu^2 + 2\mu - 1 = 0$

$\Rightarrow \mu = -1\pm\sqrt{2}$, $\therefore \mu = \sqrt{2}-1$.

19. (c) माना कि बल P, जो तल से θ कोण पर कार्यरत है, पिंड को तल के ऊपर की ओर उठाने के लिए आवश्यक है, तब

$P\cos\theta = \mu R + W\sin\alpha$

$\mu R = P\cos\theta - W\sin\alpha$



एवं $P\sin\theta + R = W\cos\alpha$ या $R = W\cos\alpha - P\sin\theta$

$\therefore (P\cos\theta - W\sin\alpha) = \mu(W\cos\alpha - P\sin\theta)$

$\mu = \tan\lambda$ रखने पर, तब $P\cos(\theta-\lambda) = W\sin(\alpha+\lambda)$

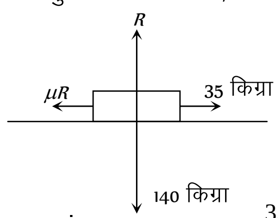
या $P = \frac{W\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)}$

बल न्यूनतम होगा जब $\cos(\theta-\lambda)$ अधिकतम है।

अर्थात् $\cos(\theta-\lambda) = 1$ या $\cos(\theta-\lambda) = \cos 0^o$

$\therefore \theta = \lambda$ अतः $k = 1$.

20. (d) सीमान्त सन्तुलन की स्थिति में,

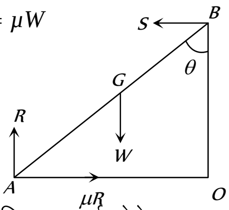


$\mu R = 35$ एवं $R = 140$ $\Rightarrow \mu = \frac{35}{140} = \frac{1}{4}$.

21. (b) माना कि एक समरूप सीढ़ी का भार W है, तब बल का क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर तल में वियोजन करने पर,

$S = \mu R$ एवं $R = W$

$\Rightarrow S = \mu W$ .....(i)



A के परितः आघूर्ण लेने पर,

$-W.AG\sin\theta + S.AB\cos\theta = 0$

$\Rightarrow W.AG\sin\theta = S.AB\cos\theta$

$\Rightarrow W.\frac{AB}{2}\sin\theta = S.AB\cos\theta$, $\left[\because AG = \frac{AB}{2}\right]$

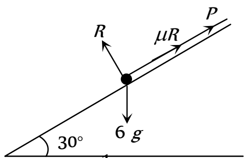
$\Rightarrow \frac{W}{2}.AB\sin\theta = \mu W.AB\cos\theta$, [(i) से]

अतः $\tan\theta = 2\mu$.

22. (b) माना कि अभीष्ट बल P है जो कि पिंड को रोकता है एवं घर्षण गुणांक μ है

स्थिति I : $R = 6g\cos 30°$,

$\mu R = 6g\sin 30°$, (सीमान्त साम्य)



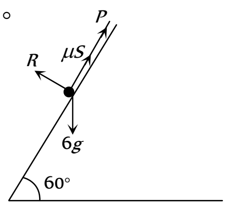
$\therefore \mu = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

स्थिति II : $S = 6g\cos 60°$; $P + \mu S = 6g\sin 60°$

$\therefore P + \frac{1}{\sqrt{3}}(6g\cos 60°) = 6g\sin 60°$

$P = 6g\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow P = 2\sqrt{3}g$

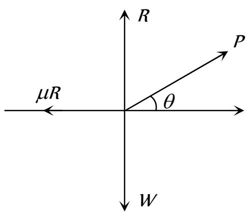


अतः $P = 2\sqrt{3}$ किग्रा भार.

23. (b) माना कि न्यूनतम बल P तल से θ कोण पर कार्यरत है जो कि पिंड को गति कराने के लिए आवश्यक है। अब बलों को क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर तल में वियोजित करने पर,

$P\cos\theta = \mu R; P\sin\theta + R = W$

$\therefore P\cos\theta = \mu[W - P\sin\theta]$



या $P[\cos\theta + \mu\sin\theta] = \mu W$

या $P = \frac{\mu W}{\cos\theta + \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}.\sin\theta} = \frac{\mu W\cos\lambda}{\cos(\theta-\lambda)} = \frac{W\sin\lambda}{\cos(\theta-\lambda)}$

अब P न्यूनतम है जब $\cos(\theta-\lambda)$ अधिकतम है अर्थात् $\cos(\theta-\lambda) = 1$

$\therefore$ न्यूनतम $P = W\sin\lambda$

किन्तु $W = 1$ टन $= 1000$ किग्रा एवं $P = 600$ किग्रा

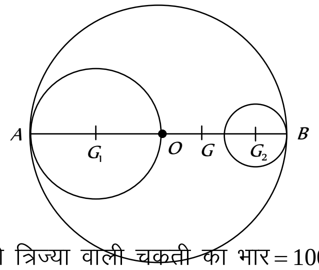
$\therefore \sin\lambda = \frac{P}{W} = \frac{600}{1000} = \frac{3}{5}$ एवं $\tan\lambda = \frac{3}{4}$.

अतः $\mu = \frac{3}{4}$.

गुरुत्व केन्द्र

1. (b) त्रिभुज के शीर्षों पर रखे गये कणों तथा त्रिभुज का गुरुत्व केन्द्र समान होगा अर्थात् केन्द्रक।

2. (c) माना कि 5 सेमी एवं 2.5 सेमी त्रिज्या वाले छिद्रों के केन्द्र क्रमशः G_1 एवं G_2 हैं। चकती (Disc) का भार उसके क्षेत्रफल के समानुपाती है। माना कि धातु का घनत्व ρ है।



$w = 10$ सेमी त्रिज्या वाली चकती का भार $= 100\pi\rho$

$w_1 = 5$ सेमी त्रिज्या वाली चकती (छिद्र) का भार $= 25\pi\rho$

$w_2 = 2.5$ सेमी त्रिज्या वाली चकती (छिद्र) का भार $= 6.25\pi\rho$

माना कि O से दूरी मापी जाती है एवं OB की ओर धनात्मक एवं OA की ओर ऋणात्मक ली जाती है, तब

$x = 10$ सेमी की त्रिज्या वाली चकती (छिद्र) के गुरुत्वकेन्द्र की से दूरी $= 0$

$x_1 = 5$ सेमी की त्रिज्या वाली चकती (छिद्र) के गुरुत्वकेन्द्र की O से दूरी $= -5$ सेमी

$x_2 = 2.5$ सेमी त्रिज्या वाली चकती (छिद्र) के गुरुत्वकेन्द्र की O से दूरी $= 7.5$ सेमी

$\therefore OG = \frac{wx - w_1x_1 - w_2x_2}{w - w_1 - w_2}$

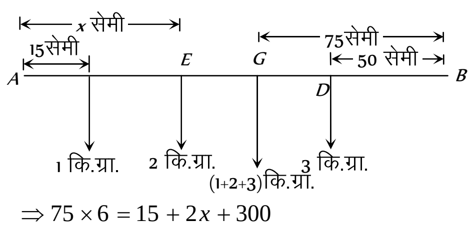
$= \frac{100\pi\rho \times 0 + 25\pi\rho \times 5 - 6.25\pi\rho \times 7.5}{100\pi\rho - 25\pi\rho - 6.25\pi\rho} = \frac{25}{22}$ सेमी.

3. (d) माना कि छड़ के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A है, तब

$\bar{x} = \frac{\int_0^a x.k\,x^2 A dx}{\int_0^a k\,x^2 A dx} = \frac{\int_0^a x^3 dx}{\int_0^a x^2 dx} = \frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{a^3}{3}} = \frac{3}{4}a.$

4. (c) निकाय का गुरुत्वकेन्द्र AB के मध्यबिन्दु G पर होने के लिए,

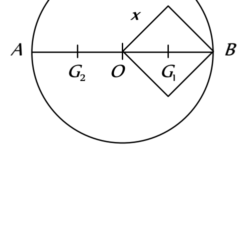
$AG = \frac{1\times 15 + 2\times x + 3\times 100}{1+2+3}$



$\Rightarrow 75\times 6 = 15 + 2x + 300$

$\Rightarrow 2x = 135 \Rightarrow x = 67.5$ सेमी.

