गुरुत्वाकर्षण (GRAVITATION)

6 CHAPTER

6.1 प्रस्तावना (Introduction)

- मनुष्य ने सदैव आकाशीय पिण्डों का अध्ययन करने का प्रयत्न किया है। इसी के संदर्भ में टॉलमी (Ptolemy) ने द्वितीय शताब्दी में परिकल्पना की थी कि पृथ्वी, सौर मण्डल के केन्द्र पर स्थित है तथा बुध, शुक्र, बृहस्पति तथा शनि इसके चारों तरफ चक्कर लगाते हैं। कॉपरनिकस (Copernicus) ने सोलहवीं शताब्दी में सौर मण्डल का सूर्य केन्द्रीय मॉडल दिया जिसके अनुसार सूर्य के चारों ओर सभी ग्रह अपनी–अपनी कक्षाओं में गति करते हैं। टाइको ब्रेह (Tycho Brahe) ने कॉपरनिकस द्वारा दिये गये मॉडल का अध्ययन कर ग्रहों की स्थिति के बारे में विभिन्न आंकड़े प्रस्तुत किये जिन्हें आधार मानकर कैप्लर (Kepler) ने ग्रहों की गति के तीन नियम प्रस्तुत किये। उपरोक्त सभी परिकल्पनाएं ग्रहों की गति को बनाये रखने के लिए आवश्यक बल की व्याख्या करने में असफल रही।
- भारतीय गणितज्ञ व खगोलविद् भास्कराचार्य ने बताया कि पृथ्वी में प्रत्येक वस्तु में अन्य वस्तु को अपनी ओर खींचने की शक्ति होती है। इस आकर्षण शक्ति के कारण ही प्रत्येक वस्तु पृथ्वी की ओर आकर्षित होती है। भास्कराचार्य ने ग्रहों की गति तथा स्थिति की गणना की। इनकी प्रसिद्ध पुस्तक "सिद्धान्त शिरोमणि" में ग्रहों की तात्क्षणिक चाल ज्ञात करने की गणनाएँ की गई। आर्यभट्ट ने वर्तमान से लगभग 1500 वर्ष पूर्व यह बताया कि पृथ्वी स्थिर नहीं है बल्कि अपने अक्ष पर घूमती है।
- सन् 1986 में न्यूटन (Newton) ने यह बताया कि ब्रह्माण्ड में पदार्थ का प्रत्येक कण प्रत्येक दूसरे कण को अपनी ओर आकर्षित करता है। इस सर्वव्यापी आकर्षण बल को 'गुरुत्वाकर्षण बल' कहते हैं।

6.2 गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम (Universal Law of Gravitation)

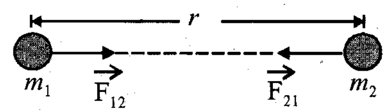
- न्यूटन ने गुरुत्वाकर्षण सम्बन्धी नियम प्रतिपादित किया जिसके अनुसार दो द्रव्य कणों के मध्य लगने वाला आकर्षण बल कणों के द्रव्यमानों के गुणनफल के समानुपाती तथा उनके मध्य की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है। इस बल की दिशा दोनों कणों को मिलाने वाली रेखा की सीध में होती है।

माना कि दो कण जिनके द्रव्यमान क्रमशः m_1 व m_2 हैं, परस्पर r दूरी पर स्थित हैं। यदि उनके मध्य कार्यरत गुरुत्वाकर्षण बल F है तो गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियमानुसार

$$F \propto m_1 m_2$$

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\therefore \quad F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



चित्र 6.1

अर्थात् $$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

यहां G समानुपाती नियतांक है जिसे सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक (Universal gravitational constant) कहते हैं। इसका मान

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{न्यूटन} \times \text{मी.}^2}{\text{किग्रा.}^2}$$

होता है। इसका मान कणों की प्रकृति, माध्यम, समय, ताप आदि पर निर्भर नहीं करता है।

समीकरण (1) से यदि $m_1 = m_2 = 1$

तथा $r = 1$ हो तो

$F = G$ होगा

अर्थात् सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक परिमाण में उस आकर्षण बल के बराबर होता है जो एक–दूसरे से एकांक दूरी पर स्थित एकांक द्रव्यमान के दो कणों के मध्य कार्य करता है।

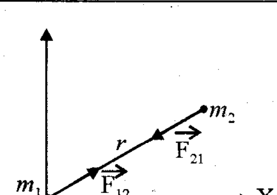
समीकरण (1) से $$G = \frac{Fr^2}{m_1m_2}$$

$\therefore$ विमीय सूत्र $$= \frac{[M^1L^1T^{-2}][L^2]}{[M^1][M^1]} = [M^{-1}L^3T^{-2}]$$

G का मान बहुत कम होने के कारण कम द्रव्यमान के पिण्डों के मध्य गुरुत्वाकर्षण बल का अनुभव नहीं किया जाता है। यदि पिण्डों के द्रव्यमान बहुत अधिक हो (जैसे–आकाशीय पिण्ड) तो इस बल का परिमाण काफी अधिक होता है।

6.2.1 गुरुत्वाकर्षण नियम सदिश रुप में (Gravitational law in vector form)

- माना कि कण 1 पर कण 2 के द्वारा लगने वाला बल $\vec{F}_{12}$ तथा कण 2 पर कण 1 के द्वारा लगने वाला बल $\vec{F}_{21}$ है तथा सदिश निरूपण में



चित्र 6.2

$$\vec{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r} \quad ...(2)$$

तथा $$\vec{F}_{21} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}(-\hat{r}) \quad ...(3)$$

यहां $\hat{r}$ स्थिति सदिश $\vec{r}$ की दिशा में एकांक सदिश है।

$$\therefore \quad \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad ...(4)$$

यह समीकरण न्यूटन के गति के तृतीय नियम को व्यक्त करता है।

(i) G का मान सभी स्थानों पर एक ही है। यह ताप, दाब, द्रव्यमानों की प्रकृति पर निर्भर नहीं करता।

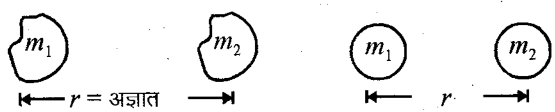
(ii) G का मान अत्यन्त कम होने के कारण प्रयोगशाला में इसका मापन सरल नहीं है। सन् 1798 में हेनरी कैवेन्डिश (Henry Cavendish) ने एक विशेष प्रकार की तुला का आविष्कार करके ज्ञात दूरी पर दो ज्ञात द्रव्यमानों के बीच बल नापकर G का मान ज्ञात किया।

(iii) G का मान अत्यन्त कम होने के कारण साधारण द्रव्यमानों की दो वस्तुओं के बीच आकर्षण बल का अनुभव नहीं होता परन्तु पृथ्वी व अन्य ग्रहों के द्रव्यमान बहुत अधिक होने के कारण आकर्षण बल इतना अधिक होता है कि यह ग्रहों की गति करने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल प्रदान करता है।

(iv) यह नियम 10Å से कम दूरियों पर स्थित कणों के लिए सत्य नहीं रहता क्योंकि इतनी कम दूरियों पर ससंजक (cohesive) तथा आसंजक (adhesive) बल कार्य करते हैं।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. गुरुत्वाकर्षण नियम दो बिन्दु द्रव्यमानों के लिए दिया गया है। दो स्वैच्छिक आकार के पिण्डों के मध्य अद्वितीय विभाजन (दूरी) नहीं होता अतः गुरुत्वाकर्षण नियम आरोपित नहीं किया जा सकता।



परन्तु यदि दो पिण्ड एक समान गोले हैं तो उनके मध्य दूरी उनके केन्द्रों से ली जा सकती है क्योंकि एक समान द्रव्यमान वितरण का गोला अपने से बाहर स्थित किसी बिन्दु के लिए बिन्दु द्रव्यमान की भांति व्यवहार करता है।

2. सदिश रूप में $\vec{F} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$

यहां ऋणात्मक चिन्ह यह व्यक्त करता है कि बल $\vec{F}$ की दिशा, दूरी (या स्थिति सदिश) $\vec{r}$ की दिशा के विपरीत है, अर्थात् बल आकर्षणात्मक है।

3. आवेशित कणों के मध्य दो प्रकार के बल लगते हैं–

(i) गुरूत्वाकर्षण बल (न्यूटन के नियमानुसार) तथा **(ii)** स्थिर विद्युत बल (कूलॉम के नियमानुसार)। यद्यपि दोनों बल व्युत्क्रम वर्ग नियम का पालन करते हैं, परन्तु आवेशित कणों के मध्य लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल, उनके मध्य लगने वाले स्थिर विद्युत बल की अपेक्षा नगण्य होता है।

उदा.1. 40 किग्रा. तथा 80 किग्रा. द्रव्यमान के दो पिण्ड एक दूसरे से 0.15 मीटर की दूरी पर स्थित हैं। इनके बीच लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल 1.0 मिलीग्राम-भार है। गुरुत्वाकर्षण स्थिरांक G की गणना कीजिए। गुरुत्वीय त्वरण, $g = 10$ मी./से.^{2}

हल– न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण के नियम से

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \text{ या } G = \frac{Fr^2}{m_1m_2}$$

यहां F = 1.0 मिलीग्राम भार = 1.0×10^{-3} ग्राम भार
= 1.0×10^{-6} किग्रा. भार
= $1.0 \times 10^{-6} \times 10$ न्यूटन = 1.0×10^{-5} न्यूटन

$m_1 = 40$ किग्रा. $m_2 = 80$ किग्रा. $r = 0.15$ मी.

$$G = \frac{1.0\times10^{-5}\times(0.15)^2}{40\times80}$$

$$= 7.03\times10^{-11} \text{ न्यूटन–मी.}^2/\text{किग्रा.}^2$$

उदा.2. एक 200 g का सेब पेड़ से नीचे गिरता है। सेब का पृथ्वी की ओर त्वरण ज्ञात कीजिए तथा पृथ्वी का सेब की ओर भी त्वरण ज्ञात कीजिए। दिया है: पृथ्वी का द्रव्यमान = 6.4×10^{24} kg, त्रिज्या = 6.4×10^6m, $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \dfrac{N\times m^2}{kg^2}$

(पुस्तक का उदाहरण 6.1)

हल– दिया गया है: m = 200 ग्राम = 0.2 किग्रा,
$M = 6.4 \times 10^{24}$kg, $R = 6.4 \times 10^6$m

पृथ्वी तथा सेब के मध्य गुरुत्वाकर्षण बल $F = \dfrac{GMm}{R^2}$

$$\therefore \text{ सेब का त्वरण } \quad a_a = \frac{F}{m} = \frac{GMm}{R^2m} = \frac{GM}{R^2}$$

$$a_a = \frac{6.67\times10^{-11}\times6.4\times10^{24}}{(6.4\times10^6)^2} = 9.8\ m/s^2$$

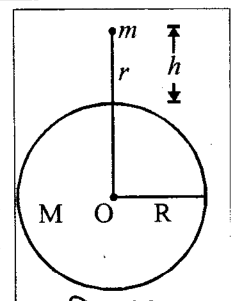
$$\text{पृथ्वी का त्वरण} \quad a_e = \frac{F}{M} = \frac{Gm}{R^2}$$

$$a_e = \frac{6.67\times10^{-11}\times0.2}{(6.4\times10^6)^2} = 3\times10^{-25}\ m/s^2$$

पृथ्वी के सेब की ओर त्वरण का मान नगण्य है अतः पृथ्वी, सेब की ओर नहीं गिरती है।

6.3 गुरुत्वीय त्वरण g तथा सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक G में सम्बन्ध (Relation between acceleration due to gravity g and universal gravitational constant G)

- पृथ्वी के गुरुत्वीय बल के कारण पृथ्वी की ओर गिरती हुई वस्तु के वेग में परिवर्तन की दर को गुरुत्वीय त्वरण कहते हैं। इसे 'g' द्वारा प्रदर्शित करते हैं। यह वस्तु के आकार, आकृति, द्रव्यमान आदि पर निर्भर नहीं करता है। पृथ्वी तल पर इसका औसत मान 9.8 मी./से.^{2} होता है। यह मान 45° अक्षांश पर समुद्र तल पर माना गया है।



चित्र 6.3

- माना कि पृथ्वी का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है तथा पृथ्वी का कुल द्रव्यमान उसके केन्द्र पर संकेन्द्रित है। अब यदि m द्रव्यमान की वस्तु पृथ्वी के केन्द्र से r दूरी पर हो तो वस्तु पर कार्यरत गुरुत्वाकर्षण बल

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad ...(1)$$

इस बल के कारण ही वस्तु में गुरुत्वीय त्वरण g उत्पन्न होता है। अतः न्यूटन के गति के द्वितीय नियम से

$$F = mg \quad ...(2)$$

समी. (1) व (2) से

$$mg = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad g = \frac{GM}{r^2} \quad ...(3)$$

यदि पृथ्वी की सतह से वस्तु की ऊँचाई h है तो

$$r = R + h$$

$\therefore$ समी. (3) से

$$g = \frac{GM}{(R+h)^2} \quad ...(4)$$

पृथ्वी की सतह पर $h = 0$ होने से गुरुत्वीय त्वरण

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad ...(5)$$

उपरोक्त समीकरण से स्पष्ट है कि गुरुत्वीय त्वरण g का मान वस्तु के द्रव्यमान (m) पर निर्भर नहीं करता है। अतः यदि भिन्न–भिन्न द्रव्यमान की वस्तुयें स्वतंत्रतापूर्वक एक ही ऊँचाई से एक साथ गिरायी जाये (वायु की अनुपस्थिति में) तब वे पृथ्वी तल पर एक साथ पहुँचेगी।
वायु की उपस्थिति में वस्तुओं पर वायु का उत्प्लावन बल तथा श्यान बल लगता है जिससे भिन्न–भिन्न द्रव्यमान की वस्तुयें स्वतंत्रतापूर्वक गिराने पर उनमें भिन्न–भिन्न त्वरण उत्पन्न होने से भारी वस्तु पहले पृथ्वी तल पर पहुंच जाती है।

पृथ्वी का घनत्व (Density of the Earth)

यदि पृथ्वी का माध्य घनत्व ρ है तो

द्रव्यमान = घनत्व × आयतन

$$M = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$$

$\therefore$ समी. (5) से

$$g = \frac{G}{R^2}\left(\rho \times \frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$\Rightarrow \quad g = \frac{4}{3}\pi R G\rho \quad ...(6)$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{3g}{4\pi RG} \quad ...(7)$$

$\therefore \quad g = 9.8$ मी./से.^{2}, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ $\frac{\text{न्यूटन} \times \text{मी.}^2}{\text{किग्रा.}^2}$

R = 6400 किमी. = 6400×10^3 मीटर

$$\therefore \rho = \frac{3 \times 9.8}{4 \times 3.14 \times (6400 \times 10^3) \times (6.67 \times 10^{-11})}$$

$= 5.5 \times 10^3$ किग्रा./मी.^{3}

पृथ्वी की बाहरी परत का घनत्व लगभग 2.8×10^3 किग्रा./मी.^{3} है जिससे पृथ्वी का माध्य घनत्व 5.5×10^3 किग्रा./मी.^{3} होने के लिए पृथ्वी के गर्भ में भारी तत्व जैसे लोहा, निकिल आदि पिघली अवस्था में उपस्थित होने चाहिए।

पृथ्वी का द्रव्यमान (Mass of the Earth)

समी. (5) से–

पृथ्वी का द्रव्यमान $\quad M = \frac{gR^2}{G}$

$$M = \frac{9.8 \times (6400 \times 10^3)^2}{6.67 \times 10^{-11}} = 5.98 \times 10^{24} \text{ किग्रा.}$$

महत्त्वपूर्ण तथ्य

1. व्यंजक $g = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi RG\rho$ से स्पष्ट है कि g का मान ग्रह के द्रव्यमान, त्रिज्या व घनत्व पर निर्भर करता है। ग्रह की सतह पर रखी वस्तु के द्रव्यमान, त्रिज्या व घनत्व पर नहीं अर्थात् कोई भी ग्रह हल्की व भारी वस्तु में समान त्वरण उत्पन्न करता है।
2. गुरुत्वीय त्वरण एक सदिश राशि है इसकी दिशा सदैव ग्रह के केन्द्र की ओर होती है।
3. पृथ्वी सतह पर g का औसत मान F.P.S. पद्धति में 32 feet/s^2 होता है।

उदा.3. एक ग्रह का द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान का आठ गुना है तथा उसकी त्रिज्या पृथ्वी की त्रिज्या की दो गुनी है। इस ग्रह पर गुरुत्वजनित त्वरण का मान क्या होगा? (पृथ्वी पर 'g' का मान 10 मी./से.^{2} लीजिए)

हल– पृथ्वी की सतह पर $\quad g = \frac{GM_e}{R_e^2} \quad ...(1)$

जिसमें M_e = पृथ्वी का द्रव्यमान, R_e = पृथ्वी की त्रिज्या

ग्रह पर गुरुत्वजनित त्वरण, $g' = \frac{GM_p}{R_p^2} \quad .....(2)$

जिसमें M_p = ग्रह का द्रव्यमान, R_p = ग्रह की त्रिज्या

समीकरण (2) का समीकरण (1) से भाग देने पर

$$\frac{g'}{g} = \frac{M_p}{M_e} \cdot \frac{R_e^2}{R_p^2}$$

या

$$g' = \left(\frac{M_p}{M_e}\right)\left(\frac{R_e}{R_p}\right)^2 g$$

प्रश्नानुसार, $M_p = 8M_e$ $\quad$ या $\quad \frac{M_p}{M_e} = 8$

तथा $\quad R_p = 2R_e$ $\quad$ या $\quad \frac{R_p}{R_e} = 2$

$$\therefore \quad g' = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 10 = 20 \text{ मी./से.}^2$$

उदा.4. पृथ्वी के तल पर गुरुत्वीय त्वरण 10 मीटर/सेकण्ड^2 है। मंगल ग्रह का द्रव्यमान पृथ्वी की अपेक्षा 1/5 तथा त्रिज्या 1/2 है। मंगल

6.4

ग्रह के तल पर गुरुत्वाकर्षण के कारण किसी पिण्ड का त्वरण ज्ञात कीजिए।

हल– माना कि पृथ्वी का द्रव्यमान M_e तथा मंगल ग्रह का द्रव्यमान M_m हैं एवं पृथ्वी की त्रिज्या R_e तथा मंगल की त्रिज्या R_m है। यदि पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण g_e तथा मंगल ग्रह के तल पर गुरुत्वीय त्वरण g_m हो तो,

$$g_e = \frac{GM_e}{R_e^2}$$

तथा $$g_m = \frac{GM_m}{R_m^2}$$

अतः $$\frac{g_m}{g_e} = \frac{M_m}{M_e}\cdot\frac{R_e^2}{R_m^2}$$

दिया गया है– $$M_m = \frac{1}{5}M_e \text{ अथवा } \frac{M_m}{M_e} = \frac{1}{5}$$

तथा $$R_m = \frac{1}{2}R_e \text{ अथवा } \frac{R_e}{R_m} = 2$$

अतः $$\frac{g_m}{g_e} = \frac{1}{5}\times(2)^2 = \frac{4}{5}$$

अथवा $$g_m = \frac{4}{5}g_e = \frac{4}{5}\times 10 = 8 \text{ मी/से}^2$$

उदा.5. यदि पृथ्वी की त्रिज्या तीन गुनी हो जाये तो घनत्व कितने गुना होना चाहिए जिससे g में परिवर्तन न हो?

(पुस्तक का उदाहरण 6.5)

हल– यदि पृथ्वी का माध्य घनत्व ρ है तो

द्रव्यमान = घनत्व × आयतन

$$M = \rho\times\frac{4}{3}\pi R^3$$

∵ गुरुत्वीय त्वरण $$g = \frac{GM}{R^2}$$

∴ $$g = \frac{G}{R^2}\left(\rho\times\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

∴ $$g = \frac{4}{3}\pi RG\rho$$

$$\rho = \frac{3g}{4\pi RG} \qquad \rho\propto\frac{1}{R} \quad ∵ \text{ प्रश्नानुसार g नियत है।}$$

∴ $$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{R}{R'} \qquad \text{प्रश्नानुसार } R' = 3R$$

∴ $$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$$

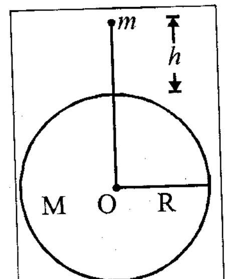
⇒ $$\rho' = \frac{\rho}{3} \text{ अर्थात् घनत्व का मान } \frac{1}{3} \text{ गुना होना चाहिए।}$$

6.4 गुरुत्वीय त्वरण (g) के मान में ऊँचाई, गहराई, पृथ्वी की आकृति तथा उसके घूर्णन के कारण परिवर्तन (Variation in Acceleration due to Gravity 'g' with Height, Depth, Shape of Earth and its Rotation)

(a) g के मान में ऊँचाई के कारण परिवर्तन (Variation of g due to height)

माना कि पृथ्वी का द्रव्यमान M, त्रिज्या R तथा केन्द्र O है। यदि पृथ्वी तल पर m द्रव्यमान का पिण्ड स्थित हो तो गुरुत्वीय त्वरण

$$g = \frac{GM}{R^2} \qquad ...(1)$$



चित्र 6.4

माना कि पिण्ड को पृथ्वी तल से ऊपर की ओर h ऊँचाई तक उठाया जाता है। यदि इस स्थिति में गुरुत्वीय त्वरण g_h हो तो

$$g_h = \frac{GM}{(R+h)^2} \qquad ....(2)$$

समी. (2) में समी. (1) का भाग देने पर

$$\frac{g_h}{g} = \frac{\frac{GM}{(R+h)^2}}{\frac{GM}{R^2}} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad g_h = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} \qquad ...(3)$$

उपरोक्त समीकरण से स्पष्ट है कि ऊँचाई बढ़ने पर g के मान में कमी होती है तथा अनन्त दूरी पर शून्य हो जाता है।

$$g_h = g\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2} \qquad ...(4)$$

यदि ऊँचाई h का मान पृथ्वी की त्रिज्या R के सापेक्ष नगण्य हो अर्थात् $h \ll R$

तब द्विपद प्रमेय के उपयोग से

$$\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2} \approx 1-\frac{2h}{R}$$

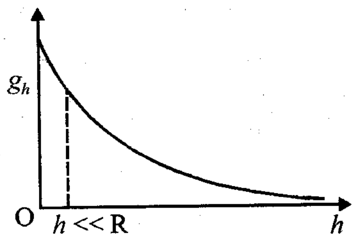
∴ समी. (4) से

$$g_h = g\left(1-\frac{2h}{R}\right) \qquad ...(5)$$

अतः h ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण का मान पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण की अपेक्षा कम हो जाता है।

यदि h का मान पृथ्वी की त्रिज्या R की तुलना में नगण्य हो (लगभग $h = 200$ किमी. तक) तब समीकरण (5) का प्रयोग करना चाहिए अन्यथा समीकरण (3) का प्रयोग करना चाहिए।

गुरुत्वीय त्वरण g के मान में ऊँचाई h के साथ परिवर्तन को निम्न वक्रीय परिवर्तन द्वारा दर्शाया जा सकता है–



चित्र 6.5

यहां $h << R$ के लिए g के मान में सरल रेखीय परिवर्तन होगा परन्तु h के उच्च मानों के लिए परिवर्तन वक्रीय होगा।

महत्वपूर्ण तथ्य

यदि $h << R$ हो तो g के मान में ऊँचाई के साथ कमी

निरपेक्ष कमी $\Delta g = g - g_h = \frac{2hg}{R}$

भिन्नात्मक कमी $\frac{\Delta g}{g} = \frac{g - g_h}{g} = \frac{2h}{R}$

प्रतिशत कमी $\frac{\Delta g}{g} \times 100\% = \frac{2h}{R} \times 100\%$

उदा.6. पृथ्वी तल से 10 किमी. ऊँचाई पर g का मान ज्ञात कीजिए। पृथ्वी तल पर $g = 9.8$ मी./से.^{2} तथा पृथ्वी की त्रिज्या 6400 किमी. है।

हल– दिया गया है– $g = 9.8$ मी./से.^{2}, $h = 10$ किमी. $= 10 \times 10^3$ मी.
$R = 6400$ किमी. $= 6400 \times 10^3$ मी.

सूत्र– $$g_h = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

$$g_h = 9.8\left(1 - \frac{2 \times 10 \times 10^3}{6400 \times 10^3}\right) = 9.8\left(1 - \frac{1}{320}\right)$$

$$= 9.77 \text{ मी./से.}^2$$

उदा.7. पृथ्वी तल से उस ऊँचाई का मान ज्ञात करो जहां पर गुरुत्वीय जनित त्वरण का मान पृथ्वी सतह पर g के मान का आधा रह जाये। (पुस्तक का उदाहरण 6.2)

हल– h ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण g का मान

$$g_h = \frac{g}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

यहां g पृथ्वी सतह पर गुरुत्वीय त्वरण है।
परन्तु दिया गया है–

$$g_h = \frac{g}{2}$$

$$\frac{g}{2} = \frac{g}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 = 2$$

$$1 + \frac{h}{R} = \sqrt{2}$$

$$\frac{h}{R} = \sqrt{2} - 1$$

$$\Rightarrow h = (\sqrt{2} - 1)R$$

$$h = (1.414 - 1)R = 0.414R$$

पृथ्वी की त्रिज्या $R = 6400$ किमी. रखने पर

$$h = 0.414 \times 6400 = 2650 \text{ किमी.}$$

उदा.8. पृथ्वी तल से कितनी ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण के मान में 1 प्रतिशत की कमी आयेगी? (पुस्तक का उदाहरण 6.4)

हल– गुरुत्वीय त्वरण के मान में 1% कमी बहुत कम है अतः अल्प ऊँचाई पर ऐसा संभव होगा

$$\therefore \quad h << R$$

$$\therefore \quad g_h = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right) \text{ से}$$

$$g_h = g - \frac{2hg}{R} \Rightarrow g_h - g = -\frac{2hg}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{g_h - g}{g} = -\frac{2h}{R}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{g_h - g}{g}\right| = \frac{2h}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta g}{g} \times 100 = \frac{2h}{R} \times 100$$

$\therefore$ प्रश्नानुसार $\frac{\Delta g}{g} \times 100 = 1$

$$\therefore \quad 1 = \frac{2h}{R} \times 100$$

$$\Rightarrow h = \frac{R}{2 \times 100} = \frac{6400}{200} = 32 \text{ किमी}$$

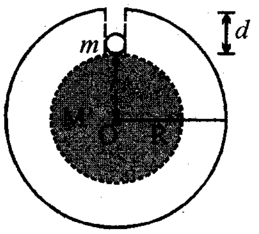
$\because$ पृथ्वी की त्रिज्या $R = 6400$ किमी

(b) g के मान में गहराई के कारण परिवर्तन (Variation of g due to depth)

माना कि कोई पिण्ड पृथ्वी तल से d गहराई पर स्थित है पिण्ड की पृथ्वी के केन्द्र O से दूरी r है तो

$$r = R - d$$

इस स्थान पर पिण्ड पर गुरुत्वाकर्षण बल r त्रिज्या के गोले में स्थित द्रव्यमान M' के कारण ही होता है। इस गोले के बाहर वाले द्रव्यमान के कारण पिण्ड पर गुरुत्वीय बल शून्य होगा।



चित्र 6.6

अतः पृथ्वी सतह से d गहराई पर स्थित m द्रव्यमान पर

गुरुत्वाकर्षण बल $F' = \frac{GM'm}{r^2}$ ...(1)

यहां $M' = r$ त्रिज्या के गोले में स्थित द्रव्यमान है यदि पृथ्वी का घनत्व ρ है तो

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\therefore \quad M' = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{Mr^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{M'}{M} = \frac{r^3}{R^3}$$

किसी गोले का द्रव्यमान उसकी त्रिज्या के घन के समानुपाती होता है।

$\therefore$ समी. (1) से $F' = \frac{GMr^3}{R^3} \cdot \frac{m}{r^2} = \frac{GMm}{R^3} r$ ...(2)

$\therefore \quad F' = mg'$

$\therefore \quad mg' = \frac{GMm}{R^3} r$

$\Rightarrow \quad g' = \frac{GMm}{R^3} r$ ...(3)

परन्तु $r = R - d$

$\therefore \quad g_d = g' = \frac{GM}{R^3}(R - d)$

$\Rightarrow \quad g_d = g' = \frac{GM}{R^2}\left(1 - \frac{d}{R}\right)$ ...(4)

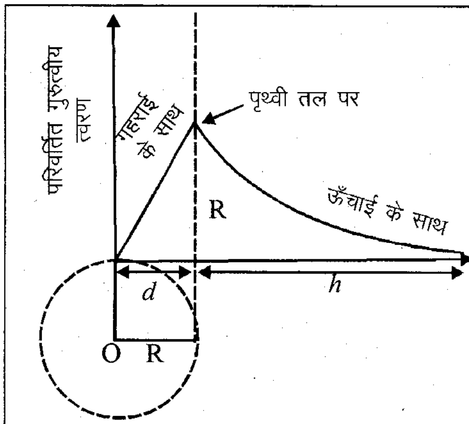
यदि पृथ्वी सतह पर गुरुत्वीय त्वरण g है तब

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$\therefore$ समी. (3) से $g_d = g\left(1 - \frac{d}{R}\right)$

इस प्रकार d गहराई पर गुरुत्वीय त्वरण g का मान कम हो जाता है। पृथ्वी के केन्द्र पर गुरुत्वीय त्वरण का मान शून्य हो जाता है जबकि पृथ्वी की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण का मान अधिकतम होता है।

पृथ्वी सतह से ऊपर तथा नीचे जाने पर g के मान में परिवर्तन निम्न चित्र द्वारा दर्शाया जा सकता है–



चित्र 6.7

महत्त्वपूर्ण तथ्य

1. गहराई के साथ g के मान में कमी

   निरपेक्ष कमी $\Delta g = g - g_d' = \frac{dg}{R}$

   भिन्नात्मक कमी $\frac{\Delta g}{g} = \frac{g - g_d'}{g} = \frac{d}{R}$

   प्रतिशत कमी $\frac{\Delta g}{g} \times 100\% = \frac{d}{R} \times 100\%$

2. पृथ्वी की सतह से ऊपर जाने पर g के मान में कमी ($h << R$)

   $$g_h = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right) \quad ...(1)$$

   पृथ्वी की सतह से नीचे जाने पर g के मान में कमी

   $$g_d = g\left(1 - \frac{d}{R}\right) \quad ...(2)$$

   $\therefore$ समी. (1) व (2) से

   पृथ्वी की सतह से ऊपर जाने पर g के मान में कमी की दर ($h << R$), सतह से नीचे जाने पर g के मान में कमी की दर के दोगुने के तुल्य होती है।

उदा.9. पृथ्वी तल से कितना नीचे जाने पर गुरुत्वीय त्वरण का मान पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण के मान से आधा रह जायेगा? पृथ्वी की त्रिज्या 6400 किमी. है।

हल– पृथ्वी तल से d गहराई पर गुरुत्वीय त्वरण

$$g_d = g\left(1 - \frac{d}{R}\right)$$

दिया है– $g_d = \frac{1}{2}g$, $R = 6400$ किमी.

