ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ / 1211 / 414 / છ, તા.15-9-2011-થી મંજૂર

ભૌતિકવિજ્ઞાન

ધોરણ 11

(સિમેસ્ટર II)

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

© ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, ગાંધીનગર
આ પાઠ્યપુસ્તકના સર્વ હક ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળને હસ્તક છે.
આ પાઠ્યપુસ્તકનો કોઈ ભાગ કોઈ પણ રૂપમાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક
મંડળના નિયામકની લેખિત પરવાનગી વગર પ્રકાશિત કરી શકાશે નહિ.

લેખન
ડૉ. પી. એન. ગજ્જર (કન્વીનર)
ડૉ. વી. પી. પટેલ
પ્રો. એમ. એસ. રામી
ડૉ. એ. પી. પટેલ
ડૉ. ડી. એચ. ગદાણી
શ્રી પંકજ જે. ચાવડા

અનુવાદ
ડૉ. પી. એન. ગજ્જર
ડૉ. વી. પી. પટેલ
પ્રો. એમ. એસ. રામી
ડૉ. એ. પી. પટેલ
ડૉ. ડી. એચ. ગદાણી
શ્રી પંકજ જે. ચાવડા

સમીક્ષા
શ્રી દિનેશભાઈ વી. સુથાર
શ્રી રજનીકાન્ત એન. ચૌધરી
શ્રી મૂકેશભાઈ એચ. ભટ્ટ
શ્રી એસ. જી. પટેલ
શ્રી મયૂર એમ. રાવલ
શ્રી શાન્તિલાલ એસ. પટેલ
શ્રી જે. પી. જોષી
શ્રી વાસુદેવ બી. રાવલ
શ્રી જયંતીભાઈ એમ. પટેલ
શ્રી કલ્પેશ ડી. પટેલ

ભાષાશુદ્ધિ
શ્રી ઓ. બી. દવે

ચિત્રાંકન
શ્રી જી. વી. મેવાડા

સંયોજન
શ્રી ચિરાગ એચ. પટેલ
(વિષય-સંયોજક : ભૌતિકવિજ્ઞાન)

નિર્માણ-આયોજન
શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન
શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

કૉર-કરિક્યુલમ અને એન.સી.ઈ.આર.ટી. દ્વારા એન.સી.એફ.-2005 મુજબ તૈયાર કરવામાં આવેલા નવા રાષ્ટ્રીય અભ્યાસક્રમોના અનુસંધાનમાં ગુજરાત રાજ્ય માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડે નવા અભ્યાસક્રમો તૈયાર કર્યા છે. આ અભ્યાસક્રમો ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર કરવામાં આવે છે.

ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર થયેલા **ધોરણ 11 (સિમેસ્ટર II)**ના **ભૌતિકવિજ્ઞાન** વિષયના નવા અભ્યાસક્રમ અનુસાર તૈયાર કરવામાં આવેલું આ પાઠ્યપુસ્તક વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં એની હસ્તપ્રતની આ સ્તરે શિક્ષણકાર્ય કરતા શિક્ષકો અને તજ્જ્ઞો દ્વારા સર્વાંગી સમીક્ષા કરાવવામાં આવી છે. શિક્ષકો તથા તજ્જ્ઞોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારાવધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરવામાં આવ્યું છે.

આ મૂળ અંગ્રેજીમાં લખાયેલ પાઠ્યપુસ્તકનો આ ગુજરાતી અનુવાદ છે. ગુજરાતી અનુવાદની વિષય અને ભાષાના નિષ્ણાતો દ્વારા સમીક્ષા કરવામાં આવી છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળે પૂરતી કાળજી લીધી છે; તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

ડૉ. ભરત પંડિત	**સુજીત ગુલાટી** IAS
નિયામક	કાર્યવાહક પ્રમુખ
તા.05-08-2015	ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2011, પુનઃમુદ્રણ : 2012, 2013,2014, 2014, 2015
પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી ભરત પંડિત, નિયામક
મુદ્રક :

મૂળભૂત ફરજો

ભારતના દરેક નાગરિકની ફરજ નીચે મુજબ રહેશે :*

(ક) સંવિધાનને વફાદાર રહેવાની અને તેના આદર્શો અને સંસ્થાઓનો, રાષ્ટ્રધ્વજનો અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવાની;

(ખ) આઝાદી માટેની આપણી રાષ્ટ્રીય લડતને પ્રેરણા આપનારા ઉમદા આદર્શોને હૃદયમાં પ્રતિષ્ઠિત કરવાની અને અનુસરવાની;

(ગ) ભારતનાં સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડિતતાનું સમર્થન કરવાની અને તેમનું રક્ષણ કરવાની;

(ઘ) દેશનું રક્ષણ કરવાની અને રાષ્ટ્રીય સેવા બજાવવાની હાકલ થતાં, તેમ કરવાની;

(ચ) ધાર્મિક, ભાષાકીય, પ્રાદેશિક અથવા સાંપ્રદાયિક ભેદોથી પર રહીને, ભારતના તમામ લોકોમાં સુમેળ અને સમાન બંધુત્વની ભાવનાની વૃદ્ધિ કરવાની, સ્ત્રીઓના ગૌરવને અપમાનિત કરે તેવા વ્યવહારો ત્યજી દેવાની;

(છ) આપણી સમન્વિત સંસ્કૃતિના સમૃદ્ધ વારસાનું મૂલ્ય સમજી તે જાળવી રાખવાની;

(જ) જંગલો, તળાવો, નદીઓ અને વન્ય પશુપક્ષીઓ સહિત કુદરતી પર્યાવરણનું જતન કરવાની અને સુધારણા કરવાની અને જીવો પ્રત્યે અનુકંપા રાખવાની;

(ઝ) વૈજ્ઞાનિક માનસ, માનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસા તથા સુધારણાની ભાવના કેળવવાની;

(ટ) જાહેર મિલકતનું રક્ષણ કરવાની અને હિંસાનો ત્યાગ કરવાની;

(ઠ) રાષ્ટ્ર પુરુષાર્થ અને સિદ્ધિનાં વધુ ને વધુ ઉન્નત સોપાનો ભણી સતત પ્રગતિ કરતું રહે એ માટે, વૈયક્તિક અને સામૂહિક પ્રવૃત્તિનાં તમામ ક્ષેત્રે શ્રેષ્ઠતા હાંસલ કરવાનો પ્રયત્ન કરવાની;

(ડ) માતા-પિતાએ અથવા વાલીએ 6 વર્ષથી 14 વર્ષ સુધીની વયના પોતાના બાળક અથવા પાલ્યને શિક્ષણની તકો પૂરી પાડવી.

* ભારતનું સંવિધાન : કલમ 51-क

અનુક્રમણિકા

1. કણોના તંત્રનું ડાઈનેમિક્સ 1-16
2. ચાકગતિ 17-45
3. ગુરુત્વાકર્ષણ 46-71
4. ઘન પદાર્થોના યાંત્રિક ગુણધર્મો 72-90
5. તરલનું મિકેનિક્સ 91-121
6. થરમૉડાઈનેમિક્સ 122-155
7. દોલનો 156-179
8. તરંગો 180-211

- ઉકેલો 212
- પરિશિષ્ટ 228
- સંદર્ભગ્રંથો 230
- પારિભાષિક શબ્દો 231
- લઘુગુણકો 241

આ પાઠ્યપુસ્તક વિશે...

National Curriculum Framwork (NCF), Core-Curriculum અને National Council of Educational Research and Training (NCERT)ના અભ્યાસક્રમોને ધ્યાનમાં રાખી રાષ્ટ્રીય શિક્ષણનીતિના ઉપલક્ષ્યમાં રાજ્ય સરકાર તરફથી મંજૂર કરવામાં આવેલ ધોરણ 11ના ભૌતિકવિજ્ઞાન વિષયના અભ્યાસક્રમ અનુસાર તૈયાર કરવામાં આવેલું આ પાઠ્યપુસ્તક આપની સમક્ષ રજૂ કરતાં અમે આનંદ અનુભવીએ છીએ.

રાજ્ય સરકારે ધોરણ 11માં સિમેસ્ટર પદ્ધતિનો અમલ કર્યો છે. સિમેસ્ટર પદ્ધતિ વિદ્યાર્થીઓના ભણતરનો ભાર ઘટાડનાર થશે તથા અભ્યાસ પ્રત્યે રુચિ વધારનાર થશે.

ધોરણ-11ના ભૌતિકવિજ્ઞાનના આ પાઠ્યપુસ્તકમાં, સિમેન્ટર I અને સિમેન્ટર II દરેકમાં આઠ પ્રકરણોનો સમાવેશ વિષયવસ્તુની ગહનતા, વર્ગખંડમાં અભ્યાસ માટે મળવાપાત્ર સમય વગેરેને ધ્યાનમાં રાખીને કરવામાં આવ્યો છે.

ભૌતિકવિજ્ઞાનના કોઈ પણ વાદ (Theory)ની સ્પષ્ટ સમજણ તો જ પ્રાપ્ત થાય જો તેની સાથે-સાથે તેના આનુષંગિક કોયડાનો ઉકેલ મેળવતાં વિદ્યાર્થી શીખે. આથી જ દરેક પ્રકરણમાં કોઈ પણ નવા વાદને અનુરૂપ કોયડા ગણીને આપેલ છે. પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકનું એક જમા પાસું એ પણ છે કે, દરેક પ્રકરણના અંતે સવિસ્તૃત સારાંશ આપવામાં આવેલ છે, જેના પરથી સમગ્ર પ્રકરણના વિષયવસ્તુ પર ઝડપથી એક નજર કરી શકાય.

સમગ્ર દેશમાં લેવામાં આવતી વિવિધ પ્રવેશ પરીક્ષાના પરિરૂપને ધ્યાનમાં રાખી આ પુસ્તકમાં MCQs, Short questions, Objective questions અને Problemsનો સમાવેશ કરેલ છે. Problemsના ઉકેલ માટે પુસ્તકના અંતે Hints પણ આપવામાં આવેલ છે કે જેથી વિદ્યાર્થીઓ સ્વ-પ્રયત્ને આ કોયડા ઉકેલી શકે. પુસ્તકને અંતે આપેલ Appendices પણ અતિ મહત્ત્વનાં બની રહેશે.

આ પુસ્તક એક નવા જ પરિરૂપ તથા ચાર કલરના પ્રિન્ટિંગમાં પ્રસિદ્ધ કરવામાં આવ્યું છે, તેથી તેમાં રહેલી આકૃતિઓ વધુ સ્પષ્ટ બની રહે છે. સામાન્ય રીતે વિદ્યાર્થીઓ એક ધોરણ પૂરું કરીને આગળના ધોરણમાં જાય ત્યારે જૂનાં પાઠ્યપુસ્તકો જાળવી રાખતાં ન હોવાનું વલણ નોંધાયેલું છે. પરંતુ સિમેસ્ટર પદ્ધતિમાં દરેક સિમેસ્ટરનું મહત્ત્વ હોવાથી તથા પાઠ્યપુસ્તકનું સ્વરૂપ જ અતિસુંદર હોવાથી તે દરેક વિદ્યાર્થીઓને સાચવી રાખવું ગમશે અને તે સંદર્ભ પુસ્તક તરીકે ઉપયોગી બનશે.

આ અગાઉના પાઠ્યપુસ્તકને વિદ્યાર્થીઓ, શિક્ષકો તથા તજ્જ્ઞો દ્વારા ખૂબ જ સારો પ્રતિભાવ મળ્યો હતો. આથી તે પુસ્તકમાંની ઘણા વિષયવસ્તુને આ પુસ્તકમાં મૂળ સ્વરૂપે કે થોડાક ફેરફાર સાથે લેવામાં આવેલ છે. અત્રે અગાઉના લેખકોની ટીમનો અમે ઋણ સ્વીકાર કરીએ છીએ. Review workshopમાં ઉપસ્થિત રહીને જે શિક્ષકમિત્રોએ આ પુસ્તકને ક્ષતિરહિત બનાવવા સૂચનો કર્યાં છે તે બદલ તેમનો પણ આભાર.

પુસ્તક તૈયાર કરતી વખતે તે ક્ષતિરહિત બને તેમજ હકીકતદોષ ન રહી જાય તેની જરૂરી કાળજી વિષય-સલાહકારો, લેખકો અને પરામર્શકો દ્વારા લેવામાં આવી છે. છતાં પણ કોઈ ક્ષતિ રહી ગઈ હોય તો, તે માટે ધ્યાન દોરવા આગ્રહ છે.

લેખકો/સંપાદકો

પ્રકરણ 1

કણોના તંત્રનું ડાઈનેમિક્સ

1.1 પ્રસ્તાવના

1.2 એક-પરિમાણમાં કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર

1.3 ત્રિ-પરિમાણમાં n-કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર

1.4 રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ

1.5 દૃઢ પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર

1.6 નિયમિત ઘનતાવાળા પાતળા સળિયાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર

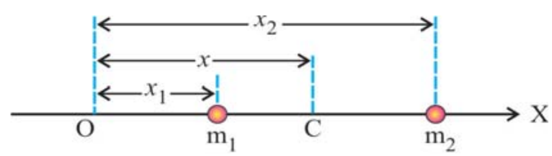
- સારાંશ
- સ્વાધ્યાય

1.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

સિમેસ્ટર-I માં આપણે કણની રેખીય ગતિનો અભ્યાસ કર્યો હતો. હવે આ પ્રકરણમાં આપણે બે કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર, n-કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર, તથા દૃઢ પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર કેવી રીતે શોધી શકાય તે વિશે અભ્યાસ કરીશું. આ ઉપરાંત આપણે કણોના તંત્રની ગતિ સાથે સંકળાયેલ ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ તારવીશું. કણોના તંત્ર માટે ભૌતિકવિજ્ઞાનના સાર્વત્રિક નિયમો પૈકીનો એક એવો વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ પણ તારવીશું.

1.2 એક-પરિમાણમાં કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર (Centre of Mass of a System of Particles in One Dimension)

આકૃતિ 1.1માં દર્શાવ્યા મુજબ, ધારો કે m_1 અને m_2 દ્રવ્યમાન ધરાવતા બે કણો X-અક્ષ પર ઊગમબિંદુ (O) થી અનુક્રમે x_1 અને x_2 અંતરે રહેલા છે.



બે કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર

આકૃતિ 1.1

આ તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર એક એવું બિંદુ છે કે જેનું ઊગમબિંદુ O થી અંતર,

$$\therefore \; x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \qquad (1.2.1)$$

સૂત્ર વડે આપી શકાય છે.

અહીં, x એ x_1 અને x_2નું દળભારિત સરેરાશ સ્થાન ધરાવે છે. જો બન્ને કણો સમાન દ્રવ્યમાનના હોય, તો $m_1 = m_2 = m$.

$$\therefore \; x = \frac{mx_1 + mx_2}{m + m}$$

$$\therefore \; x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad (1.2.2)$$

આમ, **સમાન દ્રવ્યમાન ધરાવતા બે કણોનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર (બન્ને કણોને જોડતા રેખાખંડ પર) બન્ને કણોની મધ્યમાં આવેલું હોય છે.**

આ જ રીતે, જો $m_1, m_2, ..., m_n$ દ્રવ્યમાન ધરાવતા n કણો X-અક્ષ પર ઊગમબિંદુ 'O' થી અનુક્રમે $x_1, x_2, ..., x_n$ અંતરે રહેલા હોય, તો n કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર,

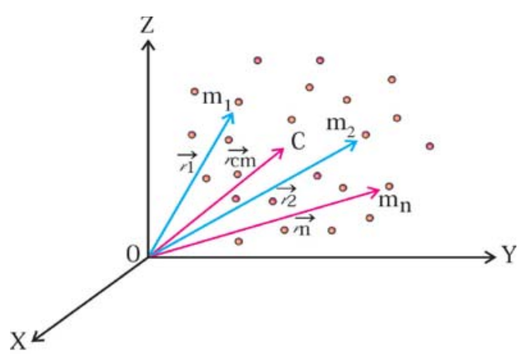
$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

$$\therefore \; x = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} \qquad (1.2.3)$$

$$\therefore \; x = \frac{\Sigma m_i x_i}{\text{M}} \qquad (1.2.4)$$

જ્યાં $\text{M} = \Sigma m_i = n$ કણોના તંત્રનું કુલદ્રવ્યમાન.

1.3 ત્રિ-પરિમાણમાં n-કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર (Centre of Mass of a System of n-Particles in Three Dimensions)



ત્રિપરિમાણમાં n-કણોનું તંત્ર

આકૃતિ 1.2

આકૃતિ 1.2 માં n-કણોનું તંત્ર ત્રિપરિમાણમાં દર્શાવ્યું છે. યામપદ્ધતિના ઊગમબિંદુ 'O'ને અનુલક્ષીને $m_1, m_2, ... , m_n$ દ્રવ્યમાન ધરાવતા કણોના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_n}$ છે. આ તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો સ્થાનસદિશ નીચે આપેલા સૂત્ર વડે દર્શાવી શકાય.

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + ... + m_n\vec{r_n}}{m_1 + m_2 + ... + m_n} \qquad (1.3.1)$$

$$\therefore \; \vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + ... + m_n\vec{r_n}}{\text{M}}$$

અથવા

$$\text{M}\,\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + ... m_n\vec{r_n} \qquad (1.3.2)$$

જ્યાં,

$$\text{M} = m_1 + m_2 + ... + m_n \qquad (1.3.3)$$

$= n$-કણોના તંત્રનું કુલ દ્રવ્યમાન.

1.3.1 દ્રવ્યમાનકેન્દ્રની ગતિ અને ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ (Motion of Centre of Mass and Newton's Second Law of Motion) :

n-કણોના તંત્રમાં રહેલા દરેક કણનું દ્રવ્યમાન સમય સાથે બદલાતું ન હોય તો, સમીકરણ (1.3.2) નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\text{M}\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r_1}}{dt} + m_2\frac{d\vec{r_2}}{dt} + ... + m_n\frac{d\vec{r_n}}{dt}$$

$$\therefore \; \text{M}\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n$$

અહીં, $\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt}$ એ દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો વેગ છે, તથા $\vec{v}_1, \vec{v}_2 ......$, એ અનુરૂપ કણોના વેગ છે.

$$\therefore \; \text{M}\vec{v}_{cm} = \vec{\text{P}}_1 + \vec{\text{P}}_2 + ... + \vec{\text{P}}_n \qquad (1.3.4)$$

$$\therefore \; \text{M}\vec{v}_{cm} = \vec{\text{P}} \qquad (1.3.5)$$

જ્યાં $\vec{\text{P}}_1, \vec{\text{P}}_2, ...$ વગેરે અનુરૂપ કણોના વેગમાન છે, તથા

$\vec{\text{P}} = \vec{\text{P}}_1 + \vec{\text{P}}_2 + ... + \vec{\text{P}}_n$ એ n-કણોના તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન છે.

સમીકરણ (1.3.5) દર્શાવે છે કે **કણોના તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન, તંત્રના કુલ દળ અને તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના વેગના ગુણાકાર જેટલું હોય છે.**

સમીકરણ (1.3.4)નું સમય સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} + ... + \frac{d\vec{P}_n}{dt}$$

$$\therefore M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \vec{F} \quad (1.3.6)$$

$$= m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + ... + m_n \vec{a}_n \quad (1.3.7)$$

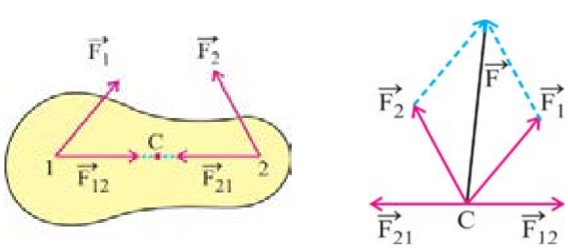
સમીકરણ (1.3.6)માં $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... , $\vec{F}_n$ એ તંત્રના અનુરૂપ કણો પર પ્રવર્તતાં બળો છે તથા $\vec{F}$ એ પરિણામી બળ છે. સમીકરણ (1.3.7)માં $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ એ આ બળો વડે ઉદ્ભવતા અનુરૂપ કણોના પ્રવેગ છે.

સમીકરણ (1.3.5) પરથી,

$$M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{cm} \quad (1.3.8)$$

તંત્રમાં કણો પર પ્રવર્તતાં બળો બે પ્રકારનાં હોય છે :

(1) તંત્રમાં કણો વચ્ચે પ્રવર્તતાં આંતરિક બળો અને (2) બાહ્ય બળો.



(*a*) (*b*)

બે કણોથી બનેલા તંત્ર પર લાગતાં વિવિધ બળો

આકૃતિ 1.3

આકૃતિ (1.3 *a*)માં દર્શાવ્યા મુજબ, ધારો કે બે કણોથી બનેલા તંત્રમાં, કણ 1 અને 2 પર લાગતાં બાહ્ય બળો અનુક્રમે $\vec{F}_1$ અને $\vec{F}_2$ છે તથા તેમની વચ્ચે પ્રવર્તતાં આંતરિક બળો $\vec{F}_{12}$ અને $\vec{F}_{21}$ છે.

સમગ્ર તંત્રની ગતિનો અભ્યાસ કરીએ ત્યારે આ બધાં જ બળો દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર 'C' પર લાગે છે તેમ ગણી શકાય (જુઓ આકૃતિ 1.3-*b*). ન્યૂટનના ગતિના ત્રીજા નિયમ મુજબ $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ હોવાથી, આંતરિક બળોનું પરિણામી બળ શૂન્ય થાય છે. આમ, સમીકરણ (1.3.6)માં કણોના તંત્ર પર લાગતું પરિણામી બળ $\vec{F}$ એ ફક્ત બાહ્ય બળોનું જ પરિણામી બળ છે. સમીકરણ (1.3.6) અને (1.3.8) પરથી,

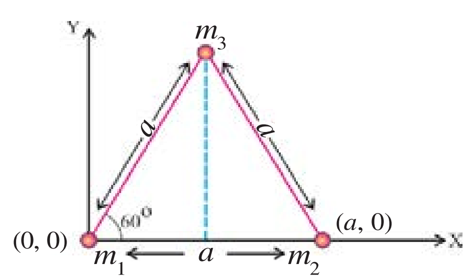
$$M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm} = \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (1.3.9)$$

સમીકરણ (1.3.9) દર્શાવે છે કે **તંત્ર પર લાગતું પરિણામી બાહ્ય બળ તંત્રના કુલ રેખીય વેગમાનના ફેરફારના દર બરાબર હોય છે, જે કણોના તંત્ર માટે ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ છે.** આ ઉપરાંત સમીકરણ (1.3.9) દર્શાવે છે કે **તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર જાણે કે તંત્રનું સમગ્ર દળ તેના પર કેન્દ્રિત થયું હોય તેમ, પરિણામી બાહ્ય બળ $\vec{F}$ની અસર હેઠળ ગતિ કરે છે.**

ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ કોઈ એક કણ માટે ત્રીજા નિયમની મદદ વગર સ્વતંત્ર રીતે લખી શકાય છે. પણ કણોના તંત્ર માટે બીજો નિયમ મેળવવા માટે આપણે ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમની મદદ લેવી પડે છે. આ હકીકતને ન્યૂટનના ગતિના નિયમોનું પરસ્પર અવલંબન કહે છે.

ઉદાહરણ 1 : '*a*' બાજુવાળા એક સમબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ પર m_1, m_2 અને m_3 દ્રવ્યમાન ધરાવતા કણો મૂક્યા છે. m_1 દ્રવ્યમાનવાળા કણની સાપેક્ષે આ તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર શોધો.

ઉકેલ :



આકૃતિ 1.4

સમબાજુ ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓનાં માપ એકસરખાં (60°) હોય છે. આથી આકૃતિ (1.4) માં દર્શાવ્યા મુજબ m_1 દ્રવ્યમાનવાળા કણને ઊગમબિંદુ (0, 0) પર, તથા m_2 દ્રવ્યમાનવાળા કણને X-અક્ષ પર ઊગમબિંદુથી 'a' અંતરે (a, 0) સ્થાન પર દર્શાવીએ, તો m_3 દ્રવ્યમાન ધરાવતા કણના યામ

$$(a \cos 60°, a \sin 60°) = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$$

આમ, m_1, m_2 અને m_3 દ્રવ્યમાનવાળા કણોના સ્થાન-સદિશ અનુક્રમે

$$\vec{r}_1 = (0, 0),\ \vec{r}_2 = (a, 0), \text{ અને}$$

$$\vec{r}_3 = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$$

આથી વ્યાખ્યા મુજબ ત્રણ કણોના આ તંત્રના દ્રવ્યમાન-કેન્દ્રનો સ્થાનસદિશ

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{m_1(0,0) + m_2(a,0) + m_3\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{\left(m_2 a + \frac{m_3 a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}m_3 a\right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\therefore \vec{r}_{cm} = \left[\frac{\left(m_2 + \frac{m_3}{2}\right)a}{m_1 + m_2 + m_3}, \frac{\sqrt{3}\, m_3 \frac{a}{2}}{m_1 + m_2 + m_3}\right]$$

ઉદાહરણ 2 : ત્રણ કણોના તંત્રમાં કણોનાં રેખીય વેગમાન અનુક્રમે (1, 2, 3), (4, 5, 6) અને (5, 6, 7) છે. આ ઘટકો kg m s^{-1} માં છે. જો તંત્રના દ્રવ્યમાન-કેન્દ્રનો વેગ (30, 39, 48) m s^{-1} હોય, તો તંત્રનું કુલ દળ શોધો.

ઉકેલ : અહીંયાં $\vec{P}_1 = (1, 2, 3)$ kg m s^{-1}

$\vec{P}_2 = (4, 5, 6)$ kg m s^{-1}

$\vec{P}_3 = (5, 6, 7)$ kg m s^{-1}

તથા $\vec{v}_{cm} = (30, 39, 48)$ m s^{-1}

હવે, $M\vec{v}_{cm} = \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3$

$\therefore$ M(30, 39 48) = (1, 2, 3) + (4, 5, 6) + (5, 6, 7)

$\therefore$ (30 M, 39 M, 48 M) = (10, 13, 16)

સમીકરણની બન્ને બાજુના અનુરૂપ ઘટકો સરખાવતાં

$$30\text{ M} = 10 \Rightarrow \text{M} = \frac{1}{3}\text{ kg}$$

$$39\text{ M} = 13 \Rightarrow \text{M} = \frac{1}{3}\text{ kg}$$

$$48\text{ M} = 16 \Rightarrow \text{M} = \frac{1}{3}\text{ kg}$$

આમ, તંત્રનું કુલ દળ $\frac{1}{3}$ kg છે.

ઉદાહરણ 3 : t = 0 સમયે, 0.1 kg ના એક પથ્થરને ઊંચા બિલ્ડિંગ પરથી મુક્ત રીતે પડતો મૂકવામાં આવે છે. બીજા 0.2 kg ના પથ્થરને તે જ સ્થાન પરથી 0.1s બાદ મુક્ત રીતે પડતો મૂકવામાં આવે છે.

(1) t = 0.3s સમયે આ બન્ને પથ્થરનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર મૂળ સ્થાનથી કેટલા અંતરે હશે ? (બેમાંથી એક પણ પથ્થર આ સમયે જમીન પર પડતો નથી.)

(2) આ સમયે બન્ને પથ્થરનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર કેટલી ઝડપથી ગતિ કરતું હશે ?

(3) આ સમયે બન્ને પથ્થર વડે બનતા તંત્રનું કુલ વેગમાન કેટલું હશે ?

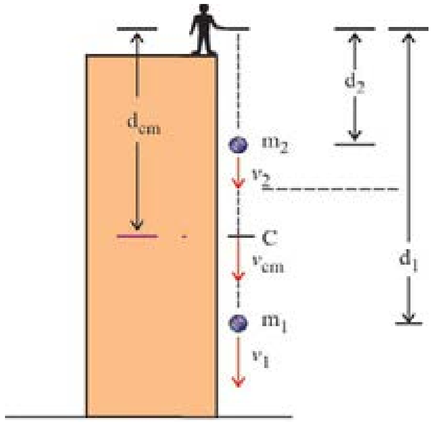
ઉકેલ : પથ્થર 1નું દ્રવ્યમાન m_1 = 0.1 kg

પથ્થર 2નું દ્રવ્યમાન m_2 = 0.2 kg

પથ્થર 1ની પ્રારંભિક ઝડપ v_{01} = 0 m s^{-1}

પથ્થર 2ની પ્રારંભિક ઝડપ v_{02} = 0 m s^{-1}

(1) અહીં બન્ને પથ્થરો એક જ દિશામાં ગતિ કરતા હોવાથી તેમના વેગ અને વેગમાન સદિશો અદિશ સ્વરૂપે લઈ શકાશે. t = 0.3 s સમયે પથ્થર 1 વડે કપાયેલ અંતર



આકૃતિ 1.5

$$d_1 = v_{01}\ t + \frac{1}{2}\ g\ t^2$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\ (9.8)\ (0.3)^2$$

$$d_1 = 0.441 \text{ m} \qquad (1)$$

પથ્થર 2ને 0.1 s પછી છોડવામાં આવે છે. આથી $t = 0.3$ s, સમયે, પથ્થર 2એ પડવા માટે લીધેલ સમય

$t' = 0.3 \text{ s} - 0.1 \text{ s} = 0.2 \text{ s}.$

આમ $t' = 0.2$ s સમયમાં (એટલે કે $t = 0.3$ s સમયે), પથ્થર 2 વડે કપાયેલ અંતર

$$d_2 = v_{02}t' + \frac{1}{2}\ g\ t'^2$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\ (9.8)\ (0.2)^2$$

$$d_2 = 0.196 \text{ m} \qquad (2)$$

આથી, $t = 0.3$ s, સમયે મૂળ સ્થાનથી બન્ને પથ્થર વડે બનતા તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું અંતર

$$d_{cm} = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{(0.1)(0.441)+(0.2)(0.196)}{0.1+0.2}$$

$$\therefore d_{cm} = 0.277 \text{ m} \qquad (3)$$

(2) $t = 0.3$ s, સમયે પથ્થર 1ની ઝડપ

$$v_1 = v_{01} + gt = 0 + (9.8)(0.3)$$

$$\therefore v_1 = 2.94 \text{ m s}^{-1} \qquad (4)$$

$t = 0.3$ s, સમયે પથ્થર 2નો પડવાનો સમય અંતરાલ $t' = 0.2$ s છે. આથી $t' = 0.2$ s સમય પછી પથ્થર 2 ની ઝડપ

$$v_2 = v_{02} + gt' = 0 + (9.8)(0.2)$$

$$\therefore v_2 = 1.96 \text{ m s}^{-1} \qquad (5)$$

આથી, $t = 0.3$ s, સમયે બન્ને પથ્થર વડે બનતા તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રની ઝડપ

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore v_{cm} = \frac{(0.1)(2.94) + (0.2)(1.96)}{0.1 + 0.2}$$

$$\therefore v_{cm} = 2.29 \text{ ms}^{-1} \qquad (6)$$

(3) $t = 0.3$ s, સમયે બન્ને પથ્થરો વડે બનતા તંત્રનું કુલ વેગમાન

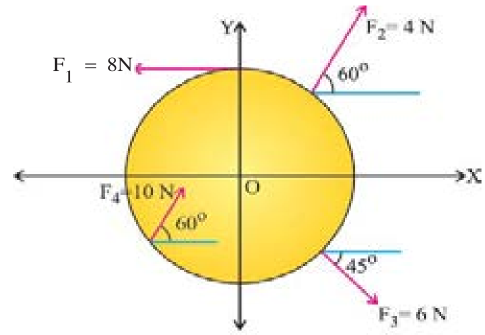
$$P = P_1 + P_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\therefore P = (0.1)\ (2.94) + (0.2)\ (1.96)$$

$$\therefore P = 0.686 \text{ kg m s}^{-1}$$

$$= 0.69 \text{ kg m s}^{-1} \qquad (7)$$

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ (1.6)માં દર્શાવ્યા મુજબ 2 kg દ્રવ્યમાનવાળા એક દ્વિપારિમાણિક પદાર્થ પર વિવિધ બળો લાગે છે. આ પદાર્થના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો રેખીય પ્રવેગ શોધો.