5. (b) यहाँ वृत्त की त्रिज्या $= OA = \frac{4}{2} = 2$



$\therefore$ वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi(2)^2 = 4\pi$

माना कि वर्ग की भुजा x है

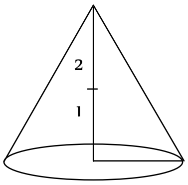
तब $\sqrt{2x^2} = \frac{4}{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$

माना G_1 वर्गाकार प्लेट का गुरुत्वकेन्द्र एवं शेष भाग का गुरुत्वकेन्द्र G_2 है।

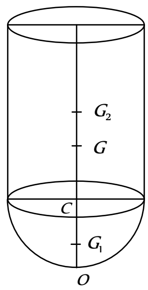
तब $OG_2 = \frac{(4\pi)\rho g \times 0 - (\sqrt{2})^2 \rho q \times (-OG_1)}{(4\pi)\rho g - (\sqrt{2})^2 \rho g}$

$OG_2 = \frac{2\rho g}{(4\pi)\rho g - 2\rho g} = \frac{1}{2\pi - 1}$.

6. (a) गुरुत्वकेन्द्र आधार एवं शीर्ष को 1: 2 के अनुपात में बाँटता है।



7. (a) $CG_1 = \frac{3a}{8}$, (अर्धगोले का गुरुत्वकेन्द्र)



$CG_2 = \frac{a}{2}$, (बेलन का गुरुत्वकेन्द्र)

$\therefore\ OG_1 = a - \frac{3a}{8} = \frac{5a}{8}$

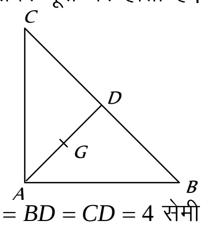
एवं $OG_2 = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$

माना कि संयुक्त पिंड का गुरुत्वकेन्द्र G है, तब

$$OG = \frac{\left(\frac{2}{3}\pi a^3 \rho g\right)\frac{5a}{8} + (\pi a^2 + a\rho g)\frac{3a}{2}}{\frac{2}{3}\pi a^3 \rho g + \pi a^2 a \rho g} = \frac{\frac{5a}{12} + \frac{3a}{2}}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{23a}{20} > a$$

$\Rightarrow C$ के ऊपर G है, अतः G बेलन के अन्दर होगा।

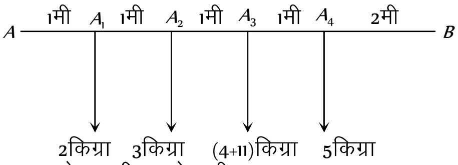
8. (c) निकाय का गुरुत्वकेन्द्र ΔABC के केन्द्रक G पर है, चूँकि $BC = 8$ सेमी एवं कर्ण का मध्य बिन्दु समकोण त्रिभुज में शीर्षों से बराबर दूरी पर होता है।



अतः, $AD = BD = CD = 4$ सेमी

$\therefore\ AG = \frac{2}{3} AD = \frac{8}{3}$ सेमी.

9. (c)



गुरुत्वकेन्द्र की A से दूरी

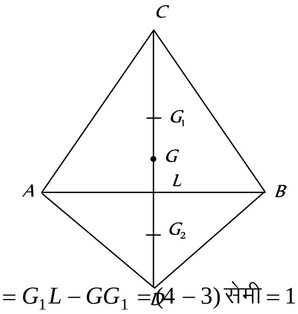
$= \frac{2\times1 + 3\times2 + (4+11)\times3 + 5\times4}{2+3+(4+11)+5} = \frac{73}{25}$.

10. (b) माना AB का मध्य बिन्दु L है, तब $CL \perp AB$ एवं $DL \perp AB$.

दिया गया है, $CL = 12$ सेमी एवं $DL = 6$ सेमी

$\therefore\ LG_1 = \frac{1}{3} CL = 4$ सेमी एवं $LG_2 = \frac{1}{3} DL = 2$ सेमी

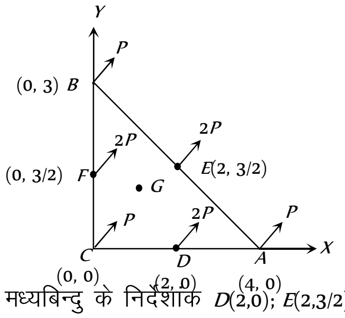
चतुर्भुज $ABCD$ का गुरुत्वकेन्द्र G है, जो कि G_1G_2 का मध्यबिन्दु है। $\therefore\ G_1G_2 = G_1G = 3$ सेमी



$\Rightarrow GL = G_1L - GG_1 = (4-3)$ सेमी $= 1$ सेमी.

11. (c) माना कि भुजा CA, CB को निर्देशांक अक्ष लेते हैं।

यहाँ, $CA = 4$ सेमी, $CB = 3$ सेमी



भुजाओं के मध्यबिन्दु के निर्देशांक $D(2,0)$; $E(2,3/2)$; $F(0,3/2)$ हैं।

माना $(\bar{x}, \bar{y})$ बलों के केन्द्र के निर्देशांक है, तब

$\bar{x} = \frac{P\times0 + 2P\times2 + P\times4 + 2P\times2 + P\times0 + 2P\times0}{P + 2P + P + 2P + P + 2P}$

$\bar{x} = \frac{4}{3}$

$\bar{y} = \frac{P\times0 + 2P\times0 + P\times0 + 2P\times\frac{3}{2} + P\times3 + 2P\times\frac{3}{2}}{P + 2P + P + 2P + P + 2P}$

$\bar{y} = 1$

$\therefore$ समांतर बलों का केन्द्र $G = \left(\frac{4}{3}, 1\right)$

अतः $C(0,0)$ से इसकी दूरी

$= GC = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + (1)^2} = \frac{5}{3}$ सेमी.

Critical Thinking Questions

1. (d) माना कि बल P एवं Q के बीच का कोण 3θ है। यह दिया गया है कि P एवं Q का परिणामी R उनके बीच के कोण को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है। इसका अर्थ है कि परिणामी P की दिशा से θ कोण एवं Q की दिशा से 2θ कोण बनाती है।

इसलिए $P = \dfrac{R\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$ एवं $Q = \dfrac{R\sin\theta}{\sin 3\theta}$

$$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta \quad .....(i)$$

अब, $Q = \dfrac{R\sin\theta}{\sin 3\theta} \Rightarrow Q = \dfrac{R}{3-4\sin^2\theta}$

$$\Rightarrow \frac{R}{Q} = 3 - 4\sin^2\theta \Rightarrow \frac{R}{Q} = -1 + 4\cos^2\theta$$

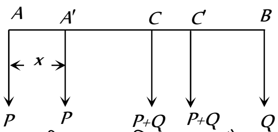
$$\Rightarrow \frac{R}{Q} + 1 = (2\cos\theta)^2 \quad .....(ii)$$

(i) एवं (ii) से,

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^2 = \frac{R}{Q} + 1 \Rightarrow \frac{R}{Q} = \frac{P^2 - Q^2}{Q^2} \Rightarrow R = \frac{P^2 - Q^2}{Q}.$$

2. (a) माना कि समांतर बल P एवं Q क्रमशः A एवं B पर कार्यरत् हैं। माना कि परिणामी $(P+Q)$, C पर कार्यरत् है

तब $AC = \left(\dfrac{AB}{P+Q}\right)Q$ .....(i)



यदि P स्वयं के समान्तर x दूरी तक गति करता है, अर्थात् A से A' तक। माना कि परिणामी अब C पर कार्यरत् है, तब

$$A'C' = \left(\frac{A'B}{P+Q}\right)Q \Rightarrow A'C' = \left(\frac{AB - x}{P+Q}\right)Q \quad .....(ii)$$