अतः $\frac{1}{2}g = g\left(1 - \frac{d}{6400}\right)$

$\frac{1}{2} = 1 - \frac{d}{6400}$ अथवा $\frac{d}{6400} = \frac{1}{2}$

अतः $d = 3200$ किमी.

उदा.10. पृथ्वी से कितना नीचे तथा ऊँचाई पर जाने पर गुरुत्वीय त्वरण, पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण का एक चौथाई रह जायेगा?

हल– (1) पृथ्वी तल से d गहराई (depth) पर गुरुत्वीय त्वरण

$$g_d = g\left(1-\frac{d}{R}\right) \text{ या } \frac{g_d}{g} = 1-\frac{d}{R} \quad ...(1)$$

जिसमें R पृथ्वी की त्रिज्या तथा g पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण है।

प्रश्नानुसार $\quad \frac{g_d}{g} = \frac{1}{4}$

$\therefore \quad \frac{1}{4} = 1-\frac{d}{R}$

या $\quad \frac{d}{R} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3}{4}R$

(2) पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण

$$g_h = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} \text{ या } \frac{g_h}{g} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

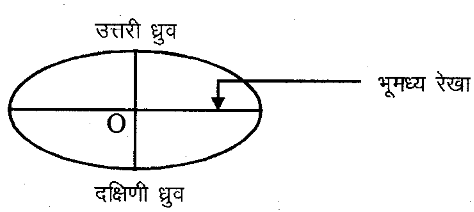
प्रश्नानुसार $\quad \frac{g_h}{g} = \frac{1}{4}$

$\therefore \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$

या $\quad 1+\frac{h}{R} = 2$ या $\frac{h}{R} = 1 \Rightarrow h = R$

(c) g के मान में पृथ्वी के आकार के कारण परिवर्तन
(Variation of g due to Shape of the Earth)

पृथ्वी पूर्णतः गोल नहीं है बल्कि दोनों ध्रुवों पर कुछ चपटी है। भूमध्य रेखा पर उसकी त्रिज्या ध्रुवों की त्रिज्या से लगभग 21 किलोमीटर अधिक है।



चित्र 6.8

अर्थात् $\quad R_{भूमध्य} - R_{ध्रुव} \approx 21$ किलोमीटर

गुरुत्वीय त्वरण $\quad g = \frac{GM}{R^2}$ सूत्र से

$$g_{भूमध्य} = \frac{GM}{R^2_{भूमध्य}} \quad ...(1)$$

$$g_{ध्रुव} = \frac{GM}{R^2_{ध्रुव}} \quad ...(2)$$

$\because \quad R_{भूमध्य} > R_{ध्रुव}$

अतः समी. (1) व (2) से

$$g_{भूमध्य} < g_{ध्रुव}$$

इस प्रकार पृथ्वी के आकार के कारण ध्रुवों पर गुरुत्वीय त्वरण g का मान भूमध्य रेखा पर g के मान से अधिक होता है।

$$g_{ध्रुव} = g_{भूमध्य} + 0.018 \text{ m/s}^2$$

उदा.11. पृथ्वी की आकृति अण्डाकार है। भूमध्य रेखा पर इसकी त्रिज्या 6400 किमी. तथा ध्रुवों की ओर त्रिज्या 6378 किमी. है। ध्रुवों पर तथा भूमध्य रेखा पर g के मान की तुलना कीजिए।

हल– दिया गया है–ध्रुवों पर त्रिज्या $R_p = 6378$ किमी.

भूमध्य रेखा पर त्रिज्या $\quad R_e = 6400$ किमी.

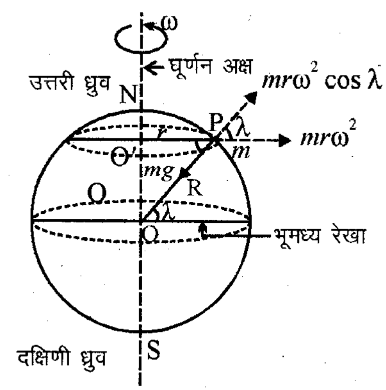
सूत्र $\quad \frac{g_p}{g_e} = \frac{R_e^2}{R_p^2}$

या $\quad \frac{g_p}{g_e} = \frac{(6400)^2}{(6378)^2}$ या $\frac{g_p}{g_e} = 1.007$

अतः $\quad g_p : g_e :: 1.007 : 1$

(d) g के मान में पृथ्वी के घूर्णन के कारण परिवर्तन
(Variation of g due to rotation of the Earth)

पृथ्वी अपनी अक्ष के चारों ओर एक निश्चित कोणीय वेग ω से घूम रही है। पृथ्वी के साथ–साथ उसके तल पर स्थित प्रत्येक पिण्ड वृत्ताकार पथ पर घूमता है।



चित्र 6.9

माना कि m द्रव्यमान के पिण्ड लिए वृत्ताकार पथ की त्रिज्या r है तथा पथ λ अक्षांश (Lattitude) पर स्थित है। पृथ्वी के घूर्णन के कारण पिण्ड पर अपकेन्द्र बल $mr\omega^2$ लगता है जिसका पृथ्वी की त्रिज्या के अनुदिश घटक $mr\omega^2 \cos\lambda$ लगता है इस प्रकार पिण्ड पर परिणामी बल

$$F' = mg - mr\omega^2 \cos\lambda$$

$\Rightarrow \quad mg' = mg - mr\omega^2 \cos\lambda$

$\Rightarrow \quad g' = g - r\omega^2 \cos\lambda \quad ...(1)$

त्रिभुज OO'P से $\quad \cos\lambda = \frac{r}{R}$

$\Rightarrow \quad r = R\cos\lambda$

$\therefore \quad g' = g - (R\cos\lambda)\,\omega^2 \cos\lambda$

$\Rightarrow \quad g' = g - R\omega^2 \cos^2\lambda \quad ...(2)$

इस प्रकार पृथ्वी के घूर्णन के कारण गुरुत्वीय त्वरण g के मान में कमी आती है। उस कमी का मान λ अक्षांश पर निर्भर करता है।

स्थिति (i) ध्रुवों पर गुरुत्वीय त्वरण–

ध्रुवों पर $\lambda = 90°$, $\cos\lambda = 0$

अतः समी. (2) से $\quad g_p = g$

अर्थात् ध्रुवों पर स्थित पिण्ड के लिए पृथ्वी के घूर्णन के कारण कोई प्रभाव नहीं होता है।

स्थिति (ii) भूमध्य रेखा पर गुरुत्वीय त्वरण–भूमध्य पर $\lambda = 0°$, $\cos\lambda = 1$

अतः समी. (2) से $\quad g_e = g - R\omega^2$

अर्थात् भूमध्य रेखा पर स्थित पिण्ड के लिए पृथ्वी के घूर्णन के कारण अधिकतम प्रभाव होता है।

महत्वपूर्ण–

(i) $g_p = g$ तथा $g_e = g - R\omega^2$

$\therefore \quad g_p - g_e = R\omega^2 = 0.034\ m/s^2$

(ii) यदि m द्रव्यमान की एक वस्तु भूमध्य रेखा से ध्रुवों की ओर से ले जायी जाए तो उसके भार में वृद्धि

$$m(g_p - g_e) = m\omega^2 R$$

(iii) **पृथ्वी के घूर्णन के कारण भारहीनता**–पृथ्वी के घूर्णन के कारण वस्तु के भार में कमी का आभास होता है। यदि कोणीय वेग ω के लिए भूमध्य रेखा पर स्थित किसी वस्तु का आभासी भार शून्य हो तो

$$\Rightarrow \quad g' = g - \omega^2 R\cos^2\lambda$$

[$\because \lambda = 0°$ भूमध्य रेखा पर]

$$\Rightarrow \quad 0 = g - \omega^2 R\cos^2 0°$$

$$\Rightarrow \quad g = \omega^2 R \qquad \therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

अथवा पृथ्वी के घूर्णन का आवर्तकाल

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

$R = 6400 \times 10^3\, m$ तथा

$g = 10\ m/s^2$ रखने पर

$$\omega = \frac{1}{800} = 1.25 \times 10^{-3}\ \frac{rad}{s}$$

तथा $\quad T = 5026.5$ सेकण्ड $= 1.40$ घंटा

(a) यह समय पृथ्वी के वर्तमान आवर्तकाल का $\frac{1}{17}$ गुना है अतः यदि पृथ्वी 17 गुना तेज घूर्णन प्रारम्भ कर दें, तो भूमध्य रेखा पर स्थित सभी वस्तुएँ भारहीनता की स्थिति में आ जायेगी।

(b) यदि पृथ्वी अपने अक्ष के परितः घूर्णन करना बन्द कर दे तो भूमध्य रेखा पर g के मान में $\omega^2 R$ की वृद्धि होगी साथ ही वस्तु के भार में $m\omega^2 R$ की वृद्धि होगी।

(c) पृथ्वी के आकार व घूर्णन के कारण ध्रुवों व भूमध्य रेखा पर g के मान में सम्बन्ध

$$g_p = g_e + 0.034 + 0.018\ m/s^2$$

$$\therefore \quad g_p = g_e + 0.052\ m/s^2$$

उदा.12. अपनी अक्ष पर पृथ्वी के घूमने की वह चाल ज्ञात कीजिए ताकि भूमध्य रेखा पर किसी मनुष्य का भार इस समय के भार का 3/5 हो जाये। भूमध्य रेखा पर पृथ्वी की त्रिज्या = 6400 किमी।

हल– भूमध्य रेखा पर प्रभावी गुरुत्वीय त्वरण

$$g' = g - R\omega^2$$

या $\quad mg' = mg - mR\omega^2$

प्रश्नानुसार $\quad mg' = 3/5\, mg$

$\therefore \quad 3/5\, mg = mg - mR\omega^2$

या $\quad mR\omega^2 = mg - 3/5\, mg$

$\therefore \quad mR\omega^2 = 2/5\, mg$

$$\therefore \quad \omega = \sqrt{\left(\frac{2g}{5R}\right)}$$

यहां $g = 9.80$ मी./से.^{2}, $R = 6400$ किमी. $= 6400 \times 10^3$ मी.

$$\therefore \omega = \sqrt{\left[\frac{2\times 9.80}{5\times 6400\times 10^3}\right]} = 7.8\times 10^{-4} \text{ रेडियन/सेकण्ड}$$

उदा.13. पृथ्वी का स्वयं की अक्ष के प्रति घूर्णन वेग का मान क्या हो जाये कि भूमध्य रेखा (विषुवत् रेखा) पर रखी प्रत्येक वस्तु भारहीन हो जाये? इस स्थिति में दिन की अवधि क्या होगी?

(पुस्तक का उदाहरण 6.3)

हल– $\because$ भूमध्य रेखा पर गुरुत्वीय त्वरण का प्रभावी मान $g' = g - R\omega^2$

वस्तु के भारहीन होने पर $W' = mg' = 0$

$\therefore \quad g' = 0$

$$g - R\omega^2 = 0 \Rightarrow R\omega^2 = g$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{9.8}{6.4\times 10^6}} = 1.24\times 10^{-3}\ \frac{\text{रेडियन}}{\text{सेकण्ड}}$$

इस स्थिति में दिन की अवधि अर्थात् आवर्तकाल

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\times 3.14}{1.24\times 10^{-3}} \text{ सेकण्ड}$$

$$T = \frac{2\times 3.14}{1.24\times 10^{-3}\times 60\times 60} = 1.4 \text{ घण्टे}$$

उदा.14. किसी स्थान विशेष पर उस स्थान पर भालू रहने वाला इस प्रकार कूदता है कि वह अधिकतम गुरुत्वीय त्वरण से नीचे आता है, तो भालू का रंग कैसा होगा? (पुस्तक का उदाहरण 6.6)

हल–प्रश्नानुसार भालू अधिकतम गुरुत्वीय त्वरण से नीचे आता है। अधिकतम गुरुत्वीय त्वरण का मान ध्रुवों पर होता है जिससे भालू ध्रुवीय भालू है। अतः भालू श्वेत रंग का होगा।

6.5 गुरुत्वीय क्षेत्र (Gravitational Field)

- पिण्ड के चारों ओर वह क्षेत्र जिसमें किसी अन्य पिण्डों द्वारा गुरुत्वाकर्षण बल का अनुभव किया जा सके उस पिण्ड का गुरुत्वीय क्षेत्र कहलाता है।

गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता (E_g) [Intensity of Gravitational field]

- गुरुत्वीय क्षेत्र में किसी बिन्दु पर स्थित एकांक द्रव्यमान पर कार्यरत बल को उस बिन्दु पर "गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता" कहते हैं अर्थात् गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता

$$E_g = \frac{F}{m} \qquad ...(1)$$

- यह एक सदिश राशि है जिसकी दिशा उसे उत्पन्न करने वाले द्रव्यमान के केन्द्र की ओर होती है। अनन्त पर ($r = \infty$) इसका मान शून्य होता है।

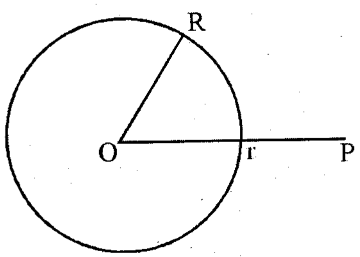
  इसका मात्रक न्यूटन/किग्रा. तथा विमा $[M^0L^1T^{-2}]$ है।

6.5.1 ठोस गोलाकार पिण्ड के लिये गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता (Intensity of Gravitational field due to solid sphere)

(i) गोले के बाहर स्थित बिन्दुओं के लिये ($r > R$)

गोले के बाहर स्थित बिन्दुओं के लिये

$$\text{गुरुत्वाकर्षण बल } F_{out} = \frac{GMm}{r^2}$$



चित्र 6.10

$\therefore$ गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता

$$(E_g)_{out} = \frac{F_{out}}{m} = \frac{GMm}{r^2.m}$$

$$= \frac{GM}{r^2}$$

सदिश रूप में $\qquad (\vec{E}_g)_{out} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$

यहां ऋणात्मक चिन्ह आकर्षण बल का प्रतीक है।

(ii) गोले की सतह पर स्थित बिन्दुओं के लिये ($r = R$)

गोले की सतह पर स्थित बिन्दुओं के लिये

$$\text{गुरुत्वाकर्षण बल } F_{surface} = \frac{GM}{R^2}$$

$\therefore$ गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता

$$(E_g)_{surface} = \frac{F_{surface}}{m} = \frac{GMm}{R^2m}$$

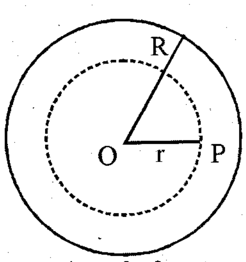
$$= \frac{GM}{R^2}$$

सदिश रूप में $\qquad (\vec{E}_g)_{surface} = -\frac{GM}{R^2}\hat{r}$

(iii) गोले के भीतर स्थित बिन्दुओं के लिये ($r < R$)

गोले के भीतर स्थित बिन्दुओं के लिये

गुरुत्वाकर्षण बल $\qquad \because F_{in} = \frac{GMm}{R^3}r$



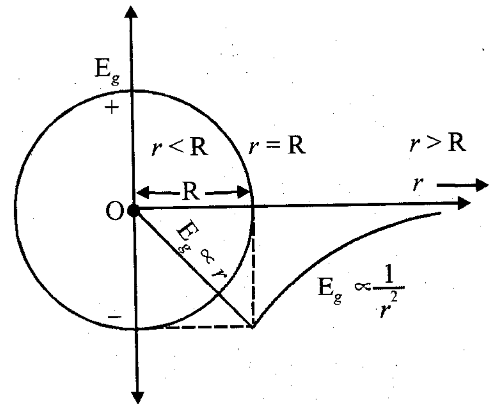
चित्र 6.11

$\therefore$ गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता

$$(E_g)_{in} = \frac{GM}{R^3}r = \frac{GM}{R^3}r$$

सदिश रूप में $\qquad (\vec{E}_g)_{in} = -\frac{GMr}{R^3}\hat{r} \qquad ...(4)$

ठोस गोलाकार पिण्ड के लिये गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता E_g का केन्द्र से दूरी r के साथ परिवर्तन का आलेख–



चित्र 6.12

उदा.15. एक पिण्ड का द्रव्यमान 1000 किग्रा. है। इससे 5 मीटर की दूरी पर स्थित बिन्दु पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता की गणना कीजिए।

हल– गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता, $\vec{E}_g = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$

प्रश्नानुसार $\qquad M = 1000$ किग्रा, $r = 5$ मीटर

$G = 6.67 \times 10^{-11}$ न्यूटन–मीटर^2/किग्रा.^{2}

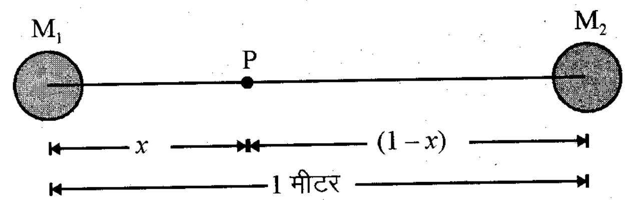
$$\therefore \quad \vec{E}_g = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 1000}{(5)^2}\hat{r}$$

$$= -2.668 \times 10^{-9}\,\hat{r} \text{ न्यूटन/किग्रा.}$$

उदा.16. 100 किग्रा. तथा 10000 किग्रा. के दो पिण्ड परस्पर 1 मीटर की दूरी पर स्थित हैं। उनको मिलाने वाली रेखा के किस बिन्दु पर गुरुत्वीय बल क्षेत्र शून्य होगा?

हल– माना पिण्ड M_1 से x दूरी पर गुरुत्वीय बल क्षेत्र शून्य है।

P बिन्दु पर गुरुत्वीय बल क्षेत्र शून्य होगा जबकि M_1 व M_2 के कारण गुरुत्वीय बल क्षेत्र परिमाण में बराबर तथा दिशा में विपरीत हों।



चित्र 6.13

$$M_1 \text{ के कारण गुरुत्वीय बल क्षेत्र} = \frac{GM_1}{x^2}, M_1 \text{ की ओर}$$

$$\text{तथा } M_2 \text{ के कारण गुरुत्वीय बल क्षेत्र} = \frac{GM_2}{(1-x)^2}, M_2 \text{ की ओर है।}$$

6.10

P पर परिणामी गुरुत्वीय क्षेत्र शून्य होने के लिए

$$\therefore \quad \frac{GM_1}{x^2} = \frac{GM_2}{(1-x)^2}$$

या $$\frac{G \times 100}{x^2} = \frac{G \times 10000}{(1-x)^2}$$

या $$\frac{100}{10000} = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

या $$\frac{1}{100} = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

वर्गमूल लेने पर $$\frac{1}{10} = \frac{x}{1-x}$$

या $$10x = 1 - x$$

या $$11x = 1$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{11} \text{ मी.} = 0.09 \text{ मी.}$$

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक का मान लिखिए।

प्र.2. गुरुत्वाकर्षण बल का सूत्र सदिश रूप में लिखिए।

प्र.3. पृथ्वी सतह पर गुरुत्वीय त्वरण का सूत्र गुरुत्वीय नियतांक के पदों में लिखिए।

प्र.4. क्या गुरुत्वीय त्वरण का मान वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर करता है?

प्र.5. पृथ्वी के घनत्व का मान लिखिए।

प्र.6. g के मान में ऊँचाई के साथ परिवर्तन का सूत्र लिखिए।

प्र.7. g के मान में ऊँचाई व गहराई के साथ परिवर्तन में सम्बन्ध लिखिए।

प्र.8. भूमध्य रेखा तथा ध्रुवों के संगत पृथ्वी की त्रिज्या में कितना अन्तर होता है?

प्र.9. ध्रुवों के संगत गुरुत्वीय त्वरण तथा भूमध्य रेखा के संगत गुरुत्वीय त्वरण में कितना अन्तर होता है?

प्र.10. गुरुत्वीय क्षेत्र से क्या तात्पर्य है?

उत्तरमाला

उ.1. $G = 6.67 \times 10^{-11}$ न्यूटन×मी^{2}/ किग्रा^{2}

उ.2. $\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$ उ.3. $g = \frac{GM}{R^2}$

उ.4. नहीं।

उ.5. $\rho = 5.5 \times 10^3$ किग्रा/मी^{3}

उ.6. $g_h = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$ तथा $g_h = g\left(1-\frac{2h}{R}\right)$

उ.7. पृथ्वी की सतह से ऊपर जाने पर g के मान में कमी की दर (h << R) सतह से नीचे जाने पर g के मान में कमी की दर के दोगुने के बराबर होती है।

उ.8. लगभग 21 किमी.

उ.9. लगभग 0.018 मी/से^{2}

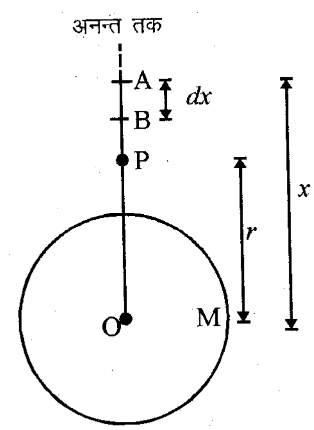
उ.10. पिण्ड के चारों ओर वह क्षेत्र जिसमें किसी अन्य पिण्डों द्वारा गुरुत्वाकर्षण बल का अनुभव किया जा सके उस पिण्ड का गुरुत्वीय क्षेत्र कहलाता है।

6.6 गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा (Gravitational Potential Energy)

- किसी पिण्ड को अनन्त से गुरुत्वीय क्षेत्र में स्थित किसी बिन्दु तक लाने में जितना कार्य प्राप्त होता है उसे उस बिन्दु पर पिण्ड की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कहते हैं।
- अनन्त पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा शून्य मानी जाती है। गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा सदैव ऋणात्मक होती है।

माना कि पृथ्वी का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है। पृथ्वी का द्रव्यमान इसके केन्द्र O पर संकेन्द्रित माना जा सकता है। पृथ्वी द्वारा उत्पन्न गुरुत्वीय क्षेत्र में बिन्दु O से r दूरी पर एक बिन्दु P है जिस पर m द्रव्यमान के पिण्ड की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करनी है।

माना कि बिन्दु P से अनन्त तक की दूरी को छोटे–छोटे भागों में विभाजित किया गया है। ऐसा ही एक छोटा भाग AB चित्र में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 6.14

यदि पिण्ड बिन्दु A पर स्थित हो तब उस पर लगा गुरुत्वाकर्षण बल

$$F = \frac{GMm}{x^2}$$

अल्प विस्थापन AB = dx के लिए अल्प कार्य

$$dW = F\,dx = \frac{GMm}{x^2}dx$$

पिण्ड को अनन्त से बिन्दु P तक लाने पर कुल कार्य

$$W = \int_{\infty}^{r} \frac{GMm}{x^2}dx$$

$$= GMm\int_{\infty}^{r} x^{-2}dx$$

$$= -GMm\left[\frac{1}{x}\right]_{\infty}^{r}$$

$$= -GMm\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right]$$

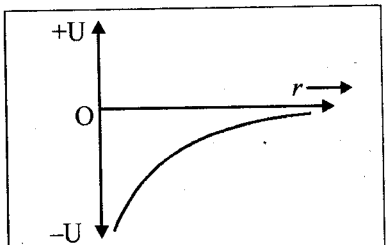
$$= -\frac{GMm}{r} \quad ...(1)$$

यह कार्य पिण्ड में गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है।

$\therefore$ गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा U तथा केन्द्र O से दूरी r में खींचा गया वक्र आयताकार अतिपरवलय प्राप्त होता है।



चित्र 6.15

यदि पृथ्वी की त्रिज्या R हो तथा पिण्ड पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर हो, तो $r = R + h$

$\therefore$ गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U = -\frac{GMm}{R+h} \quad ...(3)$$

स्थिति I: यदि पिण्ड पृथ्वी तल पर हो, तो $h = 0$

$$\therefore \quad U = -\frac{GMm}{R} \quad ...(4)$$

स्थिति II: गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन–m द्रव्यमान के पिण्ड की पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U_1 = -\frac{GMm}{R}$$

पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U_2 = -\frac{GMm}{R+h}$$

गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि

$$\Delta U = U_2 - U_1$$

$$= -\frac{GMm}{R+h} - \left(-\frac{GMm}{R}\right)$$

$$= \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R+h}$$

$$= GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

$$= GMm\left[\frac{R+h-R}{R(R+h)}\right]$$

$$= \frac{GMmh}{R(R+h)}$$

परन्तु $GM = gR^2$

जहाँ g पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण है।

$$\therefore \quad \Delta U = \frac{gR^2 mh}{R(R+h)} \quad ...(5)$$

यदि h का मान पृथ्वी की त्रिज्या R की तुलना में नगण्य हो, तो

$$\Delta U = mgh$$

उदा.17. पृथ्वी का द्रव्यमान 6.0×10^{24} किग्रा. तथा त्रिज्या 6.4×10^6 मीटर है। 4 किग्रा. के एक पिण्ड को पृथ्वी तल से अनन्त तक ले जाने में कितना कार्य करना होगा? पिण्ड की पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा क्या होगी? यदि यह पिण्ड अनन्त से पृथ्वी पर गिरे तो पृथ्वी से टकराते समय पिण्ड का वेग क्या होगा? ($G = 6.67 \times 10^{-11}$ न्यूटन-मीटर^2/किग्रा.^{2})।

हल– यदि पृथ्वी का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R हो तो m द्रव्यमान के पिण्ड को पृथ्वी तल से अनन्त तक ले जाने में किया गया कार्य

$$W = \frac{GMm}{R}$$

दिया गया है–

$G = 6.67 \times 10^{-11}$ न्यूटन–मी.^{2}/किग्रा.^{2}

$M = 6.0 \times 10^{24}$ किग्रा.