આકૃતિ 1.6

ઉકેલ : બધાં બળોને તેમના ઘટકોના રૂપમાં લખતાં,

$$\vec{F_1} = (-8,\ 0) \text{ N}$$

$$\vec{F_2} = (4 \cos 60^\circ,\ 4 \sin 60^\circ) = (2,\ 2\sqrt{3}) \text{N}$$

$$\vec{F_3} = [6 \cos (-45^\circ),\ 6 \sin (-45^\circ)]$$

$$= (6 \cos 45^\circ,\ -6 \sin 45^\circ)$$

$$\therefore \vec{F_3} = \left(\frac{6}{\sqrt{2}},\ \frac{-6}{\sqrt{2}}\right) \text{N}$$

$$\vec{F_4} = (10 \cos 60^\circ,\ 10 \sin 60^\circ) = (5,\ 5\sqrt{3}) \text{N}$$

હવે,

$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

જ્યાં M = 2 kg

$$\therefore \vec{a}_{cm} = \frac{1}{2}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4)$$

$$= \frac{1}{2}[(-8+2+\frac{6}{\sqrt{2}}+5),(2\sqrt{3}-\frac{6}{\sqrt{2}}+5\sqrt{3})]$$

$$\therefore \vec{a}_{cm} = \frac{1}{2}[(-1+\frac{6}{\sqrt{2}}),(7\sqrt{3}-\frac{6}{\sqrt{2}})] \text{m s}^{-2}$$

1.4 રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ (Law of Conservation of Linear Momentum)

જો તંત્ર પર લાગતું પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો સમીકરણ (1.3.9) પરથી

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad (1.4.1)$$

$$\therefore \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + ... + \vec{P}_n = \text{અચળ} \qquad (1.4.2)$$

જે દર્શાવે છે કે, **"જો તંત્ર પરનું પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન અચળ રહે છે."** આ વિધાનને **રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ** કહે છે. પરિણામી બાહ્યબળ શૂન્ય હોય ત્યારે તંત્રના જુદા-જુદા કણોના વેગમાન $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ...માં વ્યક્તિગત ફેરફારો થઈ શકે છે, પરંતુ આ ફેરફારો એવી રીતે જ થાય છે કે જેથી વેગમાનના ફેરફારોનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય જ થાય. આમ, કણોના વેગમાનમાં થતો કુલ ફેરફાર શૂન્ય થવાથી, તંત્રનું કુલ વેગમાન અચળ રહે છે.

દા. ત., બંધ પાત્રમાં રહેલા હવાના અણુઓ પાત્રમાં અસ્તવ્યસ્ત ગતિ કરતા હોય છે, તેમની વચ્ચે અણુ-અણુ અથડામણ અથવા અણુની પાત્રની દીવાલ સાથેની અથડામણ દરમિયાન તેમનું વ્યક્તિગત વેગમાન બદલાય છે, પરંતુ તેમના વેગમાનના ફેરફારોનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય હોય છે. એટલે કે તેમનું કુલ વેગમાન અચળ રહે છે.

(જો વાયુના અણુઓના વેગમાનના ફેરફારોનો સદિશ સરવાળો કોઈ ચોક્કસ દિશામાં હોય તો શું થાય ? વિચારો)

રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ મૂળભૂત અને સાર્વત્રિક છે. આ નિયમ ગ્રહોના બનેલા તંત્રો, તેમજ ઈલેક્ટ્રૉન, પ્રોટોન વગેરે જેવા સૂક્ષ્મ કણોનાં બનેલાં તંત્રો માટે પણ સમાન રીતે સાચો છે.

સમીકરણ (1.3.9) પરથી,

$$\vec{F} = M\vec{a}_{cm} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = 0$$

$$\therefore \vec{a}_{cm} = 0 \text{ અને } \vec{v}_{cm} = \text{અચળ}$$

જે દર્શાવે છે કે જો **પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો પ્રવેગ શૂન્ય હોય છે. એટલે કે દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો વેગ અચળ રહે છે.** આમ બાહ્યબળની ગેરહાજરીમાં તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર સ્થિર હોય તો સ્થિર રહે છે અથવા ગતિમાં હોય તો અચળ વેગથી ગતિ ચાલુ રાખે છે.

હવે નીચેનું ઉદાહરણ જોઈએ :

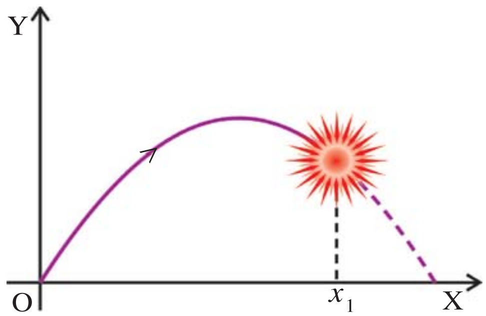
ધારો કે એક રાસાયણિક બૉમ્બ સ્થિર પડેલો છે. બૉમ્બના પ્રારંભિક વેગમાન અને ગતિઊર્જા શૂન્ય છે. બૉમ્બનો વિસ્ફોટ થતાં બૉમ્બના ટુકડાઓ હવામાં ફંગોળાય છે. આ ટુકડાઓ જુદા-જુદા વેગમાન સાથે જુદી-જુદી દિશાઓમાં ફંગોળાશે, પરંતુ તેમનાં વેગમાનોના સદિશો એવા જ હશે કે જેથી,

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + ... + \vec{P}_n = 0$$

અહીં $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ... વગેરે, ટુકડાઓનાં વેગમાન દર્શાવે છે

અહીં ટુકડાઓના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર, મૂળ બૉમ્બનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર જે બિંદુ પર સ્થિર હતું તે જ બિંદુ પર રહેશે. પરંતુ ટુકડાઓની ગતિ ઊર્જાનો સરવાળો શૂન્ય નથી. વિસ્ફોટ અગાઉ બૉમ્બની ગતિ-ઊર્જા શૂન્ય હતી, પરંતુ વિસ્ફોટ બાદ તે શૂન્ય નથી. આમ, તંત્રની ગતિ-ઊર્જામાં ફેરફાર થયો. કાર્ય, ઊર્જા અને પાવરના પ્રકરણમાં તમે જાણ્યું હશે કે તંત્રની ગતિ-ઊર્જામાં થતો ફેરફાર, તેના પરના પરિણામી બાહ્ય બળ વડે થતા કાર્ય જેટલો હોય છે. અહીં, પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય છે. તો પછી તેની ગતિ ઊર્જામાં ફેરફાર કેવી રીતે થયો ? હકીકત એમ છે કે, રાસાયણિક બૉમ્બ પોતાના જટિલ અણુઓ વચ્ચે રાસાયણિક બંધોને લીધે (અને બીજાં કેટલાંક કારણોને લીધે) આંતરિક ઊર્જા ધરાવે છે. જ્યારે બૉમ્બનો વિસ્ફોટ થાય ત્યારે રાસાયણિક બંધો તૂટે છે અને તેમની સાથે સંકળાયેલી આંતરિક ઊર્જાના અમુક ભાગનું ઉષ્માઊર્જામાં રૂપાંતરણ થાય છે તથા બાકીની ઊર્જા ટુકડાઓને ગતિ-ઊર્જા સ્વરૂપે પ્રાપ્ત થાય છે. આમ, અહીં આંતરિક ઊર્જાના ભોગે યાંત્રિક કાર્ય થાય છે, **જે કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેયના વ્યાપક સ્વરૂપ તરફ દોરી જાય છે.**

અહીં તો બૉમ્બ પ્રારંભમાં સ્થિર હતો, પરંતુ, જો બૉમ્બ ગતિ કરતો હોત અને ગતિ દરમિયાન તે ફૂટ્યો હોત તો રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ ફૂટ્યા પછી તેના ટુકડાઓ એવી દિશામાં ગતિ કરતા હોત કે જેથી તેમનાં વેગમાનોનો સદિશ સરવાળો મૂળ બોમ્બના વેગમાન જેટલો હોય અને તેનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર, તેનો મૂળ વેગ ($\vec{v}_{cm}$) અચળ જળવાઈ રહે તેવી દિશામાં ગતિ કરે (જુઓ આકૃતિ 1.7).



વિસ્ફોટ બાદ બોમ્બના ટુકડાઓના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રની ગતિ

આકૃતિ 1.7

ઉદાહરણ 5 : 50 kgનો એક બૉમ્બ 10 m/sના અચળ વેગથી ગતિ કરે છે. એકાએક તે 40 kg અને 10 kgના બે ટુકડાઓમાં વિભાજિત થાય છે. જો મોટા ટુકડાનો વેગ શૂન્ય હોય, તો નાના ટુકડાનો વેગ શોધો.

ઉકેલ : બૉમ્બ અચળ વેગથી ગતિ કરે છે. આથી તેના પરનું બાહ્ય બળ શૂન્ય છે. આથી રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ,

પ્રારંભિક રેખીય વેગમાન = અંતિમ રેખીય વેગમાન

$\therefore \; M\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

જ્યાં, M = બૉમ્બનું કુલ દળ = 50 kg

m_1 = મોટા ટુકડાનું દળ = 40 kg

m_2 = નાના ટુકડાનું દળ = 10 kg

$\vec{v}$ = બૉમ્બનો વેગ = 10 m/s

$\vec{v}_1$ = મોટા ટુકડાનો વેગ = 0

$\vec{v}_2$ = નાના ટુકડાનો વેગ = ?

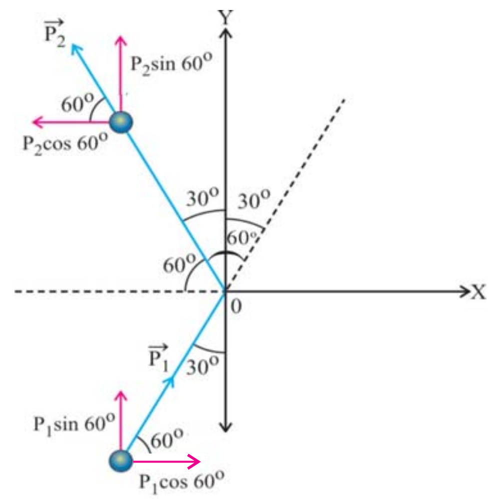
આથી,

$M\vec{v} = m_2\vec{v}_2$

$$\therefore \; \vec{v}_2 = \frac{M}{m_2}\vec{v} = \frac{50}{10} \times 10 = 50 \text{ m/s}$$

ઉદાહરણ 6 : 4 kg દળનો એક ગોળો દીવાલ સાથે 30^o ખૂણે અથડાઈને પોતાની ગતિની મૂળ દિશા સાથે 60^o કોણ બનાવતી દિશામાં પરાવર્તિત થાય છે. જો ગોળાનો દીવાલ સાથે સંપર્કસમય 0.1 s હોય, તો દીવાલ પર લાગતું બળ શોધો. ગોળાનો પ્રારંભિક અને અંતિમ વેગ 1 m s^{-1} છે.

ઉકેલ : ઉદાહરણમાં આપેલ પરિસ્થિતિ આકૃતિ 1.8માં દર્શાવી છે.



આકૃતિ 1.8

અહીંયા $\vec{P}_1$ = ગોળાનું પ્રારંભિક વેગમાન

$= mv \cos 60\hat{i} + mv \sin 60\hat{j}$

$\vec{P}_2$ = ગોળાનું અંતિમ વેગમાન

$= -mv \cos 60\hat{i} + mv \sin 60\hat{j}$

આથી, ગોળાના વેગમાનમાં થતો ફેરફાર

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

$$= -mv \cos 60\hat{i} + mv \sin 60\hat{j} - mv \cos 60\hat{i} - mv \sin 60\hat{j}$$

$$= -2mv \cos 60\hat{i}$$

$$\therefore \Delta\vec{P} = -2 \times 4 \times 1 \times \frac{1}{2}\hat{i}$$

$$= -4\hat{i} \text{ kg m s}^{-1}$$

આથી દીવાલને મળતું વેગમાન

$= 4\hat{i}$ kg m s^{-1}

$\therefore$ દીવાલ પર લાગતું બળ

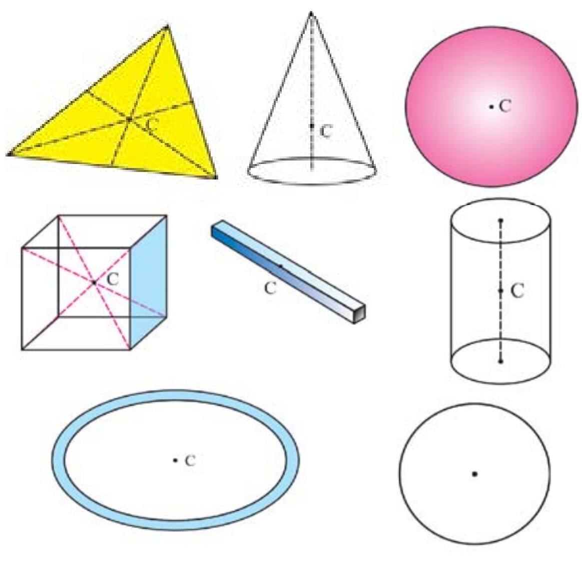
$$= \frac{\text{દીવાલને મળતું વેગમાન}}{\text{સંપર્કસમય}}$$

$$= \frac{4\hat{i}}{0.1} = 40\hat{i} \ \text{N}$$

આમ, દીવાલ પર ધન X-દિશામાં 40 N બળ લાગે છે.

1.5 દૃઢ પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર (Centre of Mass of a Rigid Body)

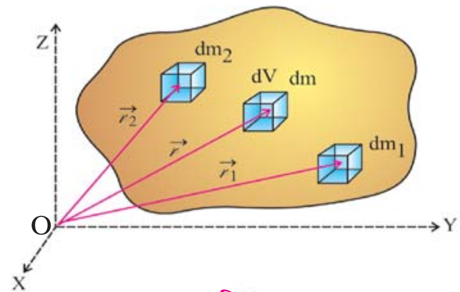
કણોના જે તંત્રમાં કણો વચ્ચેના સાપેક્ષ સ્થાન (relative positions) અફર જળવાઈ રહેતાં હોય તેને દૃઢ પદાર્થ કહે છે. દૃઢ પદાર્થના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન તેના દ્રવ્યનું વિતરણ અને તેના આકાર પર આધાર રાખે છે. દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર દૃઢ પદાર્થના દ્રવ્યની અંદર કે બહાર એમ ગમે ત્યાં હોઈ શકે છે. ઉદાહરણ તરીકે નિયમિત ઘનતાવાળી વર્તુળાકાર તકતીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તકતીના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર, તકતીના દ્રવ્યની અંદર હોય છે, જ્યારે નિયમિત ઘનતાવાળી રિંગનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર રિંગના કેન્દ્ર પર પણ રિંગના દ્રવ્યની બહાર હોય છે. નિયમિત ઘનતા અને સમાન આડછેદવાળા સળિયાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર હોય છે. સંમિતિ ધરાવતા અને નિયમિત દળ-વિતરણવાળા દૃઢ પદાર્થોનાં દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનાં સ્થાન સહેલાઈથી સૈદ્ધાંતિક રીતે શોધી શકાય છે. કેટલાક સંમિત પદાર્થો માટેનાં દ્રવ્યમાનકેન્દ્રો 'C' આકૃતિ 1.9માં દર્શાવ્યા છે.



નિયમિત આકારના કેટલાક દૃઢ પદાર્થોનાં દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર

આકૃતિ 1.9

1.5.1 ઘન પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર નક્કી કરવાની સૈદ્ધાંતિક રીત (Theoretical Method for Estimation of the Centre of Mass of a Solid Body) :



આકૃતિ 1.10

હવે આપણે જાણીએ છીએ કે ઘન પદાર્થ સૂક્ષ્મ કણો (અણુઓ, પરમાણુઓ કે આયનો)નો બનેલો છે. આ કણો પદાર્થમાં સતત રીતે વિતરિત થયેલા હોય છે. આકૃતિ 1.10 માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે ઘન પદાર્થમાં dV જેટલું સૂક્ષ્મ કદ ધરાવતા કદ ખંડમાં સમાયેલ દળ dm છે. અહીં dm ને **દળ-ખંડ** કહે છે. જેનો સ્થાનસદિશ,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

આ રીતે સમગ્ર ઘન પદાર્થને આવા દળ-ખંડોનો બનેલો ગણી શકાય. ધારો કે ઘન પદાર્થ dm_1, dm_2 ..... dm_n દળ ખંડોમાં વહેંચાયેલો છે જેમના સ્થાન સદિશો અનુક્રમે $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$, ..., $\vec{r_n}$ છે. આથી વ્યાખ્યા અનુસાર ઘન પદાર્થના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો સ્થાન સદિશ

$$\vec{r_{cm}} = \frac{dm_1\vec{r_1} + dm_2\vec{r_2} + \ldots + dm_n\vec{r_n}}{dm_1 + dm_2 + \ldots + dm_n} \quad (1.5.1)$$

અહીં દ્રવ્યમાન વિતરણ સતત હોવાથી સરવાળાને સંકલનના રૂપમાં દર્શાવી શકાય.

$$\therefore \ \vec{r_{cm}} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$$

$$\therefore \ \vec{r_{cm}} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\text{M}} \quad (1.5.2)$$

જ્યાં, $\text{M} = \int dm$

= ઘન પદાર્થનું કુલ દળ.

સમીકરણ (1.5.2) ને સદિશ ઘટકોના રૂપમાં દર્શાવતાં

$$(x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}) \quad (1.5.3)$$

$$= \frac{1}{\text{M}} \int (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})dm$$

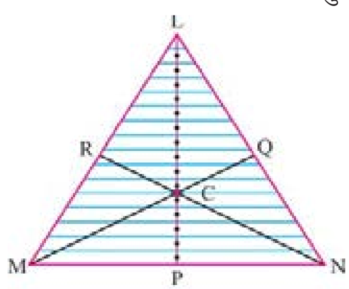
$$\left.\begin{aligned} \therefore x_{cm} &= \frac{1}{M}\int xdm \\ y_{cm} &= \frac{1}{M}\int ydm \\ z_{cm} &= \frac{1}{M}\int zdm \end{aligned}\right\} \qquad (1.5.4)$$

1.5.2 નિયમિત ઘનતાવાળા ચોક્કસ ભૌમિતિક આકારના ઘન પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર નક્કી કરવાની સૈદ્ધાંતિક રીત (Theoretical method for the estimation of centre of mass of a solid body of uniform density and specific geometrical shape) :

નિયમિત ઘનતાવાળા ચોક્કસ ભૌમિતિક આકારના પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર શોધવા માટે પદાર્થના આકારની સંમિતિ (symmetry)નો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. સંમિતિના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને આપણે સહેલાઈથી સાબિત કરી શકીએ કે આવા પદાર્થોનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તેમના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર આવેલું હોય છે.

હવે આપેલું ઉદાહરણ જોઈએ :

આકૃતિમાં દર્શાવેલ ત્રિકોણાકાર તકતીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર શોધવું છે :

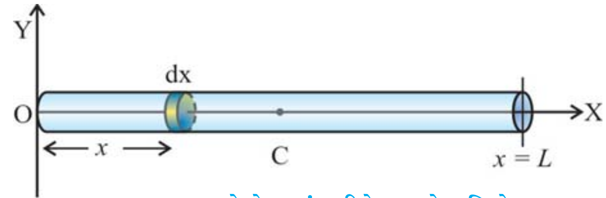


આકૃતિ 1.11

આકૃતિ 1.11 દર્શાવ્યા મુજબ ત્રિકોણાકાર તકતીને સાંકડી સમાંતર પટ્ટીઓમાં વિભાજિત થઈ ગયેલી ધારો. સંમિતિના નિયમ મુજબ દરેક પટ્ટીઓનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તેમના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર આવેલું હશે. આ દરેક ભૌમિતિક કેન્દ્રને જોડતો રેખાખંડ LP દોરો. આમ, આ ત્રિકોણાકાર તકતીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર મધ્યગા LP પર આવેલું હશે. તે જ રીતે ત્રિકોણાકાર તક્તીને ML અને LN બાજુઓને સમાંતર સાંકડી પટ્ટીઓમાં વિભાજિત થયેલી માનીને મધ્યગાઓ અનુક્રમે NR અને MQ દોરી શકીએ. આમ, ત્રિકોણાકાર તકતીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર ત્રણેય મધ્યગાઓના સામાન્ય બિંદુ 'C' પર આવેલું હશે.

1.6 નિયમિત ઘનતાવાળા પાતળા સળિયાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર (Centre of Mass of a Thin Rod of Uniform Density)

આકૃતિ 1.12 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે 'M' દળ તથા 'L' લંબાઈ ધરાવતો એક નિયમિત આડછેદવાળો અને નિયમિત રેખીય દળ ઘનતા 'λ' ધરાવતો પાતળો સળિયો ધ્યાનમાં લો. સળિયાનો એક છેડો ઉદ્‌ગમબિંદુ પર મૂકી સળિયાના ભૌમિતિક અક્ષ એ X-અક્ષ પર સંપાત થાય તે રીતે મૂકો.



X-અક્ષ પર રહેલો L-લંબાઈનો પાતળો સળિયો

આકૃતિ 1.12

હવે ઊગમબિંદુથી x અંતરે 'dx' લંબાઈ ધરાવતો સૂક્ષ્મ ખંડ સળિયા પર વિચારો.

સળિયાની એકમલંબાઈ દીઠ દળ, $\lambda = \frac{M}{L}$

$\therefore$ dx લંબાઈના ખંડનું દળ $dm = \lambda dx = \frac{M}{L}dx$

વ્યાખ્યા મુજબ આપેલા સળિયાના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન,

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int xdm$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^L x \cdot \frac{M}{L}dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^L xdx$$

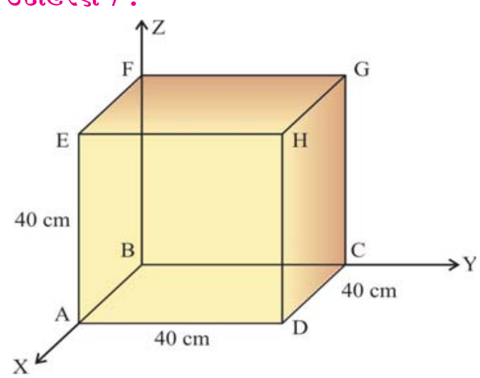
$$= \frac{1}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L$$

$$= \frac{1}{L}\left[\frac{L^2}{2} - 0\right]$$

$$\therefore x_{cm} = \frac{L}{2}$$

આમ, નિયમિત ઘનતાવાળા પાતળા સળિયાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર એ સળિયાની લંબાઈના મધ્યમાં એટલે કે તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર છે.

ઉદાહરણ 7 :



આકૃતિ 1.13

આકૃતિ 1.13 માં એક સમઘન ખોખું દર્શાવ્યું છે કે જે સમાન ઘનતા ધરાવતા તથા અવગણી શકાય તેવી જાડાઈના ધાતુના પતરાનું બનેલું છે. સમઘન ખોખાની દરેક ધારની લંબાઈ 40 cm હોય તો,

(*a*) ખોખાના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) શોધો.

(*b*) જો ખોખું ઉપરથી ખુલ્લું હોય (EFGH પતરું ન હોય) તો ખોખાના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ $(x'_{cm}, y'_{cm}, z'_{cm})$ શોધો.

ઉકેલ : બૉક્ષની દરેક પ્લેટ એકસરખી ઘનતા ધરાવે છે તથા ખૂબ જ પાતળી છે. આથી દરેક પ્લેટનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર સંમિતિના નિયમ મુજબ તે પ્લેટના મધ્યબિંદુ પર હશે. આમ, દરેક પ્લેટનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર શોધતાં :

પ્લેટનું નામ	દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ
ABCD	(20, 20, 0) cm
EFGH	(20, 20, 40) cm
ABFE	(20, 0, 20) cm
DCGH	(20, 40, 20) cm
BCGF	(0, 20, 20) cm
ADHE	(40, 20, 20) cm

(*a*) આ દરેક પ્લેટના દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર પર પ્લેટનું દ્રવ્યમાન, ધારો કે M, કેન્દ્રિત થયેલું માનીએ, તો (દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ અને પૃષ્ઠ ઘનતા એકસરખી હોવાથી દરેક પ્લેટનું દ્રવ્યમાન પણ એક સરખું M = ρ × A હશે) બનતા તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર

$$r_{cm} = (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm})$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{c} M(20, 20, 0) + M(20, 20, 40) \\ + M(20, 0, 20) + M(20, 40, 20) \\ + M(0, 20, 20) + M(40, 20, 20) \end{array}\right\}}{6M}$$

$$= \frac{M(120, 120, 120)}{6M}$$

$$\therefore\ r_{cm} = (20, 20, 20) \text{ cm}$$

(*b*) જો ખોખું ઉપરથી ખુલ્લું હોય, તો EFGH પ્લેટ ન હોય, આથી બનતા તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર

$$r'_{cm} = (x'_{cm}, y'_{cm}, z'_{cm})$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{c} M(20, 20, 0) + M(20, 0, 20) \\ + M(20, 40, 20) + M(0, 20, 20) \\ + M(40, 20, 20) \end{array}\right\}}{5M}$$

$$= \frac{M(100, 100, 80)}{5M}$$

$$= (20, 20, 16) \text{ cm}$$

સારાંશ

1. **બે કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર :** m_1 અને m_2 દ્રવ્યમાન ધરાવતા બે કણો X-અક્ષ પર ઊગમબિંદુથી અનુક્રમે x_1 અને x_2 અંતરે રહેલા હોય, તો તેમનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર એવું બિંદુ છે કે ઊગમબિંદુથી તેનું અંતર $x_{cm} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$ વડે અપાય છે.

2. ***n*–કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર :** જો કોઈ તંત્રમાં *n*–કણો આવેલા હોય, અને C તંત્રનાં દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન દર્શાવતું હોય, તો 'C' એવું બિંદુ છે કે જ્યાં *n*-કણોના તંત્રનું કુલ દ્રવ્યમાન જાણે કે કેન્દ્રિત થયેલું છે તેમ ગણી શકાય. ત્રિ-પરિમાણમાં રહેલા *n*–કણોના તંત્રમાં રહેલા $m_1, m_2, ..., m_n$ દ્રવ્યમાન ધરાવતા કણોના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_n}$ હોય, તો તેમના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો સ્થાનસદિશ

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + ... + m_n\vec{r_n}}{m_1 + m_2 + ... + m_n}.$$

3. n–કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો વેગ : $\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n}{M}$,

જ્યાં, $M = m_1 + m_2 + ... + m_n$.

4. કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો પ્રવેગ

$$\vec{a}_{cm} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + ... + m_n\vec{a}_n}{M}.$$

5. કણોના તંત્ર માટે ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm}.$$

6. **રેખીય વેગમાનનું સંરક્ષણ :** જો તંત્ર પરનું પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન અચળ રહે છે. બાહ્ય બળની ગેરહાજરીમાં તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર સ્થિર હોય તો સ્થિર રહે છે અને ગતિમાં હોય તો અચળ વેગથી ગતિ ચાલુ રાખે છે.

7. **દઢ વસ્તુ :** કણોના જે તંત્રમાં કણો વચ્ચેનાં સાપેક્ષ અંતરો અફર જળવાઈ રહેતાં હોય તેને દઢ વસ્તુ કહે છે.

8. **દઢ પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર :** દઢ પદાર્થના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન તેમાં દ્રવ્યના વિતરણ અને તેના આકાર પર આધાર રાખે છે. સંમિત પદાર્થો માટે તેમનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તેમના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર હોય છે.

9. વ્યાપક સ્વરૂપે દઢ પદાર્થના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ :

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int xdm,\ y_{cm} = \frac{1}{M}\int ydm,\ z_{cm} = \frac{1}{M}\int zdm$$

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. ધારો કે તમારું દ્રવ્યમાન 50 kg છે. તમારે કેટલી ઝડપથી દોડવું પડે કે જેથી તમારું રેખીય વેગમાન 20 km/h ની ઝડપથી સીધા રસ્તા પર ગતિ કરતા 100 kg સાઇકલ સવાર જેટલું થાય ?

   (A) 40 m/s (B) 11.11 m/s (C) 20 km/h (D) 10 km/h

2. 2400 kgની એક બસ સીધા રસ્તા પર 60 km/h ની ઝડપથી જાય છે. બસની પાછળ 1600 kg ની એક કાર 80 km/h ની ઝડપથી આવી રહી છે. બન્ને વાહનોનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર કેટલી ઝડપથી ગતિ કરતું હશે ?

   (A) 70 km/h (B) 75 km/h (C) 72 km/h (D) 68 km/h

3. જો 't' સમયે કોઈ પથ્થરનું વેગમાન $[(0.5 \text{ kg m/s}^3)t^2 + (3.0 \text{ kg m/s})]\hat{i} + [1.5 \text{ kg m/s}^2]t\hat{j}]$ હોય, તો તેના પર લાગતું બળ કેટલું હોય ?

   (A) $(t\hat{i} + 1.5\hat{j})$ N (B) $(0.5t\hat{i} + 1.5\hat{j})$ N

   (C) $[(0.5t + 3)\hat{i} + 1.5\hat{j}]$ N (D) $(0.5\hat{i} + 1.5\hat{j})$ N

4. 2 kgનું એક પક્ષી $(2\hat{i} - 4\hat{j})$ m/sના અચળ વેગથી તથા 3 kgનું બીજું પક્ષી $(2\hat{i} + 6\hat{j})$ m/sથી ઊડતાં હોય, તો બન્ને પક્ષી વડે બનતા તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો વેગ .... m/s હોય.

(A) $2\hat{i} + 5.2\hat{j}$ (B) $2\hat{i} + 2\hat{j}$ (C) $2\hat{i} - 2\hat{j}$ (D) $10\hat{i} + 10\hat{j}$

5. 0.100 g નું એક પીંછું $(-0.05\hat{j})$ m/s વેગથી નીચે પડે છે. નીચેથી તેના પર ફૂંક મારતાં તેનો વેગ $(0.20\hat{i} + 0.15\hat{j})$ m/s થાય છે, તો તેના વેગમાનમાં થતો ફેરફાર .... kg m/s હશે.

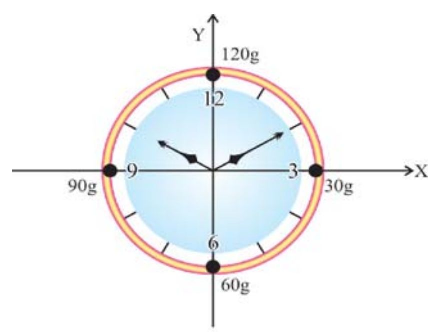
(A) $2 \times 10^{-2}\hat{i} + 2 \times 10^{-2}\hat{j}$ (B) $2 \times 10^{-5}\hat{i} + 2 \times 10^{-5}\hat{j}$

(C) $2 \times 10^{-2}\hat{i} + 1 \times 10^{-2}\hat{j}$ (D) $2 \times 10^{-2}\hat{i} - 2 \times 10^{-2}\hat{j}$

6. એક ઝાડની ડાળી પર બેઠેલ વાંદરો બરાબર તેની નીચે બેઠેલા મગર પર જાંબુનો 10 gનો ઠળિયો પડતો મૂકે છે. ઠળિયો 2 s સમયમાં મગરના મોઢામાં પડીને સ્થિર થઈ જતો હોય, તો મગરને (ઠળિયા ઉપરાંત) મળતું વેગમાન .... kg m/s હોય. ($g = 9.8$ m s^{-2})

(A) 0.196 (B) −0.196 (C) 19.6 (D) −19.6

7. આકૃતિ 1.14માં દર્શાવેલ નહીંવત્ વજન ધરાવતા ઘડિયાળના 10 cm ત્રિજ્યાના ડાયલ પર 3, 6, 9 અને 12 કલાકની નિશાનીઓ પર અનુક્રમે 30, 60, 90 અને 120 gના પથ્થર મૂકવામાં આવે, તો બનતા આ તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ શોધો.



આકૃતિ 1.14

(A) (2, −2) cm (B) (0, 0) cm (C) (−2, 2) cm (D) (−4, 4) cm

8. ક્રિકેટમૅચમાં બૉલર 0.5 kgના દડાને 20 m/sની ઝડપથી ફેંકે છે. બૅટ્સમેન બૅટ ઉગામે ત્યારે દડો બૅટની સપાટીને લંબરૂપે અથડાઈને વિરુદ્ધ દિશામાં 30 m/sની ઝડપથી પાછો ફરે છે. જો દડાનો બૅટ સાથેનો સંપર્ક સમય 0.1 s હોય, તો બૅટ પર લાગતું બળ .... N હોય.

(A) 250 (B) 25 (C) 50 (D) 125

9. 10 માળના મકાનની અગાશીમાં ઊભેલો એક છોકરો જુદા-જુદા વજનના ચાર પથ્થર જમીન તરફ પડતા મૂકે છે. જો કોઈ સમયે 500 gનો પથ્થર 8મા માળે, 400 gનો પથ્થર 6ઠા માળે, 1 kgનો પથ્થર 3જા માળે અને 600 gનો પથ્થર 1લા માળે પહોંચ્યા હોય, તો તે સમયે ચાર પથ્થરો વડે બનતા તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર .... માળે હશે.

(A) 7મા (B) 5મા (C) 3જા (D) 4થા

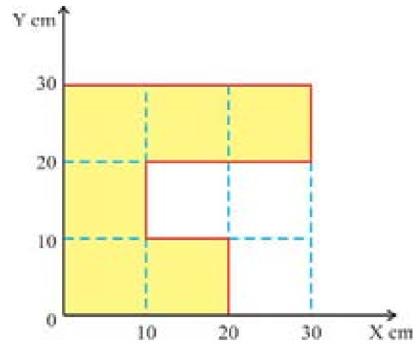
10. આકૃતિ 1.15માં દર્શાવેલ નિયમિત ઘનતા-વાળા પાતળા પતરાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર .... cm છે.