अब $CC' = AC' - AC = AA' + A'C' - AC$

$$\Rightarrow CC' = x + \left(\frac{AB - x}{P+Q}\right)Q - \left(\frac{AB}{P+Q}\right)Q$$

$$\Rightarrow CC' = x - \frac{Qx}{P+Q} \Rightarrow CC' = \frac{Px}{P+Q}.$$

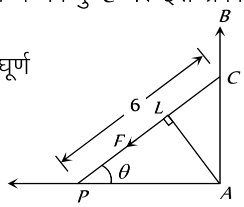
3. (b) माना कि डोरी ऊर्ध्वाधर स्तम्भ के बिन्दु C पर इस प्रकार बंधी है कि $AC = x$

अब A के परितः F का बल आघूर्ण

$= F.AL = F.AP\sin\theta$

$= F.6\cos\theta\ \sin\theta$

$= 3F\sin 2\theta$



स्तंभ को अधिकतम बल F से गिराने के लिये आघूर्ण अधिकतम होगा, यदि $\sin 2\theta = 1$

$\Rightarrow 2\theta = 90°$ अर्थात्, $\theta = 45°$

$$\therefore AC = PC\sin 45° = 6.\frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

4. (a) बलों का क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर तल में वियोजन क्रमशः A, B एवं C बिन्दुओं पर करने पर,

$$T_1\cos\alpha = R_1\sin\gamma \quad .....(i)$$

$$T_2\sin\alpha + W_1 = R_1\cos\gamma \quad .....(ii)$$

$$T_2\cos\beta = R_2\sin\gamma \quad .....(iii)$$

$$T_2\sin\beta + W_2 = R_2\cos\gamma \quad .....(iv)$$

$$T_1\cos\alpha = T_2\cos\beta \quad .....(v)$$

एवं $T_1\sin\alpha + T_2\sin\beta = W$ .....(vi)

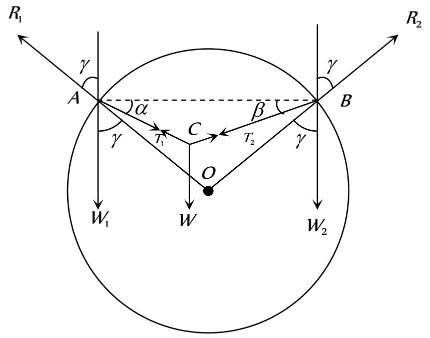
समीकरण (i) एवं (iii) से,

$R_1 = R_2$, (समीकरण (v) के उपयोग से)

$\therefore$ समीकरण (ii) एवं (iv) से,

$T_1\sin\alpha + W_1 = T_2\sin\beta + W_2$

या $T_1\sin\alpha - T_2\sin\beta = W_2 - W_1$ .....(vii)



(vi) एवं (vii) को जोड़ने एवं घटाने पर,

$$2T_1\sin\alpha = W + W_2 - W_1 \quad .....(viii)$$

$$2T_2\sin\beta = W - W_2 + W_1 \quad .....(ix)$$

(viii) को (ix) से विभाजित करने पर,

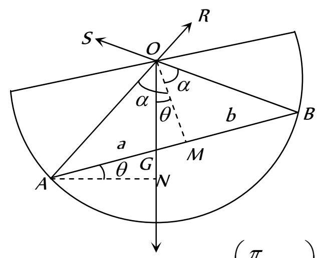
$$\frac{T_1}{T_2}.\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{W - W_1 + W_2}{W + W_1 - W_2}$$

या $\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}.\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{W - W_1 + W_2}{W + W_1 - W_2}$, ((v) से)

या $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \dfrac{W - W_1 + W_2}{W + W_1 - W_2}$.

5. (b) ΔABO में $m-n$ प्रमेय के प्रयोग से,

$$(AG + GB)\cot\angle OGB = GB\cot\angle OAB - AG\cot\angle OBG$$

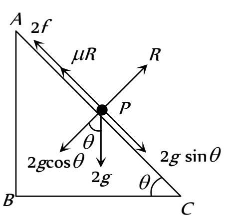


$$\Rightarrow (a+b)\cot(90° - \theta) = b\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - a\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\Rightarrow (a+b)\tan\theta = b\tan\alpha - a\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \left(\frac{b-a}{a+b}\right)\tan\alpha.$$

6. (c) माना कि 2 किग्रा द्रव्यमान के पिण्ड की किसी समय स्थिति P है। स्पष्टतः, $R = 2g\cos\theta$



माना कि नत समतल पर नीचे की ओर त्वरण f है,
तब गति का समीकरण है, $2f = 2g\sin\theta - \mu R$

$2f = 2g\sin\theta - \mu(2g\cos\theta)$

$2f = 2g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$

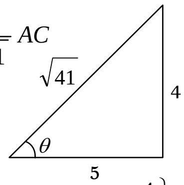
यहाँ, $\tan\theta = \frac{4}{5}$, $\sin\theta = \frac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{41}}$

अब, $2f = 2g\left(\frac{4}{\sqrt{41}} - \frac{3}{10}.\frac{5}{\sqrt{41}}\right)$; $\left(\because \mu = 0.3 = \frac{3}{10}\right)$

$2f = \frac{2g}{\sqrt{41}}\left(4 - \frac{3}{2}\right) = \frac{2g}{\sqrt{41}}.\frac{5}{2} = \frac{5g}{\sqrt{41}}$, $\therefore f = \frac{5g}{2\sqrt{41}}$

माना कि C पर वेग v है

तब, $v^2 = u^2 + 2fs \Rightarrow v^2 = 0 + 2\frac{5g}{2\sqrt{41}}AC$



$v^2 = \frac{5g}{\sqrt{41}}.\sqrt{41}$, $\left\{AC = \sqrt{41}, \text{चूँकि } \tan\theta = \frac{4}{5}\right\}$

$v^2 = 5g = 5 \times 9.8 = 49.0$ अर्थात्, $v = 7$ मी/सेकण्ड.

7. (d) माना कि P एवं Q के बीच का कोण α है, तब

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$ .....(i)

$(2R)^2 = P^2 + (2Q)^2 + 4PQ\cos\alpha$ .....(ii)

एवं $(2R)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\pi - \alpha)$

$\Rightarrow (2R)^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha$ .....(iii)

(i) एवं (iii) से,

$5R^2 = 2P^2 + 2Q^2 \Rightarrow 2P^2 + 2Q^2 - 4R^2 = 0$ .....(iv)

(ii) एवं (iii) से,

$4R^2 = P^2 + 2Q^2 \Rightarrow P^2 + 2Q^2 - 4R^2 = 0$ .....(v)

(iv) एवं (v) से, $\frac{P^2}{2} = \frac{Q^2}{3} = \frac{R^2}{2}$

अतः $P^2 : Q^2 : R^2 = 2 : 3 : 2$.

8. (b) माना कि दिये गये बलों के बीच का कोण α है एवं माना कि परिणामी R, P की दिशा से θ कोण बनाता है।

तब, $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ .....(i)

जब P को उलट दिया जाए एवं Q पूर्ववत् रहे तब नया परिणामी R', पूर्व परिणामी R के लंबवत् होगा एवं P के विपरीत एवं Q के बीच का कोण $\pi - \alpha$ है।

इसलिए $\tan(90° - \theta) = \frac{Q\sin(\pi - \alpha)}{P + Q\cos(\pi - \alpha)}$

$\Rightarrow \cot\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P - Q\cos\alpha}$ .....(ii)

(i) एवं (ii) से, $\tan\theta\cot\theta = \frac{Q^2\sin^2\alpha}{P^2 - Q^2\cos^2\alpha}$

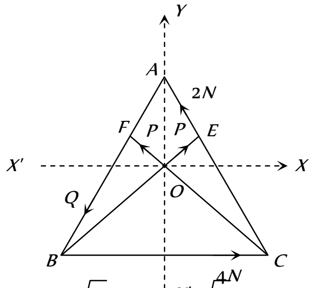
$\Rightarrow P^2 - Q^2\cos^2\alpha = Q^2\sin^2\alpha \Rightarrow P^2 = Q^2 \Rightarrow P = Q$.