$R = 6.4 \times 10^6$ मीटर तथा $m = 4$ किग्रा.।

अतः $W = 2.5 \times 10^8$ जूल

पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$U = 2.5 \times 10^8$ जूल

अनन्त से पृथ्वी तक गिरने में पिण्ड द्वारा प्राप्त गतिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2}mv^2$$

जहां v पिण्ड का पृथ्वी से टकराते समय वेग है।

पिण्ड को पृथ्वी तल से अनन्त तक ले जाने में जो कार्य किया गया है, वह पिण्ड को अनन्त से पृथ्वी तल तक गिरने में गतिज ऊर्जा के रूप में प्राप्त हो जायेगा। अतः

$$\frac{1}{2}mv^2 = 2.5 \times 10^8 \text{ जूल}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 2.5 \times 10^8}{4}}$$

$$= 11.8 \times 10^8 \text{ मीटर/सेकण्ड}$$

उदा.18. यदि पृथ्वी का द्रव्यमान 6.0×10^{24} किग्रा. हो, तो पृथ्वी के केन्द्र से 3.35×10^{10} मी. दूरी पर 33.5 किग्रा. द्रव्यमान की वस्तु की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए। $G = 6.67 \times 10^{-11}$ न्यूटन।

हल– गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

$$= \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6.0 \times 10^{24} \times 33.5}{3.35 \times 10^{10}}$$

$$= -4.02 \times 10^5 \text{ जूल}$$

6.7 गुरुत्वीय विभव (Gravitational Potential)

- एकांक द्रव्यमान को अनन्त से गुरुत्वीय क्षेत्र में स्थित किसी बिन्दु तक लाने में जितना कार्य होता है उसे उस बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव कहते हैं।
- गुरुत्वीय विभव सदैव ऋणात्मक होता है। यह एक अदिश राशि है जिसका मात्रक जूल/किग्रा. तथा विमा $[M^0L^2T^{-2}]$ होती है।
- यदि m द्रव्यमान के किसी कण को बिन्दु A से B तक विस्थापित किया जाये तब इन बिन्दुओं के मध्य विभवान्तर

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{m}$$

यदि बिन्दु A पर अनन्त पर माना जाये तब

$$V_A = U_A = 0$$

जिससे $$V = \frac{U}{m}$$

या $$V(r) = \frac{U(r)}{m}$$

$$\Rightarrow \quad V(r) = -\frac{GMm}{rm}$$

$$V(r) = -\frac{GM}{r}$$

समी. (1) बिन्दुवत् द्रव्यमान M के कारण r दूरी पर गुरुत्वीय विभव के व्यंजक को व्यक्त करता है।

6.7.1 बिन्दु द्रव्यमान के कारण विभव (Potential due to a point mass)

गुरुत्वीय बल संरक्षी बल है। संरक्षी बल क्षेत्र के अन्तर्गत बल तथा स्थितिज ऊर्जा में निम्न सम्बन्ध होता है–

$$U = -\int_{\infty}^{r} \vec{F}.\vec{dr}$$

एकांक द्रव्यमान की स्थितिज ऊर्जा

$$\frac{U}{m} = V = -\int_{\infty}^{r} \frac{\vec{F}}{m}.\vec{dr} = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}_g.\vec{dr}$$

जहां $\vec{E}_g = \frac{\vec{F}}{m}$ गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता है।

$$\because \quad \vec{E}_g = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$$

$$\therefore \quad V = -\int_{\infty}^{r} -\frac{GM}{r^2}\hat{r}.\vec{dr}$$

$$\therefore \quad V = GM\int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2}dr \quad \left[\begin{array}{l}\hat{r}.\vec{dr} = 1dr\cos 0^\circ = dr \\ \because \hat{r} \text{ व } \vec{dr} \text{ एक ही दिशा में हैं।}\end{array}\right]$$

$$= GM\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}$$

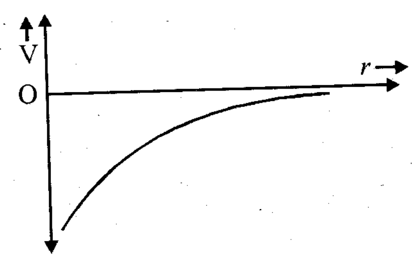
$$= -GM\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right]$$

$$= -GM\left[\frac{1}{r} - 0\right]$$

$$= -\frac{GM}{r}$$

$$\therefore \quad V = -\frac{GM}{r} \qquad ...(2)$$

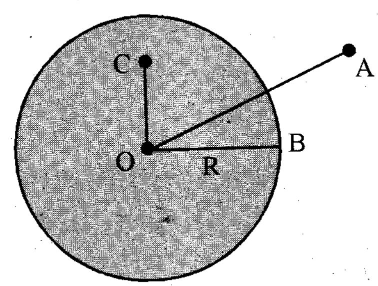
गुरुत्वीय विभव V का दूरी r के साथ परिवर्तन का आलेख–



चित्र 6.16

6.7.2 ठोस गोलाकार पिण्ड के लिये गुरुत्वीय विभव (Gravitational potential due to a solid sphere)

(i) गोले के बाहर स्थित बिन्दुओं के लिए ($r > R$)



चित्र 6.17

जैसे–चित्र से बिन्दु A

$$V = -\frac{GMm}{r.m}$$

$$= -\frac{GM}{r}$$

$$\Rightarrow \quad V_{out} = -\frac{GM}{r} \qquad ...(1)$$

(ii) गोले के भीतर स्थित बिन्दुओं के लिये ($r < R$)

जैसे–चित्र से बिन्दु C

$$V = -\frac{GMm}{2R^3.m}(3R^2 - r^2)$$

$$= -\frac{GM}{2R^3}(3R^2 - r^2)$$

$$V_{in} = -\frac{GM}{2R^3}(3R^2 - r^2) \qquad ...(2)$$

गोले के केन्द्र पर ($r = 0$)
समी. (2) में $r = 0$ रखने पर

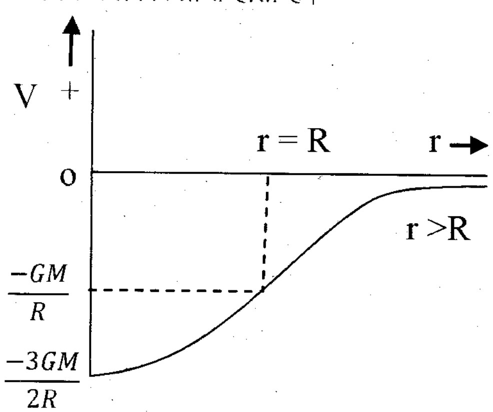
$$\Rightarrow \qquad V_{centre} = -\frac{3}{2}\frac{GM}{R}$$

(iii) गोले के सतह पर स्थित बिन्दुओं के लिये ($r = R$)
जैसे–चित्र से बिन्दु B

$$V = -\frac{GMm}{R.m} = -\frac{GM}{R}$$

$$\Rightarrow \qquad V_{surface} = -\frac{GM}{R} \qquad ...(4)$$

गुरुत्वीय विभव (V) तथा केन्द्र से दूरी (r) के साथ परिवर्तन का आलेख निम्न प्रकार प्राप्त होता है।



चित्र 6.18

उदा.19. पृथ्वी तल के ऊपर किसी बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव -5.12×10^7 जूल/किग्रा. तथा गुरुत्वीय त्वरण 6.4 मी./से.^{2} है। पृथ्वी की औसत त्रिज्या 6400 किमी. मानकर, पृथ्वी तल से इस बिन्दु की ऊँचाई की गणना कीजिए।

हल– माना अभीष्ट बिन्दु पृथ्वी तल से r मीटर दूर है तो इस बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव,

$$V = -\frac{GM}{r} = -5.12 \times 10^7 \text{ जूल/किग्रा.}$$

गुरुत्वीय त्वरण

$$g = \frac{GM}{r^2} = 6.4 \text{ मी./से.}^2$$

भाग देने पर, $$-\frac{GM/r}{GM/r^2} = -\frac{5.12 \times 10^7}{6.4}$$

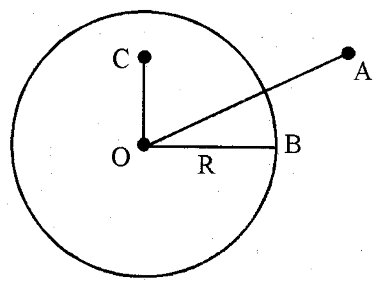
$$\therefore \qquad r = \frac{512 \times 10^7}{6.4} = 8 \times 10^6 \text{ मी.} = 8000 \text{ किमी.}$$

$$R + h = r$$

या $$h = r - R = 8000 - 6400 = 1600 \text{ किमी.}$$

6.7.3 खोखले गोले के कारण गुरुत्वीय विभव (Gravitational Potential due to Hollow Sphere)

किसी खोखले गोले या गोलीय कोश का द्रव्यमान उसकी सतह पर वितरित रहता है परन्तु खोखले गोले के बाहर स्थित तथा सतह पर स्थित बिन्दुओं पर गुरुत्वीय विभव का मान ठोस गोले के लिए प्राप्त मानों के समान आता है। इसका कारण यह है कि दोनों ही स्थितियों में गोले को बिन्दुवत् द्रव्यमान माना जा सकता है।



चित्र 6.19

(i) गोले के बाहर स्थित बिन्दुओं के लिये ($r > R$)
जैसे–चित्र से बिन्दु A

$$V_{out} = -\frac{GM}{r} \qquad ...(1)$$

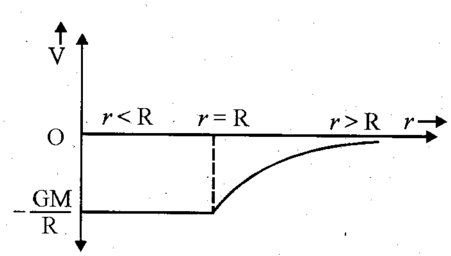
(ii) गोले के सतह पर स्थित बिन्दुओं के लिए ($r = R$)
जैसे–चित्र से बिन्दु B

$$V_{surface} = -\frac{GM}{R}$$

(iii) गोले के भीतर स्थित बिन्दुओं के लिए ($r < R$)
जैसे–चित्र से बिन्दु C
गोलीय कोश के भीतर गुरुत्वीय क्षेत्र शून्य होता है। अतः किसी द्रव्यमान को अनन्त से कोश के भीतर लाने में उतना ही कार्य होगा जितना कि सतह तक लाने में होगा। इस कारण कोश के भीतर गुरुत्वीय विभव वही होगा जो कि सतह पर होता है, अर्थात्

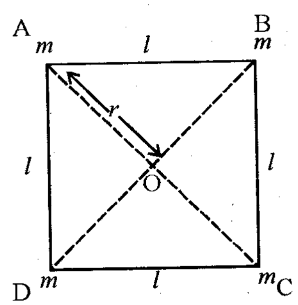
$$V_{in} = -\frac{GM}{r} \qquad ...(3)$$

गोलीय कोश के लिए गुरुत्वीय विभव (V) तथा केन्द्र से दूरी (r) के साथ परिवर्तन का आलेख निम्न प्रकार प्राप्त होता है–



उदा.20. l भुजा के किसी वर्ग के शीर्षों पर स्थित चार कणों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए। वर्ग के केन्द्र पर विभव भी ज्ञात कीजिए।

हल– माना कि प्रत्येक कण का द्रव्यमान m है।



चित्र 6.21

दिया गया है– $AB = BC = CD = DA = l$

अतः $AC = BD = l\sqrt{2}$

निकाय की स्थितिज ऊर्जा

$$U = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} + U_{AC} + U_{BD}$$

$$= -\frac{Gmm}{AB} - \frac{Gmm}{BC} - \frac{Gmm}{CD} - \frac{Gmm}{DA} - \frac{Gmm}{AC} - \frac{Gmm}{BD}$$

$$= -Gm^2\left[\frac{1}{l}+\frac{1}{l}+\frac{1}{l}+\frac{1}{l}+\frac{1}{l\sqrt{2}}+\frac{1}{l\sqrt{2}}\right]$$

$$= -Gm^2\left[\frac{4}{l}+\frac{2}{l\sqrt{2}}\right] = -\frac{Gm^2}{l}\left[4+\sqrt{2}\right]$$

$$= -\frac{Gm^2}{l}[4+1.41] = -5.41\frac{Gm^2}{l}$$

वर्ग के केन्द्र पर गुरुत्वीय विभव

$$V = V_A + V_B + V_C + V_D$$

$$= -\frac{Gm}{(OA)} - \frac{Gm}{(OB)} - \frac{Gm}{(OC)} - \frac{Gm}{(OD)}$$

$$\because OA = OB = OC = OD = \frac{1}{2}(C) = \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad V = -\frac{4Gm}{l/\sqrt{2}} = -4\sqrt{2}\,\frac{Gm}{l}$$

6.8 पलायन वेग (Escape Velocity)

पलायन वेग वह न्यूनतम वेग है जिससे किसी वस्तु को ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंकने पर वह पृथ्वी (ग्रह) पर कभी वापस नहीं आती है अर्थात् अनन्त में चली जाती है।

(i) पृथ्वी के पृष्ठ से पलायन कराने के लिए वेग–

माना कि m द्रव्यमान की किसी वस्तु का पलायन वेग v_e है

पलायन गतिज ऊर्जा $\quad K = \frac{1}{2}mv_e^2$

गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा $\quad U = -\frac{GMm}{R}$

$\therefore$ कुल ऊर्जा $E = K + U$

$$E = \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{R} \qquad ...(1)$$

परन्तु अनन्त पर वस्तु की कुल ऊर्जा

$$E = 0$$

जिससे समी. (1) से

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

$$v_e^2 = \frac{2GM}{R}$$

$$\Rightarrow \quad v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad ...(2)$$

$$\because \quad GM = gR^2$$

$$\therefore \quad v_e = \sqrt{\frac{2gR^2}{R}}$$

$$\Rightarrow \quad v_e = \sqrt{2gR} \qquad ...(3)$$

पृथ्वी के लिए– $\quad g = 9.8$ मी./से.^{2}

$R = 6400$ किमी. $= 6400 \times 10^3$ मी.

$\therefore$ पलायन वेग $\quad v_e = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6400 \times 10^3}$

$v_e = 11.2 \times 10^3$ मी./से.

$v_e = 11.2$ किमी./से.

अर्थात् यदि किसी वस्तु को 11.2 किमी./से. के वेग से ऊपर की ओर फेंका जाये तब वस्तु पृथ्वी पर कभी लौट कर नहीं आयेगी। पलायन वेग के सूत्र से स्पष्ट है कि पलायन वेग, फेंकी गई वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता।

चन्द्रमा के लिए पलायन वेग समीकरण (3) में

$$g = \frac{9.8}{6} \text{ मीटर/सेकण्ड}^2$$

तथा $R = 1.74 \times 10^6$ मीटर रखने पर,

$$\text{पलायन वेग } v_e = \sqrt{2 \times \left(\frac{9.8}{6}\right) \times 1.74 \times 10^6}$$

$$= 2.38 \times 10^3 \text{ मीटर/सेकण्ड}$$

यह मान पृथ्वी की तुलना में लगभग $\frac{1}{5}$ गुना है।

(ii) पृथ्वी तल से *h* ऊँचाई पर स्थित पिण्ड को पलायन कराने के लिए वेग–

पलायन गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv_e'^2$

पृथ्वी तल से *h* ऊँचाई पर स्थितिज ऊर्जा

$$U = -\frac{GMm}{R+h}$$

∴ कुल ऊर्जा $E = K + U$

$$E = \frac{1}{2}mv_e'^2 - \frac{GMm}{R+h} \quad ...(1)$$

परन्तु अनन्त पर वस्तु की कुल ऊर्जा

$$E = 0$$

जिससे समी. (1) से

$$\frac{1}{2}mv_e'^2 - \frac{GMm}{R+h} = 0$$

$$v_e'^2 = \frac{2GM}{R+h}$$

$$v_e' = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}} \quad ...(2)$$

इस प्रकार समी. (2) से स्पष्ट है कि ऊँचाई बढ़ने पर पलायन वेग का मान कम होता जायेगा।

∵ $GM = gR^2$

समी. (2) से $v_e' = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}$

6.8.1 चन्द्रमा पर वायुमण्डल की अनुपस्थिति (Absence of Atmosphere Around the Moon)

चन्द्रमा पर वायुमण्डल की अनुपस्थिति का कारण पलायन वेग के आधार पर समझा जा सकता है। पृथ्वी पर अणुओं का औसत ऊष्मीय वेग पलायन वेग से बहुत कम है। उदाहरण के लिए हाइड्रोजन गैस के अणुओं का औसत ऊष्मीय वेग 2.5 किमी./से. है जबकि पृथ्वी के लिए पलायन वेग 11.2 किमी./से. है। इस कारण गैसों के अणु पृथ्वी के समीप बने रहते हैं जो कि वायुमण्डल का निर्माण करते हैं।

इसके विपरीत चन्द्रमा पर गैसों के अणुओं का औसत ऊष्मीय वेग का मान चन्द्रमा के लिए पलायन वेग 2.38 किमी./से. से अधिक होता है जिससे ये अणु चन्द्रमा के गुरुत्वीय खिंचाव के बाहर पलायन कर जाते हैं। इस कारण चन्द्रमा पर वायुमण्डल नहीं है।

अन्य छोटे ग्रहों जैसे मंगल पर भी पलायन वेग का मान कम होता है अतः उन पर भी वायुमण्डल विद्यमान नहीं होता है जबकि कुछ बड़े ग्रहों जैसे बृहस्पति, शनि, आदि तथा सूर्य पर पलायन वेग का मान बहुत अधिक होता है इस कारण वहाँ सघन वायुमण्डल पाया जाता है।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. पलायन वेग पिण्ड के द्रव्यमान तथा पिण्ड को प्रक्षेपित करने की दिशा पर निर्भर नहीं करता।
2. पलायन वेग निर्देश पिण्ड (ग्रह) के द्रव्यमान तथा त्रिज्या पर निर्भर करता है। यदि किसी ग्रह के लिए (M/R) या (*g*R) का मान अधिक हो तो उस ग्रह के लिए पलायन वेग अधिक होगा।
3. यदि किसी पिण्ड को पलायन वेग से कम वेग ($v < v_e$) पर फेंका जाए तो वह महत्तम ऊँचाई तक जाकर या तो पृथ्वी के चारों ओर एक कक्षा में चक्कर लगाने लगेगा या फिर ग्रह की सतह पर गिर जाएगा।
4. यदि किसी पिण्ड के लिए पलायन वेग प्रकाश के वेग के तुल्य है तो पिण्ड से कुछ भी पलायन नहीं होगा, यहाँ तक कि प्रकाश भी नहीं। ऐसे पिण्ड कृष्ण विवर (Black holes) कहलाते हैं।

उदा.21. पृथ्वी की सतह से किसी पिण्ड को कम से कम किस वेग से फेंका जाये, कि वह पुनः पृथ्वी पर लौटकर न आये। यदि पिण्ड का द्रव्यमान 500 किग्रा. हो, तो उसे इस प्रकार प्रक्षेपित करने के लिए कितनी ऊर्जा की आवश्यकता पड़ेगी? गुरुत्वीय त्वरण $g = 9.80$ मी./से.^{2} पृथ्वी की त्रिज्या $R = 6.4 \times 10^6$ मी.

हल– पिण्ड को दिया गया आवश्यक वेग, पलायन वेग के बराबर होना चाहिए, अर्थात्

$$v_e = \sqrt{2gR}$$

$$= \sqrt{2 \times 9.80 \times 6.4 \times 10^6}$$

$$= 11.2 \times 10^3 \text{ मी./से.}$$

$$= 11.2 \text{ किमी./से.}$$

आवश्यक गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{1}{2} \times 500 \times (11.2 \times 10^3)^2$

$= 3.136 \times 10^{10}$ जूल

उदा.22. एक ग्रह की त्रिज्या पृथ्वी की त्रिज्या की दुगुनी है, परन्तु दोनों के औसत घनत्व समान हैं। यदि v_p तथा v_e क्रमशः ग्रह तथा पृथ्वी पर पलायन वेग हों, तो सिद्ध कीजिए कि $v_p = 2v_e$

हल– माना ग्रह व पृथ्वी में से प्रत्येक का माध्य घनत्व ρ है।

पृथ्वी पर पलायन वेग, $v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}} \quad ...(1)$

पृथ्वी का द्रव्यमान M_e = पृथ्वी का आयतन × घनत्व

$$= \frac{4}{3}\pi R_e^3 \rho$$

$$\therefore \quad v_e = \sqrt{\left(\frac{2G(4/3\pi R_e^3 \rho)}{R_e}\right)}$$

$$= R_e\sqrt{\left(\frac{8}{3}\pi G\rho\right)}$$

ग्रह पर पलायन वेग,

$$v_p = \sqrt{\left(\frac{2GM_P}{R_P}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2G(4/3\pi R_P^3 \rho)}{R_P}\right)}$$

$$= R_P\sqrt{\left(\frac{8}{3}\pi G\rho\right)} \quad ...(2)$$

(जिसमें R_P ग्रह की त्रिज्या तथा M_P उसका द्रव्यमान है)

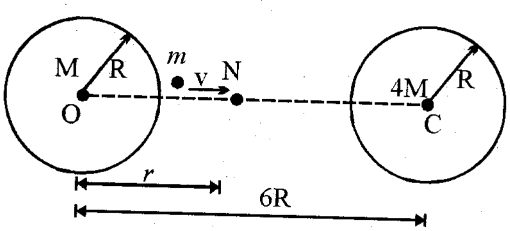
समीकरण (2) को (1) से भाग देने पर

$$\frac{v_p}{v_e} = \frac{R_p}{R_e} = \frac{2R_e}{R_e}$$

(प्रश्नानुसार $R_p = 2R_e$)

$$\therefore \quad \frac{v_p}{v_e} = 2 \text{ या } v_p = 2v_e$$

उदा.23. समान त्रिज्या R परन्तु M तथा 4M द्रव्यमान के दो एकसमान ठोस गोले इस प्रकार रखे हैं कि इनके केन्द्रों के बीच पृथक्कन (चित्र में दर्शाए अनुसार) 6R है। दोनों गोले स्थिर रखे गए हैं। *m* द्रव्यमान के किसी प्रक्षेप्य को M. द्रव्यमान के गोले के पृष्ठ से 4M द्रव्यमान के गोले के केन्द्र की ओर सीधे प्रक्षेपित किया जाता है। प्रक्षेप्य की उस न्यूनतम चाल के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए जिससे फेंके जाने पर वह दूसरे गोले के पृष्ठ पर पहुंच जाए।



चित्र 6.22

हल– माना कि चित्रानुसार उदासीन बिन्दु की स्थिति N है जहां पर प्रक्षेप्य पर परिणामी बल शून्य होगा। जब प्रक्षेप्य बिन्दु N पर पहुंचेगा तब 4M द्रव्यमान के गोले का गुरुत्वीय बल प्रक्षेप्य को अपनी ओर आकर्षित कर लेगा। अतः प्रक्षेप्य को उस चाल से प्रक्षेपित करना होगा जो उसे बिन्दु N तक पहुँचा दे।

उदासीन स्थिति N के लिए

M द्रव्यमान के गोले का गुरुत्वीय बल = 4 M द्रव्यमान के गोले का गुरुत्वीय बल

$$\Rightarrow \quad \frac{GMm}{r^2} = \frac{G4Mm}{(6R-r)^2}$$

[जहां r = M द्रव्यमान के गोले के केन्द्र से बिन्दु N की दूरी]

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r^2} = \frac{4}{(6R-r)^2}$$

$$\Rightarrow \quad (6R-r)^2 = 4r^2 = (2r)^2$$

$$\Rightarrow \quad 6R - r = \pm 2r$$

$$\Rightarrow \quad \pm 2r + r = 6R$$

धन चिन्ह लेने पर

$\Rightarrow \quad 2r + r = 6R$

$\Rightarrow \quad r = 2R$

ऋण चिन्ह लेने पर

$\Rightarrow -2r + r = 6R$

$\Rightarrow r = -6R$

M द्रव्यमान के गोले के पृष्ठ पर कुल यांत्रिक ऊर्जा

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} - \frac{G4Mm}{5R} \quad ...(1)$$

बिन्दु N पर कुल यांत्रिक ऊर्जा

$$E_N = -\frac{GMm}{r} - \frac{G4Mm}{6R-r}$$

[∵ बिन्दु N पर कुल यांत्रिक ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा ही होती है]

$$\Rightarrow \quad E_N = -\frac{GMm}{2R} - \frac{4GMm}{6R-2R}$$

$$\Rightarrow \quad E_N = -\frac{GMm}{2R} - \frac{4GMm}{4R} = -\frac{3}{2}\frac{GMm}{R} \quad ...(2)$$

यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियमानुसार

$$E_M = E_N$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} - \frac{4GMm}{5R} = -\frac{3}{2}\frac{GMm}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R} + \frac{4GMm}{5R} - \frac{3}{2}\frac{GMm}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R}\left[1 + \frac{4}{5} - \frac{3}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R} \times \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{3}{5}\frac{GM}{R}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{3}{5}\frac{GM}{R}}$$

उदा.24. किसी वस्तु के लिए सौर परिवार (Solar system) में पलायन वेग का मान ज्ञात कीजिए। दिया गया है; सूर्य का द्रव्यमान = 2×10^{30} kg तथा सूर्य से पृथ्वी की दूरी = 1.5×10^{11} m.