(A) (10.00, 14.28)

(B) (11.67, 16.67)

(C) (8.75, 12.50)

(D) (7.78, 11.11)



આકૃતિ 1.15

જવાબો

1. (B)	2. (D)	3. (A)	4. (B)	5. (B)	6. (A)
7. (C)	8. (A)	9. (D)	10. (B)		

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. ન્યૂટનના ગતિના નિયમોનું પરસ્પર અવલંબન એટલે શું ?
2. દૃઢ વસ્તુની વ્યાખ્યા આપો.
3. જે દૃઢ પદાર્થોના દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર, દૃઢ પદાર્થના દ્રવ્યની બહાર હોય તેવાં બે ઉદાહરણો આપો.
4. નિયમિત ઘનતાવાળા પાતળા સળિયાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર ક્યાં આવેલું હોય છે ?
5. ઘન પદાર્થનો દળ-ખંડ dm એટલે શું ?
6. સ્થિર પડેલા રાસાયણિક બૉમ્બનો વિસ્ફોટ થાય ત્યારે તેના ટુકડાઓને ગતિ-ઊર્જા ક્યાંથી પ્રાપ્ત થાય છે ?

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ત્રિપરિમાણમાં n-કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સૂત્ર લખો અને તેના વેગનું સૂત્ર મેળવો.
2. રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ લખો અને સમજાવો.
3. રાસાયણિક બૉમ્બનું ઉદાહરણ કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેયના વ્યાપક સ્વરૂપ તરફ કેવી રીતે દોરી જાય છે, તે સમજાવો.
4. n-કણોના તંત્ર માટે દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના વેગનું સૂત્ર લખો અને ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ મેળવો.
5. ઘન પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર નક્કી કરવાની સૈદ્ધાંતિક રીત ઉદાહરણ આપીને સમજાવો.
6. નિયમિત ઘનતાવાળા પાતળા સળિયાના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન તેના કોઈ એક છેડાની સાપેક્ષે મેળવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. કાર્બન મોનૉક્સાઇડ (CO) વાયુના અણુ માટે જો કાર્બન પરમાણુ તથા ઑક્સિજન પરમાણુનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર 1.130×10^{-10} m હોય, તો કાર્બન પરમાણુની સાપેક્ષે CO અણુના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન શોધો.

(કાર્બનનો પરમાણુભાર = 12 g mol^{-1}, તથા ઑક્સિજનનો પરમાણુભાર = 16 g mol^{-1})

[જવાબ : 0.64 Å]

2. 1 kg, 2 kg અને 3 kg દળવાળા ત્રણ ''કણો''ના વેગ-સદિશો અનુક્રમે (1, 2, 3), (3, 4, 5) અને (6, 7, 8) છે. વેગ, સદિશના ઘટકો m s^{-1} માં છે. આ તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના વેગ-સદિશ શોધો. [**જવાબ :** $\frac{1}{6}(25, 31, 37)$ m s^{-1}]

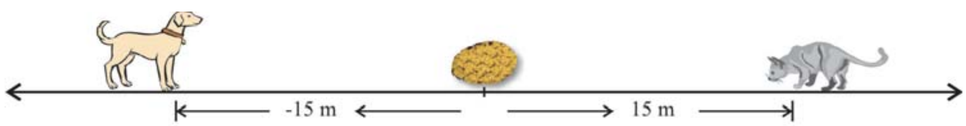
3. 1000 kgની એક કાર ટ્રાફિક સિગ્નલ પાસે ઊભી છે. લીલી લાઇટ થતાં કાર 4.0 m s^{-2}ના પ્રવેગથી ગતિ શરૂ કરે છે. તે જ વખતે 2000 kgની એક ટ્રક, 8.0 m s^{-1}ની અચળ ઝડપથી કારને ઓવરટેઇક કરીને આગળ નીકળે છે.

(*a*) 3 sec પછી કાર-ટ્રક વડે બનતા તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર ટ્રાફિક સિગ્નલથી કેટલે દૂર હશે ?

(*b*) તે વખતે કાર-ટ્રક વડે બનતા તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રની ઝડપ કેટલી હશે ?

[**જવાબ :** (*a*) 22.0 m, (*b*) 9.33 m s^{-1}]

4. 40 kg દળ ધરાવતો એક કૂતરો અને 20 kg દળવાળી એક બિલાડી, રોટલીની બન્ને બાજુ 15–15 m મીટરના અંતરે ઊભાં છે (જુઓ આકૃતિ 1.16). બન્ને રોટલી ખાવા માટે એક સાથે એવી રીતે દોડે છે કે જેથી કોઈ પણ સમયે કૂતરા અને બિલાડી વડે બનતા તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર સ્થિર જ રહે. કોષ્ટકમાં જુદા-જુદા સમયે રોટલી પરના ઊગમબિંદુની સાપેક્ષે કૂતરાનું સ્થાન દર્શાવ્યું છે. દરેક સમયે બિલાડીનું સ્થાન તથા બંનેના વેગ, વેગમાન અને તેમના વેગમાનનો સરવાળો શોધો.
કોણ રોટલી પાસે પહેલું પહોંચશે ? કૂતરો કે બિલાડી ? આ કિસ્સામાં વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે ? કેમ ?



આકૃતિ 1.16

સમય	રોટલીથી અંતર		કૂતરા અને બિલાડીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્રથી અંતર	વેગ ms^{-1}		વેગ માન $kgms^{-1}$		કુલ વેગમાન
t sec	કૂતરો $x_1(m)$	બિલાડી $x_2(m)$	$x_{cm}(m)$	કૂતરો v_1	બિલાડી v_2	કૂતરો P_1	બિલાડી P_2	$P = P_1+P_2$ kg ms^{-1}
0	−15.0	15	.....(અચળ)					
2	−12.5	.....	,,					
4	−10.0	.....	,,					
6	−7.5	.....	,,					

જવાબ :

			દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર	વેગ ms^{-1}		વેગમાન		કુલ વેગમાન
	કૂતરો	બિલાડી		કૂતરો	બિલાડી	કૂતરો	બિલાડી	Total
t sec	$x_1(m)$	$x_2(m)$	$x_{cm}(m)$	v_1 ms^{-1}	v_2 ms^{-1}	P_1 kg ms^{-1}	P_2 kg ms^{-1}	$P = P_1+P_2$ kg ms^{-1}
0	−15.0	15.0	−5.0 *m* (અચળ)	0	0	0	0	0
2	−12.5	10.0	−5.0 *m*	1.25	−2.5	50	−50	0
4	−10.0	5.0	−5.0 *m*	1.25	−2.5	50	−50	0
6	−7.5	0	−5.0 *m*	1.25	−2.5	50	−50	0

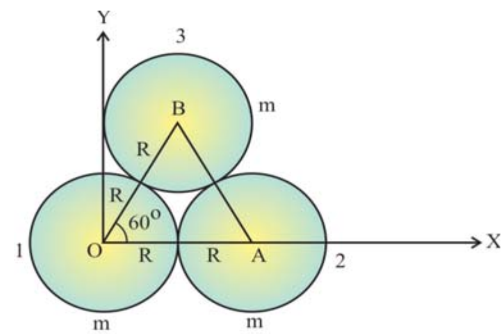
t = 6 sec સમયે, x_1 = -7.5 m, x_2 = 0 m અને રોટલી ઊગમબિંદુ x = 0 પર છે, આથી બિલાડી પહેલા પહોંચશે.
કુલ વેગમાન અચળ રહે છે, આથી વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે. આનું કારણ એ છે કે દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર અહીં સ્થિર રહે છે.

5. m_1 અને m_2 દળ ધરાવતા બે કણો વચ્ચેનું અંતર r છે. જો આ કણોના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રથી અંતર અનુક્રમે r_1 અને r_2 હોય, તો દર્શાવો કે

$$r_1 = r\left[\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right] \text{ અને } r_2 = r\left[\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right].$$

6. આકૃતિ 1.17માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે R મીટર ત્રિજ્યાના 3 ગોળા પરસ્પર એકબીજાને અડકે તેમ સમક્ષિતિજ સપાટી પર ગોઠવ્યા છે. જો દરેક ગોળાનું દળ m હોય, તો ગોળા 1ના કેન્દ્રને ઊગમબિંદુ તરીકે લઈને દ્રવ્યમાન-કેન્દ્રનું સ્થાન નક્કી કરો. Z-અક્ષ પુસ્તકના પાનાને લંબરૂપે છે.

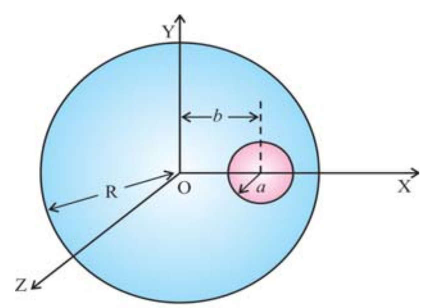
[**જવાબ :** $\left(R, \frac{R}{\sqrt{3}}, 0\right) m$]



આકૃતિ 1.17

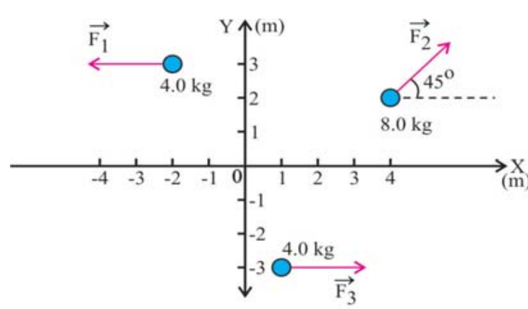
7. આકૃતિ 1.18માં દર્શાવેલ નિયમિત ઘનતા ρ ધરાવતા R ત્રિજ્યાના એક સમાંગ ગોળામાંથી a ત્રિજ્યાની ગોળી કાપી લેવામાં આવે છે, તો બાકીના ભાગનું, મૂળ ગોળાના કેન્દ્રની સાપેક્ષમાં દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર શોધો.

[**જવાબ :** $\left(\frac{-a^3 b}{\left(R^3 - a^3\right)}, 0, 0\right)$]



આકૃતિ 1.18

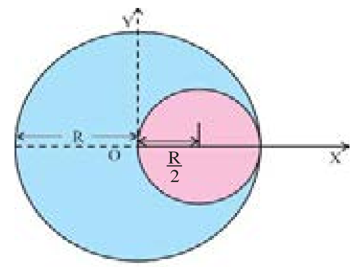
8. આકૃતિ 1.19માં ત્રણ સ્થિર 'કણો'નાં સ્થાન દર્શાવ્યાં છે. કણોના આ તંત્ર માટે દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ શોધો. આ કણો પર આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ બાહ્ય બળો F_1 = 6.0 N, F_2 = 12.0 N અને F_3 = 14.0 N લાગે છે, તો દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના પ્રવેગ તથા પ્રવેગની દિશા શોધો.



આકૃતિ 1.19

[**જવાબ :** $\vec{r}_{cm}$ = (1.75, 1.00) m, $\vec{a}_{cm}$ = (1.03, 0.53) m s^{-2}, $|\vec{a}| = a$ = 1.16 m s^{-2}
X–અક્ષ સાથે θ = 27° ખૂણો બનાવતી દિશા]

9. આકૃતિ 1.20માં દર્શાવેલ ρ જેટલી સમાન પૃષ્ઠ ઘનતાવાળી અને R ત્રિજ્યાની અત્યંત પાતળી તકતીમાંથી $\frac{R}{2}$ ત્રિજ્યાવાળી તકતી જેટલો ભાગ કાપી લેવામાં આવે, તો મૂળ તકતીના કેન્દ્રને અનુલક્ષીને બાકી રહેલા ભાગનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર શોધો.



આકૃતિ 1.20

[**જવાબ :** $(-\frac{R}{6}, 0)$]

•

પ્રો. સત્યેન્દ્રનાથ બોઝ (1894-1974)

સત્યેન્દ્રનાથ બોઝનો જન્મ 1 જાન્યુઆરી, 1894ના રોજ કોલકાતા ખાતે થયો હતો. તેમણે યુનિવર્સિટી ઑફ કોલકાતા ખાતે અભ્યાસ કર્યો હતો અને ત્યાર બાદ 1916 સુધી ભણાવ્યું હતું. યુનિવર્સિટી ઑફ ડેકા ખાતે તેમણે 1921-45 સુધી ભણાવ્યું અને ત્યાર બાદ 1945-46માં કોલકાતા પાછા ફર્યા. તેમણે ક્વૉન્ટમ થિયરીમાં પ્લાન્કના બ્લૅક બોડી રેડિયેશનના નિયમ પર કાર્ય કર્યું. 1924માં તેમણે પ્લાન્કના સિદ્ધાંત અને પ્રકાશના કણવાદ પરનું તેમનું કાર્ય આઈન્સ્ટાઈનને મોકલ્યું. જેને આઈન્સ્ટાઈને ખૂબ વખાણ્યું. આઈન્સ્ટાઈને આ કાર્યનો જર્મન ભાષામાં અનુવાદ કર્યો. બોઝે, બોઝ-આઈન્સ્ટાઈન સ્ટેટીસ્ટિક્સ પર પણ કાર્ય કર્યું હતું. ડિરાકે આ સ્ટેટીસ્ટિક્સનું પાલન કરતાં કણોને **બોઝોન** નામ આપ્યું. સત્યેન્દ્રનાથ બોઝ અને આઈન્સ્ટાઈને ભેગા મળીને integer spins (bosons) પર ઘણાં પેપરો પબ્લિશ કર્યાં હતાં. 1974માં તેમનું અવસાન થયું.

પ્રકરણ 2

ચાકગતિ

2.1 પ્રસ્તાવના
2.2 રોટેશીલ કાઇનેમેટિક્સ અને ડાઇનેમિક્સ
2.3 ચાકગતિની ચલરાશિઓ અને રેખીય ગતિની ચલરાશિઓ વચ્ચેનો સંબંધ
2.4 અચળ કોણીય પ્રવેગ સાથેની ચાકગતિનાં સમીકરણો
2.5 ટૉર્ક
2.6 કોણીય વેગમાન
2.7 કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનું ભૌમિતિક નિરૂપણ
2.8 જડત્વની ચાકમાત્રા
2.9 જડત્વની ચાકમાત્રાની ગણતરી
2.10 ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા
2.11 સરક્યા વિના ગબડતા દૃઢ પદાર્થો
- સારાંશ
- સ્વાધ્યાય

2.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

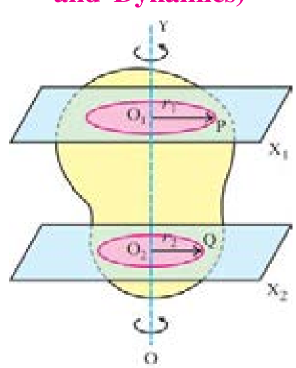
વિદ્યાર્થીમિત્રો, તમે પંખાની ગતિ, ભમરડાની ગતિ તેમજ ચકડોળની ગતિ જોઈ હશે. પૃથ્વી પોતાની અક્ષની આસપાસ ભ્રમણ કરે છે, જેનો તમને ખ્યાલ છે. પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે આવા પ્રકારની ગતિનો અભ્યાસ કરીશું. આવી ગતિ ચાકગતિ છે.

પ્રથમ આપણે દૃઢ પદાર્થની સ્થિર ભ્રમણાને અનુલક્ષીને ચાકગતિની ચર્ચા કરીશું અને છેલ્લે સરક્યા વિના ગબડતા દૃઢ પદાર્થની ગતિની ચર્ચા કરીશું.

કણોના જે તંત્રમાં કણો વચ્ચેના સાપેક્ષ અંતરો અફર જળવાઈ રહેતા હોય તેને દૃઢ પદાર્થ (Rigid body) કહે છે.

દૃઢ પદાર્થ એક આદર્શ વિભાવના છે. ભૌતિકવિજ્ઞાનની દૃષ્ટિએ દૃઢ પદાર્થ અને ઘન પદાર્થ તદ્દન સમાન નથી. ઘન પદાર્થનું વિરૂપણ થઈ શકે છે, પરંતુ દૃઢ પદાર્થનું વિરૂપણ થઈ શકે નહિ. ઘણા વ્યાવહારિક હેતુઓ પૂરતું ઘન પદાર્થને દૃઢ પદાર્થ ગણી શકાય છે.

2.2 રોટેશનલ કાઈનેમેટિક્સ અને ડાઈનેમિક્સ (Ratational Kinematics and Dynamics)



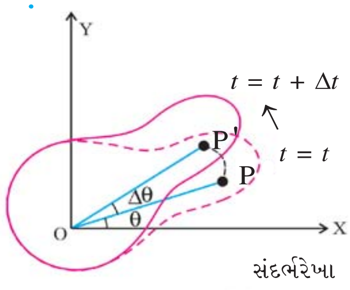
દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિ
આકૃતિ 2.1

જો દૃઢ પદાર્થના બધા જ કણો વર્તુળગતિ કરતાં હોય અને આ વર્તુળોના કેન્દ્રો કોઈ એક નિશ્ચિત સુરેખા પર સ્થિર હોય, તો દૃઢ પદાર્થની તેવી ગતિને ચાકગતિ કહે છે. આ નિશ્ચિત સુરેખા (જે ભૌમિતિક રેખા છે)ને ભ્રમણાક્ષ કહે છે. આકૃતિ 2.1માં કોઈ એક દૃઢ પદાર્થના બે કણો P અને Q ને દર્શાવ્યા છે. તથા દૃઢ પદાર્થ ભ્રમણાક્ષ OYને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરે છે. O_1 અને r_1 કણ P જે વર્તુળ પર ગતિ કરે છે, તેના અનુક્રમે કેન્દ્ર તથા ત્રિજ્યા છે. તેવી જ રીતે O_2 અને r_2 કણ Q જે વર્તુળ પર ગતિ કરે છે, તેના અનુક્રમે કેન્દ્ર તથા ત્રિજ્યા છે. કણ P અને Q જે વર્તુળમાર્ગો પર ગતિ કરે છે, તે ભ્રમણાક્ષ OYને લંબસમતલોમાં આવેલા હોય છે.

આપણે પ્રથમ ચાકગતિનાં કારણોનો ઉલ્લેખ કર્યા સિવાય માત્ર ચાકગતિનું વર્ણન કરીશું. ભૌતિકવિજ્ઞાનના આ વિષયાંગને રોટેશનલ કાઇનેમેટિક્સ કહે છે. પદાર્થની ચાકગતિ માટે જવાબદાર કારણો તથા વસ્તુના ગુણધર્મો સાથે ચાકગતિનું વર્ણન કરવામાં આવે, તો તે વિષયાંગને રોટેશનલ ડાઇનેમિક્સ કહે છે.

2.3 ચાકગતિની ચલરાશિઓ અને રેખીય ગતિની ચલ રાશિઓ વચ્ચેના સંબંધો (Relation Between Variables of Rotational Motion and the Variables of Linear Motion)

(*a*) કોણીય સ્થાનાંતર (Angular Displacement) :



કોણીય સ્થાનાંતર
આકૃતિ 2.2

ધારો કે કોઈ દૃઢ પદાર્થ આકૃતિ 2.2માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પુસ્તકના પાનને લંબ રૂપે આવેલ સ્થિર ભ્રમણાક્ષ OZને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરે છે. અત્રે સ્પષ્ટ છે કે આ ભ્રમણાક્ષને લંબસમતલ (X–Y) પુસ્તકના પાનમાં આવેલ છે.

દૃઢ પદાર્થના પુસ્તકના પાન સાથેના આડછેદના t અને $t + \Delta t$ સમયે સ્થાન અનુક્રમે ત્રુટક રેખા અને સળંગ રેખા વડે દર્શાવાય છે.

દૃઢ પદાર્થના કોઈ એક કણ P ને ધ્યાનમાં લો. કોઈ એક સમયે (આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે) આ કણને તેના વર્તુળમાર્ગના કેન્દ્ર (O) સાથે જોડતી રેખાએ (જે તેના વર્તુળમાર્ગની ત્રિજ્યા છે.) આપેલી નિશ્ચિત સંદર્ભરેખા સાથે બનાવેલા કોણને તે સમયે તે કણનું કોણીય સ્થાન કહે છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કણ P, t સમયે સંદર્ભરેખા OX સાથે θ કોણ રચે છે, જે કણ Pનું t સમયે કોણીય સ્થાન છે. $t + \Delta t$ સમયે કણ XY સમતલમાં વર્તુળગતિ કરી P થી P' બિંદુએ પહોંચે છે. આ સમયે કણનું કોણીય સ્થાન $\theta + \Delta\theta$ છે.

કણના કોણીય સ્થાનમાં થતા ફેરફારને કોણીય સ્થાનાંતર કહે છે. આમ કણ Pનું Δt જેટલા સમયગાળામાં કોણીય સ્થાનાંતર $\Delta\theta$ છે. (સંદર્ભરેખા તરીકે કોઈ પણ રેખા લઈ શકાય છે. સામાન્ય રીતે ધન X-અક્ષને સંદર્ભરેખા તરીકે લેવાય છે.)

દૃઢ પદાર્થમાં કણો વચ્ચેનાં સાપેક્ષ અંતરો અફર રહેતાં હોવાથી ચાકગતિ દરમિયાન બધા જ કણો સરખા સમયમાં સરખું કોણીય સ્થાનાંતર અનુભવે છે. માટે દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિનું વર્ણન અસંખ્ય કણોમાંના કોઈ એક પ્રતિનિધિ કણની ગતિ પરથી કરી શકાય છે. આમ, ઉપર્યુક્ત ચર્ચામાં કોણીય સ્થાનાંતર $\Delta\theta$ એ દૃઢ વસ્તુનું કોણીય સ્થાનાંતર છે. તેનો SI એકમ radian છે.

(*b*) કોણીય ઝડપ અને કોણીય વેગ (Angular speed and angular velocity) :

Δt સમયગાળામાં કણનું $\Delta\theta$ જેટલું કોણીય સ્થાનાંતર થતું હોવાથી સરેરાશ કોણીય ઝડપની વ્યાખ્યા અનુસાર

$$<\omega> = \frac{\text{કોણીય સ્થાનાંતર}}{\text{સમયગાળો}}$$

$$<\omega> = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{2.3.1}$$

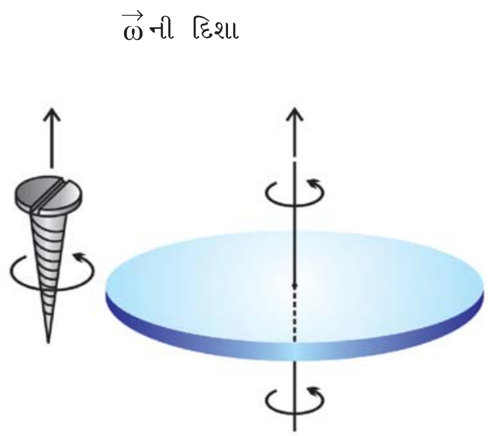
હવે $\Delta t \rightarrow 0$ લક્ષમાં આ ગુણોત્તરનું મૂલ્ય કણ Pની, t સમયે તત્કાલીન કોણીય ઝડપ થશે.

$$\therefore \ \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\therefore \ \omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{2.3.2}$$

જે સમગ્ર દૃઢ પદાર્થની પણ t સમયે કોણીય ઝડપ છે. હવે પછી કોણીય ઝડપ, એટલે તત્કાલીન કોણીય ઝડપ સમજીશું, સિવાય કે વિશેષ ઉલ્લેખ કરેલો હોય. ωનો એકમ rad s^{-1} અથવા rotation s^{-1} કોણીય ઝડપ સાથે જ્યારે યોગ્ય દિશા સાંકળવામાં આવે છે, ત્યારે તેને કોણીય વેગ કહે છે. રૈવાજિક રીતે કોણીય વેગ $\vec{\omega}$ની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમથી નક્કી કરવામાં આવે છે.

જમણા હાથના સ્ક્રૂને આકૃતિ 2.3માં દર્શાવ્યા અનુસાર ભ્રમણાક્ષને સમાંતર ગોઠવી વસ્તુ જે રીતે ભ્રમણ કરતી હોય તે જ રીતે ભ્રમણ આપતાં સ્ક્રૂ જે દિશામાં ખસે તેને કોણીય વેગ $\vec{\omega}$ની દિશા ગણવામાં આવે છે.



જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ

આકૃતિ 2.3

(*c*) કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો અદિશ સંબંધ (Scalar Relation between Angular Velocity and Linear Velocity) :

આકૃતિ 2.2માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કણ P, Δt સમયગાળામાં ચાપ PP'જેટલું રેખીય અંતર કાપે છે. આથી,

$$\text{સરેરાશ રેખીય ઝડપ } \langle v \rangle = \frac{\text{ચાપ PP}'}{\text{સમયગાળો } \Delta t}$$

જો કણ Pના વર્તુળપથની ત્રિજ્યા (ભ્રમણાક્ષથી કણ Pનું લંબઅંતર) r હોય તો, ચાપ PP' $= r\ \Delta\theta$

$$\therefore \langle v \rangle = \frac{r\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= r\langle \omega \rangle \qquad (2.3.3)$$

$\Delta t \rightarrow 0$ લક્ષમાં ઉપર્યુક્ત ગુણોત્તરનું મૂલ્ય t સમયે કણ Pના તત્કાલીન રેખીય વેગનું મૂલ્ય આપે છે.

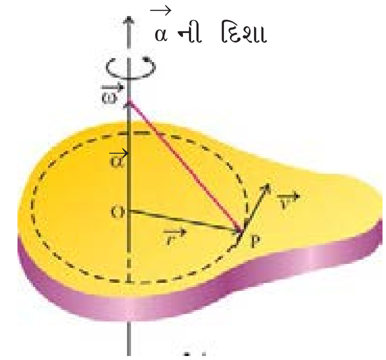
$$\therefore v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore v = r\omega \qquad (2.3.4)$$

જે પદાર્થના રેખીય વેગ અને કોણીય વેગ વચ્ચેનો અદિશ સંબંધ છે.

(*d*) કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો સદિશ સંબંધ (Vector Releation between Angular Velocity and Linear Velocity) :



કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો સદિશ સંબંધ

આકૃતિ 2.4

ચાકગતિ કરતા દૃઢ પદાર્થના કોઈ કણ Pના ભ્રમણાક્ષને લંબ આવેલ સમતલમાંના વર્તુળમાર્ગના કેન્દ્રને અનુલક્ષીને તેના સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ તથા રેખીય વેગ $\vec{v}$ ની સ્થિતિ આકૃતિ 2.4માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે હોય છે તથા કોણીય વેગ $\vec{\omega}$ જમણા હાથના નિયમ અનુસાર (આકૃતિમાં દર્શાવ્યા અનુસાર) ભ્રમણાક્ષને સમાંતર છે.

$\vec{\omega} \times \vec{r}$ ની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ પરથી શોધતાં તે $\vec{v}$ ની દિશામાં મળે છે. તેમજ $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ હોવાથી $\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r \sin 90 = \omega r = \vec{v}$ નું મૂલ્ય.

રેખીય વેગ સદિશ છે. વર્તુળગતિમાં કોઈ પણ બિંદુએ રેખીય વેગની દિશા તે બિંદુએ વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે.

સમીકરણ $v = r\omega$માં ડાબી બાજુ રેખીય વેગનું મૂલ્ય જ્યારે જમણી બાજુએ આવતા r અને ω એ સદિશ રાશિઓ $\vec{r}$ અને $\vec{\omega}$નાં મૂલ્યો છે. આ હકીકત સૂચવે છે કે સદિશ રાશિઓ $\vec{r}$ અને $\vec{\omega}$નો એવો ગુણાકાર લેવામાં આવે કે જેનું ગણનફળ પણ સદિશ જ હોય. જેને આપણે બે સદિશોના સદિશ ગુણાકાર (ક્રોસ ગુણાકાર) તરીકે ઓળખીએ છીએ. અત્રે $\vec{\omega} \times \vec{r}$ની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ પરથી શોધતાં તે $\vec{v}$ની દિશામાં મળે છે. તેમજ $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ હોવાથી $|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin 90 = \omega r = \vec{v}$ નું મૂલ્ય. તેથી રેખીય વેગ $\vec{v}$ અને કોણીય વેગ $\vec{\omega}$ સદિશ સંબંધના સ્વરૂપમાં મૂકી શકાય. (તમે $\vec{r} \times \vec{\omega}$ની દિશા કઈ હશે તે વિચારો.)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (2.3.5)$$

(*e*) કોણીય પ્રવેગ (Angular Acceleration) :

ધારો કે t અને $t + \Delta t$ સમયે કણ Pના તત્કાલીન કોણીય વેગ $\vec{\omega}$ અને $\vec{\omega} + \Delta\vec{\omega}$ છે.

તેથી વ્યાખ્યા અનુસાર,

સરેરાશ કોણીય પ્રવેગ $<\vec{\alpha}> = \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ (2.3.6)

$\Delta t \rightarrow 0$, લક્ષમાં ઉપર્યુક્ત ગુણોત્તરનું મૂલ્ય એ t સમયે કણ Pનો તત્કાલીન કોણીય પ્રવેગ આપે $\vec{\alpha}$ છે.

$$\therefore \vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

$$\therefore \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (2.3.7)$$

$<\vec{\alpha}>$ની દિશા એ $\Delta\vec{\omega}$ (કોણીય વેગનો ફેરફાર) ની દિશામાં હોય છે. સ્થિર ભ્રમણાક્ષના કિસ્સામાં $\Delta\vec{\omega}$ ની દિશા ભ્રમણાક્ષને સમાંતર હોય છે, તેથી $<\vec{\alpha}>$ની દિશા પણ ભ્રમણાક્ષને સમાંતર હોય છે. (જુઓ આકૃતિ 2.4) $\vec{\alpha}$ નો એકમ rad s^{-2} અથવા rotation s^{-2} છે.

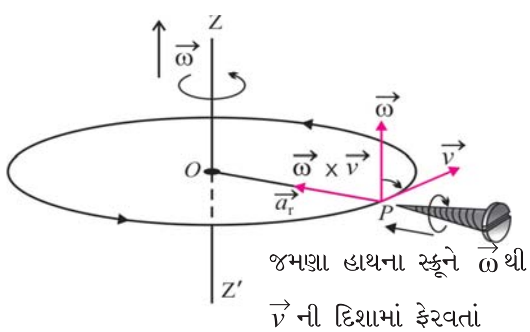
(f) રેખીય પ્રવેગ અને કોણીય પ્રવેગ વચ્ચેનો સંબંધ (Relation between Linear Acceleration and Angular Acceleration) :

રેખીય વેગનું સમય સાપેક્ષે વિકલન રેખીય પ્રવેગ ($\vec{a}$) આપે છે. સમીકરણ (2.3.5)નું સમય સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$$

અત્રે $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ અને $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha}$ હોવાથી

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\alpha} \times \vec{r} \qquad (2.3.8)$$



રેખીય પ્રવેગનો ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક

આકૃતિ 2.4 (*a*)

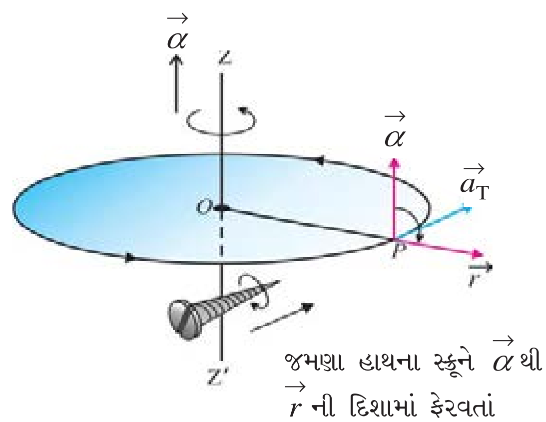
આમ રેખીય પ્રવેગ $\vec{a}$ ના બે સદિશ ઘટકો $\vec{\omega} \times \vec{v}$ અને $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ છે.

આકૃતિ 2.4(*a*) અનુસાર જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમનો ઉપયોગ કરી $\vec{\omega} \times \vec{v}$ ની દિશા શોધતાં તે કેન્દ્ર તરફ ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં મળે છે. તેથી $\vec{\omega} \times \vec{v}$ ને રેખીય પ્રવેગ $\vec{a}$ નો **ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક** કહે છે. તેને $\vec{a_r}$ વડે દર્શાવાય છે. તેનું મૂલ્ય $\omega v \sin\frac{\pi}{2} = \omega v = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

$(\because v = r\omega)$

આ જ પ્રમાણે $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ ની દિશા વર્તુળમાર્ગના સ્પર્શકની દિશામાં મળતી હોઈ તેને રેખીય પ્રવેગનો સ્પર્શીય ઘટક કહે છે (જુઓ આકૃતિ 2.4 (*b*)). તેને $\vec{a_T}$ વડે દર્શાવાય છે. તેનું મૂલ્ય $\alpha r \sin\frac{\pi}{2} = \alpha r$ છે.

$$\therefore \vec{a} = \vec{a_r} + \vec{a_T}$$



રેખીય પ્રવેગનો સ્પર્શીય ઘટક

આકૃતિ 2.4(*b*)

ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક $\vec{a_r}$ અને સ્પર્શીય ઘટક $\vec{a_T}$ પરસ્પર લંબ હોવાથી $\vec{a}$ નું મૂલ્ય

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_T^2} = \sqrt{\omega^2 v^2 + \alpha^2 r^2} \qquad (2.3.9)$$

જો દઢ પદાર્થ અચળ કોણીય વેગથી ચાકગતિ કરતો હોય એટલે કે કોણીય પ્રવેગ $\alpha = 0$ હોય, તો તેનો રેખીય પ્રવેગનો સ્પર્શીય ઘટક શૂન્ય બને, પરંતુ તેનો ત્રિજ્યાવર્તી ઘટકનો અશૂન્ય જ હોય છે.