9. (a) कार्यरत बल चित्र में दिये गये हैं। बल को X एवं Y-अक्ष के अनुदिश वियोजन करने पर, जहाँ O मूलबिन्दु है,

$P\cos 30^o + 2\cos 120^o + 4 + P\cos 150^o + Q\cos 240^o = 0$ .....(i)

$P\sin 30^o + 2\sin 120^o + P\sin 150^o + Q\sin 240^o = 0$ .....(ii)

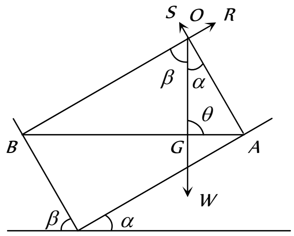
या $\frac{P\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + 4 - \frac{\sqrt{3}P}{2} - \frac{Q}{2} = 0$



एवं $\frac{P}{2} + \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} + \frac{P}{2} - \frac{Q\sqrt{3}}{2} = 0$

इन दोनों समीकरणों को हल करने पर, $Q = 6N$ एवं $P = 2\sqrt{3}N$.

10. (d) A एवं B पर प्रतिक्रिया O पर लम्बवत् है। अतः W भार वाले छड़ की क्रिया रेखा भी O से गुजरेगी, जब पीछे की ओर बढ़ाया जाए।



ΔOBA में,

$(AG + BG)\cot\theta = BG\cot\beta - AG\cot\alpha$, ($m$-$n$ प्रमेय द्वारा)

$\Rightarrow 2\cot\theta = \cot\beta - \cot\alpha$

$\tan\theta = \frac{2\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$

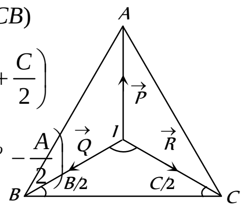
एवं $\cot\theta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}$, (हल करने पर)

11. (d) I, अन्तःकेन्द्र है जो कि अंतःकोण अर्धकों का संगामी बिन्दु है।

$\therefore \angle BIC = 180^o - (\angle IBC + \angle ICB)$

$= 180^o - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$

$= 180^o - \left(90^o - \frac{A}{2}\right)$



$= 90^o + \frac{A}{2}$

इसी प्रकार, $\angle CIA = 90° + \frac{B}{2}$ एवं $\angle AIB = 90° + \frac{C}{2}$

लॉमी की प्रमेय से,

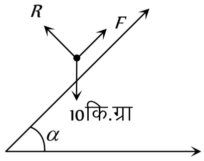
$$\frac{P}{\sin\left(90° + \frac{A}{2}\right)} = \frac{Q}{\sin\left(90° + \frac{B}{2}\right)} = \frac{R}{\sin\left(90° + \frac{C}{2}\right)}$$

अर्थात् $\frac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{C}{2}}$

अतः $P:Q:R=\cos\frac{A}{2}:\cos\frac{B}{2}:\cos\frac{C}{2}$.

12. (b) यहाँ $F=10\sin\alpha, R=10\cos\alpha$

चूँकि $F, R, 10$ समान्तर श्रेणी में हैं



$\therefore\ 2R=F+10$

$F^2+R^2=100$

$\therefore\ (2R-10)^2+R^2=100$

$\Rightarrow 5R^2-40R+100=100 \Rightarrow 5R^2-40R=0$

$\Rightarrow 5R-40=0 \Rightarrow R=8$

$\therefore\ F=2R-10=16-10=6$

अतः बल = 6 किग्रा भार.

13. (c) माना कि वर्ग की भुजा a है

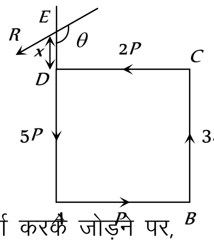
E के परितः बल आघूर्ण का बीजगणितीय योग शून्य है, अर्थात्

$R\cos\theta=5P\cos180°+2P\cos90°+3P\cos0°+P\cos90°$

$\Rightarrow R\cos\theta=-5P+0+3P+0 \Rightarrow R\cos\theta=-2P$ .....(i)

एवं $R\sin\theta=5P\cos90°+2P\cos180°+2P\cos180°$
$+3P\cos90°+P\cos0°$

$\Rightarrow R\sin\theta=-2P+P \Rightarrow R\sin\theta=-P$ .....(ii)



(i) एवं (ii) को वर्ग करके जोड़ने पर,

$R^2=5P^2 \Rightarrow R=\sqrt{5}P$

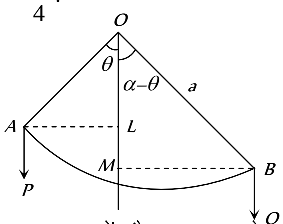
(ii) को (i) से विभाजित करने पर, $\tan\theta=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

E के परितः आघूर्ण लेने पर, $x=4a \Rightarrow DE=4a$

$\therefore \frac{AD}{DE}=\frac{a}{4a}=\frac{1}{4}$.

14. (a)



चूँकि निकाय सन्तुलन में है, अतः O के परितः आघूर्णों का बीजगणितीय योग शून्य होगा। O के परितः आघूर्ण लेने पर, $P.AL-Q.BM=0$

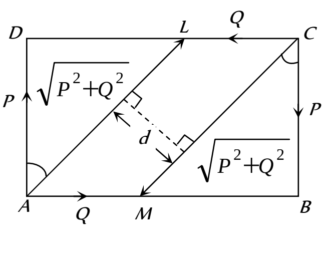
$\Rightarrow Pa\sin\theta-Qa\sin(\alpha-\theta)=0$

$\Rightarrow P\sin\theta-Q(\sin\alpha\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta)=0$

$\Rightarrow \sin\theta(P+Q\cos\alpha)=Q\sin\alpha\cos\theta$

$\Rightarrow \tan\theta=\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$.

15. (b)



यहाँ, $AB=CD=a$ एवं $BC=DA=b$

बलयुग्म के आघूर्णों का बीजगणितीय योग $=Qb-Pa$

माना कि परिणामी, AL के अनुदिश कार्यरत् है एवं C पर P एवं Q, CM के अनुदिश कार्यरत् हैं। इस परिणामी का परिमाण प्रत्येक बिन्दु A एवं C पर बराबर एवं $\sqrt{P^2+Q^2}$ है। यह देखा जा सकता है कि $AL \parallel CM$. अतः परिणामी एक बलयुग्म निर्मित करता है, जिसका आघूर्ण $-\sqrt{P^2+Q^2}$ है।

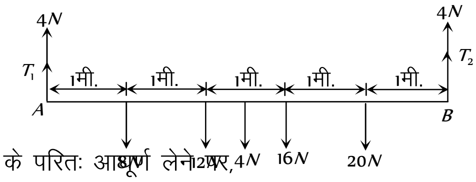
$\therefore Qb-Pa=-\sqrt{P^2+Q^2}.d \Rightarrow d=\frac{Pa-Qb}{\sqrt{P^2+Q^2}}$.

16. (a) A के परितः आघूर्ण लेने पर,

$T_2\times5-\frac{5}{2}\times4-1\times8-2\times12\ -16\times3-20\times4=0$

$\Rightarrow 5T_2=10+8+24+48+80 \Rightarrow 5T_2=170$

$\therefore T_2=34\,N$.



B के परितः आघूर्ण लेने पर,

$\frac{-5}{2}\times4+T_1\times5-8\times4-12\times3-16\times2-20\times1=0$

या $5T_1=32+36+32+20+10 \Rightarrow T_1=26\,N$.

17. (a,b,c) बलों को वियोजित करने पर, $2R\cos\theta=2W$

$\Rightarrow R=\frac{W}{\cos\theta}$

$R.AM = W.LG.$

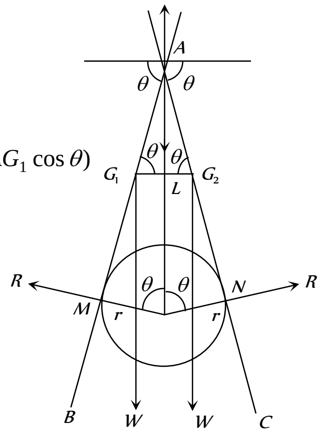
अब, $\left(\frac{W}{\cos\theta}\right)r\tan\theta=W(AG_1\cos\theta)$

या $r\tan\theta\sec^2\theta=a$

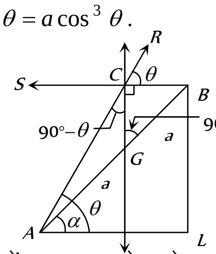
या $r\tan\theta(1+\tan^2\theta)=a$

या $r(\tan^3\theta+\tan\theta)=a$

या $r\sin\theta=a\cos^3\theta$.