(पुस्तक का उदाहरण 6.8)

हल– यदि पृथ्वी तथा सूर्य के बीच की दूरी R एवं सूर्य का द्रव्यमान M है तो

$$\text{पलायन वेग } v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}{1.5 \times 10^{11}}} = 42.2 \text{ किमी/सेकण्ड}$$

अतः सौर परिवार से किसी वस्तु के पलायन के लिए वेग 42.2 किमी/सेकण्ड होना चाहिए।

उदा.25. चन्द्रमा की सतह पर पलायन वेग का मान ज्ञात कीजिए। यदि चन्द्रमा की त्रिज्या 1740 km व द्रव्यमान 7.4×10^{22} kg है।

(पुस्तक का उदाहरण 6.10)

हल– ∵ पलायन वेग $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

दिया गया है: $R = 1740 \times 10^3$ m, $M = 7.4 \times 10^{22}$ kg

$$\therefore \quad v_e = \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 7.4 \times 10^{22}}{1740 \times 10^3}}$$

$$v_e = 2.4 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$v_e = 2.4 \text{ m/s}$$

उदा.26. किसी पिंड को पृथ्वी तल से पलायन वेग के n गुने वेग से फेंका जाता है। इसका अनंत पर शेष वेग क्या होगा? यदि वस्तु को पलायन वेग से ही फेंके तो अनंत पर शेष वेग बताइये। (पुस्तक का उदाहरण 6.11)

हल- ऊर्जा संरक्षण नियम से

पृथ्वी तल पर कुल ऊर्जा = अनन्त पर कुल ऊर्जा

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv'^2 + 0$$

अवशेष वेग v' है तथा पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा अनन्त पर शून्य होगी।

$$v'^2 = v^2 - \frac{2GM}{R}$$

परन्तु दिया गया है– पिण्ड का पृथ्वी तल पर वेग = nv_e

यहाँ v_e पलायन वेग है।

$$v'^2 = n^2v_e^2 - v_e^2$$

$$= v_e^2(n^2 - 1)$$

$$v' = v_e\sqrt{n^2 - 1}$$

इस प्रकार इस स्थिति में अवशेष वेग, पलायन वेग का $\sqrt{n^2-1}$ गुना होगा।

यदि वस्तु को पलायन वेग से ही फेंका जाये तब

$$n = 1$$

$$\therefore \quad v' = v_e\sqrt{(1)^2 - 1} = 0$$

अर्थात् अनन्त पर शेष वेग शून्य होगा।

6.9 ग्रहों की गति के कैप्लर के नियम (Kepler's Laws of Planetary Motion)

टाइको ब्रेह (Tycho Brahe) के खगोलीय प्रेक्षणों के आधार पर कैप्लर ने सूर्य की परिक्रमा करने वाले ग्रहों की गति के सम्बन्ध में निम्नलिखित तीन नियम प्रतिपादित किये थे, जिन्हें ग्रहों की गति के कैप्लर के नियम कहा जाता है।

1. **कक्षाओं का नियम (Law of orbits)**–यह नियम ग्रहों द्वारा चली गई कक्षाओं (orbits) के बारे में जानकारी देता है। इस नियम के अनुसार "प्रत्येक ग्रह सूर्य के परितः दीर्घवृत्ताकार (elliptical) पथ पर गति करता है तथा सूर्य उस दीर्घवृत्त के किसी एक फोकस (नाभि) पर होता है।" चित्र में सूर्य S, किसी ग्रह द्वारा चले गये दीर्घवृत्त के फोकस पर है। विभिन्न ग्रहों की कक्षायें भिन्न–भिन्न होती हैं। चित्र में सूर्य का निकटतम बिन्दु P_1 तथा दूरस्थ बिन्दु P_2 है। P_1 को उपसौर (Perihelion) तथा P_2 को अपसौर (aphelion) कहते हैं। अर्ध दीर्घ अक्ष दूरी P_1P_2 का आधा है।

2. **क्षेत्रफलों का नियम (Law of areas)**–इस नियम के अनुसार, किसी ग्रह के कक्षीय तल में ग्रह तथा सूर्य को मिलाने वाली रेखा समान समयान्तरालों में (कक्षा के तल में) समान क्षेत्रफल तय करती है अर्थात् ग्रह तथा सूर्य को मिलाने वाली रेखा की क्षेत्रफलीय चाल (areal velocity) नियत रहती है। चित्र में प्रदर्शित कोई ग्रह सूर्य की परिक्रमा करते हुए एक निश्चित समयान्तराल में अपनी कक्षा के बिन्दु P_1 से बिन्दु P_2 तक जाता है तथा उतने ही समयान्तराल में कक्षा के बिन्दु P_3 से P_4 तक जाता है, तब इस नियम के अनुसार, क्षेत्रफल P_1SP_2 = क्षेत्रफल P_3SP_4। इस तथ्य से स्पष्ट होता है कि अपनी कक्षा में ग्रह की चाल निरन्तर बदलती रहती है तथा जब ग्रह सूर्य से दूरस्थ होता है तो उसकी चाल न्यूनतम तथा जब सूर्य के समीपस्थ होता है तो ग्रह की चाल अधिकतम होती है।

3. **परिक्रमण कालों अथवा आवर्त कालों का नियम (Law of periods)**–सूर्य के चारों ओर किसी ग्रह द्वारा एक चक्कर पूरा करने में लगा समय अर्थात् ग्रह का सूर्य के परितः परिक्रमण काल, T का वर्ग, उसकी दीर्घवृत्ताकार कक्षा के अर्द्ध–दीर्घ अक्ष a, की तृतीय घात के अनुक्रमानुपाती होता है

अर्थात् $\quad T^2 \propto a^3$

कैप्लर के द्वितीय तथा तृतीय नियम की व्युत्पत्ति (Proof of Kepler's second and Third laws)

द्वितीय नियम–कैप्लर का ग्रहों की गति का द्वितीय नियम, वास्तव में ग्रह के कोणीय संवेग संरक्षण के नियम के तुल्य है। इसको निम्न प्रकार सिद्ध किया जा सकता है। क्षेत्रफलों के नियम से सम्बन्धित चित्र में एक ग्रह सूर्य के परितः दीर्घवृत्ताकार कक्षा में परिक्रमण कर रहा है तथा सूर्य S इसके फोकस पर स्थित है। माना किसी क्षण t पर ग्रह कक्षा के बिन्दु P_1 पर है। माना S के सापेक्ष, बिन्दु P_1 के ध्रुवीय निर्देशांक (r, θ) हैं। माना ग्रह एक सूक्ष्म समयान्तराल Δt में अपनी कक्षा में स्थिति P_1 से स्थिति P_2 में पहुंच जाता है, तथा $\angle P_2SP_1 = \Delta\theta$ तब इस अनन्त सूक्ष्म समयान्तराल Δt में, रेखा SP_1 तथा SP_2 के बीच बना क्षेत्रफल

$$\Delta A = \text{वक्रीय } \Delta SP_1P_2 \text{ का क्षेत्रफल}$$

$$= \frac{1}{2}(SP_1 \times P_1P_2)$$

$$= \frac{1}{2}r \times r\Delta\theta \quad [\because P_1P_2 = r\Delta\theta] \quad \text{...(i)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta A = \frac{1}{2}r^2\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

अतः ग्रह को सूर्य से मिलाने वाली रेखा की तात्क्षणिक क्षेत्रफलीय चाल,

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\therefore \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega \quad \text{...(2}$$

$\because \frac{d\theta}{dt} = \omega$, यह रेखा की कोणीय चाल है। सूर्य के केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः ग्रह इसी कोणीय चाल ω से घूमता है। ग्रह क घूर्णन अक्ष के सापेक्ष कोणीय संवेग

$$L = I\omega = mr^2\omega \quad \text{...(3}$$

[जहां m ग्रह का द्रव्यमान है

$\therefore \qquad r^2\omega = \frac{L}{m} \qquad ...(4)$

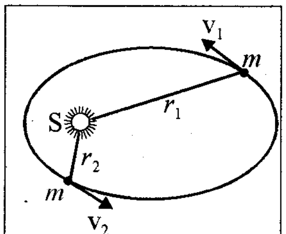
$r^2\omega$ का यह मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \qquad ...(5)$$

कैप्लर के द्वितीय नियम के अनुसार क्षेत्रफलीय चाल dA/dt नियत रहती है, अतः $L/2m$ भी नियत रहता है। यही क्षेत्रफलों का नियम है। ग्रह का द्रव्यमान m नियत है, अतः ग्रह का कोणीय संवेग L भी नियत रहता है।

अतः कैप्लर का द्वितीय नियम, ग्रह के कोणीय संवेग संरक्षण के नियम के तुल्य है।

महत्वपूर्ण–ग्रह के कोणीय संवेग के नियत रहने का तात्पर्य है कि ग्रह की गति एक केन्द्रीय बल के अन्तर्गत होती है। वास्तव में, सूर्य के परितः ग्रह की गति, सूर्य तथा ग्रह के बीच होने वाली गुरुत्वाकर्षण अन्योन्य क्रिया के कारण उस बल के अन्तर्गत होती है जो सूर्य द्वारा ग्रह पर गुरुत्वाकर्षण के कारण लगता है। इस बल की दिशा सदैव सूर्य की ओर $(-\vec{r})$ होती है, तथा इसका परिमाण सूर्य तथा ग्रह की बीच की दूरी r पर निर्भर करता है। अतः सूर्य द्वारा ग्रह पर आरोपित बल एक केन्द्रीय बल है। अतः इस केन्द्रीय बल के अन्तर्गत गति करते हुए ग्रह का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है। (चित्र)।



चित्र 6.23

अतः $\quad mv_1r_1 = mv_2r_2 \qquad$ [जहां m ग्रह का द्रव्यमान है।]

$\Rightarrow \quad v_1r_1 = v_2r_2$

$\Rightarrow \quad r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2 \qquad [\because v = r\omega]$

तृतीय नियम–यदि दीर्घवृत्ताकार कक्षा की अर्द्ध–दीर्घ तथा अर्द्ध–लघु अक्षें क्रमशः a तथा b हों तो दीर्घवृत्त का क्षेत्रफल πab होता है। अतः ग्रह का आवर्त काल,

$$T = \frac{\text{दीर्घवृत्त का क्षेत्रफल}}{\text{सूर्य तथा ग्रह को मिलाने वाली रेखा की क्षेत्रफलीय चाल}}$$

$$= \frac{\pi ab}{\frac{L}{2m}} \qquad [\because \text{ समीकरण (5) से } \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}]$$

$$\Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 m^2 a^2 b^2}{L^2}$$

[जहां L = घूर्णन अक्ष के परितः ग्रह का कोणीय संवेग]

यदि दीर्घवृत्ताकार कक्षा का अर्द्ध–नाभि–लम्ब l हो, तब

$$l = \frac{b^2}{a} \qquad \text{[दीर्घवृत्त की परिभाषा से]}$$

$$\therefore \quad T^2 = \frac{4\pi^2 m^2 a^3 l}{L^2}$$

$$\therefore \quad T^2 \propto a^3$$

($\because$ किसी एक कक्षा के लिए अन्य सभी राशियां नियत रहती हैं)
सूर्य के परितः किसी ग्रह के आवर्त काल के लिए यही कैप्लर का नियम है। अतः स्पष्ट है कि a का मान अधिक होने पर T का मान भी अधिक होगा।

न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम से कैप्लर के तृतीय नियम का सत्यापन

माना कि m द्रव्यमान का एक ग्रह M द्रव्यमान के सूर्य के चारों ओर r त्रिज्या की वृत्ताकार कक्षा में घूम रहा है। यदि ग्रह की चाल v हो तो वृत्तीय गति के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल सूर्य तथा ग्रह के बीच गुरुत्वाकर्षण बल से प्राप्त होता है।

$$\therefore \quad \frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

परन्तु आवर्तकाल $\quad T = \frac{2\pi r}{v}$

v का मान रखने पर

$$T = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM}} \Rightarrow T \propto r^{3/2} \Rightarrow T^2 \propto r^3$$

यही केप्लर का तृतीय नियम है।

महत्वपूर्ण तथ्य

(i) केन्द्रीय बल, किसी पिण्ड पर आरोपित वह बल है जिसकी दिशा सदैव किसी निश्चित बिन्दु की ओर अथवा उस निश्चित बिन्दु से दूर होती है तथा बल का परिमाण, बल के क्रिया बिन्दु की उस निश्चित बिन्दु से दूरी पर निर्भर करता है। केन्द्रीय बल का कारण दो पिण्डों के मध्य होने वाली अन्योन्य क्रिया ही है। अतः केन्द्रीय बल, दो पिण्डों के मध्य ही कार्यरत होता है। इस बल की दिशा दोनों पिण्डों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश होती है। अतः परिभाषा के अनुसार केन्द्रीय बल वह बल है जो केवल ध्रुवीय निर्देशांक r, पर निर्भर करता है अर्थात्

$$\vec{F} = \pm f(r)\hat{r}$$

केन्द्रीय बल द्वारा पिण्ड पर आरोपित बल–आघूर्ण शून्य होता है। अतः केन्द्रीय बल के अन्तर्गत पिण्ड का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है।

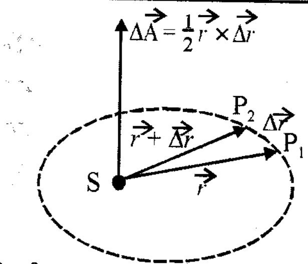
(ii) $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f(r)\,\hat{r} = \vec{r} \times f(r)\frac{\vec{r}}{r} = \frac{f(r)}{r}\vec{r} \times \vec{r} = 0$

(iii) केन्द्रीय बल के अन्तर्गत गति करने वाले पिण्ड की क्षेत्रफलीय चाल नियत रहती है।

माना पिण्ड को कक्षा के बिन्दु A से बिन्दु B तक चलने में लगा समय Δt है। इस समयान्तराल Δt में त्रिज्या सदिश द्वारा तय किया गया सदिश क्षेत्रफल $\Delta\vec{A}$ है। तब

$$\Delta\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \Delta\vec{r}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$



$\Delta t \to 0$ की सीमा प्रयुक्त करने पर

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{m\vec{v}}{m}$$

$$= \frac{1}{2m}\vec{r} \times \vec{p} = \frac{1}{2m}\vec{L}$$

केन्द्रीय बल के लिए $\vec{L}$ नियत है, अतः $\frac{d\vec{A}}{dt}$ भी नियत रहेगा। यही कैप्लर का द्वितीय नियम है।

उदा.27. **पृथ्वी की कक्षा की त्रिज्या 1.5×10^8 km तथा मंगल ग्रह की कक्षा की त्रिज्या 2.5×10^{11} m है। मंगल, सूर्य का एक चक्कर कितने वर्ष में पूरा करेगा?(पुस्तक का उदाहरण 6.12)**

हल- दिया गया है: $R_e = 1.5 \times 10^8 \text{km} = 1.5 \times 10^{11}$ m,

$R_m = 2.5 \times 10^{11}$m, $T_e = 1$ वर्ष, $T_m = ?$

कैप्लर के तृतीय नियम से

$$T^2 \propto R^3$$

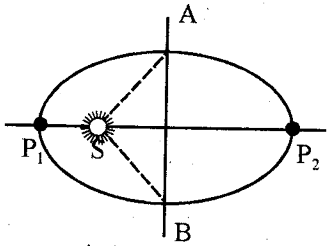
$$\Rightarrow \quad \frac{T_m^2}{T_e^2} = \frac{R_m^3}{R_e^3} \Rightarrow \left(\frac{T_m}{T_e}\right)^2 = \left(\frac{R_m}{R_e}\right)^3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_m}{T_e} = \left(\frac{R_m}{R_e}\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \quad T_m = T_e\left(\frac{R_m}{R_e}\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \quad T_m = 1\left(\frac{2.5 \times 10^{11}}{1.5 \times 10^{11}}\right)^{3/2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{3/2} = 2.15 \text{ वर्ष}$$

उदा.28. **मान लीजिए किसी ग्रह की उपसौर P_1 पर (चित्र) चाल v_1 है तथा सूर्य व ग्रह की दूरी $SP_1 = r_1$ है। $\{r_1, v_1\}$ तथा अपसौर पर इन राशियों के तद्नुरूपी मान $\{r_2, v_2\}$ में संबंध स्थापित कीजिए। क्या ग्रह AP_2B तथा BP_1A पथ तय करने में समान समय लेगा?**



चित्र 6.24

हल– बिन्दु P_1 पर कोणीय संवेग का परिमाण

$$L_1 = mv_1r_1$$

इसी प्रकार बिन्दु P_2 पर कोणीय संवेग का परिमाण

$$L_2 = mv_2r_2$$

$\because$ सूर्य द्वारा ग्रह पर आरोपित बल एक केन्द्रीय बल है। अतः इस केन्द्रीय बल के अन्तर्गत गति करते हुए ग्रह का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है अर्थात्

$$L_1 = L_2$$

$$\Rightarrow \quad mv_1r_1 = mv_2r_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

$\because r_2 > r_1 \quad \therefore v_1 > v_2$

$\because$ चित्र की ज्यामिती से दीर्घवृत्त तथा त्रिज्या सदिशों SA तथा SB द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल SAP_1B की तुलना में अधिक है। कैप्लर के क्षेत्रफलों के नियमानुसार किसी ग्रह के कक्षीय तल में ग्रह तथा सूर्य को मिलाने वाली रेखा समान समयान्तरालों में समान क्षेत्रफल तय करती है। अतः ग्रह BP_1A पथ को तय करने की अपेक्षा AP_2B पथ को तय करने में अधिक समय लेगा।

6.10 उपग्रह (Satellite)

ग्रह (Planets)–सूर्य के चारों ओर अपनी–अपनी कक्षाओं में चक्कर लगाने वाले आकाशीय पिण्डों को ग्रह कहते हैं। ग्रह निम्न हैं–बुध, शुक्र, पृथ्वी, मंगल, बृहस्पति, शनि, यूरेनस, नेपच्यून तथा प्लूटो।

उपग्रह (Satellite)–ग्रह के चारों ओर इसके गुरुत्वीय क्षेत्र में चक्कर लगाने वाले आकाशीय पिण्डों को उपग्रह कहते हैं। पृथ्वी के परितः परिक्रमण करने वाले पिण्ड भू–उपग्रह कहलाते हैं। इन उपग्रहों की पृथ्वी के परितः कक्षाएँ वृत्ताकार अथवा दीर्घवृत्ताकार होती है। भू–उपग्रहों की गतियाँ, ग्रहों की सूर्य के परितः गतियों के लगभग समान होती है। अतः ग्रहों की गति से सम्बन्धित कैप्लर के नियम इन पर समान रूप से लागू होते हैं।

उपग्रह के प्रकार–

(1) प्राकृतिक उपग्रह (2) कृत्रिम उपग्रह

1. **प्राकृतिक उपग्रह** (Natural Satellite)–ग्रहों के चारों ओर चक्कर लगाने वाले प्राकृतिक आकाशीय पिण्डों को प्राकृतिक उपग्रह कहते हैं। जैसे–चन्द्रमा, पृथ्वी का प्राकृतिक उपग्रह है। चन्द्रमा की पृथ्वी के परितः वृत्ताकार कक्षा होती है। इसका परिक्रमण काल 27.3 दिन होता है।
2. **कृत्रिम उपग्रह** (Artificial Satellite)–मानव द्वारा निर्मित वे पिण्ड जो पृथ्वी के चारों ओर नियत कक्षा में परिक्रमा करते हैं, कृत्रिम उपग्रह कहलाते हैं।

6.10.1 कक्षीय वेग (Orbital Velocity)

किसी उपग्रह को पृथ्वी की कक्षा में स्थापित करने के लिये उसको दिया जाने वाला स्पर्शरेखीय वेग कक्षीय वेग v_0 कहलाता है। जब कोई उपग्रह, ग्रह के चारों ओर वृत्तीय पथ पर गति करता है तब उस पर अभिकेन्द्रीय बल कार्य करता है। यह बल ग्रह द्वारा उपग्रह पर लगाया गया गुरुत्वाकर्षण बल होता है।

माना कि m द्रव्यमान का एक उपग्रह, ग्रह के चारों ओर r त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में कक्षीय वेग v_0 से परिक्रमण कर रहा है। उपग्रह पर अभिकेन्द्रीय बल $\frac{mv_0^2}{r}$ है।

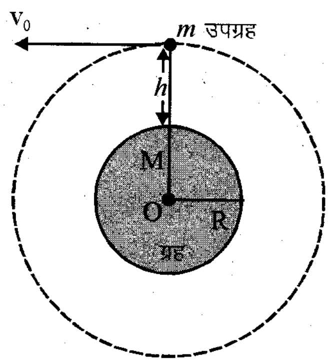
माना कि ग्रह का द्रव्यमान M है। तब ग्रह द्वारा उपग्रह पर आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल $\frac{GMm}{r^2}$ होगा। क्योंकि गुरुत्वाकर्षण बल ही अभिकेन्द्रीय बल है, अतः

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv_0^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad v_0^2 = \frac{GM}{r}$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad ...(1)$$

माना कि ग्रह की त्रिज्या R तथा ग्रह से उपग्रह की ऊँचाई h है। तब उपग्रह की ग्रह के केन्द्र से दूरी



चित्र 6.25

$$r = R + h$$

$\therefore$ समी. (1) से
$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} \quad ...(2)$$

यदि ग्रह पर गुरुत्वीय त्वरण g है तब

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\Rightarrow \quad GM = gR^2$$

$\therefore$ समी. (2) से
$$v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = R\sqrt{\frac{g}{R+h}} \quad ...(3)$$

इस प्रकार उपग्रह का कक्षीय वेग उसकी ग्रह से ऊँचाई पर निर्भर करता है। h के बढ़ने पर कक्षीय वेग (v_0) घटता है।

यदि $h << R$ हो तब $R + h \approx R$

$$v_0 = R\sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$v_0 = \sqrt{gR}$$

पलायन वेग तथा कक्षीय वेग में सम्बन्ध–पृथ्वी तल के समीप परिक्रमण करते हुए पिण्ड का कक्षीय वेग

$$v_0 = \sqrt{gR}$$

पृथ्वी तल से पलायन वेग का मान

$$v_0 = \sqrt{2gR}$$

$$\therefore \quad \frac{v_e}{v_0} = \sqrt{2} \text{ या}$$

$$v_e = \sqrt{2}v_0$$

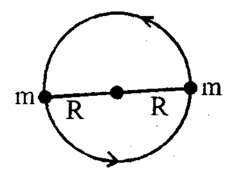
इस प्रकार पिण्ड की चाल बढ़ाकर $\sqrt{2}$ गुनी कर दी जाये अर्थात् 41% बढ़ा दी जाये तब पिण्ड पृथ्वी तल से पलायन कर जायेगा।

उदा.29. m द्रव्यमान के दो कण एक दूसरे के गुरुत्वाकर्षण प्रभाव में R त्रिज्या के वृत्तीय पथ में घूम रहे हैं। प्रत्येक कण की चाल क्या होगी? (पुस्तक का उदाहरण 6.7)

हल– यदि दो कण एक दूसरे के गुरुत्वाकर्षण प्रभाव में वृत्तीय पथ में घूम रहे है तब वृत्तीय गति के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल, कणों के मध्य गुरुत्वाकर्षण बल से प्राप्त होगा तथा कणों के मध्य की दूरी वृत्ताकार पथ के व्यास के बराबर होगी।

$\therefore$ अभिकेन्द्रीय बल

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{Gmm}{(2R)^2}$$



चित्र 6.26

यहाँ v प्रत्येक कण की चाल है।

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{Gm}{4R}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Gm}{R}}$$

उदा.30. पृथ्वी के निकट परिक्रमा करने वाले उपग्रह के कक्षीय वेग की गणना कीजिए। पृथ्वी की त्रिज्या = 6.4×10^6 मी. तथा गुरुत्वीय त्वरण g = 10 मी./से.^{2}

हल– पृथ्वी के निकट उपग्रह का कक्षीय वेग

$$v_0 = \sqrt{gR} = \sqrt{6.4 \times 10^6 \times 10}$$

$$= \sqrt{64 \times 10^6} = 8 \times 10^3 \text{ मी./से.} = 8 \text{ किमी./सेकण्ड}$$

यदि g का मान 9.8 मी./से.^{2} रखा जाये तब कक्षीय वेग v_0 = 7.92 किमी./से. प्राप्त होता है।

उदा.31. एक भू-उपग्रह पृथ्वी तल से 3600 किमी. की ऊँचाई पर वृत्तीय कक्षा में घूम रहा है। उपग्रह के कक्षीय वेग की गणना कीजिए। पृथ्वी की त्रिज्या = 6400 किमी., पृथ्वी का द्रव्यमान = 6×10^{24} किग्रा. तथा G = 6.67×10^{-11} न्यूटन-मी.^{2}/किग्रा.^{2}

हल– उपग्रह का कक्षीय वेग, $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

कक्ष की त्रिज्या $r = R + h = 6400 + 3600$

$= 10000$ किमी.

$= 10000 \times 10^3$ मी.

$= 10^7$ मी.

पृथ्वी का द्रव्यमान $M = 6 \times 10^{24}$ किग्रा.

$\therefore$ कक्षीय वेग $v_0 = \sqrt{\left(\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{10^7}\right)}$

$= 6.33 \times 10^3$ मी./से.
$= 6.33$ किमी./से.

6.10.2 परिक्रमण काल (Period of Revolution)

किसी उपग्रह को पृथ्वी का एक चक्कर लगाने में जितना समय लगता है उसे उसका परिक्रमण काल कहते हैं।

माना कि उपग्रह के एक परिक्रमण का समय T है, तब

$$T = \frac{\text{उपग्रह की कक्षा की परिधि}}{\text{उपग्रह का कक्षीय वेग}}$$

$$= \frac{2\pi r}{v_0} \qquad \because v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{2\pi r}{\sqrt{GM}}\sqrt{r}$$

$$T = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM}} \qquad ...(1)$$

$$\because \quad r = R + h \quad \text{तथा } GM = gR^2$$

$$\therefore \quad T = \frac{2\pi(R+h)^{3/2}}{\sqrt{gR^2}} \qquad ...(2)$$

यदि $h << R$ हो तब $h + R \approx R$

$$\therefore \quad T = \frac{2\pi R^{3/2}}{R\sqrt{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad ...(3)$$

इस प्रकार उपग्रह का परिक्रमण काल भी उसकी ग्रह से ऊँचाई पर निर्भर करता है।

उदा.32. पृथ्वी के निकट परिक्रमा करने वाले उपग्रह के परिक्रमण काल की गणना कीजिए।

हल– पृथ्वी के निकट उपग्रह का परिक्रमण काल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$\because \quad R = 6400 \times 10^3 \text{ मी.}$$

$$g = 9.8 \text{ मी./से.}^2$$

$$\therefore \quad T = 2 \times 3.14\sqrt{\frac{6400 \times 10^3}{9.8}} = 5075 \text{ सेकण्ड}$$

$= 84.6$ मिनट या लगभग 1.4 घंटे

उदा.33. यदि किसी कृत्रिम उपग्रह का पृथ्वी के ठीक ऊपर चक्कर लगाने का परिक्रमण काल T तथा पृथ्वी का घनत्व ρ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$। इसकी सहायता से दर्शाइये कि $T\sqrt{\rho}$ एक सार्वत्रिक नियतांक है। इस नियतांक का मान भी Kkr dlft , A $G = 6.67 \times 10^{-11}$ न्यूटन-मी.^{2}/किग्रा.^{2}

हल– उपग्रह का परिक्रमण काल

$$T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{r^3}{GM}\right)}$$

पृथ्वी के ठीक ऊपर ($h = 0$) उपग्रह की कक्षा की त्रिज्या

$$r = R + h \approx R \qquad \because h = \text{नगण्य}$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{R^3}{GM}\right)}$$

पृथ्वी का द्रव्यमान

$$M = \text{पृथ्वी का आयतन} \times \text{घनत्व}$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^2\rho$$

$$T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{R^3}{G.\frac{4}{3}\pi R^3\rho}\right)} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{3}{4\pi G\rho}\right)}$$

$$\text{या} \quad T = \sqrt{\left(\frac{3\pi}{G\rho}\right)} \qquad ...(1)$$

$$\text{इससे} \quad T\sqrt{\rho} = \left(\frac{3\pi}{G}\right)^{1/2} \qquad ...(2)$$

$\because$ π तथा G सार्वत्रिक नियतांक है अतः $\left(\frac{3\pi}{G}\right)^{1/2}$ = सार्वत्रिक नियतांक

$$\therefore \quad T\sqrt{\rho} = \left(\frac{3\pi}{G}\right)^{1/2} = \text{सार्वत्रिक नियतांक}$$

$$= \left(\frac{3 \times 3.14}{6.67 \times 10^{-11}}\right)^{1/2}$$

$= 3.75 \times 10^5$ किग्रा.$^{1/2}$ मी.$^{3/2}$ सेकण्ड

उदा.34. मंगल ग्रह के फोबोस तथा डेल्मोस नामक दो चन्द्रमा हैं। (i) यदि फोबोस का आवर्तकाल 7 घंटे 39 मिनट तथा कक्षीय त्रिज्या 9.4×10^3 km है तो मंगल का द्रव्यमान परिकलित कीजिए। (ii) यह मानते हुए कि पृथ्वी तथा मंगल सूर्य के परितः वृत्तीय कक्षाओं के परिक्रमण कर रहे हैं तथा मंगल की कक्षा की त्रिज्या पृथ्वी की कक्षा की त्रिज्या की 1.52 गुनी है तो मंगल-वर्ष की अवधि दिनों में क्या है?