આ સ્થિતિ નિયમિત વર્તુળગતિમાં જોવા મળે છે. નિયમિત વર્તુળગતિમાં કેન્દ્રગામી પ્રવેગ $\dfrac{v^2}{r}$ હોય છે, તે તમે જાણો જ છો.

ઉપર્યુક્ત ચર્ચામાં આપણે જોયું કે કોણીય સ્થાનાંતર (θ), કોણીય વેગ ($\vec{\omega}$), કોણીય પ્રવેગ $\vec{\alpha}$ દૃઢ વસ્તુના દરેક કણ માટે સમાન છે. આમ, θ, $\vec{\omega}$ અને $\vec{\alpha}$ દૃઢ વસ્તુની લાક્ષણિકતાઓ છે અને તેમને રોટેશનલ કાઇનેમેટિક્સની ચલ રાશિઓ કહે છે.

અત્રે નોંધો કે સ્થિર ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતી દૃઢ પદાર્થના કોઈ એક કણની ગતિનું વર્ણન રેખીય ચલો ($\vec{r}$, $\vec{v}$ અને $\vec{a}$) અને કોણીય ચલો (θ, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$)ના સંદર્ભમાં કરી શકાય છે, પરંતુ જ્યારે દૃઢ પદાર્થના બધા કણોનો એક સાથે વિચાર કરવાનો હોય ત્યારે કોણીય ચલો (જે બધા જ કણો માટે સમાન છે.) વાપરવાથી સમગ્ર પદાર્થની ગતિનું વર્ણન સરળતાથી થઈ શકે છે.

ઉદાહરણ 1 : એક ઘડિયાળના સેકન્ડ-કાંટાની લંબાઈ 20 cm છે, તો તેની ટોચ પરના કણનાં (1) કોણીય વેગ (2) રેખીય વેગ (3) કોણીય પ્રવેગ (4) ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ (5) સ્પર્શીય પ્રવેગ (6) રેખીય પ્રવેગનાં મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ :

$r = 20$ cm

(1) સેકન્ડ-કાંટો એક મીનીટ (60 seconds)માં 2π rad કોણીય સ્થાનાંતર કરે છે. આથી કોણીય વેગ

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30} \text{ rad s}^{-1}$$

(2) રેખીય વેગ $v = \omega r = \frac{\pi}{30} \times 20$

$= \frac{2}{3}\pi$ cm s^{-1}

(3) ઘડિયાળનો સેકન્ડ-કાંટો અચળ કોણીય ઝડપથી ગતિ કરતો હોઈ $\therefore \alpha = 0$ rad s^{-1}

(4) ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ $= a_r = \frac{v^2}{r}$

$$= \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{20}\right) = \frac{\pi^2}{45} \text{ cm s}^{-2}$$

(5) સ્પર્શીય પ્રવેગ $= a_T = \alpha r = 0$

(6) રેખીય પ્રવેગ $a = \sqrt{a_r^2 + a_T^2} = a_r = \frac{\pi^2}{45}$ cms^{-2}

(15 cm લંબાઈના મિનિટ તથા 10 cm લંબાઈના કલાકકાંટા માટે આવી જ ગણતરી જાતે કરી જુઓ.)

2.4 નિયમિત (અચળ) કોણીય પ્રવેગ સાથેની ચાકગતિનાં સમીકરણો (Equations of Rotational Motion with Constant Angular Acceleration)

ધારો કે $t = 0$ સમયે દૃઢ પદાર્થના કોઈ કણનું કોણીય સ્થાન $\theta = 0$ અને કોણીય વેગ એ ω_0 છે.

$t = t$ સમયે તેનું કોણીય સ્થાન એ $\theta = \theta$ અને કોણીય વેગ એ ω છે.

જો દૃઢ પદાર્થ સ્થિર ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતો હોય, તો $\vec{\omega}_0$, $\vec{\omega}$ અને તેનો અચળ કોણીય પ્રવેગ $\vec{\alpha}$ની દિશા સ્થિર ભ્રમણાક્ષની દિશા પર હોય છે. આથી θ, $\vec{\omega}$ અને $\vec{\alpha}$ના સંબંધોને અદિશ સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે. α અચળ હોવાથી

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t} \quad (2.4.1)$$

અથવા $\quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad (2.4.2)$

આ સમીકરણ રેખીય ગતિના સમીકરણ $v = v_0 + at$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે.

અત્રે કોણીય પ્રવેગ અચળ હોવાથી, સરેરાશ કોણીય વેગનો ઉપયોગ કરી કોણીય સ્થળાંતર શોધી શકાય.

$\therefore$ કોણીય સ્થાનાંતર

θ = (સરેરાશ કોણીય વેગ) (t)

$$\therefore \theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)t \quad (2.4.3)$$

આ સમીકરણ રેખીય ગતિના સમીકરણ

$x = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે.

સમીકરણ (2.4.2)માંથી ωનું મૂલ્ય સમીકરણ (2.4.3)માં મૂકતાં

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \alpha t + \omega_0}{2}\right)t$$

$$\therefore \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (2.4.5)$$

આ સમીકરણ રેખીય ગતિના સમીકરણ $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે.

સમીકરણ (2.4.1)માંથી tનું મૂલ્ય સમીકરણ (2.4.3)માં મૂકતાં

$$\theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)$$

$$\therefore\ 2\alpha\theta = \omega^2 - {\omega_0}^2 \qquad (2.4.6)$$

આ સમીકરણ રેખીય ગતિના સમીકરણ $2ax = v^2 - {v_0}^2$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે.

ઉદાહરણ 2 : ચિલ્ડ્રનપાર્કમાં 18 km/hના રેખીય વેગથી દોડતી એક મીનીટ્રેનને બ્રેક લગાડતાં તેમાં અચળ કોણીય પ્રતિપ્રવેગ ઉત્પન્ન થઈ તે 10 sમાં સ્થિર થઈ જાય છે. જો મીની ટ્રેનના પૈડાની ત્રિજ્યા 30 cm, હોય, તો પૈડાનો કોણીય પ્રવેગ શોધો.

ઉકેલ :

$v_0 = 18$ km/h $= 5$ m/s; $r = 30$ cm $= 0.3$ m

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{5}{0.3} = \frac{50}{3} \text{ rad s}^{-1}$$

$\omega_2 = 0$, $\quad t = 10$ s

$$\therefore\ \alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = \frac{0 - \frac{50}{3}}{10}$$

$$= \frac{-5}{3} = -1.666 \text{ rad s}^{-2}$$

ઉદાહરણ 3 : એક ટ્રક 54 km/hની ઝડપથી દોડે છે. તેના પૈડાની ત્રિજ્યા 50 cm છે. બ્રેક લગાડતાં પૈડાં 20 ભ્રમણ કરીને સ્થિર થાય છે, તો તે દરમિયાન ટ્રક કેટલું રેખીય અંતર કાપશે ? પૈડાનો કોણીય પ્રવેગ પણ શોધો.

ઉકેલ : અત્રે $v_1 = 54$ km/h $= 15$ m/s; $r = 50$ cm $= 0.5$ m, $\theta = 20$ ભ્રમણ $= 20 \times 2\pi$ rad $= 40\pi$ rad; $d = ?$, $\alpha = ?$

$$v_1 = r\omega_1\ \therefore\ \omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{15}{0.5} = 30 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 0;\ \alpha = \frac{{\omega_2}^2 - {\omega_1}^2}{2\theta} = \frac{0 - 900}{2 \times 40\pi}$$

$$= -3.58 \text{ rad/s}^2$$

હવે 1 પરિભ્રમણ $= 2\pi r$ રેખીય અંતર

$\therefore$ 20 પરિભ્રમણ $= 20 \times 2\pi r$ અંતર

$\therefore$ ટ્રકે કાપેલું રેખીય અંતર

$d = 20 \times 2 \times 3.14 \times 0.5$

$= 62.8$ m

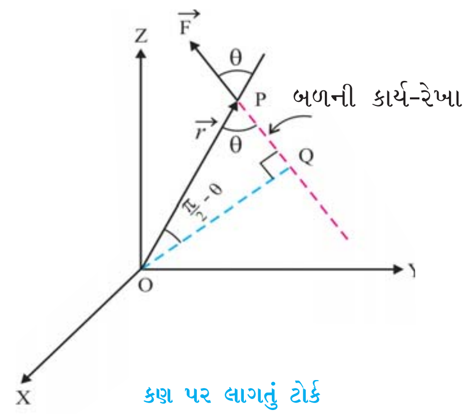
2.5 ટૉર્ક (Torque)

અત્યાર સુધી આપણે દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિની ચાકગતિનાં કારણોની ચિંતા કર્યા સિવાય કરી. હવે આપણે તેના કારણ વિષે પણ વિચારીએ.

ટૉર્ક એ રોટેશનલ ડાઈનેમિક્સની અગત્યની ભૌતિક રાશિ છે. રેખીય ગતિમાં બળ જે ભાગ ભજવે છે, તેવો જ ભાગ ચાક ગતિમાં ટૉર્ક ભજવે છે.

પ્રથમ આપણે એક કણ પર લાગતા ટૉર્કની ચર્ચા કરીશું. ત્યાર બાદ કણોના તંત્ર પર લાગતા ટૉર્ક વિષે ચર્ચા કરીશું.

(*a*) કણ પર લાગતું ટૉર્ક (Torque Acting on a Particle) :



કણ પર લાગતું ટૉર્ક

આકૃતિ 2.5

આકૃતિ 2.5માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે, કોઈ કણ P પર બળ $\vec{F}$ લાગે છે. આ બળની કાર્યરેખા QP છે. ઊગમબિંદુ Oના સાપેક્ષે Pનો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ છે. $\vec{r}$ અને $\vec{F}$ વચ્ચેનો કોણ θ છે. અત્રે કણ P કોઈ દૃઢ પદાર્થનો કણ હોવો જરૂરી નથી.

$\vec{r}$ અને $\vec{F}$ના સદિશ ગુણાકારને O બિંદુની સાપેક્ષે કણ P પર લાગતું ટૉર્ક ($\vec{\tau}$) કહે છે.

$$\therefore\ \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (2.5.1)$$

$$\therefore\ \tau = rF\sin\theta$$

આકૃતિ 2.5 પરથી, $r\sin\theta = OQ =$ બળની કાર્યરેખાનું O થી લંબઅંતર

$\therefore\ \tau$ = (F) (બળની કાર્યરેખાનું Oથી લંબઅંતર)

= બિંદુ O ને અનુલક્ષીને બળની ચાકમાત્રા (moment of force) (વ્યાખ્યા અનુસાર)

આમ, **ટૉર્ક એ આપેલ સંદર્ભબિંદુને અનુલક્ષીને બળની ચાકમાત્રા છે.** તેનું પરિમાણિક સૂત્ર $M^1 L^2 T^{-2}$ છે અને તેનો SI એકમ N m છે.

યાદ રાખો કે,

(*i*) $\vec{\tau}$ ની દિશા સદિશ ગુણાકાર માટેના જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ અનુસાર $\vec{r}$ અને $\vec{F}$ વડે રચાતા સમતલને લંબ હોય છે.

(*ii*) $\vec{\tau}$ નું મૂલ્ય સંદર્ભબિંદુ પર આધાર રાખતું હોવાથી તેની વ્યાખ્યામાં સંદર્ભબિંદુનો ઉલ્લેખ અનિવાર્ય છે.

(*b*) કણોના તંત્ર પર લાગતું ટૉર્ક (Torque Acting on the System of Particles) :

તંત્રના કણો વચ્ચે લાગતાં પરસ્પર આંતરિક બળો સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોવાથી તેમના વડે ઉદ્‌ભવતું પરિણામી બળ અને તેથી ટૉર્ક શૂન્ય બને છે.

તેથી ચર્ચામાં આપણે આંતરિક બળોને ધ્યાનમાં લઈશું નહિ. ધારો કે $\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_n}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા કણોના તંત્ર માટે કણો પર લાગતાં બાહ્ય બળો અનુક્રમે $\vec{F_1}, \vec{F_2}, ..., \vec{F_n}$. તંત્ર પરનું પરિણામી ટૉર્ક એટલે તંત્રના દરેક કણ પર લાગતા ટૉર્કનો સદિશ સરવાળો.

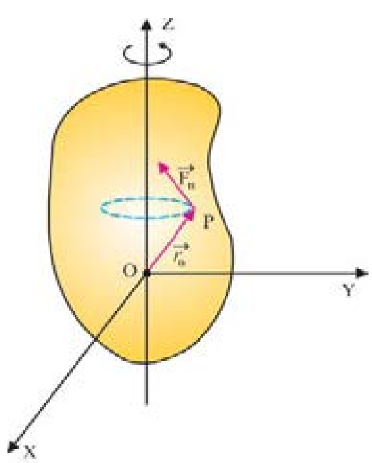
$$\vec{\tau} = \vec{\tau_1} + \vec{\tau_2} + ... \vec{\tau_n} \qquad (2.5.2)$$

∴ પરિણામી ટૉર્ક

$$\vec{\tau} = (\vec{r_1} \times \vec{F_1}) + (\vec{r_2} \times \vec{F_2}) + ... + (\vec{r_n} \times \vec{F_n})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\vec{r_i} \times \vec{F_i}) \qquad (2.5.3)$$

(*c*) દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું ટૉર્ક (Torque Acting on the Rigid Body) :



દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું ટૉર્ક

આકૃતિ 2.6

આકૃતિ 2.6માં દર્શાવ્યા અનુસાર ધારો કે કોઈ એક દૃઢ પદાર્થ સ્થિર ભ્રમણાક્ષ OZને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરે છે. $\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_n}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા કણો પર લાગતાં બળો અનુક્રમે $\vec{F_1}, \vec{F_2}, ..., \vec{F_n}$ છે. હવે $\vec{r_n}$ સદિશ ધરાવતા કણ પર લાગતા બળ $\vec{F_n}$ ને ધ્યાનમાં લઈએ તો વ્યાખ્યા અનુસાર તેના પર લાગતું ટૉર્ક $\vec{\tau_n}$

$$\vec{\tau_n} = \vec{r_n} \times \vec{F_n}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_n & y_n & z_n \\ F_{nx} & F_{ny} & F_{nz} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{\tau_n} = (y_n F_{nz} - z_n F_{ny})\hat{i} + (z_n F_{nx} - x_n F_{nz})\hat{j} + (x_n F_{ny} - y_n F_{nx})\hat{k} \qquad (2.5.4)$$

સમીકરણ (2.5.4) પરથી સમગ્ર પદાર્થ પરનું ટૉર્ક બધા કણો પર લાગતા ટૉર્કના સદિશ સરવાળા સ્વરૂપે નીચે મુજબ થાય :

$$\vec{\tau} = \sum_n (y_n F_{nz} - z_n F_{ny})\hat{i} + (z_n F_{nx} - x_n F_{nz})\hat{j} + (x_n F_{ny} - y_n F_{nx})\hat{k} \qquad (2.5.5)$$

દૃઢ પદાર્થની Z-અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે ઉપર્યુક્ત ટૉર્કનો Z ઘટક જ જવાબદાર છે. X-અક્ષ અથવા Y-અક્ષને અનુલક્ષીને થતી ચાકગતિ માટે અનુક્રમે ટૉર્કના X અને Y ઘટક જવાબદાર હોય. વ્યાપક રીતે **પરિભ્રમણ અક્ષ પરનો એકમસદિશ $\hat{n}$** હોય, તો $\vec{\tau} \cdot \hat{n}$ ઘટક ચાક ગતિ માટે જવાબદાર હોય છે.

દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવા તેના બધા જ કણો પર બાહ્ય બળ લગાડવાં જરૂરી નથી. જેમકે બારણું ખોલવા કે બંધ કરવા માટે આપણે તેના બધા જ કણો પર બળ લગાડતાં નથી.

દૃઢ પદાર્થના બધા જ કણો વચ્ચેનાં સાપેક્ષ અંતરો અફર રહેતા હોવાથી **કોઈ એક જ કણ** પર બળ લગાડતાં

ઉદ્ભવતું ટૉર્ક સમગ્ર દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું ટૉર્ક જ કહેવાય. કોઈ સંદર્ભબિંદુને અનુલક્ષીને $\vec{r}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા કોઈ એક જ કણ પર લાગતું બળ $\vec{F}$ હોય, તો દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું ટૉર્ક $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.

ઉદાહરણ 4 : એક દૃઢ પદાર્થના $\vec{r} = (4, 6, 12)$ m સ્થાનસદિશ ધરાવતા કણ પર લાગતું બળ $\vec{F} = (6, 8, 10)$ N છે, તો દૃઢ પદાર્થ કે જેના પરનો એકમસદિશ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (1, 1, 1) તેવી ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરે છે. આ ચાકગતિ કરાવનાર ટૉર્કનું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $\tau = \vec{r} \times \vec{F}$

જેના પર એકમસદિશ $\hat{n}$ હોય તેવા અક્ષને અનુલક્ષીને ટૉર્કનું મૂલ્ય

$$\tau_n = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{n}$$

$$\text{હવે } \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 6 & 12 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= (-36)\hat{i} - (-32)\hat{j} + (-4)\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_n = (-36, 32, -4) \text{ N m}$$

ચાકગતિ માટે જવાબદાર ટૉર્કનું મૂલ્ય.

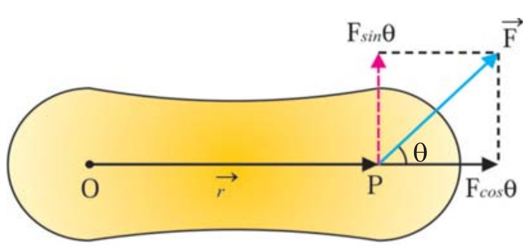
હવે, $(\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{n}$

$$= (-36, 32, -4) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(-36 + 32 - 4)$$

$$= -\frac{8}{\sqrt{3}} \text{ N m}$$

(a) ટૉર્કની વ્યાખ્યા ભૌતિક સમજૂતી (Physical interpretation of the definition of torque)



ટૉર્કનો અસરકારક ઘટક

આકૃતિ 2.7

ધારો કે આકૃતિ 2.7માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે દૃઢ પદાર્થના કણ P પર બળ $\vec{F}$ લાગે છે. અત્રે બળ $\vec{F}$ એ ભ્રમણાક્ષને લંબ એવા સમતલમાં લીધેલ છે. ભ્રમણાક્ષ O બિંદુમાંથી પુસ્તકના પાનને લંબ રૂપે બહાર આવતી દિશામાં છે.

P નો પોતાના વર્તુળમાર્ગના કેન્દ્રને અનુલક્ષીને સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ છે. $\vec{F}$ અને $\vec{r}$ વચ્ચેનો કોણ θ છે. ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવામાં $\vec{F}$ની અસરકારકતા જોવા માટે $\vec{F}$ના બે ઘટકો વિચારો.

(*i*) $F_1 = F \cos\theta$ જે $\vec{r}$ ને સમાંતર હોવાથી $\vec{r} \times \vec{F_1} = 0$ થશે, જે ટૉર્ક ઉત્પન્ન કરતો નથી, આથી તે ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરતો નથી.

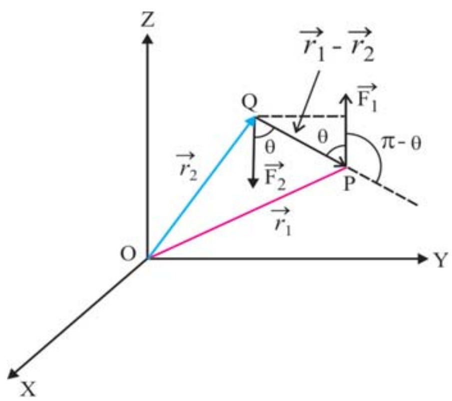
(*ii*) $F_2 = F \sin\theta$ જે $\vec{r}$ ને લંબ છે. આ ઘટક ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરે છે. જો Fનું અને/અથવા θનું મૂલ્ય વધારે હશે, તો $\vec{F}$ વધારે અસરકારક બનશે. વળી, આપણો સામાન્ય અનુભવ કહે છે જો $\vec{F}$ના લાગબિંદુનો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ મોટો હોય તોપણ ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવામાં $\vec{F}$ વધારે અસરકારક બને છે. આમ, ચાકગતિ માટે જવાબદાર રાશિ માત્ર $\vec{F}$ નહિ, પરંતુ r F sinθ છે.

આ રાશિને આપણે ટૉર્ક કહીએ છીએ. આ સૂત્ર સદિશ સ્વરૂપે લખતાં,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (2.5.6)$$

યાદ રાખો કે, **ટૉર્ક એ ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવા માટે બળની અસરકારકતાનું માપ છે.**

(e) બળયુગ્મ (Couple) : બે સમાન મૂલ્યના અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાંના એકરેખસ્થ ન હોય તેવાં બળો બળયુગ્મની રચના કરે છે. આકૃતિ 2.8માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે ઊગમબિંદુ Oને અનુલક્ષીને કોઈ એક દૃઢ પદાર્થના $\vec{r_1}$ અને $\vec{r_2}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા બે કણો P અને Q પર અનુક્રમે $\vec{F_1}$ અને $\vec{F_2}$ બળો લાગે છે. અહીં $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}|$ તથા $\vec{F_1}$ અને $\vec{F_2}$ ની દિશાઓ પરસ્પર વિરુદ્ધ છે. હવે $\vec{F_1}$ અને $\vec{F_2}$ બળોના કારણે ઉત્પન્ન થતા ટૉર્ક $\vec{\tau_1}$ અને $\vec{\tau_2}$ ના પરિણામી ટૉર્કને બળયુગ્મની ચાકમાત્રા ($\vec{\tau}$) કહે છે.



બળયુગ્મ

આકૃતિ 2.8

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$$

$$\therefore \vec{\tau} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2)$$

$$= (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) - (\vec{r}_2 \times \vec{F}_1)$$

$$(\because \vec{F}_2 = -\vec{F}_1)$$

$$\therefore \vec{\tau} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1$$

$$= |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|(F_1) \sin(\pi - \theta)$$

$$= |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|(F_1) \sin\theta$$

જ્યાં $(\pi - \theta)$ એ $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ અને $\vec{F}_1$ વચ્ચેનો ખૂણો છે.

આકૃતિ પરથી $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \sin\theta$ = બે બળો વચ્ચેનું લંબ-અંતર

∴ બળયુગ્મની ચાકમાત્રા = (F_1) (બે બળો વચ્ચેનું લંબ અંતર)

= (બેમાંથી એક બળનો માનાંક) (બે બળો વચ્ચેનું લંબ અંતર) (2.5.8)

વિદ્યાર્થીમિત્રો, વ્યવહારમાં તમે બળયુગ્મનો ઉપયોગ કરો છો તે તમે જાણો છો ? તમે સાઇકલ, સ્કૂટર કે કાર ચલાવો ત્યારે આ વાહનને વાળવા માટે બે હાથે સ્ટિયરિંગ પર જે બળો લગાડો છો, તે બળયુગ્મ રચે છે.

(*f*) દૃઢ પદાર્થનું સંતુલન (Equilibrium of a rigid body) :

હવે આપણે દૃઢ પદાર્થ પર લાગતાં અનેક બળોની અસર હેઠળ દૃઢ પદાર્થના સંતુલનની ચર્ચા કરીશું. જો દૃઢ પદાર્થ પર લાગતાં બાહ્ય બળો $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots\ldots, \vec{F}_n$ હોય અને જો પરિણામી $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0$ (2.5.9) થાય તો દૃઢ પદાર્થ રેખીય સંતુલનમાં રહે છે.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણને બળોના ઘટકોના સ્વરૂપમાં લખતાં

$$\sum_i F_{xi} = 0; \sum_i F_{yi} = 0; \text{ અને } \sum_i F_{zi} = 0. \quad (2.5.9\ a)$$

જો ઉપર્યુક્ત બળોને કારણે ઉદ્ભવતાં ટૉર્ક અનુક્રમે $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \ldots, \vec{\tau}_n$ હોય, તો જ્યારે

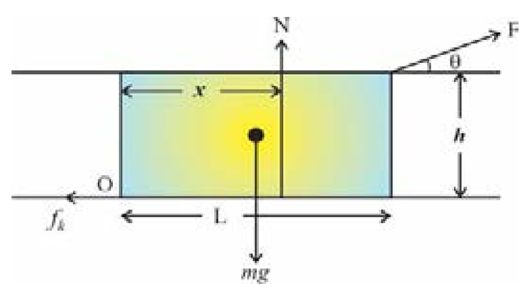
$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \ldots + \vec{\tau}_n = 0. \quad (2.5.10)$$

ત્યારે દૃઢ પદાર્થ **ચાકગતીય સંતુલનમાં** રહે છે. એટલે કે જો દૃઢ પદાર્થ સ્થિર હોય તો સ્થિર રહે અને જો ચાક-ગતિ કરતો હોય તો અચળ કોણીય વેગથી ચાકગતિ ચાલુ રાખે છે.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણને ઘટકોના સ્વરૂપમાં લખતાં,

$$\sum_i \tau_{xi} = 0; \sum_i \tau_{yi} = 0; \text{ અને } \sum_i \tau_{zi} = 0 \quad (2.5.10\ a)$$

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિ 2.9માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે m દળનો એક બ્લૉક સમક્ષિતિજ સાથે θ કોણ બનાવતી દિશામાં લાગતા બળ F ની અસર હેઠળ અચળ વેગથી ગતિ કરે છે. જો બ્લૉકની સપાટી અને સમક્ષિતિજ સપાટી વચ્ચે ઘર્ષણબળ f_k હોય, તો લંબ પ્રત્યાઘાતી બળ Nની કાર્યરેખાનું Oથી અંતર શોધો. બ્લૉકની લંબાઈ L અને ઊંચાઈ h છે.



આકૃતિ 2.9

ઉકેલ : બ્લૉક અત્રે જુદાં-જુદાં બળોની અસર હેઠળ હોવા છતાં ચાકગતિ કરતો નથી. પરિણામે તે ચાકગતિય સંતુલનમાં છે. આ સ્થિતિમાં જુદાં-જુદાં બળોને લીધે લાગતા ટૉર્કનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય થવો જોઈએ. બિંદુ Oને અનુલક્ષીને બધાં ટૉર્ક લેતાં, $\tau = f_k(0) - (mg)\left(\frac{L}{2}\right) + N(x) - (F\cos\theta)(h) + F\sin\theta(L) = 0.$

(અત્રે સમઘડી દિશામાં ટૉર્ક ઋણ અને વિષમઘડી દિશામાં ટૉર્ક ધન લીધેલ છે).

$$\therefore \quad N(x) = (mg)\left(\frac{L}{2}\right) + (F\cos\theta)(h) - F\sin\theta\,(L) \quad (1)$$

હવે રેખીય સંતુલન માટે,

$mg = N + F \sin\theta$ અને $F \cos\theta = f_k$

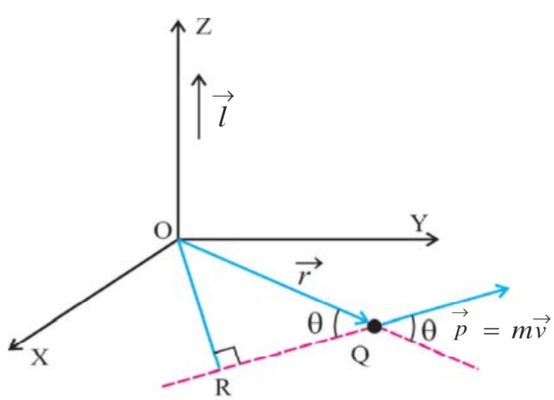
$\therefore N = mg - F \sin\theta$

આ મૂલ્યને સમીકરણ (1)માં મૂકતાં અને xને સૂત્રનો કર્તા બનાવતાં,

$$x = \frac{(mg)\left(\frac{L}{2}\right) + (F\cos\theta)(h) - (F\sin\theta)(L)}{mg - F\sin\theta}$$

2.6 કોણીય વેગમાન (Angular Momentum)

(*a*) કણનું કોણીય વેગમાન (Angular Momentum of a Particle) : ધારો કે આકૃતિ 2.10માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે m દળવાળા કોઈ કણ Qનો કાર્તેઝીય યામ-પદ્ધતિમાં સ્થાનસદિશ $\vec{OQ} = \vec{r}$ છે. આ કણનો રેખીય વેગ $\vec{v}$ છે. અને તેનું રેખીય વેગમાન $\vec{p} = m\vec{v}$ છે. અહીં કણ Q કોઈ દૃઢ પદાર્થનો કણ હોવો જરૂરી નથી. ધારો કે $\vec{p}$ અને $\vec{r}$ વચ્ચેનો કોણ θ છે. માત્ર સરળતા ખાતર જ કણ અને તેની ગતિને $(x - y)$ સમતલમાં લીધેલ છે. $\vec{r}$ અને $\vec{p}$ના સદિશ ગુણાકારને O બિંદુના સંદર્ભમાં કણનું કોણીય વેગમાન $\vec{l}$ કહે છે.



કણનું કોણીય વેગમાન

આકૃતિ 2.10

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (2.6.1)$$

$\vec{l}$નો SI એકમ kg m^2 s^{-1} અથવા J s.

(*i*) $\vec{l}$નું મૂલ્ય સંદર્ભબિંદુની પસંદગી પર આધારિત હોવાથી તેની વ્યાખ્યામાં સંદર્ભબિંદુનો ઉલ્લેખ અનિવાર્ય છે.

(*ii*) $\vec{l}$ની દિશા સદિશગુણાકારના જમણાહાથના સ્ક્રુના નિયમ વડે મળે છે. પ્રસ્તુત કિસ્સામાં $\vec{l}$ની દિશા OZ દિશામાં છે.

(*iii*) હવે $|\vec{l}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = r\,p \sin\theta$

પણ આકૃતિ 2.10 પરથી, $r \sin\theta = OR$

$\therefore l = (p)$ (અંતર OR)

આમ, કણનું કોણીય વેગમાન = (રેખીય વેગમાન) (સંદર્ભબિંદુથી રેખીય વેગમાનના સદિશનું લંબઅંતર)

= બિંદુ Oને અનુલક્ષીને રેખીય વેગમાનની ચાકમાત્રા (વ્યાખ્યા પ્રમાણે)

(*iv*) કણના કોણીય વેગમાનના કાર્તેઝીય ઘટકો : કોણીય વેગમાનની વ્યાખ્યા આ પ્રમાણે છે.

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$= (yp_z - zp_y)\hat{i} + (zp_x - xp_z)\hat{j} + (xp_y - yp_x)\hat{k}$$

$$\vec{l} = l_x\hat{i} + l_y\hat{j} + l_z\hat{k}$$

અત્રે l_x, l_y અને l_z અનુક્રમે X, Y અને Z અક્ષને અનુલક્ષીને કણના કોણીય વેગમાનના ઘટકો છે.

(*b*) કણનું કોણીય વેગમાન અને તેના પર લાગતા ટૉર્ક વચ્ચેનો સંબંધ (The relation between angular momentum of a particle and torque acting on it) :

સમીકરણ (2.6.1)નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

પરંતુ $\frac{d\vec{p}}{dt}$ = રેખીય વેગમાનના ફેરફારનો દર = $\vec{F}$ (બળ) અને $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ (વેગ)

$$\therefore \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{v} \times \vec{p}$$

પરંતુ $\vec{v}$ અને $\vec{p}$ એક જ દિશામાં હોવાથી સદિશ ગુણાકાર $\vec{v} \times \vec{p} = 0$

$$\therefore \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \qquad (2.6.2)$$

આમ, **કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમય દર ટૉર્ક બરાબર હોય છે.**

આ પરિણામ ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમ 'રેખીય વેગમાનના ફેરફારનો સમયદર બળ બરાબર હોય છે.' સાથે સામ્ય ધરાવે છે.

(*c*) કણોના તંત્રનું કોણીય વેગમાન (Angular momentum of system of particles) :

ધારો કે n કણોના બનેલા તંત્રના કણોનાં કોણીય વેગમાન $\vec{l_1}, \vec{l_2}, ... \vec{l_n}$ છે.