18. (a)



ΔABC में $(m-n)$ प्रमेय के उपयोग से,

$(a+a)\cot(90°-\alpha)=a\cot90°-a\cot(90°-\theta)$

$\Rightarrow 2a\tan\alpha=-a\tan\theta$

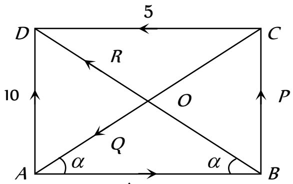
$\Rightarrow \cot\theta=-\frac{1}{2}\cot\alpha$ .....(i)

C पर लामी प्रमेय के उपयोग से,

$$\frac{R}{\sin 90^\circ} = \frac{W}{\sin(180^\circ - \theta)} \Rightarrow R = W \operatorname{cosec}\theta$$

$$\Rightarrow R = W\sqrt{1+\cot^2\theta} \Rightarrow R = \frac{W}{2}\sqrt{3+\operatorname{cosec}^2\alpha}$$, ((i) से).

19. (a)



यहाँ $ABCD$ आयत है,3

जहाँ $AB = 4$ मी, $BC = 3$ मी, $\tan\alpha = \frac{3}{4}$

अब $R\cos\alpha = Q\cos\alpha + 5 - 3 = Q\cos\alpha + 2$ .....(i)

एवं $R\sin\alpha = P + 10 - Q\sin\alpha$ .....(ii)

B के परितः आघूर्ण लेने पर, $Q.AB\sin\alpha + 5.BC = 10.AB$

या $Q.4\left(\frac{3}{5}\right) + 5.3 = 10.4$ या $Q = \frac{125}{12}N$

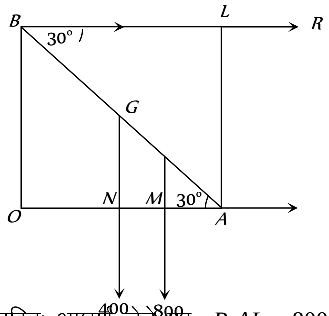
(i) से, $R.\frac{4}{5} = \frac{125}{12}.\frac{4}{5} + 2 = \frac{25}{3} + 2 = \frac{31}{3}$

या $R = \frac{155}{12}N$

(ii) से, $P = R\sin\alpha + Q\sin\alpha - 10 = (Q+R)\sin\alpha - 10$

$\therefore P = 4N$.

20. (d)



A के परितः आघूर्ण लेने पर, $R.AL = 800\,AM + 400\,AN$

$$\Rightarrow R.AB\sin 30^\circ = 800\left(\frac{AB}{4}\right)\cos 30^\circ + 400\left(\frac{AB}{2}\right)\cos 30^\circ$$

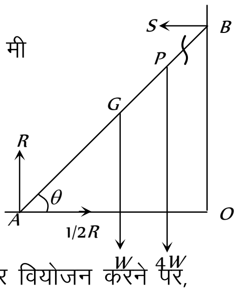
अतः $R = 400\sqrt{3}$ इकाई.

21. (b) माना कि व्यक्ति द्वारा सीढ़ी पर फिसलने से पहले चढ़ी गई ऊँचाई है, $AP = x$

यहाँ, $AB = 10$ मी, $OA = 2$ मी

स्पष्टतः $AG = BG = 5$सेमी

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{5}$



बलों का क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर वियोजन करने पर,

$S = \frac{1}{2}R$, $R = W + 4W = 5W$

$\therefore S = \frac{5W}{2}$

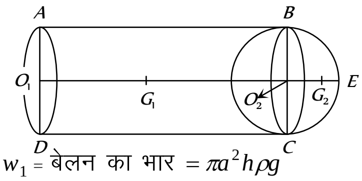
A के परितः आघूर्ण लेने पर,

$W.5\cos\theta + 4W.x\cos\theta = S.10\sin\theta$

$\therefore (5W + 4Wx)\cos\theta = \frac{5}{2}W\ 10\sin\theta$

अतः $x = \frac{5}{4}(10\sqrt{6} - 1)$ मीटर.

22. (b) माना कि a एवं h क्रमशः बेलन की त्रिज्या एवं ऊँचाई हैं। माना कि W_1 एवं W_2 क्रमशः बेलन एवं अर्धगोले का भार है, जो कि क्रमशः गुरुत्वकेन्द्रों G_1 एवं G_2 पर कार्यरत् होगा।



अब w_1 = बेलन का भार $= \pi a^2 h\rho g$

w_2 = अर्धगोले का भार = $\frac{2}{3}\pi a^3\rho g$

$O_1G_1 = \frac{h}{2}$ एवं $O_1G_2 = h + \frac{3a}{8}$

($\because$ ठोस अर्धगोले का गुरुत्वकेन्द्र केन्द्रीय त्रिज्या पर, केन्द्र से $\frac{3a}{8}$ दूरी पर स्थित होता है)

चूँकि संयुक्त गुरुत्वकेन्द्र O_2 पर है इसलिए

$$O_1O_2 = \frac{w_1 \times O_1G_1 + w_2 \times O_1G_2}{w_1 + w_2}$$

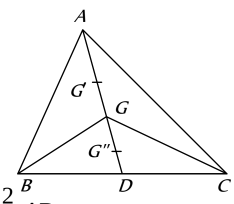
$$\Rightarrow h = \frac{(\pi a^2 h\rho g)\frac{h}{2} + \left(\frac{2}{3}\pi a^3\rho g\right)\times\left(h + \frac{3a}{8}\right)}{\pi a^2 h\rho g + \frac{2}{3}\pi a^3\rho g}$$

$\Rightarrow$

$$h = \frac{\frac{h^2}{2} + \frac{2}{3}a\left(h + \frac{3a}{8}\right)}{h + \frac{2}{3}a} \Rightarrow h^2 + \frac{2ah}{3} = \frac{h^2}{2} + \frac{2ah}{3} + \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow 2h^2 = a^2 \Rightarrow \frac{a}{h} = \sqrt{2} \Rightarrow a : h = \sqrt{2} : 1.$$

23. (d) चूँकि G एवं G' क्रमशः ΔABC एवं $\Delta\,GBD$ के केन्द्रक हैं, इसलिए $AG = \frac{2}{3}AD$



$GD = \frac{1}{3}AD$

एवं $GG'' = \frac{2}{3}GD = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}AD\right) = \frac{2}{9}AD$

$\Rightarrow \Delta GBC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{3}\ \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$\Rightarrow$ त्रिभुजाकार पटल GBC का भार $= \frac{1}{3}$ (त्रिभुजाकार पटल ABC का भार)

अतः यदि पटल GBC का भार W है तब पटल ABC का भार $3W$ है

अब G', शेष भाग $ABGC$ का गुरुत्वकेन्द्र है

इसलिए $AG' = \frac{3W(AG) - W(AG'')}{3W - W} = \frac{1}{2}(3AG - AG'')$

$$AG' = \frac{1}{2}\left(3 \times \frac{2}{3}AD - \frac{8}{9}AD\right) = \frac{5}{9}AD,$$

$\left(\because AG'' = AG + GG'' = \frac{8}{9}AD\right)$

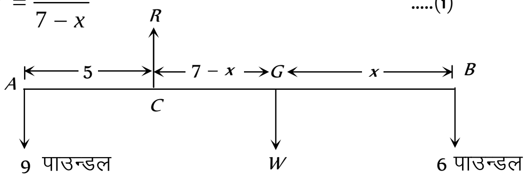
$\therefore \; GG' = AG - AG' = \frac{2}{3}AD - \frac{5}{9}AD$

$= \frac{1}{9}AD = \frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}AG\right) = \frac{1}{6}AG.$

24. (b) माना G छड़ का गुरुत्वकेन्द्र है जहाँ भार W कार्यरत है। माना $BG = x$. जब भार 9 पाउन्डल एवं 6 पाउन्डल A एवं B से लटकाया जाए, तब माना छड़ C पर इस प्रकार संतुलित है कि $AC = 5$ इंच. C के परितः आघूर्ण लेने पर,