हल– दिया गया है–

$T = 7$ घंटे 39 मिनट $= (420 + 39)$ मिनट
$= 459$ मिनट $= 459 \times 60$ सेकण्ड
$R = 9.4 \times 10^3$ किमी. $= 9.4 \times 10^6$ मी.

$$\text{(i)} \quad \because \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

मंगल ग्रह के ठीक ऊपर ($h \approx 0$) फोबोस चन्द्रमा की कक्षीय त्रिज्या $r = R + h \approx R \quad \because h = \text{नगण्य}$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$$\Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2R^3}{GM}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{4\pi^2R^3}{GT^2}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{4\times(3.14)^2\times(9.4\times10^6)^3}{6.67\times10^{-11}\times(459\times60)^2}$$

$$= \frac{4\times(3.14)^2\times(9.4)^3\times10^{18}}{6.67\times10^{-11}\times(459\times60)^2}$$

$= 6.48 \times 10^{23}$ किग्रा.

(ii) $\because \quad T^2 = \frac{4\pi^2R^3}{GM}$

$\Rightarrow \quad T^2 \propto R^3$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{T_M}{T_E}\right)^2 = \left(\frac{R_{MS}}{R_{ES}}\right)^3$$

जहाँ R_{MS} तथा R_{ES} क्रमशः मंगल–सूर्य तथा पृथ्वी–सूर्य के मध्य की दूरियाँ हैं।

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{T_M}{365}\right)^2 = (1.52)^3$$

$$\left[\because \text{ प्रश्नानुसार } \frac{R_{MS}}{R_{ES}} = 1.52\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{T_M}{365}\right)^2 = 3.51 \Rightarrow \frac{T_M}{365} = 1.87$$

$\Rightarrow \quad T_M = 684$ दिन

उदा.35. पृथ्वी को तोलना–आपको निम्नलिखित आंकड़े दिए गए हैं-$g = 9.81\ ms^{-2}$, $R_E = 6.37 \times 10^6 m$. पृथ्वी से चन्द्रमा की दूरी $R = 3.84 \times 10^8$ m पृथ्वी के परितः चन्द्रमा के परिक्रमण का आवर्तकाल = 27.3 दिन। दो भिन्न विधियों द्वारा पृथ्वी का द्रव्यमान प्राप्त कीजिए।

हल– **(i) प्रथम विधि**

$$\because \quad g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{gR^2}{G} = \frac{9.81\times(6.37\times10^6)^2}{6.67\times10^{-11}}$$

$= 5.97 \times 10^{24}$ किग्रा.

(ii) द्वितीय विधि–

$$\because \quad T^2 = \frac{4\pi^2R^3}{GM}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{4\pi^2R^3}{GT^2}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{4\times(3.14)^2\times(3.84\times10^8)^3}{6.67\times10^{-11}\times(27.3\times24\times60\times60)^2}$$

$= 6.02 \times 10^{24}$ किग्रा.

उदा.36. समीकरण $T^2 = K(R+h)^3$ जहां $K = \frac{4\pi^2}{GM}$ में स्थिरांक K को दिनों तथा किलोमीटरों में व्यक्त कीजिए। $K = 10^{-13}$ सेकण्ड^2 मी.$^{-3}$ है। चन्द्रमा पृथ्वी से 3.84×10^5 किमी. दूर है। चन्द्रमा के परिक्रमण के आवर्तकाल को दिनों में प्राप्त कीजिए।

हल– $\because \quad K = 10^{-13}$ सेकण्ड^2 मी.$^{-3}$

$$K = 10^{-13} \times \frac{1}{(24\times60\times60)^2}\frac{1}{(1/1000)^3}$$

$K = 1.33 \times 10^{-14}$ दिन^2 किमी.$^{-3}$

$\because \quad T^2 = K(R+h)^3$

$\Rightarrow \quad T^2 = (1.33 \times 10^{-14})(3.84 \times 10^5)^3$

$T = 27.3$ दिन

उदा.37. पृथ्वी की सतह से 1630 किमी. की दूरी पर एक कृत्रिम उपग्रह उसके चारों ओर वृत्तीय कक्षा में घूम रहा है। यदि पृथ्वी की त्रिज्या 6370 किमी., द्रव्यमान 6×10^{24} किग्रा. तथा $G = 6.66 \times 10^{-11}$ न्यूटन– मी.^{2}/किग्रा.^{2} हो तो उपग्रह परिक्रमण काल ज्ञात कीजिए।

हल– यहां पर R = 6370 किमी. तथा h = 1630 किमी.

अतः उपग्रह की कक्षा की त्रिज्या

$r = R + h = 6370 + 1630$

$= 8000$ किमी. $= 8 \times 10^6$ मीटर

पृथ्वी का द्रव्यमान

$M = 6 \times 10^{24}$ किग्रा.

तथा $\quad G = 6.66 \times 10^{-11}$ न्यूटन–मी.^{2}/किग्रा.^{2}

अतः उपग्रह की कक्षीय चाल

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{6.66\times10^{-11}\times6\times10^{24}}{8\times10^6}}$$

$= 7.07 \times 10^3$ मी./से.

$= 7.07$ किमी./से.

परिक्रमण काल

$$T = \frac{2\pi r}{v_0}$$

$$= \frac{2\times3.14\times8\times10^6}{7.07\times10^3}$$

$= 7106$ सेकण्ड $= 1.97$ घण्टे

उदा.38. एक उपग्रह पृथ्वी सतह से 500 km की ऊँचाई पर पृथ्वी के चक्कर काट रहा है। गणना कीजिए:

(i) उपग्रह की चाल (ii) आवर्तकाल

दिया गया है: पृथ्वी की त्रिज्या = 6400 km व पृथ्वी का द्रव्यमान = 6×10^{24} kg. **(पुस्तक का उदाहरण 6.9)**

हल– (i) उपग्रह की चाल $v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$

$$v = \sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}\times6\times10^{24}}{6400\times10^3\times500\times10^3}} = 7.6\times10^3\ m/s$$

(ii) $\because$ आवर्तकाल $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R+h)}{v}$

$$T = \frac{2 \times 3.14\,(6400 \times 10^3 + 500 \times 10^3)}{7.6 \times 10^3}$$

$T = 5.7 \times 10^3$ सेकण्ड

6.10.3 उपग्रह की कुल ऊर्जा (Energy of Satellite)

ग्रह के चारों ओर परिक्रमण करते उपग्रह में स्थितिज तथा गतिज दोनों प्रकार की ऊर्जाऐं होती हैं। स्थितिज ऊर्जा उपग्रह की ग्रह के गुरुत्वीय क्षेत्र में स्थिति के कारण होती है जबकि गतिज ऊर्जा उपग्रह के गतिमान होने के कारण होती है।

माना कि ग्रह का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है।

यदि उपग्रह का द्रव्यमान m है तब उसकी गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U = -\frac{GMm}{r} \qquad ...(1)$$

यदि उपग्रह का कक्षीय वेग v_0 है तब उसकी गतिज ऊर्जा

$$K = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \because v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\therefore \qquad K = \frac{1}{2}m.\frac{GM}{r} = \frac{GMm}{2r} \qquad ...(2)$$

गतिज ऊर्जा K धनात्मक है जबकि स्थितिज ऊर्जा U ऋणात्मक है तथा परिमाण में $K = \frac{U}{2} \Rightarrow U = 2K$

इस प्रकार स्थितिज ऊर्जा का ऋणात्मक तथा परिमाण में धनात्मक मान गतिज ऊर्जा का दुगुना होता है।

उपग्रह की कुल ऊर्जा

$$E = U + K$$

$$= -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{2r}$$

$$= \frac{GMm}{r}\left(-1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

$$\Rightarrow \qquad E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r} \qquad ...(3)$$

उपग्रह की कुल ऊर्जा ऋणात्मक है इससे तात्पर्य यह है कि उपग्रह, ग्रह से बद्ध (Bound) है।

जब किसी उपग्रह की कक्षा दीर्घवृत्तीय होती है तो उसकी K तथा U दोनों ही पथ के प्रत्येक बिन्दु पर भिन्न होती है जबकि उपग्रह की कुल ऊर्जा नियत व ऋणात्मक होती है। उपग्रह सदैव परिमित दूरियों पर परिक्रमण करते हैं। अतः इनकी ऊर्जाएँ धनात्मक या शून्य नहीं हो सकती है।

6.10.4 उपग्रह की बन्धन ऊर्जा (Binding Energy of satellite)

ग्रह के चारों ओर परिक्रमण करते उपग्रह को अपनी कक्षा छोड़कर पलायन कराने के लिये आवश्यक न्यूनतम ऊर्जा को बन्धन ऊर्जा कहते हैं।

$\because$ उपग्रह की कुल ऊर्जा

$$E = -\frac{GMm}{2r}$$

अतः पलायन करने के लिए उपग्रह को $+\frac{GMm}{2r}$ ऊर्जा देनी होगी ताकि कुल ऊर्जा E शून्य हो जाये। अतः उपग्रह की बंधन ऊर्जा

$$E_B = +\frac{GMm}{2r} \qquad ...(4)$$

उदा.39. 200 किग्रा. द्रव्यमान का एक कृत्रिम उपग्रह 6670 किमी. औसत त्रिज्या की कक्षा में पृथ्वी की परिक्रमा कर रहा है। उपग्रह की कक्षीय गतिज ऊर्जा, गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा तथा कक्षा की सम्पूर्ण ऊर्जा की गणना कीजिए। पृथ्वी का द्रव्यमान $= 6.0 \times 10^{24}$ किग्रा., $G = 6.67 \times 10^{-11}$ न्यूटन-मी.^{2}/किग्रा.^{2}

हल— प्रश्नानुसार पृथ्वी का द्रव्यमान,

$M = 6.0 \times 10^{24}$ किग्रा.

कक्षा की त्रिज्या $r = 6670$ किमी. $= 6.670 \times 10^6$ मी.

उपग्रह का द्रव्यमान, $m = 200$ किग्रा.

उपग्रह की गतिज ऊर्जा,

$$K = \frac{GMm}{2r}$$

$$= \frac{(6.67 \times 10^{-11})(6.0 \times 10^{24}) \times (200)}{2 \times 6.67 \times 10^6}$$

$= 6.0 \times 10^9$ जूल

$$\text{स्थितिज ऊर्जा} = -\frac{GMm}{r}$$

$$= \frac{6.67 \times 10^{-11} \times (6.0 \times 10^{24}) \times (200)}{6.67 \times 10^6}$$

$= -12.0 \times 10^9$ जूल

सम्पूर्ण ऊर्जा E = गतिज ऊर्जा (K) + स्थितिज ऊर्जा (U)

$= 6.0 \times 10^9 + (-12.0 \times 10^9)$

$= -6.0 \times 10^9$ जूल

उदा.40. 400 kg द्रव्यमान का कोई उपग्रह पृथ्वी के परित $2R_E$ त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में परिक्रमण कर रहा है। इसे $4R_E$ की वृत्तीय कक्षा में स्थानांतरित करने के लिए आवश्यक ऊर्जा परिकलित कीजिए। इसकी गतिज तथा स्थितिज ऊर्जा में कितने परिवर्तन होंगे?

हल— प्रारंभ में उपग्रह की कुल ऊर्जा

$$E_i = -\frac{GMm}{r_i} = -\frac{GMm}{4R}$$

अंत में उपग्रह की कुल ऊर्जा

$$E_f = -\frac{GMm}{r_f} = -\frac{GMm}{8R}$$

अतः कुल ऊर्जा में परिवर्तन $\Delta E = E_f - E_i$

$$\Rightarrow \qquad \Delta E = -\frac{GMm}{8R} - \left(-\frac{GMm}{4R}\right)$$

$$= \frac{GMm}{8R} = \frac{gR^2m}{8R} \qquad \left[\because g = \frac{GM}{R^2}\right]$$

$$= \frac{mgR}{8}$$

$$= \frac{400 \times 9.81 \times 6.37 \times 10^6}{8}$$

$= 3.13 \times 10^9$ जूल

गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

$\Delta K = -\Delta E = -3.13 \times 10^9$ जूल

स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन

$\Delta U = 2\Delta E = 6.26 \times 10^9$ जूल

उदा.41. एक उपग्रह पृथ्वी सतह से 400 km की ऊँचाई पर चक्कर काट रहा है। इसे कितनी ऊर्जा प्रदान की जाये कि उपग्रह पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण प्रभाव से मुक्त हो जाये? उपग्रह का द्रव्यमान = 200 kg, पृथ्वी का द्रव्यमान = 6×10^{24} kg एवं $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m²/kg² पृथ्वी की त्रिज्या $R = 6.4 \times 10^6$ m (पुस्तक का उदाहरण 6.13)

हल- दिया गया है: $h = 400$ km $= 400 \times 10^3$ m $= 4 \times 10^5$ m, $m = 200$ kg, $M = 6 \times 10^{24}$ kg, $R = 6.4 \times 10^6$ m

पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण प्रभाव से मुक्त होने के लिए

आवश्यक ऊर्जा = बंधन ऊर्जा $E = \frac{GMm}{2r}$

$$E = \frac{GMm}{2(R+h)}$$

$$E = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24} \times 200}{2(6.4 \times 10^6 + 4 \times 10^5)}$$

$E = 5.89 \times 10^9$ जूल

6.11 भारहीनता (Weightlessness)

किसी वस्तु का भार वह आकर्षण बल है, जिससे वह वस्तु पृथ्वी के केन्द्र की ओर आकर्षित होती है। जब वस्तु पृथ्वी के सापेक्ष स्थिर होती है तब वस्तु का भार गुरुत्व के तुल्य होता है। वस्तु के इस भार को वास्तविक भार कहते हैं। किसी वस्तु के भार को मापने का तथ्य यह हैं कि जब वस्तु किसी तौलने वाली मशीन पर रखी जाती है तब मशीन भार का विरोध करती है। तौलने वाली मशीन का वस्तु पर प्रतिक्रिया बल वस्तु के भार की माप को व्यक्त करता है।

भारहीनता का अनुभव निम्न परिस्थितियों में किया जा सकता है–

(i) जब वस्तु गुरुत्व के अन्तर्गत मुक्त रूप से गिरे।

(ii) जब कोई उपग्रह पृथ्वी के परितः अपनी कक्षा में परिक्रमण कर रहा हो।

(iii) जब वस्तु बाह्य अंतरिक्ष में शून्य बिन्दु पर हो अर्थात् परिणामी गुरुत्वीय बल शून्य हो।

उपग्रह में भारहीनता (Weightlessness in a Satellite)

भारहीनता का अनुभव कृत्रिम उपग्रह में बैठे अन्तरिक्ष यात्री द्वारा किया जाता है।

माना कि m द्रव्यमान का कृत्रिम उपग्रह v_0 वेग से पृथ्वी के चारों ओर r त्रिज्या की कक्षा में परिक्रमण कर रहा है। जिसके लिये आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल गुरुत्वाकर्षण बल से प्राप्त होता है–

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv_0^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{GM}{r^2} = \frac{v_0^2}{r} \quad ...(1)$$

कक्षीय वेग $\quad v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

यदि उपग्रह में m' द्रव्यमान का अन्तरिक्ष यात्री बैठा हो तो उस पर कार्यरत बल निम्न होंगे–(i) गुरुत्वीय बल तथा (ii) उपग्रह के तल के विपरीत दिशा में प्रतिक्रिया बल R;

जिससे यात्री पर परिणामी बल $\left(\frac{GMm'}{r^2} - R\right)$ कक्षा के केन्द्र की ओर होगा तथा यह बल ही अभिकेन्द्रीय बल होता है।

$$\therefore \quad \frac{GMm'}{r^2} - R = \frac{m'v_0^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{GM}{r^2} - \frac{R}{m'} = \frac{v_0^2}{r}$$

$$\because \quad v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\therefore \quad \frac{GM}{r^2} - \frac{R}{m'} = \frac{GM}{r^2}$$

$$\therefore \quad R = 0$$

इस प्रकार अन्तरिक्ष यात्री का प्रतिक्रिया बल शून्य होने से वह भारहीनता की स्थिति में होगा। यदि वह यात्री किसी स्प्रिंग तुला पर खड़ा हो तो तुला का पाठ्यांक शून्य प्राप्त होगा।

यही कारण है कि (i) यदि किसी वस्तु को कृत्रिम उपग्रह के भीतर डोरी से लटका दिया जाये तो डोरी में तनाव शून्य होगा। (ii) कृत्रिम उपग्रह के भीतर अन्तरिक्ष यात्री गिलास से पानी नहीं पी सकता क्योंकि गिलास को टेढ़ा करते ही गिलास का पानी भारहीन होने के कारण बूंदों के रूप में तैरने लगता है। इस कारण अन्तरिक्ष यात्रियों का भोजन ट्यूब में भरे पेस्ट के रूप में होता है जिसे मुंह में रखकर दबाने पर यात्री भोजन को निगल सकता है।

यहाँ ध्यान देने योग्य तथ्य यह है कि कोई भी वस्तु कृत्रिम उपग्रह में भारहीनता महसूस करती है जबकि प्राकृतिक उपग्रह में ऐसा नहीं होता है। इसका कारण है कि प्राकृतिक उपग्रह का द्रव्यमान अधिक होने के कारण वह वस्तु पर अपना गुरुत्वाकर्षण बल लगाता है। कृत्रिम उपग्रह का द्रव्यमान कम होने के कारण वह वस्तु पर नगण्य गुरुत्वाकर्षण बल लगाता है। जिससे वस्तु कृत्रिम उपग्रह में भारहीनता महससू करती है।

उदाहरण–चन्द्रमा पृथ्वी का प्राकृतिक उपग्रह है जिस पर व्यक्ति भारहीनता अनुभव नहीं करता है। चन्द्रमा पर व्यक्ति पृथ्वी की तुलना में 1/6 भार महसूस करता है।

6.12 प्रक्षेपण वेग (Projection Velocity)

जब किसी पिण्ड को पृथ्वी तल से ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है तब उसके द्वारा पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र के विरुद्ध कार्य किया जाता है जिससे उसकी गतिज ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा में

परिवर्तित होने लगती है।

यदि m द्रव्यमान के पिण्ड को पृथ्वी तल से v_p वेग से फेंकने पर वह अधिकतम ऊँचाई h तक जाता है तब पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि

$$\Delta U = U_2 - U_1$$
$$= -\frac{GMm}{R+h} - \left(-\frac{GMm}{R}\right)$$
$$= \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R+h}$$
$$= GMm\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right]$$
$$= GMm\left[\frac{R+h-R}{R(R+h)}\right]$$
$$= \frac{GMmh}{R(R+h)}$$

परन्तु $GM = gR^2$

$$\therefore \quad \Delta U = \frac{gR^2mh}{R(R+h)}$$
$$= \frac{gR^2mh}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)}$$
$$\Delta U = \frac{mgh}{1+\frac{h}{R}} \qquad ...(1)$$

ऊर्जा संरक्षण नियम से

$$\frac{1}{2}mv_p^2 = \frac{mgh}{1+\frac{h}{R}} \qquad \text{[समी.(1) से]}$$
$$\Rightarrow \quad v_p^2 = \frac{2gh}{1+\frac{h}{R}}$$
$$v_p = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{h}{R}}} \qquad ...(2)$$

यहाँ v_p पिण्ड का प्रक्षेपण वेग कहलाता है।
समी. (2) से पिण्ड द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई का मान निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है–

$$1+\frac{h}{R} = \frac{2gh}{v_p^2}$$
$$\Rightarrow \quad h\left(\frac{2g}{v_p^2} - \frac{1}{R}\right) = 1$$
$$h = \frac{v_p^2 R}{2gR - v_p^2}$$

यदि v_p^2 का मान $2gR$ की तुलना में नगण्य हो तो

$$h = \frac{v_p^2 R}{2gR} = \frac{v_p^2}{2g} \qquad ...(4)$$

उदा.42. पृथ्वी तल से किसी पिण्ड को पृथ्वी की त्रिज्या की n गुनी ऊँचाई तक प्रक्षेपित करने के लिए आवश्यक प्रक्षेपण वेग की गणना करो।

हल– पृथ्वी तल पर पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा

$$U_1 = -\frac{GMm}{R}$$

पृथ्वी तल से $h = nR$ ऊँचाई पर स्थितिज ऊर्जा

$$U_2 = -\frac{GMm}{R+nR}$$

स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि

$$\Delta U = U_2 - U_1$$
$$\Delta U = -\frac{GMm}{R+nR} - \left(-\frac{GMm}{R}\right)$$
$$= \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R+nR}$$
$$= GMm\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+nR}\right]$$
$$= GMm\left[\frac{R+nR-R}{R(R+nR)}\right]$$
$$= \frac{GMmnR}{R(R+nR)}$$

$$\because \quad GM = gR^2$$
$$\therefore \quad \Delta U = \frac{gR^2mnR}{R^2(1+n)} \qquad ...(1)$$

ऊर्जा संरक्षण नियम से

$$\frac{1}{2}mv_p^2 = mgR\left(\frac{n}{1+n}\right)$$
$$v_p^2 = 2gR\left(\frac{n}{1+n}\right)$$
$$v_p = \sqrt{\frac{2gRn}{1+n}} \qquad ...(2)$$

उदा.43. किसी पिण्ड द्वारा अधिकतम ऊँचाई $\frac{R}{2}$ प्राप्त करने के लिए आवश्यक प्रक्षेपण वेग की गणना करो।

हल– प्रक्षेपण वेग $v_p = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{h}{R}}}$

$$\because \quad h = \frac{R}{2}$$
$$\therefore \quad v_p = \sqrt{\frac{2gR}{2\left(1+\frac{R}{2R}\right)}} = \sqrt{\frac{2gR}{3}}$$

या $g = \frac{GM}{R^2}$

$$v_p = \sqrt{\frac{2}{3}.\frac{GMR}{R^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{GM}{R}}$$

6.13 भू-स्थाई उपग्रह (Geo-Stationary Satellite)

पृथ्वी का अपने अक्ष के सापेक्ष घूर्णन का आवर्तकाल 24 घंटे होता है। यदि पृथ्वी का परिभ्रमण करने वाले उपग्रह का आवर्तकाल भी 24 घंटे हो तो ऐसा उपग्रह पृथ्वी पर खड़े प्रेक्षक को सदैव स्थिर प्रतीत होगा; इस उपग्रह को भू-स्थाई उपग्रह या तुल्यकाली उपग्रह कहते हैं। उदाहरण–इन्सैट–3A (INSAT - 3A) उपग्रह भारत का एक भू–स्थाई उपग्रह है।

भू–स्थाई उपग्रह की कक्षा वृत्तीय तथा पृथ्वी की भूमध्य रेखा के तल में होनी चाहिए। भू–स्थाई उपग्रह की कक्षा को पार्किंग कक्षा (Parking orbit) कहते हैं।

भू–स्थाई उपग्रह का उपयोग–

(i) ऊपरी वायुमण्डल के अध्ययन के लिये

(ii) मौसम के बारे में पूर्व जानकारी प्राप्त करने के लिए

(iii) उल्कापिण्डों का अध्ययन करने के लिये

(iv) रेडियो तथा दूरभाषी संवादों के संचार में

माना कि उपग्रह की ग्रह (पृथ्वी) की सतह से ऊँचाई h है। तब उपग्रह का परिक्रमण काल

$$T = \frac{2\pi(R+h)^{3/2}}{\sqrt{gR^2}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$T^2 = \frac{4\pi^2(R+h)^3}{gR^2}$$

$$\Rightarrow \quad (R+h)^3 = \frac{T^2R^2g}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \quad R+h = \left(\frac{T^2R^2g}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow \quad h = \left(\frac{T^2R^2g}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R \qquad ...(1)$$

भू-स्थाई उपग्रह के लिए–भू–स्थाई उपग्रह का आवर्तकाल T = 24 घण्टे होता है या

$$T = 24 \times 60 \times 60 = 86400 \text{ सेकण्ड}$$

पृथ्वी की त्रिज्या

$$R = 6400 \text{ किमी.}$$

$$\therefore \quad h = \left[\frac{(86400)^2 \times (6400 \times 10^3)^2 \times 9.8}{4 \times (3.14)^2}\right]^{1/3} - (6400 \times 10^3)$$

$$h = 42350 \times 10^3 - 6400 \times 10^3$$

$$h = (42350 - 6400) \times 10^3$$

$$h = 35950 \times 10^3 \text{ मी.}$$

$$= 35950 \text{ किमी.}$$

$$\approx 36,000 \text{ किमी.}$$

अर्थात् भू–स्थाई उपग्रह पृथ्वी तल से लगभग 36,000 किमी. ऊँचाई पर परिक्रमण करता है।

भू–स्थाई उपग्रह का कक्षीय वेग

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{9.8 \times (6400 \times 10^3)^2}{6.4 \times 10^6 + 35.95 \times 10^6}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{9.8 \times (6400 \times 10^3)^2}{42.35 \times 10^6}}$$

$$= 3.079 \times 10^3 \text{ मी./से.}$$

$$\approx 3.1 \text{ किमी./से.}$$

6.13.1 भू-स्थाई उपग्रह का कोणीय वेग (Angular velocity of Geo-stationary satellite)

भू–स्थाई उपग्रह का कोणीय वेग

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{24 \times 60 \times 60}$$

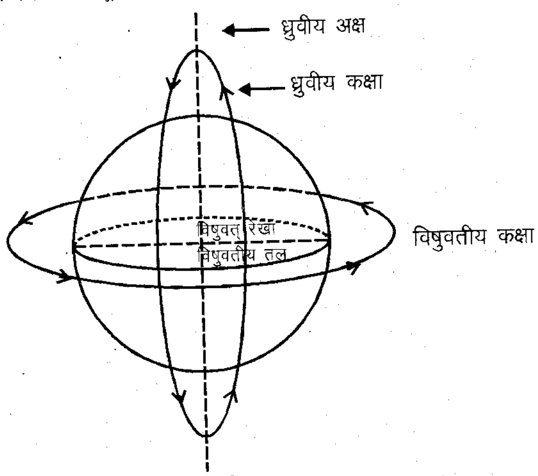
$$\omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ रेडियन/सेकण्ड}$$

केवल एक भू–स्थाई उपग्रह की सहायता से संकेतों को पृथ्वी के समस्त स्थानों पर संप्रेषित करना संभव नहीं है। इसके लिए तीन भू–स्थाई उपग्रह भू–स्थाई कक्षा में समान दूरी पर स्थापित किये जाते हैं। ये उपग्रह रेडियो ट्रांसपोंडरों (Radio transponders) से युक्त होते हैं। कोई भी भू–स्थाई उपग्रह दिल्ली के ऊपर स्थापित नहीं किया जा सकता है। इसका कारण है कि यह विषुवतीय तल में नहीं होगा।

6.14 ध्रुवीय उपग्रह (Polar Satellite)