તેથી તંત્રનું કુલ કોણીય વેગમાન $\vec{L}$

$$\vec{L} = \vec{l_1} + \vec{l_2} + \dots + \vec{l_n} \qquad (2.6.3)$$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{l_1}}{dt} + \frac{d\vec{l_2}}{dt} + \dots + \frac{d\vec{l_n}}{dt} \qquad (2.6.4)$$

સમીકરણ (2.6.2)નો ઉપયોગ કરતાં

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau_1} + \vec{\tau_2} + ... + \vec{\tau_n}$$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \qquad (2.6.5)$$

આમ, કણોના તંત્રના કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો દર તંત્ર પર પ્રવર્તતા પરિણામી બાહ્ય ટૉર્ક બરાબર હોય છે.

(*d*) દઢ પદાર્થનું કોણીય વેગમાન (Angular momentum of a rigid body) :

દઢ વસ્તુમાં કણો વચ્ચેનાં સાપેક્ષ અંતરો અફર રહેતાં હોવાથી તે કણોના તંત્રનો ખાસ કિસ્સો છે. આપણે જાણીએ છીએ કે દઢ વસ્તુનો દરેક કણ ભ્રમણાક્ષને લંબ એવા સમતલમાં વર્તુળગતિ કરે છે. તેથી દરેક કણનું રેખીય વેગમાન પણ આ વર્તુળના સમતલમાં હોય છે. દરેક કણના વર્તુળમાર્ગના કેન્દ્રને સંદર્ભબિંદુ લઈને દરેક કણ માટે કોણીય વેગમાન મેળવતાં તે ભ્રમણાક્ષને સમાંતર મળે છે. વળી, દરેક કણ માટે $\vec{r}$ અને $\vec{p}$ પરસ્પર લંબ હોય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\vec{L} = \vec{l_1} + \vec{l_2} + \dots + \vec{l_n}$$

સમીકરણ (2.6.1)નો ઉપયોગ કરતાં

$$\vec{L} = \vec{r_1} \times \vec{p_1} + \vec{r_2} \times \vec{p_2} + \dots + \vec{r_n} \times \vec{p_n}$$

અત્રે સદિશો $\vec{r}$ અને $\vec{p}$ પરસ્પર લંબ હોવાથી $\vec{L}$ નું મૂલ્ય

$$|\vec{L}| = r_1 p_1 + r_2 p_2 + \dots + r_n p_n$$

($\because \vec{r} \perp \vec{p}$, હોવાથી $|\vec{r} \times \vec{p}| = rp \sin 90° = rp$ થશે)

$$\therefore |\vec{L}| = r_1 m_1 v_1 + r_2 m_2 v_2 + \dots + r_n m_n v_n$$

($\because p = mv$)

આમ દરેક કણની કોણીય ઝડપ સમાન હોવાથી

$$|\vec{L}| = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + \dots + m_n r_n^2 \omega$$

($\because v = r\omega$)

$$= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2)\omega$$

$$\therefore |\vec{L}| = I\,|\vec{\omega}| \qquad (2.6.6)$$

અત્રે $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

I ને દઢ પદાર્થની આપેલ ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા કહે છે, જેના વિશે વધુ માહિતી પરિચ્છેદ 2.9માં આપેલ છે. પ્રસ્તુત કિસ્સામાં $\vec{\omega}$ અને $\vec{L}$ બન્ને ભ્રમણાક્ષને સમાંતર હોવાથી I ને અદિશ લઈ શકાય. આ સંજોગોમાં સમીકરણ (2.6.6)ને સદિશ સ્વરૂપે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \qquad (2.6.7)$$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (2.6.8)$$

સમીકરણ (2.6.5) અને (2.6.8)નો સમન્વય કરતાં,

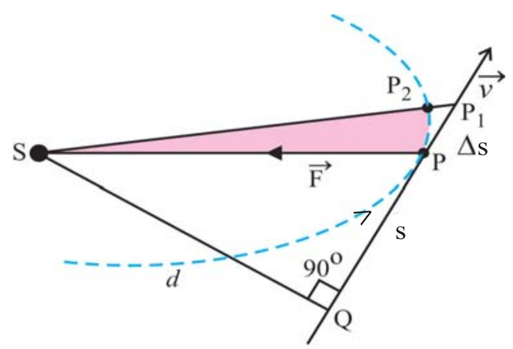
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = \vec{\tau} \qquad (2.6.9)$$

કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ (Law of conservation of angular momentum) :

સમીકરણ (2.6.9)માં જો $\vec{\tau} = 0$, ($\vec{L}$ = અચળ)

એટલે કે, **'જો દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું પરિણામી બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય તો તે દૃઢ પદાર્થનું કોણીય વેગમાન અચળ રહે છે.'** આ વિધાનને **કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ કહે છે.**

2.7 કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનું ભૌમિતિક નિરૂપણ (Geometrical Representation of the Law of Conservation of Angular Momentum)



કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમનું ભૌમિતિક નિરૂપણ

આકૃતિ 2.11

આકૃતિ 2.11માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સૂર્યની ફરતે કોઈ એક ગ્રહ P લંબવૃત્તીય (elliptical) કક્ષામાં ગતિ કરે છે. (જે તૂટક રેખા વડે દર્શાવેલ છે.) ધારો કે P પાસે ગ્રહનો રેખીય વેગ $\vec{v}$ છે.

∴ સૂર્યને અનુલક્ષીને ગ્રહનું કોણીય વેગમાન

$$L = mvd \qquad (2.7.1)$$

હવે ત્રિકોણ SQPનું ક્ષેત્રફળ

$$A = \frac{1}{2}(SQ)\ (PQ)$$

$$= \frac{1}{2}(d)\ (s) \qquad (\because PQ = s)$$

Δt સમયમાં ગ્રહ Pથી P_2 પર જાય છે. તે દરમિયાન ત્રિકોણ SQPના ક્ષેત્રફળમાં થતો વધારો ΔA હોય તો,

$$\Delta A = \frac{1}{2}(d)(\Delta s)$$

હવે $lim\ \Delta t \rightarrow 0$ લક્ષમાં ત્રિકોણ SPP_2 અને ત્રિકોણ SPP_1નાં ક્ષેત્રફળો સમાન બને છે.

∴ ગ્રહને સૂર્ય સાથે જોડતી રેખા વડે આંતરાતાં ક્ષેત્રફળના ફેરફારનો સમયદર

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}(d)\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{1}{2}(d)(v)$$

બંને બાજુને m વડે ગુણતાં $m\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}mvd$

$$(2.7.2)$$

સમીકરણ (2.7.1)માંથી mvdનું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$m\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}L \qquad (2.7.3)$$

હવે ગ્રહ પર સૂર્યને કારણે લાગતાં ગુરુત્વાકર્ષણ બળની કાર્ય રેખા Sમાંથી પસાર થતી હોવાથી આ બળ વડે મળતું સૂર્યને અનુલક્ષીને ટૉર્ક શૂન્ય થાય છે. પરિણામે ગ્રહનું કોણીય વેગમાન L અચળ હોય છે.

$$\therefore \frac{dA}{dt} = \text{અચળ} \qquad (2.7.4)$$

સમીકરણ (2.7.4) ગ્રહોની ગતિ માટેના કૅપ્લરનો બીજો નિયમ રજૂ કરે છે. **"સૂર્ય અને ગ્રહને જોડતી રેખાએ એકમસમયમાં આંતરેલ ક્ષેત્રફળ (જેને ક્ષેત્રીય વેગ કહે છે.) અચળ હોય છે."**

આમ, **ક્ષેત્રીય વેગ અચળ હોવો એ કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમની ભૌમિતિક રજૂઆત છે.**

2.8 જડત્વની ચાકમાત્રા (Moment of Inertia)

ધારો કે કોઈ દૃઢ પદાર્થના કણોના દળ m_1, m_2, …., m_n છે. તથા કોઈ આપેલ અક્ષથી તેમના લંબઅંતરો અનુક્રમે r_1, r_2, …, r_n છે તો $m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_nr_n^2$ ને તે પદાર્થની તે અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા (I) કહે છે.

એટલે કે, $I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_nr_n^2$

$$= \sum_i m_ir_i^2$$

જડત્વની ચાકમાત્રાનું મૂલ્ય અક્ષની પસંદગી અને તેને અનુલક્ષીને દ્રવ્યના વિતરણ પર આધારિત છે.

ચાકમાત્રાનો SI એકમ kg m^2 છે. તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^1L^2T^0$ છે.

સમીકરણ $\vec{L} = I\vec{\omega}$ એ, રેખીય ગતિના સમીકરણ $\vec{p} = m\vec{v}$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે. ત્યા $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ એ રેખીય ગતિના સમીકરણ $\vec{F} = m\vec{a}$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે. આ સામ્યતાના સંદર્ભમાં કહી શકાય કે, રેખીય ગતિમાં દળ જે ભાગ ભજવે છે, તેવો જ ભાગ ચાકગતિમાં જડત્વની ચાકમાત્રા ભજવે છે. **દળ એ રેખીય ગતિ માટે જડત્વ છે અને જડત્વની ચાકમાત્રા એ ચાકગતિ માટે જડત્વ છે.**

ઉદાહરણ 6 : પૃથ્વીને નિયમિત ઘનતા ધરાવતા નક્કર ગોળા તરીકે સ્વીકારી લઈએ અને માનીએ કે તેનું એકાએક સંકોચન થઈ દળમાં ફેરફાર વગર તેની ત્રિજ્યા અડધી થઈ જાય છે, તો હાલનો 24 કલાકનો દિવસ કેટલા કલાકનો થઈ જાય ?

ઉકેલ : પૃથ્વી પર કોઈ બાહ્ય ટૉર્ક લાગતું નથી એમ સ્વીકારીએ તો કોણીય વેગમાન અચળ લઈ શકાય. સમીકરણ (2.6.6) નો ઉપયોગ કરી બંને વખતના પૃથ્વીના કોણીય વેગમાન સરખાવતાં,

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \qquad (1)$$

હવે નક્કર ગોળા માટે તેના વ્યાસને અનુલક્ષીને $I = \frac{2}{5}MR^2$ હોય છે. જ્યાં M = ગોળાનું દળ છે અને R = ગોળાની ત્રિજ્યા છે. (જુઓ ટેબલ – 1).

$$\therefore I_1 = \frac{2}{5}MR_1^2 \text{ અને } I_2 = \frac{2}{5}MR_2^2$$

પરંતુ, $R_1 = 2R_2$ આ મૂલ્યો સમીકરણ (1)માં મૂકતાં $\omega_2 = 4\omega_1$.

આમ, પૃથ્વીનો નવો ભ્રમણદર ω_2 તેના હાલના ભ્રમણ દર ω_1 કરતાં ચાર ગણો થઈ જાય અને 24 કલાકનો દિવસ 6 કલાકનો થઈ જાય.

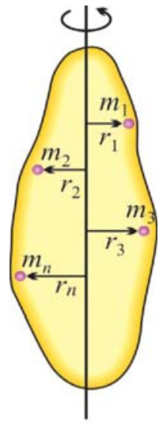
2.9 ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા (Radius of Gyration)

ધારો કે કોઈ દૃઢ પદાર્થનું દળ M છે. તેના દરેક કણનું દળ m હોય તેવા n કણોનો બનેલો છે.

$$\therefore m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m \quad \therefore M = nm$$

આકૃતિ 2.12માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આપેલ ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા

$$I = mr_1^2 + mr_2^2 + \ldots + mr_n^2$$



ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા

આકૃતિ 2.12

અત્રે r_1, r_2, ... r_n અનુક્રમે પદાર્થના કણોના આપેલ અક્ષથી લંબઅંતરો છે.

$$\therefore I = \frac{mn(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2)}{n}$$

$$= M\frac{(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2)}{n}$$

$$= MK^2 \qquad (2.9.1)$$

જ્યાં, $$K^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2}{n}$$

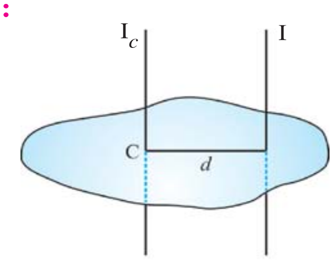
$$= \langle r^2 \rangle \qquad (2.9.2)$$

$$\therefore K = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2}{n}} \qquad (2.9.3)$$

અહીં, K^2 એ આપેલ ભ્રમણાક્ષથી પદાર્થના કણોના લંબઅંતરોના વર્ગોનું સરેરાશ (mean) મૂલ્ય દર્શાવે છે. K ને આપેલ ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને દૃઢ પદાર્થની **ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા** કહે છે. તેનો SI એકમ m છે.

2.10 જડત્વની ચાકમાત્રા અંગેના બે પ્રમેયો (Two Theorems Regarding Moment of Inertia)

(i) સમાંતર અક્ષનું પ્રમેય (Theorem of parallel axes) :



સમાંતર અક્ષનું પ્રમેય

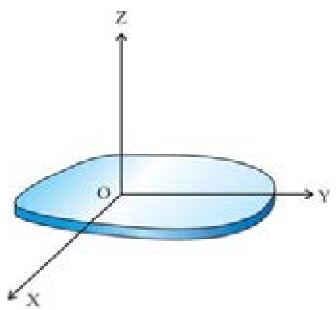
આકૃતિ 2.13

આ પ્રમેયનું કથન આ પ્રમાણે છે. ''પદાર્થની કોઈપણ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા I એ તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી સમાંતર અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા I_c તથા પદાર્થના દળ M અને બે સમાંતર અક્ષો વચ્ચેના લંબઅંતર d ના વર્ગના ગુણાકારના સરવાળા બરાબર થાય છે.'' (જુઓ આકૃતિ 2.13)

$$I = I_c + Md^2 \tag{2.10.1}$$

(*ii*) લંબઅક્ષનું પ્રમેય (Theorem of perpendicular axes) :

આ પ્રમેય સમતલીય (planar) પદાર્થોને જ લાગુ પડે છે. સમતલીય પદાર્થના સમતલમાં X અને Y-અક્ષો લઈએ (જુઓ આકૃતિ 2.14) તો સમતલને લંબ એવી Z-અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા I_Z એ X-અક્ષને અને Y-અક્ષને અનુલક્ષીને મળતી જડત્વની ચાકમાત્રાઓના સરવાળા બરાબર હોય છે.



લંબઅક્ષનું પ્રમેય

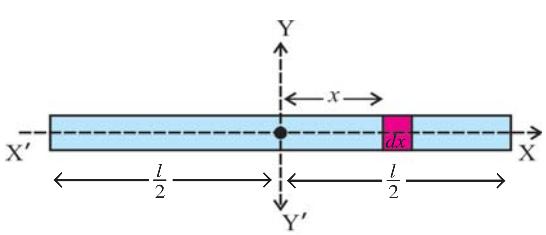
આકૃતિ 2.14

$$I_Z = I_X + I_Y \tag{2.10.2}$$

જ્યાં I_X અને I_Y અનુક્રમે X અને Y અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રાઓ છે. જો સમતલીય પદાર્થ YZ સમતલમાં હોય તો $I_x = I_Y + I_Z$ અને જો તે XZ સમતલમાં હોય તો $I_Y = I_X + I_Z$ થશે.

2.11 જડત્વની ચાકમાત્રા અને ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યાની ગણતરી (Calculation of moment of inertia and radius of gyration)

નિયમિત પાતળા સળિયાની તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા તેની લંબાઈને લંબઅક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા.



પાતળા સળિયાની જડત્વની ચાકમાત્રા

આકૃતિ 2.15

આકૃતિ 2.15 દર્શાવ્યા પ્રમાણે M દળ તથા l લંબાઈ ધરાવતો એક નિયમિત આડછેદ તથા નિયમિત દળ વિતરણ ધરાવતો સળિયો છે. સળિયાના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા સળિયાની લંબાઈને લંબ હોય તેવા અક્ષ YY' ધ્યાનમાં લો. યામપદ્ધતિનું ઊગમબિંદુ સળિયાના કેન્દ્ર O પર સંપાત થાય છે અને X–અક્ષ સળિયાની લંબાઈ પર સંપાત થાય છે. ઊગમબિંદુથી x અંતરે dx લંબાઈ ધરાવતો સળિયાનો સૂક્ષ્મ ખંડ વિચારો.

સળિયાની એકમલંબાઈ દીઠ દળ $\lambda = \dfrac{M}{l}$

dx લંબાઈના ખંડનું દળ $\lambda dx = \dfrac{M}{l} dx$

આ ખંડ માટે, Y-અક્ષની સાપેક્ષે જડત્વની ચાકમાત્રા

$$dI = \frac{M}{l} dx \cdot x^2 \tag{2.11.1}$$

અક્ષ Y ની સાપેક્ષે સમગ્ર સળિયાના જડત્વની ચાકમાત્રા શોધવા માટે સમીકરણ (2.11.1)નું $x = -l/2$ થી $x = l/2$ ના અંતરાલ વચ્ચે સંકલન કરતાં,

$$\therefore\ I = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{M}{l} dx\ x^2 = \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{+l/2}$$

$$= \frac{M}{3l}\left[\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}\right]$$

$$I = \frac{Ml^2}{12} \tag{2.11.2}$$

નિયમિત પાતળા સળિયા માટે તેનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર એ ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર છે. આથી, આ જડત્વની ચાકમાત્રાને તેના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રમાંથી પસાર થતા અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા (I_c) પણ કહે છે.

ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા : સમીકરણ 2.11.2ને $I = MK^2$ સાથે સરખાવતાં,

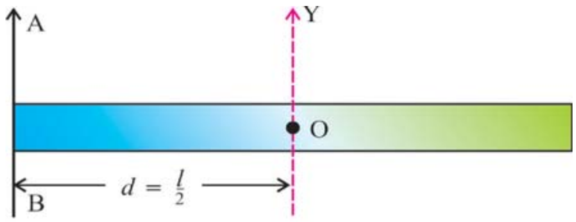
$$K^2 = \frac{l^2}{12}$$

$$\therefore\ K = \frac{l}{\sqrt{12}}$$

ઉદાહરણ 7 : M દળવાળા તથા l લંબાઈ અને નિયમિત આડછેદવાળા સળિયાની તેના એક છેડામાંથી પસાર થતી લંબાઈને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા અને ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સળિયાનું દળ M અને લંબાઈ l છે. સળિયાના કેન્દ્રથી છેડા સુધીનું અંતર $d = l/2$ છે.

સમીકરણ (2.11.2) અનુસાર આવા સળિયાની તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા લંબાઈને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા $I_c = \frac{Ml^2}{12}$.



આકૃતિ 2.16

સમાંતર અક્ષના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં સળિયાના છેડામાંથી પસાર થતી તથા લંબાઈને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીની જડત્વની ચાકમાત્રા

$$I = I_c + Md^2$$

$$= \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4} \quad (\because\ d = l/2)$$

$$\therefore\ I = \frac{Ml^2}{3}$$

હવે ઉપર્યુક્ત સમીકરણને $I = MK^2$ સાથે સરખાવતાં

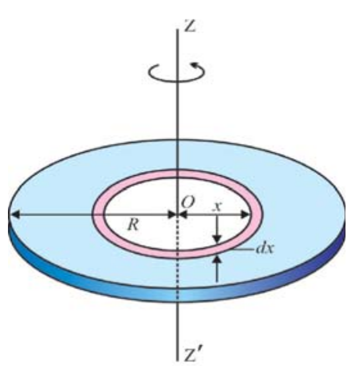
$$K^2 = \frac{l^2}{3}$$

$\therefore$ ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા $K = \frac{l}{\sqrt{3}}$

ઉદાહરણ 8 : નિયમિત વર્તુળાકાર તકતીની તેના ભૌમિતિક કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને તેના સમતલને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા તથા ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા શોધો :

ઉકેલ :

આકૃતિ 2.17માં દર્શાવ્યા મુજબ M દ્રવ્યમાન તથા R ત્રિજ્યા ધરાવતી નિયમિત વર્તુળાકાર તકતીને તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર Oમાંથી પસાર થતી તથા તેના સમતલને લંબ આવેલી ZZ' અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા શોધવી છે.



આકૃતિ 2.17

અત્રે તકતીનું ક્ષેત્રફળ $A = \pi R^2$ તથા તકતીનું એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ દ્રવ્યમાન

$$\sigma = \frac{\text{તકતીનું દ્રવ્યમાન}}{\text{તકતીનું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{M}{\pi R^2}$$

આ તકતીને જુદી જુદી ત્રિજ્યાઓવાળી ઘણી બધી સમકેન્દ્રીય રિંગોની બનેલી કલ્પો તથા તેમનું કેન્દ્ર આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ O છે.

આકૃતિ 2.17માં દર્શાવ્યા મુજબ આવી કોઈ એક રિંગ ધ્યાન લો. ધારો કે તેની ત્રિજ્યા x છે તથા પહોળાઈ dx છે. આ રિંગનું ક્ષેત્રફળ $a = 2\pi x \cdot dx$ તથા

દ્રવ્યમાન $m = \sigma \cdot a = \frac{M}{\pi R^2}(2\pi x \cdot dx)$

$$= \frac{2Mx}{R^2}\ dx.$$

આ રિંગની ZZ' અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા dI કહીએ તો

dI = (રિંગનું દ્રવ્યમાન)(રિંગની ત્રિજ્યા)^2

$$= \frac{2Mx}{R^2} dx \cdot x^2 \qquad (1)$$

આમ, આવી જુદી-જુદી ત્રિજ્યાઓવાળી સમકેન્દ્રીય રિંગોની ZZ'ને અનુલક્ષીને ચાકમાત્રાઓ શોધી તેનો સરવાળો કરતાં સમગ્ર વર્તુળાકાર ZZ'ને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા મળે.

આ માટે સમીકરણ (1)નું $x = 0$ થી $x = R$ના અંતરાલ વચ્ચે સંકલન કરતાં,

$$I = \int dI = \int_0^R \frac{2Mx^3}{R^2} \cdot dx$$

$$I = \frac{2M}{R^2}\int_0^R x^3 \cdot dx$$

$$= \frac{2M}{R^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^R$$

$$= \frac{2M}{R^2}\left[\frac{R^4}{4} - 0\right]$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{2}MR^2 \qquad (2)$$

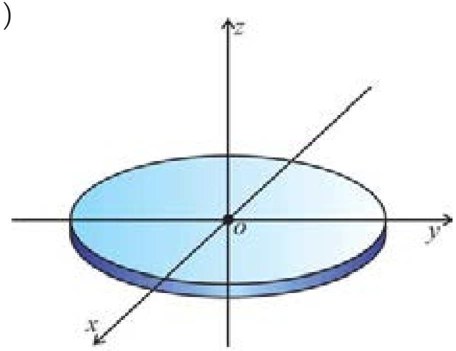
સમીકરણ (2)ને $I = MK^2$ સાથે સરખાવતાં

$$K^2 = \frac{1}{2}R^2$$

ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા $K = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

ઉદાહરણ 9 : નિયમિત ઘનતા ધરાવતી તકતીની તેના વ્યાસ સાથે સંપાત થતી કોઈ એક અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે M દળ અને R ત્રિજ્યા ધરાવતી તકતી XY સમતલમાં છે. તકતીના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા તેના સમતલને લંબ Z અક્ષ છે. (જુઓ આકૃતિ 2.18)



આકૃતિ 2.18

આ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા

$I_z = \frac{MR^2}{2}$ છે

લંબઅક્ષોના પ્રમેય અનુસાર

$I_z = I_x + I_y$

તકતી X અને Y અક્ષોને સંમિત હોવાથી

$\therefore I_x = I_y \qquad \therefore I_z = 2I_x$

વળી, $I_z = \frac{MR^2}{2}$

$$\therefore \frac{MR^2}{2} = 2I_x$$

$$\therefore I_x = \frac{MR^2}{4}$$

ઉદાહરણ 10 : એક પોલા નળાકારનું દળ 4 kg અને ત્રિજ્યા 0.1 m છે. તેની ભૌમિતિક અક્ષને અનુલક્ષીને તે ભ્રમણ કરી શકે છે. તેની ફરતે એક પાતળી દોરી વીંટાળી દોરડાના છૂટાછેડા પર નળાકારની સપાટીએ સ્પર્શક રૂપે રહે તેમ 50 N બળ લગાડતાં તે ચાકગતિ શરૂ કરે છે, તો નીચેના જવાબ શોધો.

(1) નળાકાર પર લાગતું ટૉર્ક (2) નળાકારનો કોણીય પ્રવેગ (3) 4 sના અંતે કોણીય વેગ (4) 4 sના અંતે કોણીય વેગમાન (5) 4 sના અંતે ચાકગતિ ઊર્જા (6) 4 sમાં કરેલું કોણીય સ્થાનાંતર (7) 4 s દરમિયાન નળાકાર પર થતું કાર્ય (8) 4 sના અંતે પાવર.

ઉકેલ :

(1) નળાકાર પર લાગતું ટૉર્ક :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF \sin\theta \, \hat{n}$$

$\therefore |\vec{\tau}| = rF \qquad (\because \theta = \frac{\pi}{2})$

$= (0.1)\ (50) = 5$ N m

(2) નળાકારનો કોણીય પ્રવેગ (α) :

અત્રે $\tau = I\alpha = mr^2\alpha$

$\therefore 5 = (4)\ (0{\cdot}1)^2\ (\alpha) = 0.04\ \alpha$

$\therefore \alpha = 125$ rad s^{-2}

(3) કોણીય વેગ (ω) :

$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + (125)\ (4)$

$= 500$ rad s^{-1}

(4) કોણીય વેગમાન (L) :

$L = I\omega = mr^2\omega$

$\therefore L = (4)\ (0{\cdot}1)^2\ (500) = (0{\cdot}04)\ (500)$

$= 20$ kg $m^2\ s^{-1}$

(5) ચાકગતિ-ઊર્જા :

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mr^2\ \omega^2$$

$$= \frac{1}{2}(4)\ (0{\cdot}1)^2\ (500)^2$$

$= 5000$ J

(6) 4 sમાં કરેલું કોણીય સ્થાનાંતર :

$$\theta = \left[\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right]t$$

$$= \left[\frac{0+500}{2}\right]4$$

$= 1000$ rad

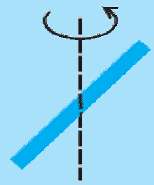
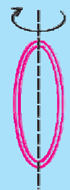
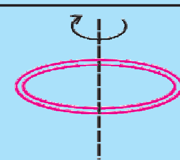
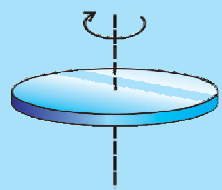
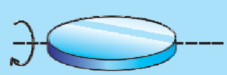
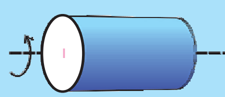
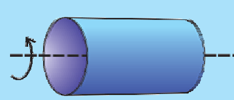
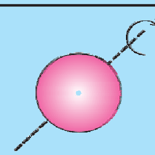
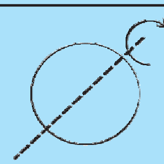
(7) 4 sમાં કરેલું કાર્ય W = આ સમયમાં નળાકારને મળેલી ગતિ-ઊર્જા = 5000 J

અથવા કાર્ય $\omega = \tau\theta = 5 \times 1000 = 5000$ J

(8) 4 sના અંતે પાવર

$P = \tau\omega = 5 \times 500 = 2500$ watt

ટેબલ 2.1 : કેટલાક સંમિત પદાર્થોની જડત્વની ચાકમાત્રા અને ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા

પદાર્થ	અક્ષ	આકૃતિ	I	K
L લંબાઈનો પાતળો સળિયો	તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા સળિયાને લંબ		$\frac{1}{12}ML^2$	$\frac{L}{2\sqrt{3}}$
R ત્રિજ્યાની વીંટી	કોઈ પણ વ્યાસ		$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$
R ત્રિજ્યાની વીંટી	કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને વીંટીના સમતલને લંબ		MR^2	R
R ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર તકતી	કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને તેના પૃષ્ઠને લંબ		$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$
R ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર તકતી	કોઈ પણ વ્યાસ		$\frac{1}{4}MR^2$	$\frac{R}{2}$
R ત્રિજ્યાનો પોલો નળાકાર	નળાકારની ભૌમિતિક અક્ષ		MR^2	R
R ત્રિજ્યાનો નક્કર નળાકાર	નળાકારની ભૌમિતિક અક્ષ		$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$
R ત્રિજ્યાનો નક્કર ગોળો	કોઈ પણ વ્યાસ		$\frac{2}{5}MR^2$	$\sqrt{\frac{2}{5}}R$
R ત્રિજ્યાનો પોલો ગોળો	કોઈ પણ વ્યાસ		$\frac{2}{3}MR^2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}R$

ટેબલ 2.2 : રેખીય ગતિ અને ચાકગતિની ભૌતિક રાશિઓની સરખામણી

રેખીય ગતિ	ચાકગતિ
રેખીય સ્થાનાંતર, $\vec{d}$	કોણીય સ્થાનાંતર, θ
રેખીય વેગ, $\vec{v}$	કોણીય વેગ, $\vec{\omega}$
રેખીય પ્રવેગ, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	કોણીય પ્રવેગ, $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
દળ, m	જડત્વની ચાકમાત્રા, I
રેખીય વેગમાન, $\vec{p} = m\vec{v}$	કોણીય વેગમાન, $\vec{L} = I\vec{\omega}$
બળ, $\vec{F} = m\vec{a}$ ન્યૂટનનો બીજો નિયમ; $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	ટૉર્ક, $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ ન્યૂટનના બીજા નિયમ જેવું જ પરિણામ, $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
રેખીય ગતિ-ઊર્જા, $K = \frac{1}{2}mv^2$	ચાકગતિ-ઊર્જા $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
કાર્ય, $W = \vec{F}\cdot\vec{d}$	કાર્ય, $W = \tau\theta$
પાવર, $P = Fv$	પાવર, $P = \tau\omega$
અચળ પ્રવેગી રેખીય ગતિનાં સમીકરણો : $v = v_0 + at$ $d = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ $2ad = v^2 - v_0^2$	અચળ કોણીય પ્રવેગવાળી ચાકગતિનાં સમીકરણો : $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $2\alpha\theta = \omega^2 - \omega_0^2$

ઉદાહરણ 11 : એક વર્તુળાકાર ટર્નટેબલ 20 rpm કોણીય ઝડપથી તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી ઊર્ધ્વ અક્ષને અનુલક્ષીને સમક્ષિતિજ તલમાં ભ્રમણ કરે છે. 60 kg દળવાળો માણસ આ ટેબલની કિનારી પર ઊભો છે. આ માણસ કિનારી પરથી કેન્દ્ર પર જાય, તો ટર્નટેબલ હવે કેટલી કોણીય ઝડપથી ભ્રમણ કરશે ? માણસને બિંદુવત્ પદાર્થ ગણો અને ટર્નટેબલને નિયમિત તકતી ગણો. ટર્નટેબલનું દળ 200 kg છે.

ઉકેલ : વ્યક્તિનું દળ $m = 60$ kg, ટર્નટેબલનું દળ $M = 200$ kg, $\omega_1 = 20$ rpm.

અત્રે તંત્ર પરનું બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય છે. તેથી કોણીય વેગમાન અચળ રહે છે.

$\therefore$ (ટર્નટેબલનું + વ્યક્તિનું) પ્રારંભિક કોણીય વેગમાન = તેમનું અંતિમ કોણીય વેગમાન

$$\left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\right)\omega_1 = \frac{MR^2}{2}\omega_2$$

$$\therefore \left(\frac{M}{2} + m\right)\omega_1 = \frac{M}{2}\omega_2$$

$$\therefore (100 + 60)(20) = 100\omega_2$$

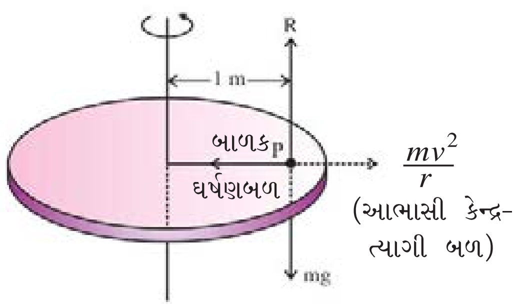
$$\therefore \omega_2 = 32 \text{ rpm}$$

નોંધ : આ ઉદાહરણમાં અંતિમ ગતિ ઊર્જા, પ્રારંભિક ગતિ-ઊર્જા કરતાં વધારે મળશે તે ચકાસી જુઓ. ગતિ-

ઊર્જાનો આ વધારો માણસ વડે કિનારી પરથી કેન્દ્ર તરફ આવતાં થતું કાર્ય છે. આ ગણતરી કરવા ટર્ન ટેબલની ત્રિજ્યા R = 1·5 m લો.

ઉદાહરણ 12 : ચાકગતિ કરતા ચકડોળના પાટિયા પર તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને તેના સમતલને લંબ એવી ભ્રમણાક્ષથી 1 m દૂર m દળનો એક બાળક બેઠેલ છે. આ ચકડોળને કેટલા કોણીય વેગથી ભ્રમણ કરાવીએ, તો આ બાળક ચકડોળના પાટિયા પર સરકવાની તૈયારીમાં હોય ? બાળક અને પાટિયાની સપાટી વચ્ચેનો ઘર્ષણાંક 0.25 છે. $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ લો.