$9\times 5 = W\times(7-x) + 6\times 7$ या $W\times(7-x) = 3$

$\therefore \; W = \frac{3}{7-x}$ .....(i)



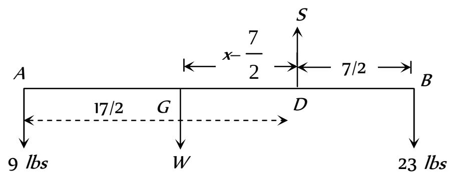
दूसरी स्थिति में, जब B पर लटकाया गया भार 6 पाउन्डल, 23 पाउन्डल द्वारा बदला जाए, तब माना छड़ D पर इस प्रकार संतुलित है कि $DB = \frac{7}{2}$ इंच

D के परितः आघूर्ण लेने पर, $W\left(x - \frac{7}{2}\right) + 9\times\frac{17}{2} = 23\times\frac{7}{2}$

या $W\left(x - \frac{7}{2}\right) = \frac{161 - 153}{2} = 4$

$W = \frac{4}{x - \frac{7}{2}}$ .....(ii)

(i) एवं (ii) से, $\frac{3}{7-x} = \frac{4}{x - \frac{7}{2}}$

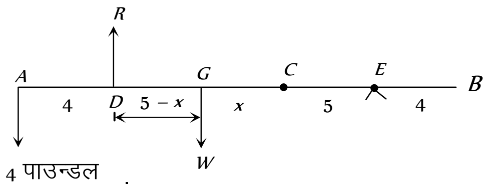


या $3x - \frac{21}{2} = 28 - 4x$ या $7x = \frac{77}{2}$

$\therefore x = \frac{11}{2}$ इंच

$\therefore$ छड़ का गुरुत्वकेन्द्र B से $5\frac{1}{2}$ इंच की दूरी पर है।

25. (b) माना AB छड़ है एवं C इसका मध्यबिन्दु है। माना कि D एवं E पर खूँटे (pegs) इस प्रकार हैं, कि $DC = CE$, (दिया गया है)



किन्तु $DE = 10$ इंच

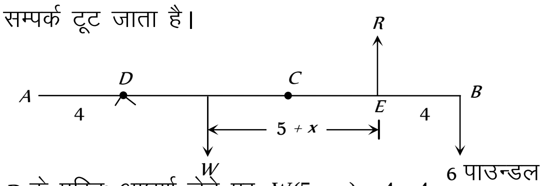
$\therefore \; DC = CE = 5$ इंच

चूँकि $AB = 18$ इंच

$\therefore \; AD = 4$ इंच एवं $BE = 4$ इंच

माना छड़ का भार W जो कि G पर इस प्रकार कार्यरत है कि $GC = x$ इंच

जब 4 पाउन्डल का भार A से लटकाया जाता है तो E पर सम्पर्क टूट जाता है।



D के परितः आघूर्ण लेने पर, $W(5-x) = 4\times 4$

$\therefore \; W = \frac{16}{5-x}$ .....(i)

दूसरे प्रकरण में जब 6 पाउन्डल का भार B से लटकाया जाए तो D पर सम्पर्क टूट जाता है।

E के परितः आघूर्ण लेने पर, $W(5+x) = 6\times 4$

$\therefore \; W = \frac{24}{5+x}$ ......(ii)

(i) एवं (ii) से

$\frac{16}{5-x} = \frac{24}{5+x}$ या $2(5+x) = 3(5-x)$ या $5x = 5$,

$\therefore \; x = 1$ इंच

(i) से, $W = \frac{16}{5-x} = \frac{16}{5-1} = 4$ पाउन्डल.

स्थिति विज्ञान

SET Self Evaluation Test -26

1. एक पतंग, जिसका भार *W* है, एक डोरी के द्वारा सरल रेखा के अनुदिश उड़ रही है। यदि परिणामी वायु दबाब *R* का, डोरी के तनाव तथा पतंग के भार से अनुपात क्रमशः $\sqrt{2}$ तथा $(\sqrt{3}+1)$ है, तब

(a) $T=(\sqrt{6}+\sqrt{2})W$ (b) $R=(\sqrt{3}+1)W$

(c) $T=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})W$ (d) $R=(\sqrt{3}-1)W$

2. एक 30 सेमी लम्बी हल्की छड़ 15 सेमी दूरी पर स्थित दो खूँटों पर रखी है। *A* सिरे से खूँटों (pegs) की दूरी कितनी होनी चाहिये, कि *A* तथा *B* से क्रमशः भार 5*W* तथा 3*W* लटकाने पर खूँटों के प्रतिक्रिया बल बराबर हो **[Roorkee 1995, UPSEAT 2001]**

(a) 1.75 सेमी, 15.75 सेमी (b) 2.75 सेमी, 17.75 सेमी

(c) 3.75 सेमी, 18.75 सेमी (d) इनमें से कोई नहीं

3. यदि तीन बलों के परिमाण तथा दिशा किसी त्रिभुज *ABC* की भुजाओं द्वारा क्रम से निरुपित हों जहाँ *BC* = 5 सेमी, *CA* = 5 सेमी तथा *AB* = 8 सेमी तब इनका परिणामी एक बलयुग्म है, जिसका आघूर्ण है

(a) 12 इकाई (b) 24 इकाई

(c) 36 इकाई (d) 16 इकाई

4. एक ही पदार्थ के बने दो समरुप ठोस गोले, जिनकी त्रिज्यायें क्रमशः 6 सेमी तथा 3 सेमी हैं, दृढ़ता से जुड़े हैं, तब बड़े गोले के केन्द्र से सम्पूर्ण पिण्ड के गुरुत्वकेन्द्र की दूरी है **[MNR 1980]**

(a) 1 सेमी (b) 3 सेमी

(c) 2 सेमी (d) 4 सेमी

5. एक चिकना गोला एक डोरी के द्वारा दीवार से स्पर्श करता हुआ रुका हुआ है। डोरी का एक सिरा गोले के वक्रपृष्ठ के एक बिन्दु से बंधा है और इसका दूसरा सिरा दीवार के एक बिन्दु पर बंधा हुआ है। यदि डोरी की लम्बाई गोले की त्रिज्या के बराबर है, तो डोरी का तनाव होगा

(a) $\frac{2W}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{2W}{3}$

(c) *W*/2 (d) इनमें से कोई नहीं

6. एक छड़ इसके सिरों में से एक सिरा, जो कि नियत है, के परितः स्वतंत्रतापूर्वक घूम सकती है। दूसरे सिरे पर पिण्ड के भार के आधे के बराबर एक क्षैतिज बल क्रियारत है। सन्तुलनावस्था में, छड़ ऊर्ध्वाधर से किस कोण पर झुकी है

(a) 30^o (b) 45^o

(c) 60^o (d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि दो बलों $\frac{P}{Q}$ तथा $\frac{Q}{P}(P>Q)$ के समदिश तथा असमदिश होने के अनुसार परिणामी *R* तथा R' इस प्रकार हैं कि $R:R'=25:7$, तब $P:Q=$ **[Roorkee 1990]**

(a) 2 : 1 (b) 3 : 4

(c) 4 : 3 (d) 1 : 2

8. एक क्षैतिज छड़ *AB* अपने सिरों पर दो ऊर्ध्वाधर डोरियों से लटकी हुई है। छड़ की लम्बाई 0.6 मीटर और भार 3 न्यूटन है। इसका गुरुत्व केन्द्र *G*, सिरे *A* से 0.4 मीटर की दूरी पर है। तब *A* पर डोरी में तनाव है **[BIT Ranchi 1993]**

(a) 0.2 *N* (b) 1.4 *N*

(c) 0.8 *N* (d) 1 *N*

9. 6 सेमी लम्बाई और 2 किग्रा भार की एक समरूप छड़ *BC* अपने स्थिर सिरे *B* के सापेक्ष घूम सकता है। छड़, 8 सेमी की लम्बाई वाली डोरी *CA* के द्वारा, एक बिन्दु *A* से बँधी हुई है। बिन्दु *A* तथा *B* एक ही क्षैतिज रेखा में परस्पर 10 सेमी दूर हैं। डोरी में तनाव निम्न होगा