वे मध्यम व कम ऊँचाई (h ≈ 500 से 800km) के कृत्रिम उपग्रह जिनकी कक्षा का तल पृथ्वी के उत्तरी व दक्षिणी ध्रुवों के समीप से गुजरे, ध्रुवीय उपग्रह कहलाते हैं। इन उपग्रहों की सहायता से दूरस्थ स्थानों की सूचना प्राप्त की जा सकती है। इसलिए इन्हें दूर–संवेदी उपग्रह (Remote Sensing Satellites) भी कहते हैं। ये उपग्रह पृथ्वी की घूर्णन गति के विपरीत गति करते हैं। इनकी कक्षा को पश्चगतिक कक्षा (retrograde orbit) कहते हैं। इनका परिक्रमण काल कुछ घंटे लगभग 100 मिनट होता है। ध्रुवीय उपग्रह की कक्षा की दिशा उत्तर–दक्षिण होती है, जबकि पृथ्वी अपने अक्ष पर पश्चिम से पूर्व की ओर घूर्णन करती है। इसके नीचे पृथ्वी पूर्व–पश्चिम दिशा में परिक्रमण करती है जिससे एक ध्रुवीय उपग्रह पृथ्वी की सम्पूर्ण सतह का क्रमवीक्षण (Scan) कर सकता है। इनका प्रक्षेपण ध्रुवीय उपग्रह प्रक्षेपण यान (Polar Satellite Launching Vehicle-PSLV) द्वारा किया जाता है। इनका उपयोग मौसम की भविष्यवाणी

करने के लिए, वातावरण के अध्ययन में तथा जासूसी कार्यों में होता है।



चित्र 6.27

उदाहरण–इण्डियन अर्थ–रिसोरसेज उपग्रह (IERS), यूरोपीय स्पॉट (European SPOT)

6.15 अन्तरिक्ष में भारत की उपलब्धियाँ (Achievements of India in Space)

भारतीय अन्तरिक्ष कार्यक्रम सन् 1962 में शुरू हुआ। इसके लिए भारत सरकार ने भारतीय राष्ट्रीय अन्तरिक्ष अनुसंधान समिति बनायी। सन् 1969 में भारतीय अन्तरिक्ष अनुसंधान संगठन (Indian Space Reserach Organisation - ISRO) की स्थापना की गई जिसका मुख्यालय बंगलौर में है।

जून 1972 में भारत सरकार ने अन्तरिक्ष आयोग की स्थापना की जिसकी सहायता अन्तरिक्ष विभाग करता है तथा अन्तरिक्ष विभाग को ही भारत के अन्तरिक्ष कार्यक्रम के संचालन का जिम्मा सौंपा गया है। अन्तरिक्ष आयोग तथा अन्तरिक्ष विभाग का मुख्यालय बंगलौर में है।

भारतीय अन्तरिक्ष अनुसंधान संगठन (ISRO) अन्तरिक्ष विभाग के अधीन उसके अनुसंधान तथा विकास संगठन के रूप में कार्य करता है।

भारतीय अन्तरिक्ष अनुसंधान संगठन (ISRO) का कार्य उसके चार अन्तरिक्ष केन्द्रों में होता है। ये अन्तरिक्ष केन्द्र निम्न हैं–

(i) विक्रम साराभाई अन्तरिक्ष केन्द्र, थुम्बा(केरल) (Vikram Sarabhai Space Centre-VSSC)।

(ii) भारतीय अन्तरिक्ष अनुसंधान संगठन (ISRO) उपग्रह केन्द्र, बंगलौर (कर्नाटक)।

(iii) शार केन्द्र, श्री हरिकोटा (आंध्रप्रदेश) (Shri Harikota Range - SHAR)।

(iv) अन्तरिक्ष अनुप्रयोग केन्द्र, अहमदाबाद (गुजरात) (Space Application Centre - SAC)।

इसके अतिरिक्त अन्य अन्तरिक्ष अनुसंधान केन्द्र हैं–भौतिक अनुसंधान प्रयोगशाला, अहमदाबाद (गुजरात) (Physical Research Lab - PRL)।

अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र (सैक), अहमदाबाद (गुजरात) (Space Application Centre - SAC)

भारत में उपग्रह तकनीक तथा उससे सम्बन्धित शोध कार्यों के जनक डॉ. विक्रम साराभाई माने जाते हैं जिन्होंने सन् 1970 में SSD (Satellite System Division) की स्थापना की जो कि VSSC का ही एक घटक है। 10 मई सन् 1972 में भारत सरकार ने सोवियत संघ के साथ एक संधि पर हस्ताक्षर किये जिसके अनुसार भारत उपग्रहों का निर्माण करेगा तथा सोवियत संघ उनका प्रक्षेपण करेगा। भारत द्वारा प्रक्षेपित किये गये उपग्रहों का संक्षिप्त परिचय निम्न प्रकार है–

आर्यभट्ट (Aryabhatta)–भारत ने 19 अप्रैल 1975 को भारतीय वैज्ञानिकों तथा इंजीनियरों द्वारा निर्मित प्रथम उपग्रह आर्यभट्ट को इण्टर कॉसमॉस राकेट द्वारा रूसी रॉकेट प्रक्षेपण स्थल कॉस्मोड्रोम (सोवियत संघ) से प्रक्षेपित कर अंतरिक्ष युग में प्रवेश किया। इस उपग्रह का नाम भारत के महान् खगोलशास्त्री तथा गणितज्ञ आर्यभट्ट के सम्मान में रखा गया। इस उपग्रह का वजन लगभग 360 किग्रा था। इस उपग्रह के प्रक्षेपण से भारत अंतरिक्ष में उपग्रह भेजने वाला 11 वाँ देश बन गया।

भास्कर–I(Bhaskara - I)–इस उपग्रह का प्रक्षेपण 7 जून 1979 में इण्टरकॉसमॉस रॉकेट द्वारा रूसी रॉकेट प्रक्षेपण स्थल कॉस्मोड्राम (सोवियत संघ) से किया गया। इस उपग्रह का नाम भारत के महान् गणितज्ञ तथा वैज्ञानिक भास्कराचार्य के सम्मान में रखा गया। इस उपग्रह का निर्माण भारतीय अंतरिक्ष अनुसंधान संगठन (ISRO) द्वारा किया गया तथा इसका वजन लगभग 442 किग्रा था।

रोहिणी आर.एस. -I (Rohini RS-I)–इस उपग्रह का प्रक्षेपण 10 अगस्त 1979 को एस.एल.वी. – 3 रॉकेट द्वारा रॉकेट प्रक्षेपण केन्द्र श्री हरिकोटा रेंज (आंध्रप्रदेश) से किया गया। इस उपग्रह का वजन लगभग 35 किग्रा था। भारत की इस उपलब्धि से भारत अन्य देशों अमेरिका, सोवियत रूस, फ्रांस, चीन तथा जापान की पंक्ति में सम्मिलित हो गया।

रोहिणी श्रृंखला के अन्य उपग्रह है–

रोहिणी RS - 2, रोहिणी RSD-1, रोहिणी RSD-2 जिनका प्रक्षेपण SLV-3 रॉकेट से रॉकेट प्रक्षेपण केन्द्र श्रीहरिकोटा रेंज (आंध्रप्रदेश) से क्रमशः 18 जुलाई 1980, 31 मई 1981 तथा 17 अप्रैल 1983 को किया गया। इन उपग्रहों का वजन लगभग क्रमशः 35 किग्रा., 38 किग्रा तथा 41.5 किग्रा था।

एपल (APPLE : Ariane Project Payload Experiment)–इस उपग्रह का प्रक्षेपण 19 जून 1981 को एरियन रॉकेट द्वारा यूरोपीय रॉकेट प्रक्षेपण केन्द्र कोरु, फ्रेंच गुयाना, द. अमरीका से किया गया। इस उपग्रह का वजन लगभग 670 किग्रा. था। यह प्रथम भूस्थाई तीन अक्षीय भूसमसामयिक प्रयोगात्मक संचार उपग्रह है जिसका निर्माण भारत में किया गया।

इन्सैट (INSAT : Indain National Satellite)–यह भारतीय अंतरिक्ष अनुसंधान संगठन (ISRO) द्वारा निर्मित बहुउद्देशीय भारतीय उपग्रह श्रृंखला है जिसकी सहायता से मौसम विज्ञान की जानकारी, दूरसंचार कार्यक्रमों का संप्रेषण, सूर्य तथा अंतरिक्ष से आने वाली विकिरणों का अध्ययन, भूसंपदा का सुदूर संवेदन आदि जानकारी प्राप्त होती हैं।

इस श्रृंखला के अन्तर्गत निर्मित उपग्रह निम्न है–

INSAT: 1A, 1B, 1C, 1D, 2A, 2B, 2C, 2D, 2E, 3A, 3B, 3C, 3E आदि।

इन उपग्रहों का प्रक्षेपण विभिन्न रॉकेटों द्वारा अलग–अलग प्रक्षेपण केन्द्रों द्वारा किया गया। उपग्रहों की इस श्रृंखला में सबसे अधिक भार (2958 किग्रा.) का उपग्रह INSAT - 3A है।

आई-आर-एस (IRS) (भारतीय दूरसंवेदी उपग्रह)–इस श्रृंखला के अन्तर्गत IRS - 1A तथा IRS - 1B उपग्रहों का प्रक्षेपण वोस्तक रॉकेट द्वारा रूसी अन्तरिक्ष अड्डा, बैकानूर (सोवियत संघ) से क्रमशः 17 मार्च 1988 तथा 29 अगस्त 1991 में किया गया। इनका

वजन लगभग क्रमशः 980 किग्रा. तथा 985 किग्रा. था। इन उपग्रहों का निर्माण सुदूर संवेदन की दृष्टि से किया गया।

इस शृंखला के अन्य उपग्रह हैं–

IRS - P1, P2, P3, P4, 1C, 1D

इनका प्रक्षेपण ASLV रॉकेटों की विभिन्न श्रेणियों द्वारा रॉकेट प्रक्षेपण केन्द्र, श्रीहरिकोटा रेंज (आंध्रप्रदेश) से किया गया।

भारत ने 22 अक्टूबर 2001 को ध्रुवीय उपग्रह प्रक्षेपण यान (PSLV : Polar Satellite Launch Vehicle) सी.–3 द्वारा तीन उपग्रहों को प्रक्षेपित किया जिनके नाम हैं–TES (भारत), BIRD (जर्मनी) तथा PROBA (बेल्जियम)।

12 सितम्बर 2002 को पहले मौसम उपग्रह (METSAT) को PSLV C4 नामक रॉकेट से रॉकेट प्रक्षेपण केन्द्र, श्रीहरिकोटा रेंज (आंध्रप्रदेश) से प्रक्षेपित किया गया जिसका वजन लगभग 1000 किग्रा था। बाद में इसका नाम कल्पना–I रखा गया। यह नाम भारत की महान अंतरिक्ष वैज्ञानिक डॉ. कल्पना चावला के सम्मान में रखा गया कि जिनकी मृत्यु कोलाम्बिया शटल के दुर्घटनाग्रस्त होने से 1फरवरी 2003 को हो गयी थी।

जी-सैट (GSAT: Geo-Stationary Satellite)–इसके अन्तर्गत भारत ने 18 अप्रैल 2001 को जी–सैट–I उपग्रह को रॉकेट प्रक्षेपण केन्द्र, श्रीहरिकोटा रेंज (आंध्रप्रदेश) से प्रक्षेपित किया जिसका वजन लगभग 154 किग्रा. था। परन्तु यह उपग्रह असफल हो गया। इसके पश्चात् जी–सैट -2 उपग्रह को 8 मई 2003 में सतीश धवन अन्तरिक्ष केन्द्र श्रीहरिकोटा (आंध्रप्रदेश) से GSLV - D2 (Geo - Stationary Satellite Launch Vehicle : GSLV) द्वारा प्रक्षेपित किया गया। इसका वजन लगभग 1800 किग्रा. था। इसरो द्वारा भारतीय अंतरिक्ष कार्यक्रम की 40वीं वर्षगाँठ पर 21 नवम्बर 2003 को तिरुवनंतपुरम् स्थित विक्रम साराभाई स्पेस सेंटर से रोहिणी -200 साउंडिंग रॉकेट का सफल प्रक्षेपण किया गया।

एज्यूसैट (Edu. SAT)–इस उपग्रह का प्रक्षेपण 20 सितम्बर 2004 को श्रीहरिकोटा से किया गया। इसका वजन लगभग 1950 किग्रा. है। इसका उद्देश्य दूरस्थ शिक्षा क्षेत्र में क्रांति लाना है।

इस प्रकार भारतीय अंतरिक्ष वैज्ञानिकों के अथक प्रयास से भारतीय अंतरिक्ष कार्यक्रम अपनी चरम सीमा पर है। इसके संदर्भ में प्रथम भारतीय अंतरिक्ष यात्री स्क्वाड्रन लीटर राकेश शर्मा तथा डॉ. कल्पना चावला का साहसी कार्यक्रम विश्व विख्यात है।

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. अनन्त पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का मान लिखिए।

प्र.2. गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा की प्रकृति लिखिए।

प्र.3. पृथ्वी के संगत पलायन वेग का मान लिखिए।

प्र.4. चन्द्रमा के संगत पलायन वेग का मान लिखिए।

प्र.5. हाइड्रोजन गैस के अणुओं का औसत ऊष्मीय वेग का मान कितना होता है?

प्र.6. उपग्रह के कक्षीय वेग का सूत्र लिखिए।

प्र.7. उपग्रह की कुल ऊर्जा की प्रकृति लिखिए।

प्र.8. भू-स्थायी उपग्रह का कक्षीय वेग तथा कोणीय वेग कितना होता है?

प्र.9. भारहीनता की अवस्था कब प्राप्त होती है?

प्र.10. किसी व्यक्ति को एक किग्रा–भार में अधिक द्रव्य कहाँ प्राप्त होगा?

प्र.11. चन्द्रमा का द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान का 1% है। चन्द्रमा पर पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण बल, पृथ्वी पर चन्द्रमा के गुरुत्वाकर्षण बल का कितना गुना होगा?

प्र.12. $\frac{G}{g}$ की क्या इकाई है तथा इसका कितना मान है?

[$G = 6.67 \times 10^{-11}$ न्यूटन–मीटर^2/किग्रा^{2}, $g = 9.8$ न्यूटन/किग्रा]

प्र.13. किसी ग्रह से सूर्य की औसत दूरी पृथ्वी से सूर्य की दूरी की तुलना में चार गुनी है। वह ग्रह कितने वर्ष में सूर्य की परिक्रमा करेगा?

प्र.14. पृथ्वी के चारों ओर चक्कर काटते उपग्रह पर अभिकेन्द्रीय बल F है। इस पर पृथ्वी का गुरुत्वीय बल कितना है? परिणामी बल कितना है?

प्र.15. m द्रव्यमान का एक ग्रह, M_s द्रव्यमान के सूर्य के परितः दीर्घवृत्ताकार कक्षा में घूम रहा है। सूर्य से ग्रह की अधिकतम व न्यूनतम दूरियाँ क्रमशः r_1 व r_2 हैं, ग्रह का आवर्तकाल किसके समानुपाती होगा?

प्र.16. गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता क्या होगी यदि 10 किग्रा का भार 100 न्यूटन हो?

प्र.17. दो पिण्डों A और B के बीच दूरी r है। यदि पारस्परिक क्रिया व्युत्क्रम चतुर्थ घात के नियम का पालन करे तो त्वरण क्या होगा? जबकि पारस्परिक क्रिया व्युत्क्रम वर्ग नियम के पालन की दशा में त्वरण a हो।

प्र.18. पृथ्वी की अपेक्षा चन्द्रमा पर g का मान g/6 है। यदि किसी पिण्ड को पृथ्वी से चन्द्रमा पर ले जाये तो उसके (a) भार, (b) जड़त्वीय द्रव्यमान तथा (c) गुरुत्वीय द्रव्यमान में क्या परिवर्तन होगा?

प्र.19. 1 किग्रा चीनी ध्रुवों पर अधिक होगी या विषुवत् रेखा पर–
(a) भौतिक तुला द्वारा तौलने पर, (b) कमानीदार तुला द्वारा, जिसे विषुवत् रेखा पर अंशांकित किया गया है।

प्र.20. किसी ग्रह के द्रव्यमान तथा व्यास, पृथ्वी के द्रव्यमान व व्यास के दोगुने हैं। ग्रह पर गुरुत्वीय त्वरण क्या होगा यदि पृथ्वी पर गुरुत्वीय त्वरण g है तथा सेकण्ड लोलक का आवर्तकाल क्या हो जायेगा?

प्र.21. कितनी ऊँचाई व कितनी गहराई पर हमारा भार एक चौथाई हो जायेगा?

प्र.22. क्या पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण बल पृथ्वी से किसी ऊँचाई पर शून्य हो जाता है?

प्र.23. किसी पिण्ड को पृथ्वी के पास लाने पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा बढ़ेगी या घटेगी?

प्र.24. यदि पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा $-\frac{GM_e m}{R_e}$ हो तो पिण्ड को गुरुत्वीय क्षेत्र से बाहर फेंकने में कितना कार्य करना होगा?

प्र.25. "गुरुत्वीय विभव एकांक द्रव्यमान की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा के बराबर होता है।" क्या यह कथन सही है? यदि नहीं तो सही कथन क्या है?

प्र.26. सूर्य के परितः वृत्तीय पथ में घूमती पृथ्वी पर एक बल लगा है। इस बल के कारण पृथ्वी पर कार्य किया जाना चाहिए इस कथन पर तर्क दें।

प्र.27. संचार उपग्रह का पृथ्वी के परितः परिक्रमण काल कितने घण्टे होता हैं?

प्र.28. रेडियन प्रति घण्टा में भूस्थिर उपग्रह का कोणीय वेग कितना है?

प्र.29. पृथ्वी के चारों ओर चक्कर काटते हुए उपग्रह पर अभिकेन्द्र बल F है। इस पर पृथ्वी का गुरुत्वीय बल कितना है तथा नेट बल

कितना है?

प्र.30. क्या किसी कृत्रिम उपग्रह को ऐसी कक्षा में स्थापित करना संभव है जिससे वह सदैव देहली के ऊपर दिखाई देता रहे? कारण दीजिए।

प्र.31. "दो कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी के चारों ओर एक वृत्ताकार कक्षा में केवल एक ही गति से चक्कर लगा सकते हैं उनके द्रव्यमान चाहे कितने भी क्यों न हों" इस कथन की पुष्टि कीजिए।

प्र.32. एक कमानीदार तुला पृथ्वी के चारों ओर गति करते हुए एक कृत्रिम उपग्रह के भीतर टंगी है। यदि इससे m द्रव्यमान का एक पिण्ड लटका हो तो इसका पाठ्यांक कितना होगा?

प्र.33. जब कोई उपग्रह गिरता हुआ पृथ्वी के वायुमण्डल में प्रवेश करता है तो वह गर्म हो जाता है अर्थात् उसकी यांत्रिक ऊर्जा में ह्रास होता है। परन्तु उपग्रह बढ़ती हुई चाल से कुण्डलिनी के रूप में नीचे गिरता है, क्यों?

प्र.34. क्या किसी पिण्ड का गुरुत्वीय द्रव्यमान कृत्रिम उपग्रह में ज्ञात किया जा सकता है?

प्र.35. पृथ्वी के चारों ओर चक्कर काटते हुए उपग्रह में अन्तरिक्ष यात्री भारहीनता का अनुभव करते हैं। क्या भारहीनता इस बात पर निर्भर करती है कि उपग्रह पृथ्वी से कितनी दूरी पर है?

प्र.36. किसी पिण्ड की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा शुक्र ग्रह पर -7.5×10^6 जूल है। पिण्ड को ग्रह से बाहर फेंकने के लिए आवश्यक ऊर्जा का मान ज्ञात कीजिए।

प्र.37. एक कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी तल से 300 किमी की ऊँचाई पर पृथ्वी का चक्कर लगा रहा है। यदि उपग्रह से एक पैकेट छोड़ दिया जाये तो उसका पथ क्या होगा? पैकेट पृथ्वी तल पर पहुँचेगा या नहीं?

प्र.38. $3m$ तथा m द्रव्यमान के दो उपग्रह क्रमशः r तथा $3r$ त्रिज्याओं की वृत्तीय कक्षाओं में पृथ्वी के परितः चक्कर लगाते हैं। इनकी चालों का अनुपात क्या है?

प्र.39. m ग्राम के टुकड़े का पलायन वेग v है तो $2m$ ग्राम के टुकड़े का पलायन वेग क्या होगा?

प्र.40. क्या पलायन वेग पृथ्वी तल से फेंके गये कोण पर निर्भर करता है?

प्र.41. रोहिणी उपग्रह पृथ्वी के परितः 500 किमी तथा इनसेट–B 36000 किमी. की ऊँचाइयों पर चक्कर लगाते हैं। क्या इनसेट–B का कोणीय वेग रोहिणी उपग्रह से अधिक है?

प्र.42. कोई कण अपरिमित दूरी से पृथ्वी पर गिरता है। यदि उसका प्रारम्भिक वेग शून्य हो और वायु के घर्षण के कारण उत्पन्न प्रतिरोध नगण्य हो तो पृथ्वी तल पर पहुँचने पर उसका वेग ज्ञात कीजिए। पृथ्वी की त्रिज्या 6400 किमी तथा गुरुत्वीय त्वरण g= 9.8 मीटर/सेकण्ड^2

प्र.43. क्या चन्द्रमा की पृथ्वी के परितः कोणीय चाल (ω_1) पृथ्वी की सूर्य के परितः कोणीय चाल (ω_2) से अधिक है?

उत्तरमाला

1. शून्य।
2. ऋणात्मक
3. 11.2 किमी/से
4. चन्द्रमा के संगत पलायन वेग का मान लिखिए।
5. 2.5 किमी./से
6. $v_0 = R\sqrt{\dfrac{g}{R+h}}$

   $v_0 = \sqrt{gR}$
7. ऋणात्मक।
8. कक्षीय वेग लगभग 3.1 किमी/से

   कोणीय वेग 7.3×10^{-5} रेडियन/से
9. जब प्रतिक्रिया बल शून्य होता है तब भारहीनता की अवस्था प्राप्त होती है।
10. कहीं नहीं, सभी स्थानों पर द्रव्यमान समान रहेगा।
11. दोनों बराबर है।
12. मीटर^2/किग्रा., 6.8×10^{-12}
13. 8 वर्ष
14. F, F
15. $T^2 \propto (r_1 + r_2)^3$
16. 10 न्यूटन/किग्रा.
17. $f = a/r^2$
18. भार $\frac{1}{6}$ होगा जबकि जड़त्वीय द्रव्यमान, गुरुत्वीय द्रव्यमान में कोई परिवर्तन नहीं होगा।
19. (a) भौतिक तुला द्वारा समान, (b) कमानीदार तुला द्वारा ध्रुवों पर अधिक।
20. $\frac{g}{2}, 2\sqrt{2}$ सेकण्ड
21. $R_e, \frac{3R_e}{4}$.
22. नहीं (क्योंकि अनन्त दूरी संभव नहीं है)
23. घटेगी।
24. $\frac{GM_e m}{R_e}$
25. गुरुत्वीय विभव की इकाई जूल/किग्रा. तथा स्थितिज ऊर्जा की इकाई जूल होती है, परन्तु दोनों परिमाण में समान हैं।
26. किया गया कार्य शून्य होता है, क्योंकि F तथा विस्थापन लम्बवत् हैं।
27. 24 घण्टे।
28. $\frac{\pi}{12}$ रेडियन/घण्टा।
29. F, F
30. नहीं।
31. हाँ, उपग्रह की चाल इसके द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती है।
32. शून्य।
33. घूमता उपग्रह जब कम ऊँचाई पर आता है तो स्थितिज ऊर्जा में कमी का एक भाग ऊष्मा तथा दूसरा गतिज ऊर्जा बढ़ाने में खर्च होता है।
34. नहीं, कृत्रिम उपग्रह एक मुक्त रूप से गिरते पिण्ड के समान हैं।
35. नहीं।

36. $+7.5 \times 10^6$ जूल।
37. नहीं, पैकिट भी उसी वृत्ताकार पथ पर घूमने लगेगा।
38. $\sqrt{3}:1$
39. v.
40. नहीं।
41. नहीं।
42. 11.2 किमी/सेकण्ड
43. हाँ, $\omega_1 = \frac{2\pi}{28\text{दिन}}$

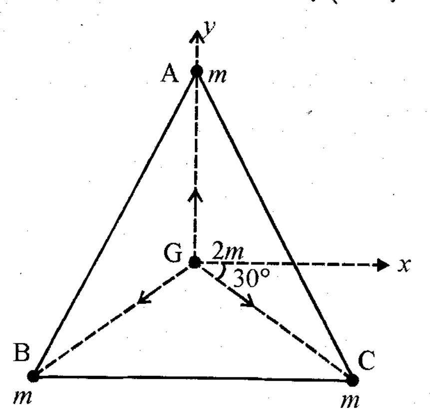
विविध उदाहरण

उदा.44. किसी समबाहु त्रिभुज ABC के प्रत्येक शीर्ष पर m kg के तीन समान द्रव्यमान रखे हैं।

(a) इस त्रिभुज के केन्द्रक G पर रखें $2m$ kg के द्रव्यमान पर कितना बल आरोपित हो रहा है?

(b) यदि शीर्ष A पर रखे द्रव्यमान को दो गुना कर दिया जाए, तो कितना बल आरोपित होगा?

AG = BG = CG = 1m लीजिए (देखिए चित्र)



चित्र 6.28

हल– (a) चित्र की ज्यामिती से +X अक्ष तथा GC के मध्य कोण 30° बनता है तथा इतना ही कोण –X अक्ष तथा GB के मध्य बनता है। बिन्दु A पर स्थित m द्रव्यमान के कारण बिन्दु G पर स्थित $2m$ द्रव्यमान पर कार्यरत बल

$$\vec{F}_{GA} = \frac{Gm \times 2m}{(AG)^2} \text{ GA के अनुदिश}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{GA} = \frac{2Gm^2}{1}\hat{j} \quad ...(1)$$

बिन्दु B पर स्थित m द्रव्यमान के कारण बिन्दु G पर स्थित $2m$ द्रव्यमान पर कार्यरत बल

$$\vec{F}_{GB} = \frac{Gm \times 2m}{(BG)^2} \text{ [GB के अनुदिश]}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{GB} = \frac{2Gm^2}{1}(-\hat{i}\cos 30° - \hat{j}\sin 30°) \quad ...(2)$$

बिन्दु C पर स्थित m द्रव्यमान के कारण बिन्दु G पर स्थित $2m$ द्रव्यमान पर कार्यरत बल

$$\vec{F}_{GC} = \frac{Gm \times 2m}{(CG)^2} \text{ [GC के अनुदिश]}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{GC} = \frac{2Gm^2}{1}(\hat{i}\cos 30° - \hat{j}\sin 30°) \quad ...(3)$$

इस प्रकार बिन्दु G पर स्थित $2m$ द्रव्यमान पर परिणामी बल

$$\vec{F}_G = \vec{F}_{GA} + \vec{F}_{GB} + \vec{F}_{GC}$$

$$= 2Gm^2\hat{j} + 2Gm^2(-\hat{i}\cos 30° - \hat{j}\sin 30°) + 2Gm^2(\hat{i}\cos 30° - \hat{j}\sin 30°)$$

$$= 2Gm^2(\hat{j} - \hat{i}\cos 30° - \hat{j}\sin 30° + \hat{i}\cos 30° - \hat{j}\sin 30°)$$

$$= 2Gm^2(\hat{j} - 2\hat{j}\sin 30°)$$

$$= 2Gm^2(\hat{j} - \hat{j}) = 0 \qquad [\because \sin 30° = \tfrac{1}{2}]$$

(b) अब यदि बिन्दु A पर स्थित द्रव्यमान को दुगुना अर्थात् $2m$ कर दिया जाये, तब

$$\vec{F}_{GA} = \frac{G2m \times 2m}{(1)^2}\hat{j} = \frac{4Gm^2}{1}\hat{j}$$

जबकि $\vec{F}_{GB}$ तथा $\vec{F}_{GC}$ अपरिवर्तित रहेंगे।

$$\therefore \quad \vec{F}'_G = \vec{F}_{GA} + \vec{F}_{GB} + \vec{F}_{GC}$$

$$= 4Gm^2\hat{j} + 2Gm^2(-\hat{i}\cos 30° - \hat{j}\sin 30°) + 2Gm^2(\hat{i}\cos 30° - \hat{j}\sin 30°)$$

$$= 2Gm^2(2\hat{j} - \hat{j}) = 2Gm^2\hat{j}$$

उदा.45. सूर्य से दो ग्रहों की दूरियाँ, क्रमशः 10^{13} तथा 10^{12} मीटर हैं ग्रहों के आवर्तकालों एवं इनकी चालों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– कैप्लर के तीसरे नियम से $T^2 = Kr^3$, जिसमें T आवर्तकाल तथा r ग्रह की कक्षीय त्रिज्या है। यदि ग्रहों के आवर्तकाल T_1 व T_2 हों तथा उनकी कक्षीय त्रिज्यायें (सूर्य से दूरियाँ) क्रमशः r_1 व r_2 हों, तो

$$T_1^2 = Kr_1^3, \quad T_2^2 = Kr_2^3$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

या
$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2}$$

यहाँ $r_1 = 10^{13}$ मी., $r_2 = 10^{12}$ मी.।

$$\therefore \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{10^{13}}{10^{12}}\right)^{3/2}$$

$$= 10\sqrt{10}$$

यदि ग्रहों की कक्षायें वृत्ताकार हो तथा चालें क्रमशः v_1 व v_2 हों, तो

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}$$

$$v_2 = \frac{2\pi r_2}{T_2}$$

$$\therefore \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2} \times \frac{T_2}{T_1} = \frac{r_1}{r_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3/2} \quad \left(\because \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3/2}\right)$$

$$= \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{1/2} = \left(\frac{10^{12}}{10^{13}}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}$$

उदा.46. पृथ्वी की त्रिज्या 6400 किमी. है तथा पृथ्वी सतह पर गुरुत्वीय त्वरण 9.8 मी./से.^{2} है। पृथ्वी सतह से 3200 किमी. ऊपर गुरुत्वीय त्वरण का मान क्या होगा?