ઉકેલ : P બિંદુએ બાળક પર લાગતાં જુદાં-જુદાં બળો આકૃતિ 2.19માં દર્શાવ્યાં છે.



આકૃતિ 2.19

અહીં, R = લંબપ્રત્યાઘાતી બળ તથા $\frac{mv^2}{r}$ = કેન્દ્રત્યાગી (આભાસી) બળ છે. જ્યારે ઘર્ષણબળ $\mu R = \frac{mv^2}{r}$ થાય, ત્યારે બાળક ચકડોળના પાટિયા પર સરકવાની તૈયારીમાં હોય.

$$\frac{mv^2}{r} = \mu R = \mu mg \qquad (\because R = mg)$$

$$\therefore r^2\omega^2 = r\mu g \qquad (\because v = r\omega)$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{\mu g}{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{\cdot}25 \times 10}{1}}$$

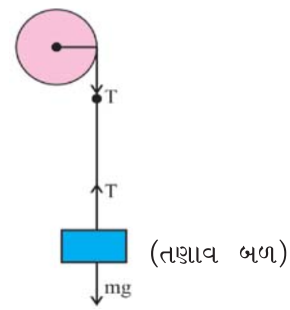
$$= 1{\cdot}58 \text{ rad s}^{-1}.$$

ઉદાહરણ 13 : R ત્રિજ્યા અને દળ M વાળી લીસી તકતીને ફરતે દોરી વીંટાળી તેના મુક્ત છેડે m દળવાળો પદાર્થ લટકાવવામાં આવેલ છે. હવે આ પદાર્થને નીચે ઊતરવા દેવામાં આવે છે. દર્શાવો કે તકતીનો કોણીય પ્રવેગ $\alpha = \frac{mg}{R\left(m+\frac{M}{2}\right)}$ છે.

ઉકેલ : લટકાવેલ દળ અને તકતી પર લાગતાં બળો આકૃતિ 2.20માં દર્શાવ્યા છે. લટકાવેલ પદાર્થની રેખીય ગતિનું સમીકરણ

$ma = mg - T$ (જ્યાં, T = દોરીમાં તણાવ)

$\therefore T = m(g - a)$



આકૃતિ 2.20

હવે તકતી પર લાગતું ટૉર્ક $\tau = RT$

$$(\because \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F})$$

$$\therefore I\alpha = RT \quad \therefore \alpha = \frac{RT}{I} = \frac{Rm(g-a)}{I}$$

$$\therefore \alpha = \frac{Rm(g-a)}{MR^2/2} \quad \therefore \alpha = \frac{2m}{RM}(g-a)$$

પરંતુ $a = R\alpha$

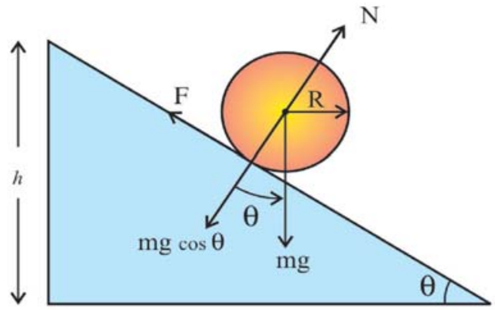
$$\therefore \alpha = \frac{2mg}{RM} - \frac{2mR\alpha}{RM}$$

$$= \frac{mg}{R\left(m+\frac{M}{2}\right)}$$

2.12 સરક્યા વિના ગબડતા દૃઢ પદાર્થો (Rigid Bodies Rolling Without Slipping)

દૃઢ પદાર્થ જ્યારે સરક્યા વિના ગબડતો હોય છે ત્યારે તેની ગતિ, રેખીય ગતિ અને ચાકગતિની મિશ્રિત ગતિ હોય છે. દૃઢ પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર રેખીય ગતિ કરતું હોય છે તથા પદાર્થ પોતે તેની અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતો હોય છે.

આવી મિશ્રિત ગતિનાં વર્ણનમાં ઉપર્યુક્ત બંને ગતિનું વર્ણન એકબીજાથી સ્વતંત્ર રીતે કરી શકાય છે.



સરક્યા વિના ગબડતા દૃઢ પદાર્થ

આકૃતિ 2.21

આકૃતિ 2.21માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે કોઈ એક દૃઢ પદાર્થ h ઊંચાઈ અને સમક્ષિતિજ સાથે θ કોણ ધરાવતા ઢાળની ટોચ પરથી સરક્યા વિના ગબડે છે. અત્રે પદાર્થનું દળ m, જડત્વની ચાકમાત્રા I, ભૌમિતિક ત્રિજ્યા R અને ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા K છે. જ્યારે પદાર્થ ઢાળના તળિયે પહોંચે છે, ત્યારે તેની સ્થિતિ ઊર્જામાં mgh જેટલો ઘટાડો થાય છે. યાંત્રિક ઊર્જાસંરક્ષણના નિયમ અનુસાર સ્થિતિ-ઊર્જાનો આ ઘટાડો ગતિ-ઊર્જામાં વધારા તરીકે રૂપાંતરિત થતો હોય છે. અત્રે,

પદાર્થની ગતિ-ઊર્જા = રેખીય ગતિ-ઊર્જા + ચાક ગતિ-ઊર્જા

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

યાંત્રિક ઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ અનુસાર,

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (2.12.1)$$

હવે, $\omega = v/R$ અને $I = MK^2$નો ઉપયોગ સમીકરણ (2.12.1)માં કરતાં,

(**નોંધ** : $\omega = v/R$ પદાર્થ સરક્યા વિના ગબડતો હોય ત્યારે જ લાગુ પડે છે. ગબડવા સાથે સરકતા પદાર્થ માટે આ સમીકરણ વાપરી શકાય નહીં.)

$$v^2 = \frac{2gh}{\left[1+\frac{K^2}{R^2}\right]} \qquad (2.12.2)$$

જો ઢાળની લંબાઈ d હોય અને પદાર્થ સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિની શરૂઆત કરી a જેટલા રેખીય પ્રવેગ સાથે ઢાળના તળિયે પહોંચે તો,

$$\therefore v^2 = 2ad$$

આકૃતિની ભૂમિતિ પરથી,

$$d = \frac{h}{\sin\theta}$$

$$\therefore v^2 = \frac{2ah}{\sin\theta} \qquad (2.12.3)$$

સમીકરણ (2.11.2) અને (2.12.3)નો સમન્વય કરતાં,

$$a = \frac{g\sin\theta}{\left[1+\frac{K^2}{R^2}\right]} \qquad (2.12.4)$$

અત્રે રેખીય પ્રવેગ a ઢાળની સપાટીને સમાંતર હોવાથી તેનું મૂલ્ય gના ઢાળને સમાંતર ઘટક $g\sin\theta$ જેટલું થવું જોઈએ. પરંતુ સમીકરણ (2.12.4) અનુસાર

આ મૂલ્ય $\frac{g\sin\theta}{\left[1+\frac{K^2}{R^2}\right]}$ મળે છે.

∴ રેખીય પ્રવેગમાં થતો ઘટાડો

$$= g\sin\theta - \frac{g\sin\theta}{\left[1+\frac{K^2}{R^2}\right]}$$

$$= g\sin\theta\left[\frac{K^2}{K^2+R^2}\right]$$

રેખીય પ્રવેગમાં થતો આ ઘટાડો ગબડતા પદાર્થ પર લાગતાં ઘર્ષણબળ Fને આભારી છે.

આ ઘર્ષણ બળની વિરુદ્ધ થતું કાર્ય ચાકગતિમાં પરિણમે છે અને તેથી જ ઘર્ષણબળની હાજરીમાં પણ આપણે યાંત્રિક-ઊર્જાના સંરક્ષણનો નિયમ વાપરી શક્યા છીએ.

આમ, ઘર્ષણબળ

$$F = mg\sin\theta\left[\frac{K^2}{K^2+R^2}\right] \qquad (2.12.5)$$

હવે આકૃતિ 2.21માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે લંબપ્રત્યાઘાતી બળ N અને $mg\cos\theta$ એકબીજાને સમતોલતાં હોવાથી

$$N = mg\cos\theta \qquad (2.22.6)$$

સમીકરણ (2.11.5)ને સમીરણ (2.11.6) વડે ભાગતાં,

$$\frac{F}{N} = \left[\frac{K^2}{K^2+R^2}\right]tan\theta$$

પરંતુ, $\frac{F}{N} = \mu_s$ (સ્થિત-ઘર્ષણાંક)

$$\therefore \mu_s = \left[\frac{K^2}{K^2+R^2}\right] tan\theta$$

$$\therefore \mu_s = \frac{1}{\left[1+\frac{R^2}{K^2}\right]} tan\theta \quad (2.12.7)$$

અત્રે ગબડતાં પદાર્થની સપાટી પરની જે રેખા આપેલી ક્ષણે ઢાળને અટકે છે, તે તત્ક્ષણ પૂરતી સ્થિર હોય છે અને તેથી ઉપરના સમીકરણ (2.11.7)માં સ્થિત ઘર્ષણાંક વાપર્યો છે.

ઘર્ષણનાં કારણે પદાર્થ સરક્યા વિના ગબડતો હોવાથી સમીકરણ (2.12.7) પરથી કહી શકાય કે જો,

$$\mu_s \ge \frac{1}{\left[1+\frac{R^2}{K^2}\right]} tan\theta \quad (2.12.8)$$

શરત પળાય તો જ પદાર્થ ઢાળ પરથી સરક્યા સિવાય ગબડી શકે છે.

ખાસ કિસ્સા :

(1) પાતળી વીંટી :

ટેબલ 1માંથી પાતળી વીંટી માટે K = R

Kનું આ મૂલ્ય સમીકરણ (2.12.8)માં મૂકતાં,

$$\mu_s \ge \frac{1}{2} tan\theta \quad (2.12.9)$$

(2) વર્તુળાકાર તકતી : $K = \frac{R}{\sqrt{2}}$ (ટેબલ 1માંથી)

Kનું આ મૂલ્ય સમીકરણ (2.12.8)માં મૂકતાં,

$$\mu_s \ge \frac{1}{3} tan\theta \quad (2.12.10)$$

(3) નક્કર ગોળો : $K = \sqrt{\frac{2}{5}} R$ (ટેબલ 1માંથી)

આ મૂલ્ય સમીકરણ (2.12.8)માં મૂકતાં

$$\mu_s \ge \frac{2}{7} tan\theta \quad (2.12.11)$$

સારાંશ

1. **દૃઢ પદાર્થ :** જે તંત્રમાં કણો વચ્ચેનાં સાપેક્ષ અંતરો અફર જળવાઈ રહેતાં હોય તેને દૃઢ પદાર્થ **(rigid body)** કહે છે.

   રોટેશનલ કાઈનેમેટિક્સ : જ્યારે દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિનાં કારણોની ચિંતા કર્યા સિવાય માત્ર ચાકગતિનું વર્ણન કરવામાં આવે, ત્યારે તે વિષયાંગને રોટેશનલ કાઈનેમેટિક્સ કહે છે.

   રોટેશનલ ડાઈનેમિક્સ : દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિનું, તે માટે જવાબદાર કારણો તેમજ પદાર્થના ગુણધર્મો સાથે વર્ણન કરીએ, તો તે વિષયાંગને રોટેશનલ ડાઈનેમિક્સ કહે છે.

2. **કોણીય ઝડપ :** $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ તેનો SI એકમ rad s^{-1} અથવા rotation s^{-1}

   કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો અદિશ સંબંધ

   $v = r\omega$

   કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો સદિશ સંબંધ

   $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

   જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ :

   જમણા હાથના સ્ક્રૂને ભ્રમણાક્ષને સમાંતર ગોઠવી, વસ્તુ જે રીતે ભ્રમણ કરતી હોય તે જ રીતે સ્ક્રૂને ભ્રમણ આપતાં સ્ક્રૂ જે દિશામાં ખસે, તેને $\vec{\omega}$ની દિશા ગણવામાં આવે છે.

   કોણીય પ્રવેગનું સૂત્ર :

   $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ તેનો SI એકમ rad s^{-2} અથવા rotation s^{-2}

   રેખીય પ્રવેગ $\vec{a}$ અને કોણીય પ્રવેગ $\vec{\alpha}$ વચ્ચેનો સંબંધ

   $\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\alpha} \times \vec{r} = \vec{\alpha_r} + \vec{\alpha_T}$

$\vec{\omega} \times \vec{v}$ ને રેખીય પ્રવેગનો ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક a_r કહે છે.

$$a_r = \omega v = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

$\vec{\alpha} \times \vec{r}$ ને રેખીય પ્રવેગનો સ્પર્શીય ઘટક a_T કહે છે.

$$a_T = \alpha r$$

રેખીય પ્રવેગનાં માનાંક

$$a = \sqrt{a^2{}_r + a^2{}_T} = \sqrt{\omega^2 v^2 + \alpha^2 r^2}$$

3. અચળ કોણીય પ્રવેગવાળી ચાકગતિ અને અચળ રેખીય પ્રવેગવાળી રેખીય ગતિનાં સૂત્રો વચ્ચેની સામ્યતા.

રેખીય ગતિ	ચાક ગતિ
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}t^2$
$d = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t$	$\theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)\cdot t$
$d = \left(\frac{v^2 - v_0{}^2}{2a}\right)$	$\theta = \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}\right)$

4. રેખીય ગતિમાં જે ભાગ બળ ભજવે છે, તે જ ભાગ ચાકગતિમાં ટૉર્ક ભજવે છે.

ટૉર્ક $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ = બળની ચાકમાત્રા.

તેની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ પરથી મળે છે.

જો સ્થિર ભ્રમણાક્ષ પરનો એકમસદિશ $\hat{n}$ હોય, તો ટૉર્કનો $\vec{\tau} \cdot \hat{n}$ ઘટક ચાકગતિ માટે જવાબદાર હોય છે.

ટૉર્ક એ ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવા માટે બળની અસરકારકતાનું માપ છે.

બળયુગ્મની ચાકમાત્રા = (બેમાંથી એક બળનું માન)(બે બળો વચ્ચેનું લંબઅંતર)

દૃઢ પદાર્થના રેખીય સંતુલન માટે જો દૃઢ પદાર્થ પર લાગતાં બળો

$\vec{F}_1, \vec{F}_2$ ..... $\vec{F}_n$ હોય, તો $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots\dots\dots + \vec{F}_n = 0$, થવું જરૂરી છે.

ઉપર્યુક્ત બળોને કારણે ઉદ્ભવતાં ટૉર્ક $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \dots\dots \vec{\tau}_n$ અને $\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \dots\dots + \vec{\tau}_n = 0$ ચાકગતીય સંતુલનની શરત છે.

5. રેખીય વેગમાનની ચાકમાત્રાને કોણીય વેગમાન કહે છે.

કોણીય વેગમાન $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$

કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમયદર ટૉર્ક દર્શાવે છે.

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

કણોના તંત્ર પર પ્રવર્તતું ટૉર્ક

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

દઢ વસ્તુ માટે

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

જ્યાં I જડત્વની ચાકમાત્રા છે.

જડત્વની ચાકમાત્રા $I = m_1r^2_1 + m_2r^2_2 + ... + m_nr^2_n$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha} = \vec{\tau}$$

6. **કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ :**

"જો દઢ પદાર્થ પર લાગતું પરિણામી ટૉર્ક શૂન્ય હોય, તો દઢ પદાર્થનું કોણીય વેગમાન અચળ રહે છે."

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{અચળ}$$

7. કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમની ભૌમિતિક રજૂઆત પરથી ગ્રહોની ગતિ માટેનો કેપ્લરનો બીજો નિયમ મળી શકે છે, જે નીચે મુજબ છે :

"સૂર્ય અને ગ્રહને જોડતી રેખાએ એકમસમયમાં આંતરેલ ક્ષેત્રફળ અચળ હોય છે."

સૂત્ર સ્વરૂપે લખતાં $\frac{dA}{dt}$ = અચળ. અત્રે $\frac{dA}{dt}$ ને ક્ષેત્રીય વેગ કહે છે.

8. દઢ પદાર્થ માટે વ્યાપક સ્વરૂપે $I = MK^2$

જ્યાં, $K = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + ... + r_n^2}{n}}$

અહીં K ને ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા કહે છે.

9. **જડત્વની ચાકમાત્રા માટેનું સમાંતર અક્ષનું પ્રમેય :**

$I = I_C + Md^2$ અહીં I_C દ્રવ્યમાનકેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા છે. M એ વસ્તુનું દળ છે અને I એ ઉપર્યુક્ત અક્ષને સમાંતર તથા તેનાથી (d) જેટલા લંબઅંતરે આવેલી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા છે.

જડત્વની ચાકમાત્રા માટેનું લંબઅક્ષનું પ્રમેય :

જો I_x, I_y અને I_z, X, Y અને Z, અક્ષોને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રાઓ હોય તો, $I_z = I_x + I_y$.

10. સરક્યા વિના ઘન પદાર્થને ગબડવાની શરત,

$$\mu_s \geq \left[\frac{1}{1 + \frac{R^2}{K^2}}\right] \tan\theta$$

ઉપરાંત ઢાળ પર સરક્યા સિવાય ગબડતા પદાર્થ માટે રેખીય વેગ અને રેખીય પ્રવેગનાં સૂત્રો અનુક્રમે,

$$v = \left[\frac{2gh}{1 + \frac{K^2}{R^2}}\right]^{\frac{1}{2}} \text{ અને } a = \left[\frac{g\sin\theta}{\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)}\right].$$

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. દઢ પદાર્થની ભ્રમણાક્ષથી 10 cm અંતરે આવેલા કણની કોણીય ઝડપ 12 rad s^{-1} છે, તો તે ભ્રમણાક્ષથી 20 cm અંતરે આવેલા કણની કોણીય ઝડપ કેટલી હશે ?

(A) 2 rad s^{-1} (B) 15 rad s^{-1} (C) 12 rad s^{-1} (D) 10 rad s^{-1}

2. ભ્રમણાક્ષથી 10 cm અંતરે આવેલા કણની કોણીય ઝડપ 20 rad s^{-1} છે, તો તેની રેખીય ઝડપ કેટલી ?

(A) 1 cm s^{-1} (B) 20 cm s^{-1} (C) 200 cm s^{-1} (D) 400 cm s^{-1}

3. ઘડિયાળના મિનિટ-કાંટાની કોણીય ઝડપ કેટલી ?

(A) $\frac{\pi}{43200}$ rad s^{-1} (B) $\frac{\pi}{1800}$ rad s^{-1}

(C) $\frac{\pi}{6}$ rad s^{-1} (D) $\frac{\pi}{12}$ rad s^{-1}

4. એક વ્હીલ સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિ શરૂ કરી 4 s ના અંતે 64 rad s^{-1} જેટલો કોણીય વેગ પ્રાપ્ત કરે છે, તો તેનો અચળ કોણીય પ્રવેગ .... હોય.

(A) 64 rad s^{-2} (B) 128 rad s^{-2} (C) 16 rad s^{-2} (D) 4 rad s^{-2}

5. પૃથ્વીની ફરતે ભ્રમણ કરતાં એક કૃત્રિમ ઉપગ્રહનું દળ 500 kg છે. તેનું કોણીય વેગમાન 4×10^7 J s હોય, તો તેનો ક્ષેત્રીય વેગ શોધો.

(A) 2×10^4 m^2 s^{-1} (B) 0

(C) 2×10^7 m^2 s^{-1} (D) 4×10^4 m^2 s^{-1}

6. ધારો કે પૃથ્વીનું દળ અચળ રહે તેમ એકાએક સંકોચન થઈ તેની ત્રિજ્યા $\frac{R}{4}$ થઈ જાય, તો પૃથ્વી પરનો 24 કલાકનો દિવસ કેટલા કલાકનો થઈ જાય ? R એ પૃથ્વીની હાલની ત્રિજ્યા છે.

(A) 1.5 h (B) 6 h (C) 48 h (D) 36 h

7. બે સમાન ઈંડામાં એક ઈંડુ કાચું છે તથા બીજું બાફેલું છે. બંને સમાન કોણીય ઝડપથી ભ્રમણ કરે છે. કયું ઈંડુ વહેલું સ્થિર થશે ?

(A) કંઈ કહી શકાય નહિ. (B) બંને ઈંડા એકી સાથે સ્થિર થશે.

(C) બાફેલું (D) કાચું

8. સમાન દળ અને ત્રિજ્યા ધરાવતાં એક પોલો નળાકાર અને નક્કર ગોળો આપેલ છે. આ બંને પર સરખું ટૉર્ક સમાન સમય માટે લગાડીને ભ્રમણ કરાવવામાં આવે છે, ત્યારે નળાકાર તેની ભૌમિતિક અક્ષને તથા ગોળો તેના વ્યાસને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરે છે. આ બંનેમાંથી કોની કોણીય ઝડપ વધારે હશે ?

(A) કહી ન શકાય. (B) બંનેની ઝડપ સમાન હશે.

(C) નળાકાર (D) ગોળો

9. એક ઢાળનો કોણ 30^o છે. આ ઢાળ પર ગતિ કરતા નક્કર નળાકારનો ઢાળ સાથેનો સ્થિત ઘર્ષણાંક 0.35 છે, તો આ નળાકાર ઢાળ પર સરક્યા વગર ગબડશે ?

(A) નળાકાર ઢાળ પર સ્થિર રહેશે. (B) કશું કહી શકાય નહિ.

(C) હા. (D) ના.

10. ઘર્ષણયુક્ત ઢાળ પર સરક્યા સિવાય ગબડીને તળિયે આવતા નક્કર નળાકારનો વેગ શાના પર આધારિત છે ?

(A) નળાકારનું દળ (B) નળાકારની લંબાઈ

(C) ઢાળની ઊંચાઈ (D) નળાકારની ત્રિજ્યા

11. એક વર્તુળાકાર તકતીનું દળ 4 kg અને તેની ત્રિજ્યા 2 m છે. તેના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા તેના સમતલને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા .... છે.

(A) 24 kg m^2 (B) 8 kg m^2 (C) 16 kg m^2 (D) 11 kg m^2

12. પૃથ્વીના ધ્રુવપ્રદેશોનો બરફ પીગળીને વિષુવવૃત્ત પર આવે, તો દિવસની લંબાઈ (હાલ 24 કલાક) પર શી અસર થાય ?

(A) દિવસ ટૂંકો બને. (B) દિવસ લાંબો બને.

(C) કોઈ જ ફેરફાર થાય નહિ.

(D) દિવસ અને રાતની લંબાઈ સમાન બને.

13. જો દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું ટૉર્ક શૂન્ય હોય, તો નીચેનામાંથી કઈ ભૌતિક રાશિ અચળ રહેશે ?

(A) રેખીય વેગમાન (B) કોણીય વેગમાન

(C) બળ (D) રેખીય બળનો આઘાત

14. એક ફ્લાયવ્હીલ સ્થિર સ્થિતિમાંથી ભ્રમણ કરવાનું શરૂ કરી 4 મિનિટમાં 240 પરિભ્રમણ s^{-1} ની કોણીય ઝડપ પ્રાપ્ત કરે છે, તો તેનો સરેરાશ કોણીય પ્રવેગ કેટલો હશે ?

(A) 1 પરિભ્રમણ s^{-2} (B) 3 પરિભ્રમણ s^{-2}

(C) 4 પરિભ્રમણ s^{-2} (D) 2 પરિભ્રમણ s^{-2}

15. બે સમાન ગોળાઓ ઢાળ પર ગબડે છે. તેમાંનો એક નક્કર છે અને બીજો પોલો છે, તો નક્કર ગોળાની જડત્વની ચાકમાત્રા અને પોલા ગોળાની જડત્વની ચાકમાત્રાનો ગુણોત્તર (વ્યાસને અનુલક્ષીને ભ્રમણાક્ષ લેતાં).

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{2}{5}$

16. બે સમાન નળાકારોમાંનો એક નક્કર છે અને બીજો પોલો છે. જો તેમની ભ્રમણાક્ષો તરીકે તેમની ભૌમિતિક અક્ષો લેવામાં આવે, તો નક્કર નળાકારની ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા (radius of gyration) અને પોલા નળાકારની ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યાનો ગુણોત્તર કેટલો હશે ?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) 2 (D) $\sqrt{2}$

17. M દ્રવ્યમાન અને R ત્રિજ્યાવાળી એક પાતળી વીંટી તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને તેના સમતલને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને ω જેટલા કોણીય વેગથી ગતિ કરે છે. હવે જો બિલકુલ હળવેથી બે બિંદુવત્ *m* દળવાળા કણ તેના વ્યાસના સામ સામેના છેડાઓ પર લાગડતા તેનો કોણીય વેગ કેટલો બનશે ?

(A) $\left(\frac{M}{M+2m}\right)\omega$ (B) $\left(\frac{M}{M+m}\right)\omega$

(C) $\left(\frac{M+2m}{M}\right)\omega$ (D) $\left(\frac{M-2m}{M+2m}\right)\omega$

18. *r* ત્રિજ્યા તથા *m* દળવાળી એક વીંટી તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા તેના સમતલને લંબભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને ચાક ગતિ કરે છે. તો તેની ચાકગતિ-ઊર્જા કેટલી હશે ?

(A) $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$ (B) $\frac{1}{2}mr\omega^2$ (C) $mr^2\omega^2$ (D) $mr\omega^2$

19. ભૂસ્થિત ઉપગ્રહ (geostationary statellite)ના કક્ષીય કોણીય વેગના મૂલ્ય અને પૃથ્વીના તેની અક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણગતિના કોણીય વેગના મૂલ્યનો ગુણોત્તર કેટલો હશે ?

(A) 3 : 1 (B) 4 : 3 (C) 1 : 1 (D) 1 : 2

20. સૂર્યને ફરતે ભ્રમણ કરતાં ગ્રહનો ક્ષેત્રીય-વેગ (areal velocity)

(A) વધ્યા કરે છે. (B) અચળ રહે છે.

(C) ઘટ્યા કરે છે. (D) કશું કહી શકાય નહિ.

જવાબો

1. (C)	2. (C)	3. (B)	4. (C)	5. (D)	6. (A)
7. (C)	8. (D)	9. (C)	10. (C)	11. (B)	12. (B)
13. (B)	14. (A)	15. (B)	16. (B)	17. (A)	18. (A)
19. (C)	20. (B)				

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. કોણીય વેગના અને કોણીય પ્રવેગના SI એકમ જણાવો.
2. અચળ કોણીય વેગથી ચાકગતિ કરતી દૃઢ પદાર્થના પ્રતિનિધિ કણના રેખીય પ્રવેગના સ્પર્શીય ઘટકનું મૂલ્ય કેટલું હશે ?
3. શું દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિ માટે બધા કણોના રેખીય ચલો સમાન હોય છે ?
4. રેખીય ગતિમાં જે ભાગ બળ ભજવે છે, તેવો જ ભાગ ચાકગતિમાં કઈ ભૌતિક રાશિ ભજવે છે ?
5. ટૉર્કની દિશા કેવી રીતે શોધવામાં આવે છે ?
6. Z-અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે ટૉર્કનો કયો ઘટક જવાબદાર હશે ?
7. ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવા માટે બળની અસરકારકતાના માપને શું કહે છે ?
8. બળયુગ્મની ચાકમાત્રાનું સૂત્ર આપો.
9. રેખીય વેગમાનની ચાકમાત્રાને શું કહે છે ?
10. કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમયદર શું દર્શાવે છે ?
11. કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ લખો.
12. ગ્રહને સૂર્ય સાથે જોડતી રેખા વડે આંતરાતા ક્ષેત્રફળના સમયદરને શું કહે છે ?
13. જડત્વની ચાકમાત્રા માટેના સમાંતર અક્ષના પ્રમેયનું વિધાન લખો.
14. જડત્વની ચાકમાત્રા માટેના લંબઅક્ષના પ્રમેયનું વિધાન લખો.
15. ઢાળ પર પદાર્થ સરક્યા સિવાય ગબડે તે માટેની શરત સૂત્ર સ્વરૂપે લખો.

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. દૃઢ પદાર્થના કોણીય સ્થાનાંતરને વ્યાખ્યાયિત કરી તેમની તત્કાલીન કોણીય ઝડપનું સૂત્ર મેળવો.
2. ચાકગતિ કરતા દૃઢ પદાર્થના કોઈ એક પ્રતિનિધિ કણ માટે રેખીય ઝડપ અને કોણીય ઝડપ વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.
3. કોણીય વેગની દિશા માટેનો જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ લખી કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો સદિશ સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરો.
4. રેખીય પ્રવેગ અને કોણીય પ્રવેગ વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.
5. અચળ કોણીય પ્રવેગ સાથેની ચાકગતિનાં સમીકરણો તારવો.
6. દૃઢ પદાર્થના સંતુલન માટેની શરતો જણાવો.
7. ટૉર્કની ભૌતિક સમજૂતી આપો.
8. બળયુગ્મ એટલે શું ? બળયુગ્મની ચાકમાત્રાનું સૂત્ર મેળવો.
9. કોણીય વેગમાન અને ટૉર્ક વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.
10. દૃઢ વસ્તુના કોણીય વેગમાનનું સૂત્ર $\vec{L} = I\vec{\omega}$ મેળવો.
11. θ કોણવાળા ઢાળ પર સરક્યા સિવાય ગબડતા પદાર્થ માટે $v^2 = \left[\dfrac{2gh}{1 + \dfrac{K^2}{R^2}}\right]$ સૂત્ર મેળવો.
12. θ કોણવાળા ઢાળની ટોચ પરથી સરક્યા સિવાય પદાર્થ ગબડીને તળિયે આવતાં તેનો વેગ $v = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + \dfrac{K^2}{R^2}}}$ મળે છે, તેમ સ્વીકારી તેના રેખીય પ્રવેગ અને ઘર્ષણબળનું સૂત્ર મેળવો.
13. ઢાળ પરથી સરક્યા સિવાય ગબડતા પદાર્થનો પ્રવેગ $a = \dfrac{g\sin\theta}{1 + \dfrac{K^2}{R^2}}$ સ્વીકારી સ્થિત ઘર્ષણાંકનું સૂત્ર મેળવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. એક દૃઢ પદાર્થ 12 sમાં 600 radનું કોણીય સ્થાનાંતર અનુભવી 100 rad s^{-1}ની કોણીય ઝડપ પ્રાપ્ત કરે છે, તો તેના અચળ કોણીય પ્રવેગ અને પ્રારંભિક કોણીય ઝડપ શોધો.

   [**જવાબ :** 8.33 rad s^{-1}; 0 rad s^{-1}]

2. એક ચક્રની પ્રારંભિક કોણીય ઝડપ 20 rad s^{-1} છે. 10 s દરમિયાન તે 100 radનું કોણીય સ્થાનાંતર કરે છે, તો પ્રારંભથી માંડીને તે અટકી જાય ત્યાં સુધીમાં કેટલાં પરિભ્રમણ કરશે ? તેનો કોણીય પ્રવેગ કેટલો હશે ?

   [**જવાબ :** $\theta = \dfrac{50}{\pi}$ પરિભ્રમણો; $\alpha = -2$ rad s^{-2}]

3. 1 m ત્રિજ્યાવાળી 20 kg દળની એક રિંગ તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને તેના સમતલને લંબઅક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરે છે. આ રિંગની કોણીય ઝડપ 4 s માં 5 rad s^{-1} થી વધીને 25 rad s^{-1} થાય છે, તો (1) રિંગ પર પ્રવર્તતા ટૉર્કનું મૂલ્ય શોધો. (2) 4 s દરમિયાન આ ટૉર્ક પર થયેલું કાર્ય શોધો. [જવાબ : τ = 100 N m; W = 6000 J]

4. એક કણનો જ્યારે સ્થાનસદિશ (4, 6, 12) એકમ છે, ત્યારે તેનો વેગ-સદિશ (2, 3, 6) એકમ છે. જો કણનું દળ 50 એકમ હોય, તો આ કણનું કોણીય વેગમાન શોધો.

[જવાબ : શૂન્ય]

5. એક પોલો નળાકાર θ કોણવાળા ઢાળ પરથી સરક્યા સિવાય ગબડે છે, તો ઢાળની સપાટીને સમાંતર તેનો રેખીય પ્રવેગ શોધો. [જવાબ : 0.5 $g\sin\theta$)]

6. 100 kg અને 200 kg ના બિંદુવત્ પદાર્થોના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે (2, 4, 6) m અને (3, 5, 7) m છે, તો આ તંત્રની Z-અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો.

[જવાબ : 8800 kg m^2]

7. એક નક્કર ગોળાનું દળ 8 kg છે. તે 70 m ઊંચાઈના ઢાળ પરથી સરક્યા વિના ગબડીને તળિયે આવે છે, તો ઢાળના તળિયે તેનો રેખીય વેગ કેટલો હશે ? તથા તે વખતે તેની ચાકગતિ-ઊર્જા શોધો. (g = 10 m s^{-2} લો.)