(a) 3/5 किग्रा. भार (b) 1/5 किग्रा. भार

(c) 2/5 किग्रा. भार (d) इनमें से कोई नहीं

10. किसी समबाहु त्रिभुज *ABC* की भुजाओं *BC*, *AC* तथा *BA* के अनुदिश तीन बल *P*, *Q* तथा *R* कार्यरत हैं। यदि Δ *ABC* के केन्द्रक से होकर जाने वाला *BC* के समान्तर बल इनका परिणामी है, तब

(a) $P=Q=R$ (b) $P=2Q=2R$

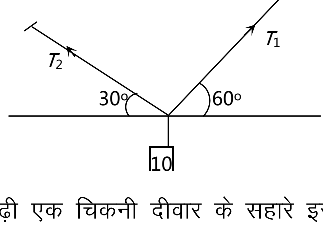
(c) $2P=Q+2R$ (d) $2P=2Q=R$

11. 10 कि.ग्रा. का एक पिण्ड, 7 सेमी तथा 24 सेमी लम्बाई की दो डोरियों द्वारा जिनके दूसरे सिरे एक 25 सेमी लम्बी छड़ के सिरों से बंधे हैं, लटका हुआ है। यदि छड़ को इस प्रकार रखा जाये कि, पिण्ड छड़ के मध्य बिन्दु के ठीक नीचे रहे तब डोरियों में किग्रा भार में तनाव निम्न है

(a) 7/5, 24/5 (b) 14/5, 48/5

(c) 3/5, 7/5 (d) इनमें से कोई नहीं

12. एक 10 *N* का भार, दो रस्सियों द्वारा चित्रानुसार लटकाया गया है, तब तनाव बल T_1 तथा T_2 है **[UPSEAT 2002]**



(a) $5N, 5\sqrt{3}N$

(b) $5\sqrt{3}N, 5N$

(c) $5N, 5N$

(d) $5\sqrt{3}N, 5\sqrt{3}N$

13. 20 फुट लम्बाई की एक सीढ़ी एक चिकनी दीवार के सहारे इससे 30^o के कोण पर विरामावस्था में रखी है। इसका नीचे का सिरा

एक रूक्ष फर्श पर, जिसका घर्षण गुणांक 0.3 है, रखा है। यदि सीढ़ी का भार 30 किग्रा है, तो 60 किग्रा भार का व्यक्ति सीढ़ी पर ऊपर की ओर निम्न ऊँचाई तक चढ़ सकता है

(a) $(9\sqrt{3}-5)ft$ (b) $(9\sqrt{3}+5)ft$

(c) $9\sqrt{3}ft$ (d) इनमें से कोई नहीं

14. एक समरुप छड़, जिसकी लम्बाई $2l$ तथा भार W है, समान तल में 'a' फीट दूरी पर स्थित दो खूँटो (Pegs) के परितः स्थित है। यदि कोई भी खूँटा P से अधिक दबाब सहन नहीं करता है, तब छड़ की दोनों खूँटों से बाहर निकली महत्तम लम्बाई है

(a) $l-\frac{a(W+P)}{W}$ (b) $l-\frac{a(W-P)}{W}$

(c) $l+\frac{a(W-P)}{W}$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. एक भारी छड़ $ACDB$ जहाँ $AC = a$ तथा $DB = b$ दो चिकने खूँटों C तथा D पर क्षैतिजतः विरामावस्था में हैं। यदि A सिरे पर एक भार P आरोपित किया जाये, तब यह साम्यावस्था को ठीक असंतुलित करता है, इसी प्रकार B पर भार Q आरोपित करने पर साम्यावस्था ठीक असंतुलित होती है। यदि $CD = c$, तब छड़ का भार है

(a) $\frac{Pa+Qb}{c}$ (b) $\frac{Pa-Qb}{c}$

(c) $\frac{Pa+Qb}{2c}$ (d) इनमें से कोई नहीं

Answers and Solutions

(SET - 26)

1. (b) दिया गया है, $\frac{R}{T}=\sqrt{2}$ .....(i)

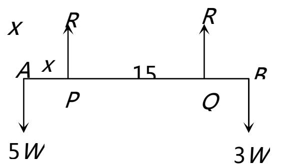
एवं $\frac{R}{W}=\sqrt{3}+1$ .....(ii)

(ii) को (i) से विभाजित करने पर, $\frac{R/W}{R/T}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{T}{W}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \Rightarrow T=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}W=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})W$

$\Rightarrow R=T\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)W=(\sqrt{3}+1)W$.

2. (c) माना खूँटियों P एवं Q पर प्रतिक्रिया बल R व R इस प्रकार हैं, कि $AP = x$



सभी बलों के ऊर्ध्वाधर वियोजन पर, $R+R=8W$

$\Rightarrow R=4W$

A के परितः बल आघूर्ण लेने पर,

$R.AP+R.AQ=3W.AB$

$\Rightarrow 4W.x+4W.(x+15)=3W.30 \Rightarrow x=3.75\ cm$

$\therefore AP=x=3.75$ सेमी एवं $AQ=18.75$ सेमी.

3. (b) यदि तीन बल जिनके परिमाण एवं दिशा त्रिभुज की भुजाओं के क्रम में लियें जायें, तब बल युग्म त्रिभुज के क्षेत्रफल के दुगने के बराबर होगा।

$\therefore$ परिणामी बलयुग्म = 2 × (ΔABC का क्षेत्रफल)

यहाँ, a = 5 सेमी, b = 5 सेमी एवं c = 8 सेमी

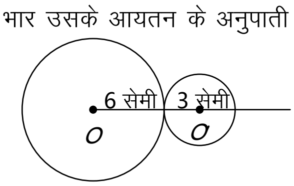
$\therefore$ $2s$ = 5 + 5 + 8 $\Rightarrow$ s = 9.

ΔABC का क्षेत्रफल $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{9(9-5)(9-5)(9-8)}=12$

$\therefore$ अभीष्ट आघूर्ण = 2 (12) = 24 इकाई.

4. (a) गोले का भार उसके आयतन के अनुपाती होता है,



माना ρ पदार्थ का घनत्व है, तब

w_1 = 6 सेमी त्रिज्या वाले गोले का भार

$=\frac{4}{3}\pi(6^3)\rho=288\pi\rho$

w_2 = 3 सेमी त्रिज्या वाले गोले का भार

$=\frac{4}{3}\pi(3^3)\rho=36\pi\rho$

x_1 = बड़े गोले की उसके केन्द्र O से गुरुत्वकेन्द्र तक दूरी = 0

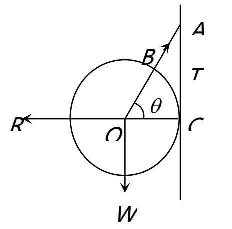
x_2 = छोटे गोले के गुरुत्वकेन्द्र की O से दूरी = 9 सेमी

$\bar{x}$ = सम्पूर्ण पिंड के गुरुत्वकेन्द्र की O से दूरी

अब $\bar{x}=\frac{w_1x_1+w_2x_2}{w_1+w_2}=\frac{288\pi\rho\times 0+36\pi\rho\times 9}{288\pi\rho+36\pi\rho}$

$\bar{x}=\frac{36\times 9}{324}=1$ सेमी.

5. (a) $AB=OB=OC=r$



ΔAOC में, $\cos\theta = \frac{OC}{OA} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

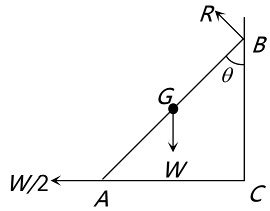
बिन्दु O पर लामी के प्रमेय से,

$$\frac{T}{\sin 90^\circ} = \frac{W}{\sin(\pi-\theta)} \Rightarrow T = \frac{W}{\sin\theta} = \frac{W}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2W}{\sqrt{3}}$$

$\therefore T = \frac{2\sqrt{3}}{3}W \Rightarrow T = \frac{2}{\sqrt{3}}W$.