हल– $R = 6400$ किमी. $= 64 \times 10^5$ मीटर

$g = 9.8$ मी./से.^{2}

$h = 3200$ किमी. $= 32 \times 10^5$ मीटर

$$\because \quad \frac{g'}{g} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

$$\frac{g'}{9.8} = \left(\frac{64 \times 10^5}{96 \times 10^5}\right)^2$$

$$\frac{g'}{9.8} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$g' = \frac{9.8 \times 4}{9} = 4.35 \text{ मी./से.}^2$$

उदा.47. दो ग्रहों की त्रिज्या क्रमशः r_1 व r_2 तथा माध्य घनत्व d_1 व d_2 है। सिद्ध करो कि इन ग्रहों पर गुरुत्वीय त्वरण $r_1d_1 : r_2d_2$ के अनुपात में होंगे।

हल– $\because$ ग्रह का गुरुत्वीय त्वरण

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

द्रव्यमान M = आयतन × घनत्व

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \times d$$

और दिया गया है कि ग्रहों की त्रिज्या r_1 व r_2 है।
अर्थात् प्रथम ग्रह के लिए $R = r_1$ रखने पर

$$g_1 = \frac{G \times \frac{4}{3}\pi r_1^3 \times d_1}{r_1^2}$$

इसी प्रकार से दूसरे ग्रहों के लिये

$$g_2 = \frac{G \times \frac{4}{3}\pi r_2^3 \times d_2}{r_2^2}$$

समीकरण (2) में समी. (3) का भाग देने पर

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{G \times \frac{4}{3}\pi r_1 \times d_1}{G \times \frac{4}{3}\pi r_2 \times d_2} = \frac{r_1 d_1}{r_2 d_2}$$

अतः ग्रहों पर गुरुत्वीय त्वरण $r_1d_1 : r_2d_2$ के अनुपात में होंगे।

उदा.48. सूर्य के गिर्द दो ग्रह दीर्घवृत्तीय कक्षाओं पर परिक्रमण कर रहे है। इनकी दीर्घ अक्ष 1 : 4 के अनुपात में है। जब ग्रह दीर्घ अक्ष पर हों तो इन पर सूर्य के गुरुत्वीय त्वरण का अनुपात ज्ञात कीजिये।

हल– माना कि प्रथम ग्रह के लिये गुरुत्वीय त्वरण g_1 व द्वितीय ग्रह के लिये गुरुत्वीय त्वरण g_2 है।

दिया गया है– $\frac{R_1}{R_2} = 1:4 \qquad \because g = \frac{GM}{R^2}$

$$g \propto \frac{1}{R^2}$$

$$\therefore \quad \frac{g_1}{g_2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{4}{1}\right)^2 = \frac{16}{1}$$

$$= 16:1$$

$\therefore$ सूर्य के गुरुत्वीय त्वरण का अनुपात = 16 : 1

उदा 49. पृथ्वी के केन्द्र से गुजरने वाली सीधी काल्पनिक सुरंग में पृथ्वी के केन्द्र से R/2 तथा R/3 दूरियों पर गुरुत्वीय त्वरण की गणना कीजिये। पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण का मान 9.8 मी./से.^{2} है। यहाँ R पृथ्वी की त्रिज्या है।

हल– पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण $g = 9.8$ मी./से.^{2}

$\therefore$ पृथ्वी केन्द्र से R/2. दूरी पर गुरुत्वीय त्वरण

$$g_h = g\left(1 - \frac{h}{R}\right) \quad \text{यहाँ } h = \frac{R}{2}$$

$$g_h = g\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}g$$

$$g_h = \frac{1}{2} \times 9.8 = 4.9 \text{ मी./से.}^2$$

$\frac{R}{3}$ पर गुरुत्वीय त्वरण में कमी

$$g'_h = g\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

लेकिन दिया गया है– $h = \frac{R}{3}$

$$\frac{h}{R} = \frac{1}{3}$$

$$= g\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}g$$

$$g_h' = \frac{2}{3} \times 9.8 = 6.533 \text{ मी./से.}^2$$

$\therefore$ अब $\frac{R}{3}$ पर गुरुत्वीय त्वरण $= 9.8 - 6.533$ मी./से.^{2}

$= 3.267$ मी./से.^{2}

उदा.50. यदि पृथ्वी के अंदर आर-पार सुंरग खोदकर उसमें एक पिण्ड को छोड़ दिया जाये तब सिद्ध करो की पिण्ड की गति सरल आवर्ती होगी।

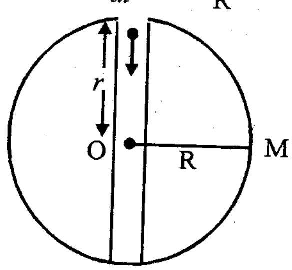
हल– माना कि पिण्ड का द्रव्यमान m है तथा किसी समय t पर पिण्ड की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी r है।

पृथ्वी के भीतर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता या गुरुत्वीय त्वरण

$$g \text{ या } E_g = -\frac{GM}{R^3}r$$

$$\because \quad \text{त्वरण} = \frac{d^2r}{dt^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{R^3}r \qquad ...(1)$$



चित्र 6.29

यहाँ त्वरण $\frac{d^2r}{dt^2} \propto -r$ अतः पिण्ड की गति सरल आवर्ती है।

समी. (1) को निम्न रूप में लिखने पर

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\omega^2 r$$

यहाँ $\omega^2 = \frac{GM}{R^3}$

$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$ कोणीय आवृत्ति है।

पिण्ड का आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$$\because \quad GM = gR^2$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{gR^2}}$$

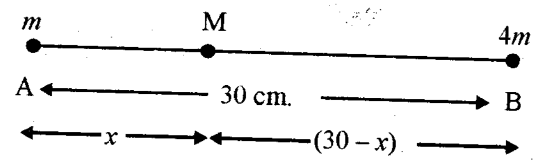
$$= 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$T = 2 \times 3.14\sqrt{\frac{6400 \times 10^3}{9.8}}$$

= 84.6 मिनट

उदा.51. दो वस्तुयें A तथा B क्रमशः m और $4m$ द्रव्यमान की 30 सेमी. की दूरी पर रखी है। इनको मिलाने वाली रेखा पर M द्रव्यमान की एक अन्य वस्तु A से कितनी दूरी पर रखें कि उस पर A तथा B का गुरुत्वाकर्षण बल बराबर व विपरीत हो?

हल– दिया गया है–



चित्र 6.30

माना कि M द्रव्यमान की वस्तु A से x सेमी. दूरी पर रखी है। इस बिन्दु पर वस्तु A तथा B का गुरुत्वाकर्षण बल बराबर है।

$$\therefore \quad F = \frac{G \times m \times M}{x^2} \qquad ...(1)$$

$$F = \frac{GM \times 4m}{(30-x)^2} \qquad ...(2)$$

समी. (1) तथा समी. (2) से

$$\frac{G \times m \times M}{x^2} = \frac{G \times M \times 4m}{(30-x)^2}$$

$$(30-x)^2 = 4x^2$$

या $\quad 30 - x = 2x$

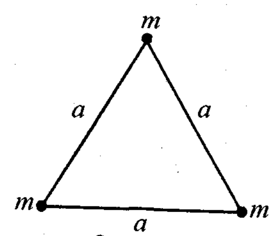
या $\quad 30 = 3x$

$$x = \frac{30}{3} = 10 \text{ सेमी.}$$

अर्थात् M द्रव्यमान की वस्तु A से 10 सेमी. दूरी पर रखी है।

उदा.52. यदि किसी निकाय (System) में समान द्रव्यमान के तीन कण किसी समबाहु त्रिभुज के शीर्षो पर स्थित हो तो निकाय की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करो।

हल– माना कि कणों का द्रव्यमान m तथा त्रिभुज की भुजा की लम्बाई a है।



चित्र 6.31

यदि तीनों कणों का द्रव्यमान क्रमशः m_1, m_2 व m_3 हो तो निकाय की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} - \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} - \frac{Gm_3m_1}{r_{31}}$$

लेकिन प्रश्नानुसार,

$$m_1 = m_2 = m_3 = m$$

$$r_{12} = r_{23} = r_{31} = a$$

$$\therefore \quad U = -\frac{Gm^2}{a}$$

यदि त्रिभुज की भुजा को दुगुना कर दिया जाये तब

स्थितिज ऊर्जा $U_2 = -\frac{3Gm^2}{2a}$

प्रारम्भ में स्थितिज ऊर्जा $U_1 = -\frac{3Gm^2}{a}$

स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta U = U_2 - U_1$$

$$= -\frac{3Gm^2}{2a} - \left(-\frac{3Gm^2}{a}\right)$$

$$= \frac{3Gm^2}{2a}$$

यह स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन कार्य के बराबर होगा। अतः त्रिभुज की भुजा को दुगुना करने में किया गया कार्य

$$W = \frac{3Gm^2}{2a} \text{ जूल}$$

उदा.53. पृथ्वी तल से 900 किमी. दूरी पर परिक्रमण कर रहे उपग्रह का वेग तथा परिभ्रमण काल ज्ञात कीजिये।

$R = 6.4 \times 10^6$ मीटर

$M = 6 \times 10^{24}$ किग्रा. तथा

$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{न्यूटन–मी.}^2}{\text{किग्रा.}^2}$

हल– पृथ्वी तल से उपग्रह की दूरी $= 900$ किमी.

पृथ्वी की त्रिज्या $R = 6.4 \times 10^6$ मीटर $= 6400$ किमी.

$\therefore$ उपग्रह के कक्ष की त्रिज्या $= (R + h)$

$= 6400 + 900 = 7300$ किमी.

$= 7300 \times 10^3$ मीटर

$= 7.3 \times 10^6$ मीटर

$\therefore$ उपग्रह का कक्षीय वेग

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

$$= \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{7.3 \times 10^6}}$$

$$= \sqrt{\frac{40.02 \times 10^7}{7.3}}$$

$= 7.404 \times 10^3$ मीटर/से.

$= 7.404$ किमी./से.

$$\text{परिक्रमण काल } T = \frac{2\pi(R+h)}{v_0}$$

$$= \frac{2 \times 3.14 \times 7.3 \times 10^6}{7.404 \times 10^3}$$

$= 6191.78$ सेकण्ड

$= 1$ घण्टा 43 मिनट 15 सेकण्ड

उदा.54. पृथ्वी के अपनी अक्ष पर परिक्रमण के कारण विषुवत् रेखा पर गुरुत्वीय त्वरण मे कमी ज्ञात कीजिये। ($R = 6400$ किमी.)

हल– पृथ्वी के स्थिर रहने की स्थिति में गुरुत्वीय त्वरण g हो तो पृथ्वी के घूर्णन के कारण, विषुवत् रेखा पर गुरुत्वीय त्वरण

$g' = g - R\omega^2$

यहाँ $R =$ पृथ्वी की त्रिज्या

$\omega =$ पृथ्वी का कोणीय वेग

$\therefore$ गुरुत्वीय त्वरण में कमी $= R\omega^2$

या $$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$T = 24$ घण्टे (पृथ्वी द्वारा एक चक्कर लगाने में लगा समय)

$= 24 \times 3600$ सेकण्ड

$$\omega = \frac{2 \times 3.14}{24 \times 3600}$$

$\therefore$ गुरुत्वीय त्वरण में कमी $= R\omega^2$

$R = 6400 \times 10^3$ मी.

$\therefore$ गुरुत्वीय त्वरण में कमी $= 6400 \times 10^3 \times \left(\frac{2 \times 3.14}{24 \times 3600}\right)^2$

$= 0.0338$ मीटर/सेकण्ड^2

उदा.55. एक भू-उपग्रह पृथ्वी तल से 1800 किमी. ऊँचाई पर परिक्रमा कर रहा है। पृथ्वी की त्रिज्या 6400 किमी. तथा पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण 10 मी./से.^{2} है। ज्ञात कीजिये-

(i) उपग्रह का कक्षीय वेग, (ii) उपग्रह पर त्रिज्य त्वरण (iii) उपग्रह का परिभ्रमण काल।

हल– (i) दिया गया है–

$h = 1800$ किमी.

$= 18 \times 10^5$ मीटर

$R = 6400$ किमी.

$= 64 \times 10^5$ मीटर

$g = 10$ मी./से.^{2}

उपग्रह का कक्षीय वेग $v_0 = ?$

उपग्रह पर त्रिज्य त्वरण $(a_r) = ?$

उपग्रह का परिभ्रमण काल= ?

$$\text{उपग्रह का कक्षीय वेग } v_0 = \sqrt{\frac{gR}{\left(1+\frac{h}{R}\right)}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{10 \times 64 \times 10^5}{1 + \frac{18 \times 10^5}{64 \times 10^5}}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{64 \times 10^6}{82/64}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{64 \times 64 \times 10^6}{82}}$$

$v_0 = 7 \times 10^3$ मी./से. (लगभग)

(ii) उपग्रह पर त्रिज्य त्वरण का मान

$$a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{7 \times 7}{8}$$

$a_r = 6$ मी./से.^{2} (लगभग)

(iii) आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ चूंकि $h << R$

$$T = 2 \times 3.14 \sqrt{\frac{6400 \times 10^3}{10}}$$
$$T = 2 \times 3.14 \times 8 \times 10^2$$
$$T = 2 \times 314 \times 8$$
$$T = 16 \times 314$$
$T = 5024$ सेकण्ड

पाठ्यपुस्तक के प्रश्न

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. कृत्रिम उपग्रह पर भारहीनता अनुभव होती है लेकिन चन्द्रमा पर क्यों नहीं?

उत्तर- कृत्रिम उपग्रह का द्रव्यमान अपेक्षाकृत अत्यल्प होने के कारण इसका गुरुत्वीय त्वरण नगण्य होता है जिससे कृत्रिम उपग्रह पर भारहीनता अनुभव होती है जबकि चन्द्रमा का द्रव्यमान अपेक्षाकृत बहुत अधिक होने के कारण इसका स्वयं का गुरुत्वीय त्वरण होता है जिससे चन्द्रमा पर भारहीनता का आभास नहीं होता है।

प्र.2. किसी उपग्रह को अपनी कक्षा में चक्कर लगाने के लिए कितनी ऊर्जा की आवश्यकता होती है?

उत्तर- किसी उपग्रह को अपनी कक्षा में चक्कर लगाने के लिए अभिकेन्द्रीय बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है जिससे ऊर्जा की आवश्यकता नहीं होती है।

प्र.3. यदि पृथ्वी एक खोखला गोला हो तो इसकी पृष्ठ से 10 km गहराई पर किसी वस्तु का भार क्या होगा?

उत्तर- यदि पृथ्वी एक खोखला गोला हो तो खोखले गोले के भीतर गुरुत्वीय त्वरण $g = 0$ होगा जिससे वस्तु का भार भी $W = mg$ शून्य होगा।

प्र.4. समुद्र में ज्वार-भाटा क्यों उत्पन्न होता है?

उत्तर- चन्द्रमा के गुरुत्वाकर्षण प्रभाव के कारण समुद्र में ज्वार-भाटा उत्पन्न होता है।

प्र.5. पृथ्वी ध्रुवों पर चपटी क्यों है?

उत्तर- पृथ्वी स्वयं की अक्ष पर घूर्णन करती है जिससे पृथ्वी, ध्रुवों पर चपटी है।

प्र.6. यदि पृथ्वी, सूर्य के चारों ओर वृत्तीय कक्षा में घूमती है तो गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य क्या होगा?

उत्तर- पृथ्वी के सूर्य के चारों ओर वृत्ताकार कक्षा में घूमने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल, गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा प्राप्त होता है जो सदैव गति के लम्बवत् होता है। अत: गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होगा।

प्र.7. 1 kg wt (किग्रा भार) में कितने न्यूटन होते हैं?

उत्तर- $\because$ भार $W = mg$

$m = 1$ रखने पर

$W = 1 \times 9.8 = 9.8$ न्यूटन

अर्थात् 1 किग्रा भार = 9.8 न्यूटन

प्र.8. पृथ्वी तल से किसी वस्तु के लिए पलायन वेग का मान 11.2 km/s है। जब वस्तु क्षैतिज से 30° पर फेंकी जाये तो पलायन वेग का मान क्या होगा?

उत्तर- पलायन वेग प्रक्षेपण कोण पर निर्भर नहीं करता है अर्थात् पलायन वेग अपरिवर्तित रहेगा। अत: पलायन वेग = 11.2 km/s

प्र.9. चन्द्रमा, पृथ्वी की तुलना में बहुत हल्का है, फिर यह पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण द्वारा क्यों नहीं गिरता है?

उत्तर- चन्द्रमा पर पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण बल, चन्द्रमा की गति के लम्बवत् होता है जिससे किया गया कार्य शून्य होता है। इस कारण चन्द्रमा, पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण द्वारा नहीं गिरता है।

प्र.10. 10g सोने का भार ध्रुवों पर भूमध्य रेखा की तुलना में अधिक होता है, क्यों?

उत्तर- किसी द्रव्यमान m का भार $W = mg$

गुरुत्वीय त्वरण का मान ध्रुवों पर, भूमध्य रेखा की तुलना में अधिक होने से वस्तु का भार ध्रुवों पर, भूमध्य रेखा की तुलना में अधिक होता है।

प्र.11. भारत द्वारा छोड़े गये प्रथम उपग्रह का नाम लिखिए।

उत्तर- आर्यभट्ट, यह उपग्रह 19 अप्रैल 1975 को प्रक्षेपित किया गया था।

प्र.12. गुरुत्वीय क्षेत्र की विमा लिखिए।

उत्तर- $[M^0L^1T^{-2}]$

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. भार व द्रव्यमान में अन्तर समझाइए।

उत्तर-

भार	द्रव्यमान
1. किसी वस्तु का भार उस पर कार्यरत पृथ्वी का गुरुत्वीय बल होता है।	1. किसी वस्तु का द्रव्यमान उसमें पदार्थ (द्रव्य) की मात्रा होती है।
2. भिन्न-भिन्न स्थानों पर गुरुत्वीय त्वरण के मान भिन्न-भिन्न होने के कारण भार $W = m.g$ का मान भिन्न-भिन्न स्थानों पर बदलता है।	2. वस्तु का द्रव्यमान सभी स्थानों पर नियत रहता है।
3. भार एक सदिश राशि है, जिसकी दिशा सदैव पृथ्वी के केन्द्र की ओर होती है।	3. द्रव्यमान एक अदिश राशि है।
4. अनन्त पर या पृथ्वी के केन्द्र पर इसका मान शून्य होता है।	4. इसका मान कभी भी शून्य नहीं होता।
5. यह कमानी तुला से मापा जाता है।	5. यह भौतिक तुला से मापा जाता है।

प्र.2. यदि पृथ्वी के कक्ष में घूमते हुए उपग्रह का द्रव्यमान किसी कारणवश

दोगुना हो जाये तो, उसके आवर्तकाल पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

उत्तर- किसी ग्रह के उपग्रह के आवर्तकाल का मान उपग्रह के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है। अत: उपग्रह का द्रव्यमान दोगुना करने पर उपग्रह का आवर्तकाल अपरिवर्तित रहेगा।

प्र.3. क्या किसी कृत्रिम उपग्रह को ऐसी कक्षा में स्थापित किया जा सकता है कि वह सदैव राजस्थान की राजधानी जयपुर के ऊपर ही दिखायी देता रहे? स्पष्ट कीजिए।

उत्तर- हाँ, यदि पृथ्वी का परिभ्रमण करने वाले उपग्रह का आवर्तकाल 24 घंटे हो तब ऐसा उपग्रह पृथ्वी पर खड़े प्रेक्षक को सदैव स्थिर प्रतीत होगा। ऐसा उपग्रह भू-स्थाई उपग्रह कहलाता है। इसकी कक्षा वृत्तीय तथा पृथ्वी की भूमध्य रेखा के तल में होनी चाहिए।

प्र.4. सामान्यतया रॉकेट भूमध्य रेखीय तल में पश्चिम से पूर्व की ओर ही क्यों छोड़े जाते हैं?

उत्तर- पृथ्वी सदैव पश्चिम से पूर्व की ओर घूर्णन गति करती है। इस कारण से रॉकेट को भूमध्य रेखीय तल में पश्चिम से पूर्व की ओर छोड़ने के लिए कम वेग की आवश्यकता होती है।

प्र.5. सरल लोलक पर आधारित घड़ी को यदि पृथ्वी के केन्द्र पर रखे तो इसका आवर्तकाल क्या होगा?

उत्तर- पृथ्वी के केन्द्र पर गुरुत्वीय त्वरण का मान शून्य होता है जिससे सरल लोलक पर आधारित घड़ी को पृथ्वी के केन्द्र पर रखने पर घड़ी का आवर्तकाल अनन्त होगा तथा घड़ी नहीं चलेगी।

प्र.6. हरित ग्रह प्रभाव के कारण यदि ध्रुवों की बर्फ पिघले तो पृथ्वी पर दिन की अवधि पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

उत्तर- हरित ग्रहप्रभाव के कारण यदि ध्रुवों की बर्फ पिघलेगी तो अधिक मात्रा में बर्फ पिघलने की स्थिति में पृथ्वी की माध्य त्रिज्या में कमी आयेगी जिसके कारण घूर्णी आवर्त्तकाल 24 घंटे से कुछ कम हो जायेगा, जिससे दिन की अवधि कुछ कम हो जायेगी।

प्र.7. भिन्न-भिन्न देश अपनी संचार व्यवस्था के लिए संचार उपग्रह कक्षाओं में स्थापित करते हैं, क्या यह कक्षायें भिन्न होती है? समझाइए।

उत्तर- संचार व्यवस्था के लिये भूस्थिर उपग्रह प्रयोग में लिये जाते हैं, जिनकी ऊँचाई के व्यंजक $h = \left(\frac{T^2 R^2 \cdot g}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R$ में $T = 24$ घंटे तथा अन्य स्थिर राशियों के मान रखने पर यह लगभग 36000 km प्राप्त होती है, जो सभी देशों के लिये समान है। अत: पृथ्वी पर स्थित सभी देशों के लिये यह कक्षा समान होगी।

प्र.8. यदि पृथ्वी स्वयं की अक्ष के सापेक्ष घूर्णन बन्द कर दे, गुरुत्वीय त्वरण के मान में, विषुवत् रेखा व ध्रुवों पर क्या परिवर्तन होगा?

उत्तर- यदि पृथ्वी स्वयं की अक्ष के सापेक्ष घूर्णन बन्द कर दे तो विषुवत् रेखा (भूमध्य रेखा) पर गुरुत्वीय त्वरण के मान में वृद्धि होगी जबकि ध्रुवों पर गुरुत्वीय त्वरण के मान में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

प्र.9. क्या कुछ ऐसे आकाशीय पिंड भी होते हैं, जिनके लिए गुरुत्वीय त्वरण का मान अनंत हो सकता है?

उत्तर- सामान्यत: ऐसा कोई आकाशीय पिण्ड नहीं है, जिसके लिये गुरुत्वीय त्वरण का मान अनन्त होता हो किन्तु सापेक्षवाद के सिद्धान्त से यदि कोई आकाशीय पिण्ड प्रकाश के वेग से गति करने लगे तो उसका गतिक द्रव्यमान अनन्त माना जाता है, उस स्थिति में गुरुत्वीय त्वरण अनन्त हो सकता है, किन्तु ऐसा होना व्यवहारिक नहीं है।

प्र.10. एक उपग्रह ग्रह के चारों ओर वृत्ताकार कक्षा में घूमता है। यदि उपग्रह पर गुरुत्वाकर्षण बल F हो तो अभिकेन्द्रीय बल क्या होगा?

उत्तर- ग्रह के चारों ओर वृत्ताकार कक्षा में परिक्रमा करने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल, गुरुत्वाकर्षण बल ही प्रदान करता है। अत: उपग्रह पर अभिकेन्द्रीय बल = गुरुत्वाकर्षण बल = F

प्र.11. गुरुत्वीय विभव की परिभाषा लिखिए एवं SI पद्धति में मात्रक बताइए।

उत्तर- एकांक द्रव्यमान को अनन्त से गुरुत्वीय क्षेत्र में स्थित किसी बिन्दु तक लाने में जितना कार्य होता है, उसे उस बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव कहते हैं।

गुरुत्वीय विभव का S.I. मात्रक : जूल/किग्रा

प्र.12. यदि किसी कारणवश एक उपग्रह की गतिज ऊर्जा 100 प्रतिशत बढ़ जाये तो उसका क्या व्यवहार होगा?

उत्तर- यदि गतिज ऊर्जा 100% बढ़ा दी जावेगी तो गतिज ऊर्जा दुगुनी हो जावेगी अर्थात् $\frac{1}{2}mv^2$ से mv^2 हो जायेगी

नवीन स्थिति में गतिज ऊर्जा $= mv^2$

$$= \frac{1}{2} m \times 2v^2 = \frac{1}{2} m (\sqrt{2}v)^2$$

अर्थात् उपग्रह का वेग $\sqrt{2}v$ हो जायेगा, जो पलायन वेग के बराबर होगा और उपग्रह कक्षा से बाहर दूर की ओर पलायन कर जावेगा।

निबन्धात्मक प्रश्न

1 किसी उपग्रह की गतिज ऊर्जा तथा बंधन ऊर्जा के सूत्र व्युत्पन्न कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 6.10.3 तथा 6.10.4 पर देखें।

2 भारतीय खगोलविदों के योगदान का उल्लेख कीजिये।

उत्तर- अनुच्छेद 6.15 पर देखें।

3 कक्षीय वेग तथा पलायन वेग से क्या अभिप्राय है? इनके लिये सूत्र स्थापित कर सम्बन्ध बताइये।

उत्तर- अनुच्छेद 6.10.1 तथा 6.8 पर देखें।

4 g तथा G के बीच सम्बन्ध स्थापित कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 6.3 पर देखें।

5 सिद्ध कीजिए कि पृथ्वी तल के समीप घूमते हुए उपग्रह का कक्षीय वेग लगभग 8 km/s होता है।

उत्तर- पृथ्वी के निकट उपग्रह का कक्षीय वेग

$$v_0 = \sqrt{gR} = \sqrt{6.4 \times 10^6 \times 10}$$

$$= \sqrt{64 \times 10^6} = 8 \times 10^3 \text{ मी./से.} = 8 \text{ किमी./सेकण्ड}$$

यदि g का मान 9.8 मी./से.^{2} रखा जाये तब कक्षीय वेग $v_0 = 7.92$ किमी./से. (लगभग 8 किमी./से.) प्राप्त होता है।

6 भूस्थायी उपग्रह की पृथ्वी तल से ऊचाँई की गणना कीजिए। इसको संचार के रूप में कैसे उपयोग करते हैं?