[જવાબ : રેખીય વેગ $v = 10\sqrt{10}$ m s^{-1}; ચાકગતિ-ઊર્જા = 16×10^2 J]

8. પૃથ્વીની પોતાની ધરીને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે કોણીય વેગમાન શોધો. પૃથ્વીનું દળ = 6×10^{24} kg તથા પૃથ્વીની ત્રિજ્યા = 6400 km છે.

[જવાબ : 7.15×10^{33} kg m^2 s^{-1}]

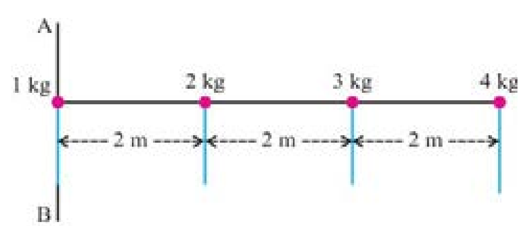
9. 200 kg દળ ધરાવતા એક પદાર્થ માટે દ્રવ્યમાનકેન્દ્રથી 3 m અંતરે રહેલી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા 8200 kg m^2 છે, તો આ અક્ષને સમાંતર એવી દ્રવ્યમાનકેન્દ્રથી 5 m અંતરે રહેલી અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો.

[જવાબ : 11400 kg m^2]

10. m જેટલા સમાન દળ ધરાવતા ચાર બિંદુવત્ કણ 'a' બાજુ ધરાવતા એક ચોરસના ચાર ખૂણાઓ પર મૂકેલા છે, તો આ ચોરસના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તેના સમતલને લંબ આવેલ અક્ષને અનુલક્ષીને આ તંત્રની જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો. [જવાબ : 2 ma^2]

11. M દળ તથા R ત્રિજ્યાવાળા ચાર નક્કર ગોળાઓ એક ચોરસના ચાર ખૂણાઓ પર મૂકેલા છે. જો ચોરસની બાજુનું માપ 'a' હોય, તો ચોરસની કોઈ એક બાજુને અક્ષ તરીકે લેતાં તેને અનુલક્ષીને આ તંત્રની જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો. [જવાબ : $2\left(\frac{4}{5}MR^2 + Ma^2\right)$]

12. ચાર બિંદુવત્ કણના દળ 1 kg, 2 kg, 3kg અને 4 kg છે. તેમને એક વજનરહિત સળિયા સાથે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જોડેલા છે. તો આ તંત્રની AB અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો.



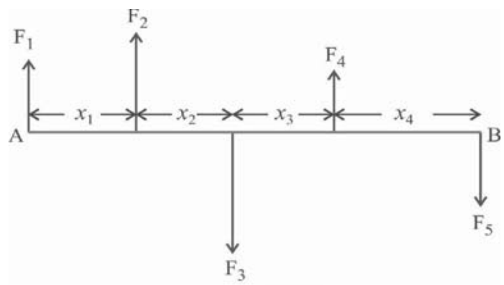
આકૃતિ 2.22

[જવાબ : 200 kg m^2]

13. એક તકતી સરક્યા સિવાય અચળ વેગથી ગબડે છે. તો તેની કુલ ગતિ-ઊર્જાનો કેટલામો ભાગ તેની ચાકગતિ-ઊર્જાના સ્વરૂપમાં હશે ? [જવાબ : $\frac{1}{3}$]

14. M દળ ધરાવતી તથા R ત્રિજ્યા ધરાવતી નિયમિત રિંગની જડત્વની ચાકમાત્રા તેની ભૌમિતિક અક્ષને અનુલક્ષીને MR^2 હોય છે, તેમ સાબિત કરો.

15. આકૃતિ 2.25માં દર્શાવ્યા પ્રમાણ એક હલકા સળિયા પર બળો લાગે છે. આ બળોના પરિણામી બળનું સૂત્ર લખો. આ પરિણામી બળ Aથી કેટલા અંતરે હશે ?



આકૃતિ 2.25

[જવાબ : $\vec{F} = F_1(\hat{j}) + F_2(\hat{j}) + F_3(-\hat{j}) + F_4(\hat{j}) + F_5(-\hat{j})$

$$x = \frac{x_1F_2 - (x_1+x_2)F_3 + (x_1+x_2+x_3)F_4 - (x_1+x_2+x_3+x_4)F_5}{F_1+F_2+F_4-F_3-F_5}$$]

•

સર જગદીશચંદ્ર બોઝ (1858-1937)

જગદીશચંદ્રનો જન્મ બંગાળમાં 30 નવેમ્બર, 1858ના રોજ થયો હતો. તેમણે કૅમ્બ્રિજથી બી.એ.ની પદવી મેળવી, તથા બી.એસ.સી.ની પદવી લંડન યુનિવર્સિટીમાંથી મેળવી. તેમણે વક્રીભવન, નિવર્તન અને ધ્રુવીભવનના પ્રયોગો કર્યા. તેમણે વિજ્ઞાનનું મુખ્ય કાર્ય માઇક્રોવેવ્ઝમાં કર્યું. તેમણે ખૂબ નાની તરંગલંબાઈના તરંગો ઉત્પન્ન કર્યા અને હર્ટ્ઝના વિદ્યુતતરંગોના ડિરેક્ટરમાં સુધારો કર્યો. તેમણે 25 થી 5mm તરંગલંબાઈના તરંગો ઉત્પન્ન કરવા માટેનું નાનું સાધન બનાવ્યું. 19મી સદીના અંત દરમિયાન તેમણે વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોની વનસ્પતિ પર થતી અસર તરફ ધ્યાન કેન્દ્રિત કર્યું. પ્રોફેસર તરીકે પ્રેસિડન્સિ કૉલેજમાં 1915માં નિયુક્તિ મળી. 1920માં રૉયલ સોસાયટીના ફેલો તરીકે ચૂંટાયા. 23 નવેમ્બર, 1937ના રોજ ગિરિધર (બિહાર)માં તેમનું અવસાન થયું.

પ્રકરણ 3

ગુરુત્વાકર્ષણ

3.1 પ્રસ્તાવના
3.2 કૅપ્લરના નિયમો
3.3 ન્યૂટનનો ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ
3.4 ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક અચળાંક
3.5 ગુરુત્વપ્રવેગ
3.6 ગુરુત્વતીવ્રતા
3.7 પૃથ્વીના ગુરુત્વક્ષેત્રમાં ગુરુત્વ સ્થિતિમાન અને ગુરુત્વ સ્થિતિ-ઊર્જા
3.8 નિષ્ક્રમણ ઊર્જા અને નિષ્ક્રમણ ઝડપ
3.9 ઉપગ્રહો
- સારાંશ
- સ્વાધ્યાય

3.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

વિદ્યાર્થીમિત્રો, આકાશમાંના તારાઓ અને સૂર્યની આસપાસ ઘૂમતા ગ્રહો પ્રાચીન સમયથી વિજ્ઞાનીઓનું ધ્યાન આકર્ષતા રહ્યા છે.

સૂર્યમંડળનો વૈજ્ઞાનિક પદ્ધતિથી અભ્યાસ કરનાર સૌપ્રથમ ગ્રીક લોકો હતા. લગભગ 2000 વર્ષ અગાઉ ટોલેમી (Ptolemy) નામના વિજ્ઞાનીએ ગ્રીક ખગોળશાસ્ત્રનો જે સિદ્ધાંત રજૂ કર્યો, તેને ટોલેમીનો **પૃથ્વી-કેન્દ્રીય વાદ (geo-centric theory)** કહે છે.

આ વાદ અનુસાર પૃથ્વી વિશ્વના કેન્દ્રમાં સ્થિર છે અને બધા આકાશી પદાર્થો-તારાઓ, સૂર્ય અને ગ્રહો એ બધા - પૃથ્વીની આસપાસ ભ્રમણ કરે છે. ટોલેમીએ આ પદાર્થોની ગતિ વર્તુળમય હોવાનો મત રજૂ કર્યો હતો. તેના મત મુજબ ગ્રહો વર્તુળમાર્ગે ગતિ કરે છે અને એ વર્તુળોનાં કેન્દ્ર વધુ મોટાં વર્તુળોમાં ગતિ કરે છે. પરંતુ પાંચમી સદીમાં આર્યભટ્ટે, સૂર્યને કેન્દ્ર તરીકે રાખી બધા ગ્રહો તેની આસપાસ વર્તુળમય ગતિ કરે છે, તેવો સિદ્ધાંત રજૂ કર્યો.

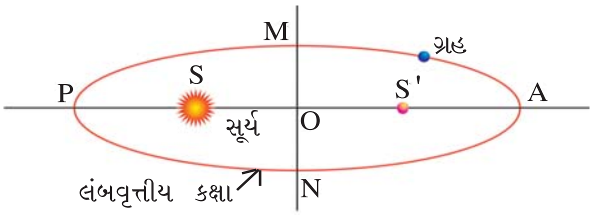
ત્યાર બાદ લગભગ એક હજાર વર્ષ પછી પોલૅન્ડના નિકોલસ કૉપરનિકસે (1473-1543) કેન્દ્રમાં સૂર્ય હોય અને તેની આસપાસ બધા ગ્રહો વર્તુળમાર્ગો પર ભ્રમણ કરતા હોય તે અંગેનું **સચોટ મૉડેલ** રજૂ કર્યું. આને કૉપરનિકસનો **સૂર્ય-કેન્દ્રીય વાદ (helio-centric theory)** કહે છે. આમ, આર્યભટ્ટના સિદ્ધાંતને સમર્થન મળ્યું. જોકે કોપરનિકસના મૉડેલને તે સમયની માન્ય સંસ્થાઓ તરફથી સમર્થન-સ્વીકૃતિ મળ્યાં ન હતાં, પરંતુ ગેલિલિયોએ તેના સિદ્ધાંતને ટેકો આપ્યો હતો.

ડેન્માર્કના ટાઇકો બ્રાહે (Tyco Brahe, 1546-1601) એ પોતાના સમગ્ર જીવન દરમ્યાન ગ્રહોની ગતિ અંગે નરી આંખે મેળવેલાં અવલોકનોનો અભ્યાસ જહૉન કૅપ્લરે (1571-1640) કર્યો અને ગ્રહોની ગતિ અંગેના ત્રણ નિયમો પ્રતિપાદિત કર્યા, જે કૅપ્લરના નિયમો તરીકે ઓળખાય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આ નિયમો, ન્યૂટનનો ગુરુત્વાકર્ષણનો નિયમ અને ઉપગ્રહો વિષે અભ્યાસ કરીશું.

3.2 કૅપ્લરના નિયમો (Kepler's Laws)

ટાઇકો બ્રાહેએ મેળવેલાં અવલોકનોના અભ્યાસ પરથી જહૉન કૅપ્લરે ગ્રહોની ગતિ અંગે ત્રણ નિયમો આપ્યા, જેને કૅપ્લરના નિયમો કહે છે. આ નિયમો નીચે મુજબ છે.

પહેલો નિયમ (કક્ષાનો નિયમ) First law (law of orbits) : "બધા ગ્રહો એવી લંબવૃત્તીય કક્ષાઓમાં ભ્રમણ કરે છે કે જેના એક કેન્દ્ર પર સૂર્ય હોય."



ગ્રહની લંબવૃત્તીય કક્ષા

આકૃતિ 3.1

PA = $2a$, MN = $2b$

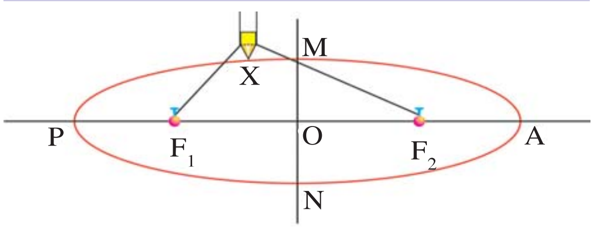
OP = OA = a = અર્ધ-દીર્ઘ અક્ષ

આકૃતિ 3.1માં કોઈ ગ્રહનો ગતિપથ દર્શાવતા લંબવૃત્ત P N A Mનાં બે કેન્દ્રો S અને S' છે.

કૉપરનિકસે વર્તુળકક્ષા સૂચવી હતી, તેના કરતાં આ કક્ષાનો નિયમ અલગ આકાર સૂચવે છે.

[**માત્ર જાણકારી માટે :** લંબવૃત્ત નીચે પ્રમાણે દોરી શકાય.

એક l લંબાઈની દોરીના બે છેડાઓને F_1 અને F_2 બિંદુઓ પર સ્થિર રાખો, જ્યાં $F_1F_2 < l$. હવે એક પેન્સિલની અણીને દોરી સાથે રાખી દોરી કડક રહે તેમ ફેરવતાં મળતો વક્ર P N A M આકૃતિ 3.2 મુજબનો લંબવૃત્ત બને છે.



લંબવૃત્ત આ રીતે દોરી શકાય

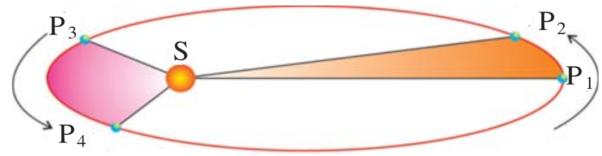
આકૃતિ 3.2

OP = a = OA

OM = b = ON

અહીં $F_1X + F_2X$ = અચળ. તે લંબવૃત્તની લાક્ષણિકતા દર્શાવે છે. વળી, જ્યારે $a = b$; બને ત્યારે લંબવૃત્ત એ વર્તુળ બને છે.]

બીજો નિયમ (ક્ષેત્રફળનો નિયમ) Second Law (Law of Areas) : "સૂર્ય અને ગ્રહને જોડતી રેખાએ સમાન સમયગાળામાં આંતરેલ ક્ષેત્રફળ સમાન હોય છે." જુઓ આકૃતિ 3.3.



ક્ષેત્રીય વેગ અચળ હોય છે

આકૃતિ 3.3

જ્યારે ગ્રહ સૂર્યથી દૂર હોય છે, ત્યારે અમુક Δt સમયગાળામાં P_1 થી P_2 સ્થાને જાય છે અને સૂર્યની નજીક હોય ત્યારે તેટલા જ સમયગાળામાં P_3 થી P_4 પર જાય છે. આથી આ નિયમ મુજબ,

SP_1P_2નું ક્ષેત્રફળ = SP_3P_4નું ક્ષેત્રફળ

ગ્રહ જ્યારે સૂર્યથી દૂર હોય ત્યારે તેની કક્ષામાં ધીમે ફરતા હોય છે અને નજીક હોય ત્યારે વધારે ઝડપથી ફરતા હોય છે, તેવાં અવલોકનો પરથી આ નિયમ મળેલ છે.

એકમસમયમાં આંતરેલ ક્ષેત્રફળને આપણે ક્ષેત્રીય વેગ (= ક્ષેત્રફળ/સમય) areal velocity કહી શકીએ અને આ નિયમ ક્ષેત્રીય વેગ અચળ રહે છે તેમ દર્શાવે છે. આ બાબત પ્રકરણ 2માં પણ તમે જોઈ ગયા છો.

ત્રીજો નિયમ (આવર્તકાળનો નિયમ) Third Law (Law of Period) : "કોઈ પણ ગ્રહના પરિભ્રમણના આવર્તકાળ (T)નો વર્ગ તેની લંબવૃત્તીય કક્ષાની અર્ધ-દીર્ઘ અક્ષ (a)ના ઘનના સમપ્રમાણમાં હોય છે." એટલે કે $T^2 \propto a^3$.

આવર્તકાળ (T) એટલે એક પરિભ્રમણ પૂરું કરવા લાગતો સમય.

નીચેના ટેબલમાં નમૂનારૂપે આપેલ કેટલાક ગ્રહોના ઉદાહરણ પરથી T^2/a^3 = અચળ અને તેથી $T^2 \propto a^3$ હોય છે, તેમ તમે જોઈ શકશો.

ટેબલ 3.1 : (કેટલાક ગ્રહો માટે T^2/a^3 નાં મૂલ્ય)

(આ ટેબલ માત્ર જાણકારી માટે છે.)

ગ્રહ	a m	T year	T^2/a^3 $year^2/m^3$
બુધ	5.79×10^{10}	0.24	2.95×10^{-34}
પૃથ્વી	15×10^{10}	1.0	2.96×10^{-34}
મંગળ	22.8×10^{10}	1.88	2.98×10^{-34}
શનિ	143×10^{10}	29.5	2.98×10^{-34}

[ગુરુત્વાકર્ષણની શોધ : માત્ર જાણકારી માટે :

ન્યૂટને સફરજનને નીચે પડતું જોયું

આકૃતિ 3.4

એક દંતકથા પ્રમાણે ઝાડ નીચે બેઠેલા ન્યૂટને ઝાડ પરથી સફરજનને નીચે પડતું જોયું. (તે ખાઈ જવાને બદલે !) "તે નીચે જ કેમ પડ્યું ?" - તેના ગહન ચિંતનમાં તે ડૂબી ગયો. આવા ચિંતનના પરિણામ-સ્વરૂપે ન્યૂટને ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમની શોધ કરી. તેની વિચારયાત્રા કંઈક અંશે આવી હતી : (*i*) પૃથ્વીની સપાટી નજીક મુક્તપતન કરતા પદાર્થનો પ્રવેગ 9.8 m/s^2 છે, તે જાણીતું હતું. તેથી સફરજનનો પ્રવેગ $a_{apple} = 9.8\ m/s^2$. (*ii*) પૃથ્વીની આસપાસ વર્તુળભ્રમણ કરતા ચંદ્રનો પ્રવેગ $a_{moon} = v^2/r_m$ પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ હોય છે. જ્યાં r_m = ચંદ્રની કક્ષાની ત્રિજ્યા $= 3.84 \times 10^5$ km. ચંદ્રનો પૃથ્વીની આસપાસના ભ્રમણનો આવર્તકાળ $T_m = 27.3$ દિવસ છે. આ પરથી $v = 2\pi\ r_m/T_m$ મેળવીને તેને ઉપરના સમીકરણમાં મૂકતાં $a_{moon} = 0.0027\ m/s^2$ મળે છે.

$$\therefore \quad \frac{a_{apple}}{a_{moon}} = \frac{9.8}{0.0027} = 3600 \qquad (1)$$

વળી પૃથ્વીના કેન્દ્રથી તેમનાં અંતરોનો ગુણોત્તર

$$\frac{r_{apple}}{r_{moon}} = \frac{6400\ km}{3.84 \times 10^5 km} = \frac{1}{60} \qquad (2)$$

જ્યાં r_{apple} = પૃથ્વીની ત્રિજ્યા જેટલું અંતર. પરિણામ (1) અને (2) પરથી ન્યૂટનને જણાયું કે, પદાર્થનો પ્રવેગ, પૃથ્વીના કેન્દ્રથી તેના અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે, ($a \propto \frac{1}{r^2}$). તેથી પૃથ્વી વડે m દળના પદાર્થ પર લાગતું બળ $\propto \frac{m}{r^2}$.

હવે ન્યૂટનના ગતિના ત્રીજા નિયમ અનુસાર આ પદાર્થ પણ તેટલા જ મૂલ્યનું બળ પૃથ્વી પર વિરુદ્ધ દિશામાં લગાડે, તેથી બળનું મૂલ્ય પૃથ્વીના દળ (M)ને પણ સમપ્રમાણમાં હશે. આમ, $F \propto \frac{Mm}{r^2}$ અથવા $F = \frac{GMm}{r^2}$ મળે, જ્યાં G = અચળાંક.

આ મહાન વૈજ્ઞાનિક શોધના પાયામાં ન્યૂટનની કેટલીક ક્રાંતિકારી માન્યતા હતી. ન્યૂટને એમ માન્યું હતું કે **પૃથ્વી પરના પદાર્થો માટે તેમજ આકાશી પદાર્થો માટે કુદરતના નિયમો (laws of nature)** એકસમાન છે.

આથી પૃથ્વી અને સફરજન વચ્ચેનું બળ તથા પૃથ્વી અને ચંદ્ર વચ્ચેનું બળ એક જ નિયમને અનુસરતા હોવા જોઈએ. આજે તો આપણને આ વિધાન બહુ સાહજિક (obvious) લાગે પણ ન્યૂટનના તે સમયમાં પૃથ્વી પરના પદાર્થો માટેના અને આકાશી પદાર્થો માટેના નિયમો અલગ-અલગ હોવાની માન્યતા હતી. તેથી ન્યૂટનની માન્યતા ખરેખર ક્રાંતિકારી હતી.]

3.3 ન્યૂટનનો ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ (Newton's Universal Law of Gravitation)

ન્યૂટને આપેલો ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ નીચે મુજબ છે :

"વિશ્વમાંનો દરેક કણ બીજા દરેક કણ પર આકર્ષી બળ લગાડે છે, જેનું મૂલ્ય તેમનાં દળોના ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં અને તેમની વચ્ચેના અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે." આ બળની દિશા તેમને જોડતી રેખા પર હોય છે. આ બળને ગુરુત્વાકર્ષણ બળ, અથવા ગુરુત્વાકર્ષી બળ અથવા ગુરુત્વબળ પણ કહે છે.

આ નિયમ મુજબ દળ m_1 ધરાવતા **કણ 1 પર** તેનાથી r અંતરે રહેલા બીજા દળ m_2 ધરાવતા કણ 2 વડે લાગતા ગુરુત્વાકર્ષણ બળનું મૂલ્ય

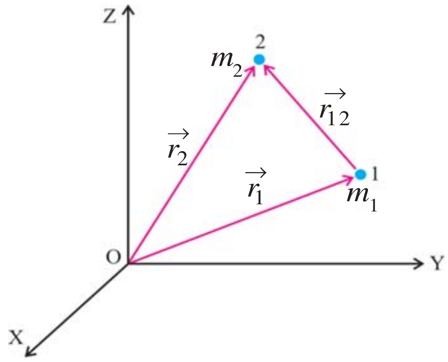
$$|\vec{F}_{12}| = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \qquad (3.3.1)$$

આ બળની દિશા કણ 1થી કણ 2 તરફ ($\vec{r}_{12}$ ની દિશામાં) છે. (જુઓ આકૃતિ 3.5)

અત્રે, G એ અચળાંક છે અને તેને ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક અચળાંક કહે છે, કારણ કે તેનું મૂલ્ય સમગ્ર વિશ્વમાં બધાં સ્થળે અને બધા સમયે એકસમાન જ હોય

છે. Gનું મૂલ્ય સૌપ્રથમ કેવેન્ડિશ નામના વિજ્ઞાનીએ પ્રયોગ પરથી મેળવ્યું હતું. ત્યાર બાદ ઘણા વિજ્ઞાનીઓએ પણ વધુ ચોકસાઈપૂર્વક મેળવ્યું હતું. હાલમાં Gનું સ્વીકૃત મૂલ્ય 6.67×10^{-11} N m^2/kg^2 છે. Gનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^{-1}\ L^3\ T^{-2}$ છે.

સમીકરણ (3.3.1)ને સદિશ સ્વરૂપમાં લખવા માટે આકૃતિ 3.5 ને ધ્યાનમાં લો.



ગુરુત્વબળના સૂત્રનું સદિશ સ્વરૂપ મેળવવું

આકૃતિ 3.5

આકૃતિ પરથી,

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_{12}|}$$

$$= \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r} \qquad (3.3.2)$$

અહીં $r = |\vec{r}_{12}|$

આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

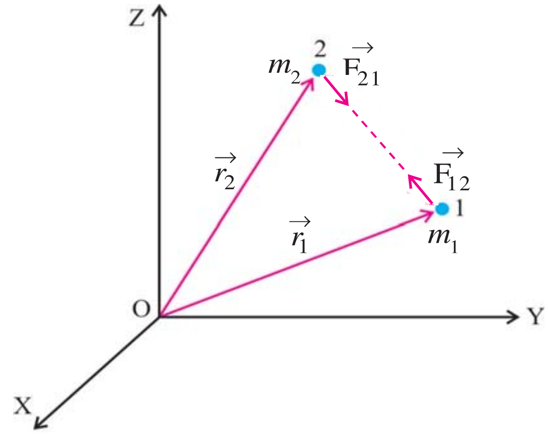
$$\vec{F}_{12} \left[\begin{array}{c}\text{1 પર 2 વડે} \\ \text{લાગતું બળ}\end{array}\right] = \frac{G m_1\ m_2}{r^2}\ \hat{r}_{12} \qquad (3.3.3)$$

ગુરુત્વાકર્ષણ બળો પરસ્પર ક્રિયાગત બળો છે. તેથી જેટલું બળ કણ 1 પર કણ 2 વડે $(\vec{F}_{12})$ લાગે છે. **તેટલું જ** બળ કણ 2 પર કણ 1 વડે $(\vec{F}_{21})$ **વિરુદ્ધ દિશામાં** લાગે છે.

$$\therefore \vec{F}_{21} \left[\begin{array}{c}\text{2 પર 1 વડે} \\ \text{લાગતું બળ}\end{array}\right] = \frac{-G m_1\ m_2}{r^2}\ \hat{r}_{12} = \frac{G m_1\ m_2}{r^2}\ \hat{r}_{21}$$

(3.3.4)

આ બંને બળો $\vec{F}_{12}$ અને $\vec{F}_{21}$ આકૃતિ 3.6માં દર્શાવ્યાં છે.



બે કણ પરનાં પરસ્પર બળો

આકૃતિ 3.6

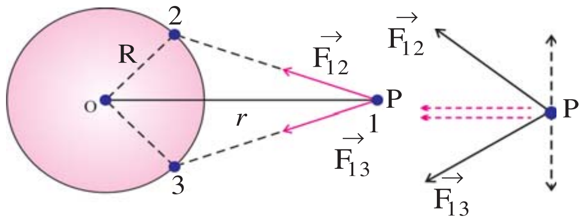
વિસ્તૃત પદાર્થ (extended object) વડે લાગતું બળ : વિસ્તૃત પદાર્થને આપણે બિંદુવત્ કણોના સમૂહ તરીકે લઈ શકીએ. આવા વિસ્તૃત પદાર્થ વડે કોઈ **એક બિંદુવત્ કણ** પર લાગતું કુલ બળ, વિસ્તૃત પદાર્થમાંના દરેક બિંદુવત્ કણ દ્વારા તે કણ પર લાગતા વ્યક્તિગત બળોના સદિશ સરવાળા જેટલું થાય છે. એટલે કે કણ 1 પર વિસ્તૃત પદાર્થ દ્વારા લાગતું કુલ બળ,

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \ldots \qquad (3.3.5)$$

$$= \frac{G m_1\ m_2}{r_{12}^2}\ \hat{r}_{12} + \frac{G m_1\ m_3}{r_{13}^2}\ \hat{r}_{13} + \frac{G m_1\ m_4}{r_{14}^2}\ \hat{r}_{14} + \ldots (3.3.6)$$

આ જ રીતે આપણે એક વિસ્તૃત પદાર્થના દરેક કણ વડે **બીજા વિસ્તૃત** પદાર્થના દરેક કણ પર લાગતાં બળોના સદિશ સરવાળા પરથી તે પદાર્થ પર લાગતું કુલ બળ શોધી શકીએ છીએ. કલનશાસ્ત્રની મદદથી આવી ક્રિયા સહેલાઈથી કરી શકીએ છીએ. ખાસ કિસ્સાઓ તરીકે આપણે બે બાબતોની નોંધ લઈશું : (1) સમાન ઘનતાવાળા પોલા ગોળાકાર કવચ વડે કવચની બહાર આવેલા બિંદુવત્ કણ પર લાગતું ગુરુત્વબળ, જાણે કે કવચનું બધું દળ તેના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયું હોય તેમ ગણીને મળતા બળ જેટલું હોય છે.

[ગુણાત્મક સમજૂતી – માત્ર જાણકારી માટે]



r > R, માટે કવચ વડે લાગતું બળ કવચના કેન્દ્ર તરફ છે

આકૃતિ 3.7

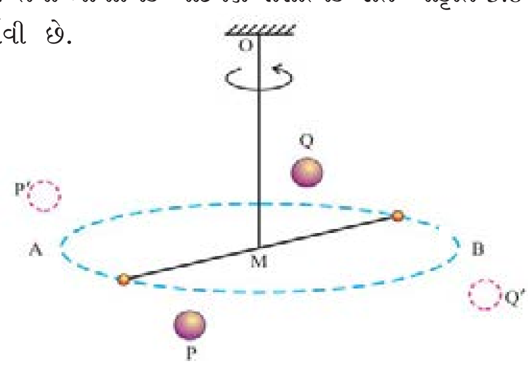
કવચ પરના કણ 2 અને 3 વડે કણ 1 પર લાગતા બળો $\vec{F}_{12}$ અને $\vec{F}_{13}$ ના બે ઘટકો (*i*) OPને સમાંતર અને (*ii*) OP ને લંબ વિચારો. OPને લંબઘટકો નાબૂદ થશે અને OPને સમાંતર ઘટકોનો સરવાળો થશે. આવી ક્રિયા OP રેખાને અનુલક્ષીને સંમિત સ્થાનો ધરાવતા કવચના કણો માટે વિચારતાં P પરનું પરિણામી બળ કવચના કેન્દ્ર પર લાગતું જોઈ શકાય છે. આપણે સાબિતિ આપ્યા વિના એમ સ્વીકારી લઈશું કે આ બળનું મૂલ્ય ઉપર જણાવ્યા મુજબ મેળવી શકાય છે.]

(2) સમાન ઘનતાવાળા પોલા ગોળાકાર કવચ વડે કવચની અંદરના કોઈ પણ બિંદુએ આવેલ કણ પર લાગતું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ શૂન્ય હોય છે.

[ગુણાત્મક સમજૂતી -- માત્ર જાણકારી માટે : કવચના જુદા-જુદા કણો આપેલ કણ પર જુદી-જુદી બધી દિશાઓમાં આકર્ષણબળ લગાડે છે અને આવાં બધાં બળોનું પરિણામી બળ શૂન્ય થાય છે. આને પણ આપણે સાબિતી વિના સ્વીકારી લઈશું.]

3.4 ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક અચળાંક (Universal Constant of Gravitation)

ન્યૂટનના ગુરુત્વાકર્ષણના સાર્વત્રિક નિયમને રજૂ કરતા સૂત્ર (3.3.1)માં આવતા અચળાંક Gનું મૂલ્ય સૌપ્રથમ ઇંગ્લિશ વિજ્ઞાની કેવેન્ડીશે 1798માં પ્રાયોગિક રીતે મેળવ્યું હતું. તેની પ્રાયોગિક ગોઠવણ સંજ્ઞાત્મક રીતે આકૃતિ 3.8માં દર્શાવી છે.



કેવેન્ડિશના પ્રયોગની ગોઠવણ

આકૃતિ 3.8

એક સ્થિર આધાર પરથી ધાતુના પાતળા તાર વડે લટકાવેલા લાંબા સળિયાના બે છેડે સીસાના નાના સમાન ગોળા A અને B લગાડેલા છે. સીસાના બીજા બે મોટા સમાન ગોળા નાના ગોળાઓની નજીક વિરુદ્ધ બાજુએ સમાન અંતરે લાવવામાં આવે છે. મોટા ગોળા વડે નાના ગોળા પર લાગતાં ગુરુત્વબળો સમાન મૂલ્યનાં અને વિરુદ્ધ દિશામાં છે. આ બળોથી ટૉર્ક રચાય છે, આથી સળિયો તાર OMની આસપાસ ભ્રમણ કરે છે. આમ તાર OM માં વળ ચઢે છે અને તેનો વિરોધ કરતું પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક તારમાં (સ્થિતિસ્થાપકતાને લીધે) ઉત્પન્ન થાય છે.

ગુરુત્વબળોથી રચાતું ટૉર્ક, પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક જેટલું બને ત્યારે તંત્ર સંતુલનમાં આવે છે અને સ્થિર થાય છે. આ સ્થિતિમાં તારમાં ચઢેલો વળ θ માપવામાં આવે છે. વળી, આ સ્થિતિમાં મોટા ગોળાના સ્થાન P અને Q (અથવા P'અને Q') AB રેખાને લંબરેખાઓ પર છે.

ધારો કે દરેક મોટા ગોળાનું દળ = M

દરેક નાના ગોળાનું દળ = *m*

સંતુલનસ્થિતિમાં તેમનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર = AP = BQ = *r*.

સંતુલનસ્થિતિમાં તારમાં ચઢેલ વળ (કોણ) = θ

તારમાં એકમ વળ દીઠ ઉદ્‌ભવતું પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક = *k*

સળિયાની લંબાઈ AB = *l*.