6. (b) चूँकि छड़ साम्य स्थिति में है, अतः किसी बिन्दु के परितः बल आघूर्ण का बीजगणितीय योग शून्य होगा।

B के परितः आघूर्ण लेने पर,



$W.BG\sin\theta - \frac{W}{2}BC = 0$

$\Rightarrow \frac{AB}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}AB\cos\theta = 0$,

$(BG = \frac{1}{2}AB, BC = AB\cos\theta)$

$\Rightarrow \sin\theta = \cos\theta$ या $\tan\theta = 1$, $\therefore \theta = 45^\circ$.

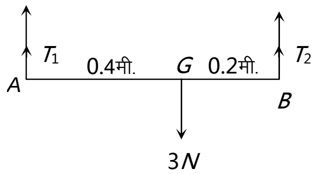
7. (c) यहाँ $\frac{P}{Q} + \frac{Q}{P} = R$ एवं $\frac{P}{Q} - \frac{Q}{P} = R'$

$\Rightarrow \frac{P^2+Q^2}{PQ} = R$ एवं $\frac{P^2-Q^2}{PQ} = R'$

$\Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{P^2+Q^2}{P^2-Q^2} \Rightarrow \frac{25}{7} = \frac{P^2+Q^2}{P^2-Q^2}$

$\Rightarrow \frac{P^2}{Q^2} = \frac{32}{18} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{4}{3}$.

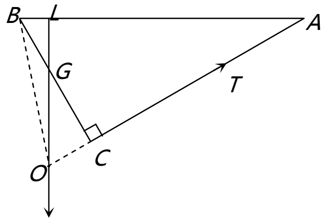
8. (d)



B के परितः आघूर्ण लेने पर,

$T_1 \times 0.6 - 3 \times 0.2 = 0 \Rightarrow T_1 = 1N$.

9. (a)



$BC = 6$ सेमी, $CA = 8$ सेमी, $AB = 10$ सेमी, $\angle ACB = 90^\circ$

B के परितः आघूर्ण लेने पर, $T.BC = 2.BL$

$\Rightarrow T = \left(\frac{2}{6}\right)BG\cos\theta = \left(\frac{1}{3}\right).3\left(\frac{BC}{AB}\right)$

$T = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ किग्रा भार.

10. (b) माना ΔABC का केन्द्रक G है।

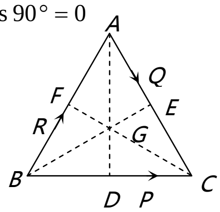
G के सापेक्ष परिणामी बल का आघूर्ण = P, Q, R का G के सापेक्ष आघूर्णों का बीजगणितीय योग

अर्थात्, $0 = P.GD - Q.GE - R.GF$

या $P - Q - R = 0$ या $P = Q + R$

यह भी दिया गया है कि दिये गये बलों का परिणामी BC के समांतर है। इसलिए दिये गये बलों के वियोजित भागों का योगफल BC के लंबवत् है, जो कि शून्य है।

अर्थात् $R\cos 30^\circ - Q\cos 30^\circ + P\cos 90^\circ = 0$



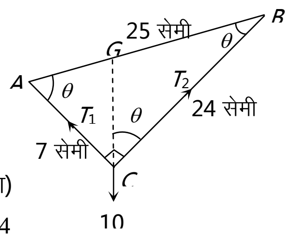
$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}R - \frac{\sqrt{3}}{2}Q = 0$ या $Q = R$

$\therefore Q = R = \frac{1}{2}P$ या $P = 2Q = 2R$.

11. (b) चूँकि $7^2 + 24^2 = 25^2$,

$\therefore \Delta ABC$ समकोण त्रिभुज है

GC माध्यिका है एवं हम जानते हैं कि यह AB के मध्यबिन्दु G से नीचे है, अब $\frac{1}{2}AB = GB$



$\therefore GC = GB$

$\therefore \angle GCB = \angle GBC = \theta$, (माना)

जहाँ $\sin\theta = \frac{7}{25}$ या $\cos\theta = \frac{24}{25}$

$\angle ACB = 90^\circ$, (पाइथागोरस प्रमेय से)

एवं $AG = CG = BG$

तब C पर लामी प्रमेय द्वारा,

$$\frac{T_1}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{10}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{T_2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

$\therefore T_1 = \frac{14}{5}$ किग्रा भार, $T_2 = \frac{48}{5}$ किग्रा भार.

12. (b) चित्रानुसार,

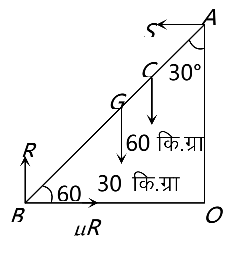
$T_1\cos 30^o + T_2\cos 60^o = 10$ .....(i)

एवं $T_2\cos 30^o = T_1\cos 60^o$ .....(ii)

(i) एवं (ii) को हल करने पर,

$T_1 = 5\sqrt{3}N, T_2 = 5N$.

13. (a)



* * *

माना कि व्यक्ति सीढ़ी की ऊँचाई *BC* तक चढ़ता है। बलों को क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर तल में वियोजित करने पर,

$S = \mu R$ एवं $R = 30 + 60 = 90$

$\Rightarrow S = 90\mu \Rightarrow S = 90 \times 0.3 = 27$

B के परितः आघूर्ण लेने पर,

$-30 \times AG \cos 60° - 60 \times BC \cos 60° + S \times AB \sin 60° = 0$

$\Rightarrow -30 \times 10 \times \frac{1}{2} - 60 \times BC \times \frac{1}{2} + 27 \times 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$\Rightarrow -150 - 30BC + 270\sqrt{3} = 0 \Rightarrow 3BC = 27\sqrt{3} - 15$

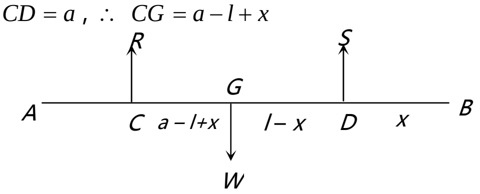
$\Rightarrow BC = (9\sqrt{3} - 5)$ फीट.

14. (b) माना *AB* छड़ है एवं *G* मध्यबिन्दु है जहाँ भार *W* कार्यरत है तथा *C* एवं *D* खूँटे (pegs) हैं। माना *R* एवं *S*, *C* एवं *D* पर प्रतिक्रिया बल हैं, तथा *DB* = *x* फीट, माना कि छड़ को खूँटे *D* के पीछे इस प्रकार विस्तार करें कि गुटका *P* पर संभावित दबाव अधिकतम है, अर्थात् *P*.

$\therefore \; S = P$ पाउन्डल भार, $AB = 2l$

$\therefore \; AG = GB = l$, $\therefore \; GD = l - x$

$CD = a$, $\therefore \; CG = a - l + x$



C के परितः आघूर्ण लेने पर,

S.*CD*=W.*CG* या $Pa = W(a - l + x)$

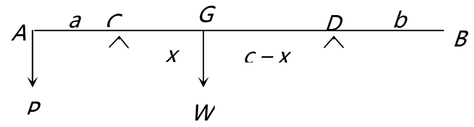
या $Pa - Wa + Wl = Wx \;\; \therefore \; x = l - \frac{a(W-P)}{W}$

इसी प्रकार यदि गुटका *C* पर दबाव अधिकतम लिया जा सकता है, अर्थात् *P*, तब $AC = l - \frac{a(W-P)}{W}$

अतः छड़ की महत्तम लम्बाई जो कि किसी भी खूँटे से बाहर निकली है = $l - \frac{a(W-P)}{W}$.

15. (a) माना छड़ का गुरुत्वकेन्द्र *G* एवं भार *W* है।

माना *GC* = *x*, तब *GD* = $c - x$, $(\because CD = c)$



जब भार *P* को *A* से लटकाया जाता है तो *D* का सम्पर्क टूट जाता है। *C* के परितः आघूर्ण लेने पर, $Wx = Pa$ .....(i)

इसी प्रकार जब भार *Q* को *B* से लटकाया जाता है तो *C* का सम्पर्क टूट जाता है। *D* के परितः आघूर्ण लेने पर,

$W(c - x) = Qb$ .....(ii)

(i) एवं (ii) को जोड़ने पर, $Wc = Pa + Qb$

$\therefore W = \frac{Pa + Qb}{c}$.