उत्तर- अनुच्छेद 6.13 पर देखें।

7 पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता में परिवर्तन (1) ऊचाँई के साथ (2) गहराई के साथ (3) पृथ्वी के घूर्णन के कारण समझाइये।

उत्तर- अनुच्छेद 6.4 का भाग *(a)*, *(b)* तथा *(d)* पर देखें।

8 गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा को परिभाषित कीजिये। किसी पिंड को पृथ्वी तल से h ऊँचाई तक भेजने में स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन की गणना करो। जब $h << R$ हो तो स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन बताइये।

उत्तर- अनुच्छेद 6.6 पर देखें।

9 कैप्लर के नियमों को समझाइये।

उत्तर- अनुच्छेद 6.9 पर देखें।

10 अन्तरिक्ष मे भारहीनता को स्पष्ट कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 6.11 पर देखें।

11 प्रक्षेपण वेग के लिये सूत्र प्रतिपादित कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 6.12 पर देखें।

12 न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम को लिखिये। इसे सदिश रूप में व्यक्त कीजिये तथा दर्शाइये कि इसमें क्रिया–प्रतिक्रिया नियम का पालन होता है।

उत्तर- अनुच्छेद 6.2 व 6.2.1 पर देखें।

आंकिक प्रश्न

प्र.1. धातु के दो गोले, जिनका द्रव्यमान क्रमशः 50 kg व 100 kg है। तथा इनके केन्द्रों की बीच की दूरी 50 cm है। इनके बीच गुरुत्वाकर्षण बल का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$m_1 = 50 \text{ kg}$$
$$m_2 = 100 \text{ kg}$$
$$d = 50 \text{ cm} = 0.50 \text{ m}$$

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

$$F = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 50 \times 100}{0.50 \times 0.50}$$

$$F = 1.334 \times 10^{-6} N$$

प्र.2 यदि किसी कारण वश, उपग्रह की क्षीय चाल 41.4 प्रतिशत बढ़ जाये। क्या इस स्थिति में उपग्रह पलायन कर जायेगा? स्पष्ट कीजिए।

हल: माना कि किसी उपग्रह की कक्षीय चाल v_0 है

यदि कक्षीय चाल 41.4 प्रतिशत बढ़ जाती हो तो

परिवर्तित कक्षीय चाल

$$v_0' = \left(\frac{100 + 41.4}{100}\right) v_0$$

$$v_0' = \frac{141.4}{100} v_0$$

या $$v_0' = 1.414 v_0$$

या $$v_0' = \sqrt{2}\, v_0 = v_e = 11.2 \text{ km/sec}$$

अत: उपग्रही की चाल पलायन वेग के तुल्य हो जायेगी और वह पलायन कर जायेगा।

प्र.3 एक पिंड को पृथ्वी तल से 10 km/s के वेग से फेंका जाता है, ये पलायन वेग से थोड़ा कम है, गणना कीजिये पिंड कितनी ऊँचाई तक जायेगा?

हल: प्रश्नानुसार पिण्ड को पृथ्वी तल से प्रक्षेपित करने का वेग

$$v = 10 \text{ km/s} = 10^4 \text{ m/s}$$

माना कि पिण्ड h ऊँचाई तक जायेगा जहाँ उसका वेग शून्य हो जाता है।

अत: यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम से

$$-\frac{GM_em}{R_e} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GM_e \cdot m}{(R_e + h)} + \frac{1}{2}m(0)^2$$

या $$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GM_e \cdot m}{R_e} - \frac{GM_e \cdot m}{(R_e + h)}$$

या $$\frac{1}{2}mv^2 = GM_e \cdot m\left[\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_e + h}\right]$$

या $$v^2 = 2GM_e\left[\frac{R_e + h - R_e}{R_e(R_e + h)}\right]$$

या $$v^2 = \frac{2GM_eh}{R_e^2\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)}$$ किन्तु $\frac{GM_e}{R_e^2} = g$

$\therefore$ $$v^2 = \frac{2gh}{\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)}$$

या $$v^2 + \frac{v^2 \cdot h}{R_e} = 2gh$$

या $$v^2 = \left(2g - \frac{v^2}{R_e}\right)h$$

∴ $$h = \frac{v^2}{\left(2g - \frac{v^2}{R_e}\right)} = \frac{(10^4)^2}{\left(2 \times 9.8 - \frac{10^4 \times 10^4}{6.4 \times 10^6}\right)}$$

या $$h = \frac{10^8}{(19.6 - 15.625)}$$

या $$h = \frac{10^8}{3.975}$$

या $h = 2.51 \times 10^7 m$

या $h = 2.51 \times 10^4 km$

प्र.4. पृथ्वी के पृष्ठ पर किसी वस्तु का भार 72 N है। पृथ्वी की त्रिज्या की आधी ऊँचाई पर, वस्तु पर गुरुत्वीय बल कितना होगा ?

हल: प्रश्नानुसार पृथ्वी के पृष्ठ पर किसी वस्तु का भार

$$W_s = m \cdot g_s = \frac{m.GM_e}{R_e^2} = 72 \text{ N} \quad ...(1)$$

तथा $h = \frac{R_e}{2}$ ऊँचाई पर उसी वस्तु का भार

$$W_h = m \cdot g_h = \frac{m \cdot GM_e}{\left(R_e + \frac{R_e}{2}\right)^2} = \frac{4}{9}\frac{mGM_e}{R_e^2} \quad ...(2)$$

समी. (1) से मान रखने पर,

$$W_h = \frac{4}{9} \times 72 = 32 \text{ N}$$

प्र.5. पृथ्वी सतह पर पलायन चाल 11.2 km/s है। किसी वस्तु को इस चाल की दो गुनी चाल से फेकने पर , पृथ्वी से अत्यधिक दूरी पर वस्तु की चाल क्या होगी? सूर्य तथा अन्य आकाशीय पिण्डों की उपस्थिति की उपेक्षा करें।

हल: पृथ्वी की सतह पर पलायन चाल $v_e = 11.2 \text{ km/s} = 11.2 \times 10^3 \text{ m/s}$ जब कोई वस्तु इस चाल की दो गुनी चाल से फेंकी जाती है तब पृथ्वी से अत्यधिक दूरी पर गुरुत्वीय सीमा से बाहर जब वह h ऊँचाई पर पहुँचेगी तो उसकी चाल v_h हो जायेगी तथा गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा शून्य होगी।

तब यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम से,

जब $v = 2v_e$

$$v = 2 \times 11.2 \times 10^3 \text{ m/s}$$
$$= 22.4 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$-\frac{GM_e \cdot m}{R_e} + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_h^2 + 0$$

या $$-g \cdot R_e + \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}v_h^2 \qquad \left(\because \frac{GM_e}{R_e^2} = g\right)$$

∴ $$v_h^2 = v^2 - 2gR_e$$

∴ $$v_h = \sqrt{v^2 - 2gR_e}$$

या $$v_h = \sqrt{(22.4 \times 10^3)^2 - 2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6}$$

या $$v_h = \sqrt{501.76 \times 10^6 - 125.44 \times 10^6}$$

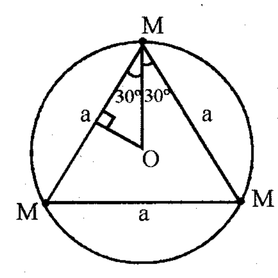
या $$v_h = \sqrt{376.32 \times 10^6}$$

या $v_h = 19.4 \times 10^3 \text{ m/s}$

या $v_h = 19.4 \text{ km/s}$

प्र.6. तीन समान द्रव्यमान M के पिण्ड *a* भुजा के समबाहु त्रिभुज के शीर्ष पर स्थित है। तीनो पिण्डों को एक वृत्त पर किस चाल से घुमाया जाये कि त्रिभुज वृत्तीय कक्ष की परिधि पर चले तथा त्रिभुज की भुजा अपरिवर्तित रहे ?

हल: प्रश्नानुसार तीन समान M द्रव्यमान वाले पिण्ड a भुजा के समबाहु त्रिभुज के शीर्ष पर स्थित हैं। माना कि तीनों पिण्डों को O केन्द्र वाले एक वृत्त पर v चाल से घुमाने पर त्रिभुज वृत्तीय कक्षा की परिधि पर चलता है तथ त्रिभुज की भुजा अपरिवर्तित रहती है। इस स्थिति में वृत्तीय गति करते हुये प्रत्येक पिण्ड पर अन्य दो पिण्डों के कारण गुरुत्वाकर्षण बल कार्य करेगा और इस बल का केन्द्र की ओर घटक उसको अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करेगा।



चित्र 6.32

∴ $$\frac{Mv^2}{r} = \frac{GM \cdot M}{a^2}\cos 30° + \frac{GMM}{a^2}\cos 30°$$

किन्तु $$\frac{a/2}{r} = \cos 30°$$

∴ $$r = \frac{a}{2\cos 30°} = \frac{a}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad \frac{Mv^2}{a/\sqrt{3}} = \frac{2GM^2}{a^2}\cos 30°$$

या $$\frac{\sqrt{3}\,Mv^2}{a} = \frac{2GM^2}{a^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{GM}{a}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

प्र.7. 3 कि.ग्रा. की वस्तु की स्थितिज ऊर्जा पृथ्वी सतह पर −54 जूल है, तो इसके पलायन वेग की गणना कीजिए।

हल: वस्तु का द्रव्यमान $m = 3$ kg

पृथ्वी की सतह पर स्थितिज ऊर्जा = − 54 जूल

अर्थात् $$U_s = -\frac{GM_e \cdot m}{R_e} = -54$$

या $$\frac{GM_e \times 3}{R_e} = 54$$

या $$\frac{GM_e}{R_e} = 18$$

∴ पलायन वेग $$v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$$

या $$v_e = \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{36}$$

$$\therefore \quad v_e = 6 \text{ m/s}$$

प्र.8. पृथ्वी तल से लगभग किस ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण का मान सतह की तुलना मे 10 प्रतिशत कम हो जायेगा?

हल: माना कि पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण का मान सतह की तुलना में 10% कम हो जाता है।

अर्थात् $$g_h = \left(\frac{100-10}{100}\right) \times g_s$$

या $$\frac{GM_e}{(R_e+h)^2} = \frac{90}{100} \times \frac{GM_e}{R_e^2}$$

या $$\frac{R_e^2}{(R_e+h)^2} = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{R_e}{R_e+h} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

या $$\frac{R_e+h}{R_e} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

या $$1 + \frac{h}{R_e} = \frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \frac{h}{R_e} = \frac{\sqrt{10}}{3} - 1$$

या $$h = \left(\frac{\sqrt{10}}{3} - 1\right) R_e$$

$$h = \left(\frac{3.16}{3} - 1\right) R_e$$

$$h = (1.05 - 1)\,R_e$$

$$h = 0.05\,R_e$$

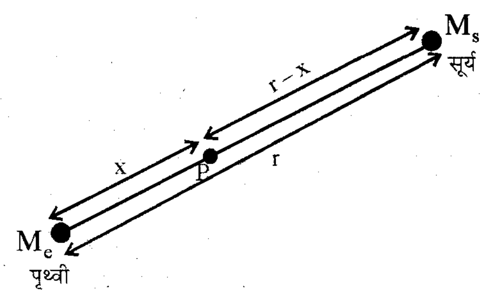
या $$h = 0.05 \times 6.4 \times 10^6 \text{ m}$$

या $$h = 320 \times 10^3 \text{ m}$$

या $$h = 320 \text{ km}$$

प्र.9. पृथ्वी व सूर्य के बीच ऐसा बिन्दु होता है। जहाँ पर दोनों के कारण किसी वस्तु पर नैट गुरुत्वाकर्षण बल शून्य होता है। इसे लैगरेन्जियन बिन्दु भी कहते है। पृथ्वी से इस बिन्दु की दूरी ज्ञात कीजिए। सूर्य व पृथ्वी के बीच की दूरी लगभग 10^8 km है। व सूर्य का द्रव्यमान पृथ्वी से 3.24×10^5 गुना है।

हल: माना कि प्रश्नानुसार पृथ्वी से x दूरी पर बिन्दु P लैगरेन्जियन बिन्दु है जहाँ नैट गुरुत्वीय बल शून्य है।



चित्र 6.33

सूर्य व पृथ्वी के बीच दूरी

$$r = 10^8 \text{km} = 10^{11} \text{ m}$$

तथा सूर्य का द्रव्यमान = 3.24×10^5 पृथ्वी का द्रव्यमान

अर्थात् $$M_s = 3.24 \times 10^5 M_e$$

$$\therefore \quad \frac{GM_e \cdot m}{x^2} - \frac{GM_s \cdot m}{(r-x)^2} = 0$$

या $$\frac{GM_e \cdot m}{x^2} = \frac{GM_s \cdot m}{(r-x)^2}$$

या $$\frac{M_e}{x^2} = \frac{M_s}{(r-x)^2}$$

किन्तु $$M_s = 3.24 \times 10^5 M_e$$

या $$\frac{M_e}{x^2} = \frac{3.24 \times 10^5\, M_e}{(r-x)^2}$$

या $$\frac{1}{x^2}=\frac{32.4\times10^4}{(r-x)^2}$$

या $$\frac{1}{x}=\frac{5.69\times10^2}{(r-x)}$$

या $$\frac{r-x}{x}=569$$

या $$\frac{r}{x}-1=569$$

$$\frac{r}{x}=570$$

∴ $$x=\frac{r}{570}=\frac{10^{11}}{570}=1.75\times10^8\,m$$

∴ पृथ्वी से लैगरेन्जियन बिन्दु की दूरी = 1.75×10^8 m

प्र.10. कल्पना कीजिये कि एक वस्तु किसी बड़े तारे के चारों ओर R त्रिज्या के वृत्तीय कक्षा में घूम रही है, इसका आवर्तकाल T है यदि वस्तु तथा तारे के बीच गुरुत्वाकर्षण बल $R^{\left(-\frac{5}{2}\right)}$ के समानुपाती है तो इसका आवर्तकाल त्रिज्या पर किस प्रकार निर्भर करेगा ?

हल: प्रश्नानुसार वस्तु एक बड़े तारे के चारों ओर R त्रिज्या के वृत्तीय कक्षा में घूम रही है। माना कि वह वस्तु रेखीय चाल v से T समय में एक चक्कर पूरा कर रही है, तब

$$\frac{2\pi R}{T}=v \qquad ...(1)$$

वस्तु तथा तारे के बीच गुरुत्वाकर्षण बल $R^{-5/2}$ के समानुपाती है

∴ $$F\propto R^{-5/2}$$

या $$F=K.R^{-5/2} \qquad ...(2)$$

∵ $$\frac{Mv^2}{R}=F$$

मान रखने पर,

$$\frac{M}{R}\times\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2=K.R^{-5/2}$$

या $$\frac{M}{R}\times\frac{4\pi^2R^2}{T^2}=K.R^{-5/2}$$

$$\frac{4\pi^2MR}{T^2}=K.R^{-5/2}$$

$$T^2=\frac{4\pi^2MR}{K\cdot R^{-5/2}}=\frac{4\pi^2M}{K}R^{7/2}$$

$\left(\frac{4\pi^2M}{K}\right)$ नियत मान राशि है।

∴ $$T^2\propto R^{7/2}$$

प्र.11. चन्द्रमा पर पलायन चाल की गणना कीजिए। दिया है पृथ्वी की त्रिज्या चन्द्रमा से चार गुनी व द्रव्यमान 80 गुना है।

हल: $R_E=4\times R_M$ तथा $M_E=80\,M_M$

∴ चन्द्रमा पर पलायन चाल

$$v_{eM}=\sqrt{\frac{2GM_M}{R_M}}$$

या $$v_{eM}=\sqrt{\frac{2G\times M_E/80}{\left(R_E/4\right)}}=\sqrt{\frac{4\times2\,GM_E}{80\,R_E}}$$

या $$v_{eM}=\frac{1}{\sqrt{20}}\times\sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}$$

किन्तु $$v_{eE}=\sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}=11.2\text{ km/s}$$

∴ $$v_{eM}=\frac{1}{\sqrt{20}}\times11.2\text{ km/s}$$

या $$v_{eM}=\frac{1}{4.47}\times11.2\text{ km/s}$$

∴ $$v_{eM}=2.50\text{ km/s}$$

∴ चन्द्रमा पर पलायन चाल = 2.50 km/s

प्र.12. एक आकाशीय प्रयोगशाला जिसका द्रव्यमान 2×10^3 kg है, को $2R$ त्रिज्या की कक्षा से $3R$ त्रिज्या कक्षा में स्थानान्तरित किया जाता है तो किये गये कार्य की गणना करो। यहाँ $R=6400$ km (पृथ्वी की त्रिज्या) है।

हल: आकाशीय प्रयोगशाला का द्रव्यमान $m=2\times10^3$ kg इसे $r_1=2R$ त्रिज्या की कक्षा से $r_2=3R$ त्रिज्या की कक्षा में स्थानान्तरित करने पर स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि

$$\Delta U=U_2-U_1$$

या $$\Delta U=-\frac{GMm}{r_2}-\left(-\frac{GMm}{r_1}\right)$$

या $$\Delta U=GMm\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

या $$\Delta U=GMm\left(\frac{1}{2R}-\frac{1}{3R}\right)=GMm\left(\frac{3-2}{6R}\right)$$

$$\Delta U=\frac{GMm}{6R}$$

यही स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि आकाशीय प्रयोगशाला पर किये गये कार्य W के तुल्य होगी।

∴ $$W = \Delta U = \frac{GMm}{6R} = \frac{gRm}{6}$$

या $$W = \frac{9.8 \times 6.4 \times 10^6 \times 2 \times 10^3}{6}$$

या $$W = 20.9 \times 10^9 J$$

या $$W = 2.09 \times 10^{10} J$$

∴ $$W = 2.1 \times 10^{10} J$$

प्र.13. यदि पृथ्वी की त्रिज्या 6400 km हो तो किसी वस्तु का भूमध्य रेखा (Equator) पर रेखीय वेग क्या होगा?

हल: पृथ्वी की त्रिज्या $R = 6400\ km = 6400 \times 10^3\ m$

मान लें कि किसी वस्तु का भूमध्य रेखा पर रेखीय वेग v है।

तब $$\frac{m \cdot v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$$

तब $$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R}}$$

या $$v = \sqrt{gR}$$

$$v = \sqrt{9.8 \times 6400 \times 10^3}$$

$$v = \sqrt{2} \times 7 \times 80 \times 10$$

$$v = 7918.4\ m/s$$

$$v = \frac{7918.4 \times 60 \times 60}{1000} km/h$$

$$v = 28506\ km./h$$

प्र.14. m द्रव्यमान की वस्तु को पृथ्वी सतह से पृथ्वी की त्रिज्या R के बराबर ऊंचाई तक ले जाने में स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि क्या होगी ?

हल: पृथ्वी की सतह पर स्थितिज ऊर्जा $U_s = -\frac{GMm}{R}$

पृथ्वी की सतह से $h = R$ ऊँचाई पर स्थितिज ऊर्जा

$$U_h = -\frac{GMm}{(R+R)} = -\frac{GMm}{2R}$$

स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि

$$\Delta U = U_h - U_s$$

या $$\Delta U = -\frac{GMm}{2R} - \left(-\frac{GMm}{R}\right)$$

या $$\Delta U = \frac{GMm\,[-1+2]}{2R}$$

या $$\Delta U = \frac{GMm}{2R}$$ किन्तु $GM = gR^2$

∴ $$\Delta U = \frac{gR^2 m}{2R}$$

या $$\Delta U = \frac{mgR}{2}$$

प्र.15. एक उपग्रह पृथ्वी केन्द्र से x दूरी पर पृथ्वी के चक्कर लगा रहा है। यदि वृत्तीय कक्षा की त्रिज्या 1% घट जाती है तो उसकी चाल में क्या वृद्धि होगी ?

हल: प्रश्नानुसार उपग्रह पृथ्वी के केन्द्र से x दूरी पर पृथ्वी के चक्कर लगा रहा है।

∴ $$\frac{mv^2}{x} = \frac{GM \cdot m}{x^2}$$

∴ $$v = \sqrt{\frac{GM}{x}} \qquad ...(1)$$

त्रिज्या 1% घटने पर,

$$v' = \sqrt{\frac{GM}{\frac{(100-1)}{100}x}}$$

या $$v' = \sqrt{\frac{100}{99}\frac{GM}{x}}$$

∴ चाल में वृद्धि $$\Delta v = v' - v = \sqrt{\frac{100}{99}\frac{GM}{x}} - \sqrt{\frac{GM}{x}}$$

$$\Delta v = \left(\sqrt{\frac{100}{99}} - 1\right)\sqrt{\frac{GM}{x}}$$

$$\Delta v = (\sqrt{1.010101} - 1)\, v$$

$$\frac{\Delta v}{v} = (1.005 - 1) = 0.005$$

∴ चाल में % वृद्धि $= \frac{\Delta v}{v} \times 100 = 0.005 \times 100 = 0.5\%$

प्र.16. सूर्य की त्रिज्या कितनी हो जाये कि ये काला विविर (Black-Hole) बन जाये? सूर्य द्रव्यमान नियत माने (10^{30} kg) तथा प्रक्षेप्य के वेग की अधिकतम सीमा प्रकाश वेग के बराबर माने क्योंकि आइन्सटीन के विशिष्ट सापेक्ष वाद सिद्धान्त के अनुसार किसी वस्तु का वेग प्रकाश वेग से अधिक नहीं हो सकता है।

हल: काले विविर ऐसे आकाशीय पिण्ड होते है जिनसे कोई वस्तु पलायन नहीं कर पाती है क्योंकि इनका गुरुत्वाकर्षण अत्यधिक होता है।

सूर्य का द्रव्यमान $M_s = 10^{30}\ kg$

प्रश्न में पलायन न कर पाने के लिये प्रक्षेप्य वेग की अधिकतम सीमा प्रकाश के वेग के बराबर मानी गई है।

∴ $$v_e = c$$

$$\sqrt{\frac{2GM_s}{R}} = c$$

या $$\frac{2GM_s}{R} = c^2$$

$\therefore$ $$R = \frac{2GM_s}{c^2}$$

$\therefore$ $$R = \frac{2\times 6.67\times 10^{-11}\times 10^{30}}{3\times 10^8\times 3\times 10^8}$$

$$R = \frac{13.34}{9}\times 10^3 \text{ m}$$

$$R = 1.482\times 10^3 \text{m}$$

या $$R = 1482 \text{ m}$$

प्र.17. पृथ्वी के अन्दर केन्द्र से गुजरती हुई आर–पार सुरंग में किसी वस्तु को डालने पर, सरल आवर्त्त गति करने लगती है। इसके लिये आवर्त्तकाल का मान ज्ञात कीजिए। यदि पृथ्वी की त्रिज्या 6.4×10^6 m. व द्रव्यमान 6×10^{24} kg है।

हल: पृथ्वी की त्रिज्या $R = 6.4\times 10^6$ m

पृथ्वी का द्रव्यमान $M = 6\times 10^{24}$ kg

पृथ्वी के अन्दर केन्द्र से गुजरती हुई आर–पार सुरंग में वस्तु को डालने पर उसकी सरल आवर्त्त गति का आवर्त्तकाल

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{Gd}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\times \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}}}$$

या $$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}$$

या $$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\times 3.14\sqrt{\frac{6.4\times 10^6}{9.8}}$$

या $$T = 50.75 \text{ second}$$

या $$T = 84.6 \text{ minute}$$

$\therefore$ $T = 85$ minute (लगभग)

प्र.18. पृथ्वी की त्रिज्या 4% कम हो जाये तथा द्रव्यमान नियत रहे तो पलायन वेग में क्या परिवर्तन होगा ?

हल: पृथ्वी पर वस्तु का पलायन वेग

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad ...(1)$$

प्रश्नानुसार पृथ्वी की त्रिज्या 4% कम होने पर

त्रिज्या $$R' = \left(\frac{100-4}{100}\right)R = \frac{96}{100}R$$

तब द्रव्यमान नियत रहने पर पलायन वेग

$$v'_e = \sqrt{\frac{2GM}{R'}} = \sqrt{\frac{2GM}{\frac{96}{100}R}}$$

या $$v'_e = \sqrt{\frac{100}{96}}\times\sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad ...(2)$$

समी. (2) में समी. (1) से भाग देने पर,

$$\frac{v'_e}{v_e} = \sqrt{\frac{100}{96}}$$

$$\frac{v'_e}{v_e} - 1 = \sqrt{\frac{100}{96}} - 1$$

$$\left(\frac{v'_e - v_e}{v_e}\right) = \left(\sqrt{1.04} - 1\right)$$

$$= (1.02 - 1)$$

$$\left(\frac{v'_e - v_e}{v_e}\right) = 0.02$$

$\therefore$ पलायन वेग में % वृद्धि $= \left(\dfrac{v'_e - v_e}{v_e}\right)\times 100$

$$= 0.02\times 100 = 2\%$$

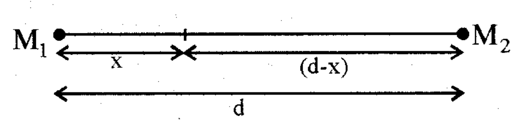
प्र.19. दो पिंड जिनके द्रव्यमान क्रमशः M_1 व M_2 है तथा एक दूसरे से d दूरी पर रखे है। सिद्ध कीजिए जिस बिन्दु पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता शून्य है, गुरुत्वीय विभव

$$V = -\frac{G}{d}\left(M_1 + M_2 + 2\sqrt{M_1 M_2}\right) \text{ होगा।}$$

हल: दो पिण्डों के द्रव्यमान M_1 व M_2

उनके बीच दूरी = d

माना कि M_1 द्रव्यमान वाले पिण्ड से x दूरी पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता शून्य है।



चित्र 6.34

$$\therefore \frac{GM_1\cdot m}{x^2} - \frac{GM_2\cdot m}{(d-x)^2} = 0$$

या $$\frac{GM_1\cdot m}{x^2} = \frac{GM_2\cdot m}{(d-x)^2}$$

$\therefore$ $$\frac{M_1}{x^2} = \frac{M_2}{(d-x)^2}$$

$$\frac{d-x}{x} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$$

$$\frac{d}{x} - 1 = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$$

$$\frac{d}{x} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} + 1 = \frac{\sqrt{M_2} + \sqrt{M_1}}{\sqrt{M_1}}$$

$\therefore$ $$x = \frac{\sqrt{M_1}}{\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2}} \cdot d$$

तब $$(d-x) = \frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2}} \cdot d$$

$\therefore$ गुरुत्वीय विभव $V_g = V_{g1} + V_{g2}$

$$V_g = -\frac{GM_1}{x} - \frac{GM_2}{(d-x)}$$

या $$V_g = -GM_1 \frac{(\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2})}{\sqrt{M_1} \cdot d} - GM_2 \frac{(\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2})}{\sqrt{M_2} \cdot d}$$

या $$V_g = -\frac{G}{d}\left[\sqrt{M_1}\,(\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2}) + \sqrt{M_2}(\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2})\right]$$

या $$V_g = -\frac{G}{d}\left[M_1 + \sqrt{M_1 M_2} + \sqrt{M_1 \cdot M_2} + M_2\right]$$

या $$V_g = -\frac{G}{d}\left[M_1 + M_2 + 2\sqrt{M_1 M_2}\right]$$

(यही सिद्ध करना था)