અત્રે મોટા ગોળા વડે નાના ગોળા પરનું ગુરુત્વબળ

$$= \frac{GMm}{r^2} \qquad (3.4.1)$$

આવાં બંને બળોથી રચાતું કુલ ટૉર્ક

$$= \left(\frac{GMm}{r^2}\right)(l) \qquad (3.4.2)$$

અને પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક $\tau = k\theta$ (3.4.3)

$$\text{સંતુલનસ્થિતિમાં} \left(\frac{GMm}{r^2}\right)(l) = k\theta \qquad (3.4.4)$$

$$\therefore G = \frac{k\theta r^2}{Mml} \qquad (3.4.5)$$

[અહીં θનું મૂલ્ય તાર પર લગાડેલા એક નાના અરીસાની મદદથી લેમ્પ અને સ્કેલની રીતે મેળવવામાં આવે છે. આ બાબતો આકૃતિમાં દર્શાવેલ નથી. વળી, *k*નું મૂલ્ય એક અન્ય પ્રકારના બીજા પ્રયોગમાં જાણીતું ટૉર્ક τ લગાડીને ઉદ્‌ભવતો વળ θ માપીને $k = \frac{\tau}{\theta}$ પરથી મેળવાય છે.]

આમ θના માપન પરથી Gનું મૂલ્યાંકન થઈ શકે છે.

ઉદાહરણ 1 : 25 kg અને 10 kg દળના પદાર્થોના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે (4, 7, 5) m અને (1, 3, 5) m છે, તો 25 kgના પદાર્થ પર 10 kgના પદાર્થ વડે લાગતા બળનો સદિશ મેળવો. ($G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 લો.)

ઉકેલ : અત્રે $m_1 = 25$ kg, $m_2 = 10$ kg,

$\vec{r_1} = (4, 7, 5)m$, $\vec{r_2} = (1, 3, 5)m$, $\vec{F_{12}} = ?$

$$\begin{bmatrix} \text{1 પર 2 વડે} \\ \text{લાગતુ બળ} \end{bmatrix} \vec{F_{12}} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r_{12}} \quad (1)$$

$\vec{r_{12}} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = (1, 3, 5) - (4, 7, 5) = (-3, -4, 0)\ m$

$$\therefore r = |\vec{r_{12}}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (0)^2} = 5m$$

$$\text{અને } \hat{r_{12}} = \frac{\vec{r_{12}}}{|\vec{r_{12}}|} = \frac{(-3, -4, 0)}{5}$$

$$= (-0.6, -0.8, 0)\ m$$

સમીકરણ (1) માં આ મૂલ્યો મૂકતાં,

$$\vec{F_{12}} = (6.67 \times 10^{-11})\frac{(25 \times 10)}{5^2}(-0.6, -0.8, 0)$$

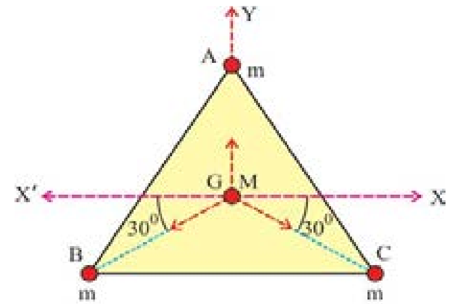
$$= (6.67 \times 10^{-10})\ (-0.6\hat{i} - 0.8\hat{j})\ N$$

ઉદાહરણ 2 : સમબાજુ ત્રિકોણના દરેક શિરોબિંદુ પર m kg દળ ધરાવતો કણ રહેલ છે. આ ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્ર પર M kg દળનો કણ મૂકવામાં આવે, તો તેના પર લાગતું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ શોધો. મધ્યકેન્દ્રથી શિરોબિંદુ વચ્ચેનું અંતર 1 m છે.

ઉકેલ : આકૃતિ 3.9માં દર્શાવ્યા મુજબ ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્ર પર જેનું ઊગમબિંદુ હોય તેવી યામાક્ષ પદ્ધતિ સ્વીકારતાં $\angle XGC = \angle X'GB = 30^o$.

G આગળના કણ પર A આગળના કણ વડે લાગતું

બળ, $$\vec{F_{GA}} = \frac{G m (M)}{1^2}\hat{j} \quad (1)$$



આકૃતિ 3.9

તે જ રીતે B અને C આગળના કણોને લીધે લાગતાં બળો અનુક્રમે

$$\vec{F_{GB}} = \frac{G(m)(M)}{1^2}[-\hat{i}\ \cos30^o - \hat{j}\sin30^o] \quad (2)$$

$$\vec{F_{GC}} = \frac{G(m)(M)}{(1^2)}[\hat{i}\ \cos30^o - \hat{j}\sin30^o] \quad (3)$$

$\therefore$ G બિંદુએ રહેલા કણ પર લાગતું પરિણામી બળ

$$\vec{F} = \vec{F_{GA}} + \vec{F_{GB}} + \vec{F_{GC}}$$

$$= \frac{G m (M)}{1^2}\hat{j}$$

$$+ \frac{G m (M)}{1^2}[-\hat{i}\ \cos30^o - \hat{j}\sin30^o]$$

$$+ \frac{G m (M)}{1^2}[\hat{i}\cos 30^o - \hat{j}\sin 30^o]$$

$$= 0$$

નોંધ : સદિશોના સરવાળા માટેનો ત્રિકોણનો નિયમ વાપરીને પણ તમે ઉપર મુજબનું પરિણામ મેળવી શકો. ઉપરાંત અહીં બળોને દર્શાવતા સદિશો વડે બંધ ગાળો રચાતો હોવાનું જોઈ શકાય છે અને તે પરથી પણ પરિણામી બળ શૂન્ય હોવાનું કહી શકાશે.

3.5 ગુરુત્વપ્રવેગ અને તેમાં ફેરફારો (Gravitational Acceleration and Variations in it)

3.5 (a) ગુરુત્વપ્રવેગ (Gravitational Acceleration) :

ગુરુત્વાકર્ષી બળને લીધે પદાર્થમાં ઉદ્‌ભવતા પ્રવેગને ગુરુત્વપ્રવેગ (g) કહે છે.

પૃથ્વીને સંપૂર્ણ ગોળાકાર ગણીને અને પૃથ્વીની અંદર ઘનતા બધે એકસમાન છે એમ માનીને આપણે જુદાં-જુદાં બિંદુઓએ પૃથ્વીને લીધે ઉદ્‌ભવતા ગુરુત્વપ્રવેગ અંગે વિચારીશું. આપણે પૃથ્વીને અસંખ્ય પોલી સંકેન્દ્રિય ગોળાકાર

કવચોની બનેલી કલ્પી શકીએ. હવે પૃથ્વીની બહારના બિંદુએ આવેલો કણ **આ બધી કવચોની પણ બહાર** છે અને તેથી તેવા કણ પર દરેક કવચથી લાગતું બળ શોધવામાં દરેક કવચનું દળ પૃથ્વીના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું ગણી શકીએ (પરિચ્છેદ 3.3માં જણાવ્યા મુજબ). આમ, સમગ્ર પૃથ્વી વડે તે કણ પર લાગતું બળ શોધવા માટે સમગ્ર પૃથ્વીનું દળ તેના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું ગણી શકીએ.

ધારો કે પૃથ્વીનું દળ M_e અને ત્રિજ્યા R_e છે. પૃથ્વીના કેન્દ્રથી r અંતરે, પૃથ્વીની બહાર આવેલા (અહીં $r > R_e$) m દળના કણ પર લાગતું પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ

$$F = \frac{GM_e m}{r^2} \text{ છે.}$$

તેથી ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમ પરથી આપણે

ગુરુત્વપ્રવેગ $g = \frac{F}{m} = \frac{GM_e}{r^2}$ લખી શકીએ. (3.5.1)

હવે પૃથ્વીની સપાટી પરના કણ માટે $r = R_e$.

$\therefore$ પૃથ્વીની સપાટી પરના કણ માટે,

$$\text{ગુરુત્વપ્રવેગ } g_e = \frac{GM_e}{{R_e}^2} \quad (3.5.2)$$

આપણે પૃથ્વીને સંપૂર્ણ ગોળાકાર ધારી હોવાથી આ g_eનું મૂલ્ય પૃથ્વીની સમગ્ર સપાટી પરનાં બધાં સ્થળોએ એકસમાન મળે. વાસ્તવમાં પૃથ્વી સંપૂર્ણ ગોળાકાર નથી. પણ વિષુવવૃત્ત પાસે થોડીક ઉપસેલી છે અને ધ્રુવો પાસે સહેજ ચપટી છે. ધ્રુવો પાસેની પૃથ્વીની ત્રિજ્યા કરતાં વિષુવવૃત્ત પાસેની પૃથ્વીની ત્રિજ્યા લગભગ 21 km વધુ છે. આથી ધ્રુવો પાસેનું g_eનું મૂલ્ય વિષુવવૃત્ત પાસેના g_eના મૂલ્ય કરતાં સહેજ વધારે હોય છે, પરંતુ પૃથ્વીની સમગ્ર સપાટી પરનાં જુદાં-જુદાં સ્થળોએ g_eના મૂલ્યમાં જણાતો તફાવત અત્યંત સૂક્ષ્મ હોવાથી પૃથ્વીની સમગ્ર સપાટી પરનાં બધાં સ્થળો માટે વ્યાવહારિક હેતુઓ માટે g_eનું મૂલ્ય એક-સમાન લેવામાં આવે છે. આ g_eનું પ્રાયોગિક મૂલ્ય 9.8 m/s^2 માલૂમ પડેલ છે.

તમે ઉપરના સમીકરણમાં $M_e = 6 \times 10^{24}$ kg અને $R_e = 6400$ km લઈ g_eનું મૂલ્ય ગણતરીથી મેળવો.

ઉદાહરણ 3 : જો કોઈ કારણસર પૃથ્વીનું સંકોચન થઈ (તેનું દળ અચળ રહે તે રીતે) પૃથ્વીની ત્રિજ્યા હાલની ત્રિજ્યાના 60% થઈ જાય, તો પૃથ્વીની સપાટી પરના ગુરુત્વપ્રવેગના મૂલ્યમાં કેટલા ટકાનો ફેરફાર થાય ?

ઉકેલ : ગુરુત્વપ્રવેગનું મૂળ મૂલ્ય $g_e = \frac{GM_e}{R^2_e}$

પૃથ્વીની નવી ત્રિજ્યા $R' = \frac{60}{100} R_e = 0.6\ R_e$

$\therefore$ ગુરુત્વપ્રવેગનું નવું મૂલ્ય $g' = \frac{GM_e}{R'^2}$

$$= \frac{GM_e}{(0.6\ R_e)^2} = \frac{g_e}{0.36}$$

$$= \frac{25}{9} g_e$$

$\therefore$ ગુરુત્વપ્રવેગમાં થતો વધારો

$$= g' - g_e = \frac{25}{9} g_e - g_e = \frac{16}{9} g_e$$

$\therefore$ ગુરુત્વપ્રવેગના મૂલ્યમાં ટકાવાર વધારો

$$= \frac{\text{વધારો}}{\text{મૂળ મૂલ્ય}} \times 100$$

$$= \frac{16}{9} \times \frac{g_e}{g_e} \times 100$$

$$= 177.8\ \%$$

ઉદાહરણ 4 : જો પૃથ્વીના દળ અને ત્રિજ્યા બંનેમાં 1 ટકાનો ઘટાડો થાય તો સપાટી પરના ગુરુત્વપ્રવેગમાં કેટલા ટકાનો ફેરફાર થાય ?

ઉકેલ : ગુરુત્વપ્રવેગનું મૂળ મૂલ્ય $g = \frac{GM_e}{{R_e}^2}$

હવે જો $M_e' = 0.99\ M_e$ અને $R_e' = 0.99\ R_e$, થાય તો ગુરુત્વપ્રવેગનું નવું મૂલ્ય

$$g' = \frac{GM'_e}{{R'_e}^2} = \frac{G \times 0.99\ M_e}{(0.99\ R_e)^2}$$

$$= 1.01 \left(\frac{GM_e}{{R_e}^2}\right)$$

$$= 1.01\ g$$

$\therefore$ ગુરુત્વપ્રવેગમાં ફેરફાર $= g' - g$

$$= 1.01\ g - g = 0.01\ g$$

$\therefore$ ગુરુત્વપ્રવેગમાં ટકાવાર ફેરફાર

$$= \frac{\text{ફેરફાર}}{\text{મૂળ મૂલ્ય}} \times 100$$

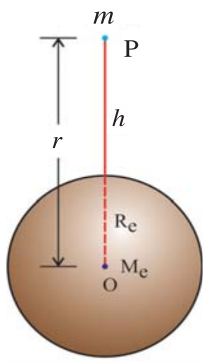
$$= \frac{0.01\ g}{g} \times 100$$

$$= 1\ \%$$

આમ, gના મૂલ્યમાં 1 ટકાનો વધારો થાય.

3.5(*b*) ગુરુત્વપ્રવેગ *g*માં ઊંચાઈ સાથે ફેરફાર (Variation in Gravitational Acceleration *g* with Altitude) :

પૃથ્વીની સપાટી પર ગુરુત્વપ્રવેગ $g_e = \frac{GM_e}{R_e^2}$



h

પૃથ્વીની સપાટીથી ***h*** ઊંચાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગ

આકૃતિ 3.10

પૃથ્વીની સપાટીથી *h* ઊંચાઈએ આવેલા બિંદુ Pનું પૃથ્વીના કેન્દ્રથી અંતર $r = R_e + h$ છે.

∴ આ બિંદુએ *m* દળના પદાર્થ પર લાગતું પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ

$$F(h) = \frac{GM_e m}{(R_e + h)^2} \quad (3.5.3)$$

∴ P બિંદુએ ગુરુત્વપ્રવેગ

$$g(h) = \frac{GM_e}{(R_e + h)^2} \quad (3.5.4)$$

$$\therefore \frac{g(h)}{g_e} = \frac{R_e^2}{(R_e + h)^2}$$

$$= \frac{R_e^2}{R_e^2\left[1 + \frac{h}{R_e}\right]^2} \quad (3.5.5)$$

$$\therefore g(h) = \frac{g_e}{\left[1 + \frac{h}{R_e}\right]^2} \quad (3.5.6)$$

આ પરથી સ્પષ્ટ છે કે $g(h) < g_e$ સમીકરણ (3.5.6) પરથી $g(h) = g_e\left[1 + \frac{h}{R_e}\right]^{-2}$ (3.5.7)

$= g_e\ [1 - \frac{2h}{R_e} + \frac{h}{R_e}$ ની એક કરતાં મોટી ઘાતનાં પદો] (3.5.8)

..... (દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં)

જો $h << R_e$, હોય તો $\frac{h}{R_e}$નાં એક કરતાં મોટી ઘાતનાં પદોને અવગણી શકાય છે. એ સંજોગોમાં

$$g(h) = g_e\left[1 - \frac{2h}{R_e}\right] \quad (3.5.9)$$

સમીકરણ (3.5.6) કોઈ પણ ઊંચાઈ (*h*) માટે વાપરી શકાય છે. જ્યારે સમીકરણ (3.5.9) ફક્ત $h << R_e$ હોય ત્યારે જ વાપરી શકાય છે.

જોકે પૃથ્વીની સપાટીથી થોડી ઊંચાઈ માટે gનું મૂલ્ય g_e જેટલું લગભગ લઈ શકાય છે. આ બાબત એક ઉદાહરણથી સમજીએ. પૃથ્વીની સપાટીથી $h = 10$ km ઊંચાઈ માટે *g* શોધવા માટે ઉપરના સમીકરણ (3.5.9)માં $R_e = 6400$ km અને $g_e = 9.8\ m/s^2$ મૂકતાં,

$$\therefore g(h = 10\ km) = 9.8\left[1 - \frac{(2)(10)}{6400}\right]$$

$$= 9.8 - 0.028$$

$$= 9.772$$

$$\simeq 9.8\ m/s^2.$$

આમ, પૃથ્વીની સમગ્ર સપાટી પર તેમજ સપાટીની નજીક થોડીક ઊંચાઈના વિસ્તારમાં પણ $g = g_e = 9.8\ m/s^2$ વ્યાવહારિક હેતુઓ પૂરતું લઈ શકાય છે.

ઉદાહરણ 5 : સાબિત કરો કે પૃથ્વીની સપાટીથી પૃથ્વીની ત્રિજ્યા જેટલી ઊંચાઈએ આવેલા સ્થળે *g*માં થતા ફેરફારનો દર અને પૃથ્વીની સપાટી પરના *g*ના મૂલ્યનો ગુણોત્તર $\frac{-1}{4R_e}$.

ઉકેલ : પૃથ્વીના કેન્દ્રથી $r \geq R_e$ જેટલા અંતરે ગુરુત્વપ્રવેગ $g(r) = GM/r^2$ છે.

આ સમીકરણનું અંતર *r* સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\left[\frac{dg(r)}{dr}\right] = \frac{-2GM_e}{r^3}$$

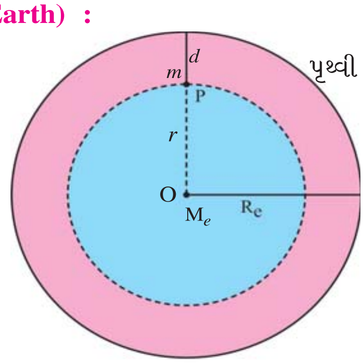
વળી, $r = R_e + h = R_e + R_e = 2R_e$

$$\therefore \left[\frac{dg(r)}{dr}\right]_{2R_e} = \frac{-2GM_e}{(2R_e)^3} = \frac{-2GM_e}{8R_e^3}$$

પરંતુ પૃથ્વીની સપાટી પર ગુરુત્વપ્રવેગ $g_e = \frac{GM_e}{R_e^2}$

$$\therefore \frac{\left[\frac{dg(r)}{dr}\right]_{2R_e}}{g_e} = \frac{-2GM_e}{8R_e^3} \times \frac{R_e^2}{GM_e} = \frac{-1}{4R_e}$$

3.5(*c*) ગુરુત્વપ્રવેગ *g* માં પૃથ્વીની સપાટીથી ઊંડાઈ સાથે ફેરફાર (Variation in the Gravitational Acceleration *g* with Depth from the Surface of the Earth) :



પૃથ્વીની સપાટીથી ઊંડાઈ સાથે *g*માં ફેરફાર

આકૃતિ 3.11

પૃથ્વીની સપાટીથી d ઊંડાઈએ P બિંદુએ રહેલ m દળના કણનો વિચાર કરો. તેનું પૃથ્વીના કેન્દ્રથી અંતર $r = R_e - d$ છે.

આ કણ પર લાગતું પૃથ્વીનું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ શોધવા માટે આપણે પૃથ્વીને $r = R_e - d$ ત્રિજ્યાના નાના નક્કર ગોળા અને તેની ઉપર d જાડાઈની ગોળાકાર કવચની બનેલી કલ્પી શકીએ. P બિંદુ આગળનો આ કણ આ ગોળાકાર કવચની અંદર આવેલો છે. તેથી આ ગોળાકાર કવચને લીધે તે કણ પર લાગતું બળ શૂન્ય છે (પરિચ્છેદ 3.3માં સમજાવ્યા મુજબ). વળી, આ કણ r ત્રિજ્યાના નાના (છાયાંકિત કરેલા) ગોળાની બહારની સપાટી પર છે. આથી તે કણ પર લાગતું બળ નાના ગોળાનું સમગ્ર દળ (M') તેના કેન્દ્ર O પર કેન્દ્રિત થયેલું ગણીને મેળવી શકાય છે.

જો પૃથ્વીની સમાન ઘનતા ρ હોય તો,

$$\rho = \frac{\text{કુલ દળ}}{\text{કુલ કદ}} = \frac{M_e}{\frac{4}{3}\pi R_e^3} \qquad (3.\ 5.10)$$

∴ અને r ત્રિજ્યાના નાના ગોળાનું દળ

$$M' = (\text{કદ})\ (\text{ઘનતા})$$

$$= \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)(\rho) \qquad (3.5.11)$$

∴ P આગળ ગુરુત્વપ્રવેગ,

$$g(r) = \frac{GM'}{r^2}$$

$$= \frac{G}{r^2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)(\rho)$$

$$= \frac{4}{3}\pi\ G\rho\ r \qquad (3.5.12)$$

આ સમીકરણ પરથી પૃથ્વીની સપાટી ($r = R_e$) પર ગુરુત્વપ્રવેગ

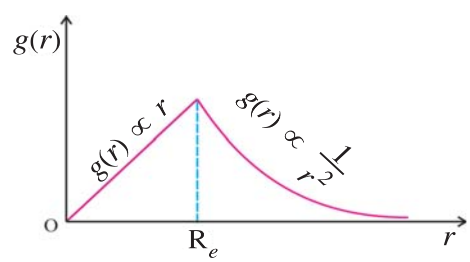
$$g_e = \frac{4}{3}\pi G\rho R_e \qquad (3.5.13)$$

સમીકરણ (3.5.12) અને (3.5.13) પરથી,

$$\frac{g(r)}{g_e} = \frac{r}{R_e} \qquad (3.5.14)$$

$$\therefore\ g(r) = g_e\left(\frac{r}{R_e}\right) \qquad (3.5.15)$$

સમીકરણ (3.5.12) અને (3.5.15) પરથી સ્પષ્ટ છે કે પૃથ્વીના કેન્દ્રથી સપાટી સુધી $g(r)$એ rના સમપ્રમાણમાં છે એટલે કે પૃથ્વીની અંદરના વિસ્તારમાં આવેલ બિંદુએ ગુરુત્વપ્રવેગ gનું મૂલ્ય પૃથ્વીના કેન્દ્રથી તે બિંદુના અંતરના સમપ્રમાણમાં હોય છે. વળી, પૃથ્વીની સપાટીની બહારના વિસ્તારમાં $g(r) = GM_e/r^2$ પરથી $g(r) \propto \frac{1}{r^2}$. મુજબ બદલાય છે. આથી પૃથ્વીના કેન્દ્ર (0)થી શરૂ કરતાં સપાટી સુધી અંતર (r)ના સમપ્રમાણમાં $g(r)$નું મૂલ્ય વધે છે. પછી સપાટીની બહાર $g(r)$નું મૂલ્ય અંતરના વ્યસ્ત વર્ગ મુજબ ઘટે છે. gમાં થતા આવા ફેરફાર નીચેની આકૃતિ 3.12માં દર્શાવ્યા છે.



પૃથ્વીના કેન્દ્રથી અંતર r સાથે gમાં ફેરફાર

આકૃતિ 3.12

સમીકરણ (3.5.15)માં $r = R_e - d$ મૂકતા ગુરુત્વપ્રવેગનું મૂલ્ય પૃથ્વીની સપાટીથી ઊંડાઈ dના પદમાં મળે છે. તેને $g(d)$, તરીકે દર્શાવીશું.

$$\therefore \quad g(d) = \frac{g_e}{R_e}(R_e - d)$$

$$= g_e\left[1 - \frac{d}{R_e}\right] \qquad (3.5.16)$$

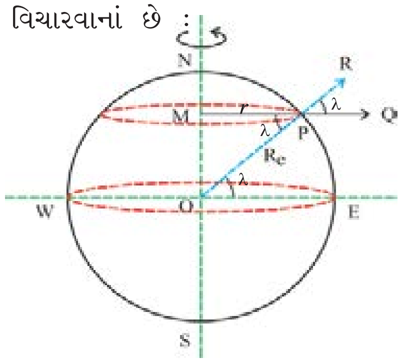
આ દર્શાવે છે કે d ઊંડાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગનું મૂલ્ય સપાટી પરના મૂલ્ય કરતાં ઓછું છે.

આમ, પૃથ્વીના ગુરુત્વપ્રવેગનું મૂલ્ય તેની સપાટી પર સૌથી વધુ છે અને ત્યાંથી ઉપર કે નીચે જતાં તે ઘટતું જાય છે અને પૃથ્વીના કેન્દ્ર પર શૂન્ય બને છે. આ નોંધપાત્ર બાબત છે.

3.5 (*d*) પૃથ્વીના ભ્રમણને લીધે અક્ષાંશ સાથે અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગ g'માં થતો ફેરફાર (Variation in effective Gravitational Acceleration g' with Lattitute Due to Earth's Rotation) :

પૃથ્વીની સપાટી પરના આપેલા સ્થળને પૃથ્વીના કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખાએ વિષુવવૃત્તીય રેખા સાથે બનાવેલા ખૂણાને તે સ્થળનો અક્ષાંશ (lattitude) (λ) કહે છે. આથી વિષુવવૃત્ત પર અક્ષાંશ $\lambda = 0^\circ$ અને ધ્રુવ પર અક્ષાંશ $\lambda = 90^\circ$ થાય.

આકૃતિ (3.13)માં દર્શાવ્યા મુજબ પૃથ્વીની સપાટી પરના P સ્થાને અક્ષાંશ $\lambda = \angle POE$ છે. આ સ્થાને m દળના કણનો વિચાર કરો. તેના પર લાગતાં બળો તરીકે બે બળો વિચારવાનાં છે :



પૃથ્વીના ભ્રમણને લીધે અક્ષાંશ સાથે અસરકારક g'માં ફેરફાર

આકૃતિ 3.13

(1) પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ = mg, $\overrightarrow{PO}$ દિશામાં(3.5.17)

(2) બીજું બળ સમજવા પૃથ્વીની ચાકગતિને ધ્યાનમાં લો. પૃથ્વી તેની ચાકગતિને કારણે પ્રવેગ ધરાવે છે. એટલે આ કણ પ્રવેગી નિર્દેશફ્રેમમાં છે. આ બિંદુએ તે નિર્દેશ-ફ્રેમનો પ્રવેગ = $\frac{v^2}{r}$ જેટલો $\overrightarrow{PM}$ દિશામાં (એટલે કે વર્તુળમાર્ગના કેન્દ્ર તરફ) છે. આથી તેની વિરુદ્ધ દિશામાં એટલે કે $\overline{MPQ}$ દિશામાં $\frac{v^2}{r}$ જેટલો કણનો આભાસી પ્રવેગ અને તેથી $\frac{mv^2}{r}$ જેટલું તેના પર આભાસી બળ ગણવાનું છે. આ બળનો $\overrightarrow{PR}$ દિશામાંનો ઘટક

$$= \frac{mv^2}{r}\cos\lambda \qquad (3.5.18)$$

જે બીજું બળ આપણે ગણવાનું છે તે આ છે.

આમ સમીકરણ (3.5.17) અને (3.5.18) મુજબનાં બે બળો ગણતરીમાં લેતાં, P આગળના કણ પર પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ લાગતું અસરકારક બળ

$$mg' = mg - \frac{mv^2}{r}\cos\lambda \qquad (3.5.19)$$

જ્યાં g' = આ સ્થાને પૃથ્વીની ચાકગતિને ધ્યાનમાં લઈને મળતો અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગ

g = પૃથ્વીની ચાકગતિ ધ્યાનમાં લીધા સિવાય આ સ્થાને ગુરુત્વપ્રવેગ

$$\therefore \; g' = g - \frac{v^2}{r}\cos\lambda \qquad (3.5.20)$$

પરંતુ $v = r\omega$ જ્યાં ω = પૃથ્વીની કોણીય ઝડપ

$$\therefore \; g' = g - \frac{(r\omega)^2}{r}\cos\lambda \qquad (3.5.21)$$

$$= g - r\omega^2\cos\lambda \qquad (3.5.22)$$

આકૃતિ પરથી, $r = MP = R_e\cos\lambda$ (3.5.23)

$$\therefore \; g' = g - R_e\omega^2\cos^2\lambda \qquad (3.5.24)$$

$$\text{અથવા } g' = g\left[1 - \frac{R_e\omega^2\cos^2\lambda}{g}\right] \qquad (3.5.25)$$

આ સમીકરણ (3.5.24) અથવા (3.5.25) પરથી પૃથ્વીના ભ્રમણને લીધે અક્ષાંશ સાથે gમાં થતા ફેરફારની માહિતી મળે છે. બે વિશિષ્ટ કિસ્સાઓની નોંધ લઈએ :

(*i*) વિષુવવૃત્ત માટે, $\lambda = 0^\circ$, $\therefore \cos\lambda = 1$, $\therefore g' = g - R_e\omega^2$, જે અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગનું લઘુતમ મૂલ્ય દર્શાવે છે.

(*ii*) ધ્રુવ પર, $\lambda = 90^\circ$, $\cos\lambda = 0$, $\therefore g' = g$; જે અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગનું મહત્તમ મૂલ્ય દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 6 : પૃથ્વીના વિષુવવૃત્ત પર અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગ શૂન્ય થવા માટે પૃથ્વીની તેની અક્ષની આસપાસની ચાકગતિનો આવર્તકાળ કેટલો હોવો જોઈએ ?

ઉકેલ : વિષુવવૃત્ત પર અક્ષાંશ $\lambda = 0^o$. પૃથ્વીની સપાટી પરના λ અક્ષાંશ ધરાવતા સ્થળે અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગ $g' = g - R_e\omega^2\cos^2\lambda$... (સમીકરણ 3.5.24 પરથી). R_e = પૃથ્વીની ત્રિજ્યા,

g = ચાકગતિ ધ્યાનમાં લીધા સિવાય પૃથ્વીની સપાટી પર ગુરુત્વપ્રવેગ.

ω = પૃથ્વીની ચાકગતિની કોણીય ઝડપ = $\frac{2\pi}{T}$.

વિષુવવૃત્ત પર $g' = 0$ થવા માટે આવર્તકાળ T શોધવાનો છે.

$$\therefore\ 0 = g - R_e\omega^2\cos^2(0^o)$$

$$\therefore\ g = R_e\omega^2 \quad ...(\cos 0^o = 1)$$

$$= R_e\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)$$

$$\therefore\ T^2 = 4\pi^2\frac{R_e}{g} \quad \therefore\ T = 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}}$$

3.6 ગુરુત્વાકર્ષી તીવ્રતા (Gravitational Intensity)

એક પદાર્થ વડે બીજા પદાર્થ પર લાગતું ગુરુત્વાકર્ષી બળ ન્યૂટનના ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમ (સમીકરણ 3.3.1)પરથી મળે છે. એકબીજાથી દૂર રહેલા બે પદાર્થો વચ્ચે બળ લાગવાની આ પ્રક્રિયા **(action at a distance)**ને નીચે મુજબ **ક્ષેત્ર દ્વારા** થતી હોય તેમ સમજાવવામાં આવે છે.

(1) દરેક પદાર્થ તેના દળને લીધે પોતાની આસપાસ **ગુરુત્વક્ષેત્ર** ઉત્પન્ન કરે છે. (2) આ ક્ષેત્રમાં આવતા (કે રહેલા) બીજા પદાર્થ પર આ ક્ષેત્ર બળ લગાડે છે. આથી આવા ગુરુત્વક્ષેત્રની તીવ્રતા (પ્રબળતા) વિશે જાણવાનું મહત્ત્વનું છે.

"આપેલા પદાર્થ વડે આપેલા બિંદુએ એકમદળના પદાર્થ પર લાગતા ગુરુત્વાકર્ષી બળને તે બિંદુએ ગુરુત્વાકર્ષી ક્ષેત્રની તીવ્રતા (I) કહે છે." તેને ઘણી વાર ટૂંકમાં **ગુરુત્વાકર્ષી ક્ષેત્ર**, અથવા **ગુરુત્વક્ષેત્ર** અથવા **ગુરુત્વીય તીવ્રતા** અથવા **ગુરુત્વાકર્ષી તીવ્રતા** અથવા **ગુરુત્વતીવ્રતા** પણ કહે છે.

ન્યૂટનના ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમનો ઉપયોગ કરીને આપણે ગુરુત્વતીવ્રતાનું સૂત્ર લખી શકીએ. યામાક્ષોના ઊગમબિંદુએ M દળના પદાર્થનો વિચાર કરો. તેના લીધે કોઈ P બિંદુએ ઉદ્‌ભવતી ગુરુત્વતીવ્રતા

$\vec{I} = \frac{-GM(1)}{r^2}\hat{r} = \frac{-GM}{r^2}\hat{r}$ ...(3.6.1), જ્યાં

$\vec{OP} = \hat{r}$ અને $\hat{r} = \vec{r}$ ની દિશા (એટલે $\vec{OP}$)માંનો એકમ સદિશ. મૂલ્યમાં આપણે $I = \frac{GM}{r^2}$ ...(3.6.2) લખી શકીએ. તેનો એકમ N/kg અને પારિમાણિક સૂત્ર $M^0L^1T^{-2}$ છે.

હવે જો કોઈ m દળના પદાર્થને આ P બિંદુ પર લાવીએ (અથવા ત્યાં રહેલો હોય) તો ગુરુત્વક્ષેત્ર વડે તેના પર લાગતું બળ $\vec{F} = \vec{I}m = \frac{-GMm}{r^2}\hat{r}$ ..(3.6.3)

સમીકરણ (3.6.2) દર્શાવે છે કે પૃથ્વીને લીધે આપેલા બિંદુએ ગુરુત્વતીવ્રતાનું મૂલ્ય તે બિંદુ આગળના ગુરુત્વ પ્રવેગ **જેટલું** હોય છે. પરંતુ આ બે રાશિઓ અલગ-અલગ છે. અને તેમના એકમ જુદા-જુદા પરંતુ સમતુલ્ય છે, [N/kg = m/s²]. આમ, એ સ્પષ્ટ છે કે પૃથ્વીના ગુરુત્વક્ષેત્ર માટે $I - r$ આલેખ $g - r$ આલેખ જેવો જ હોય (આકૃતિ 3.12 જેવો) [ભવિષ્યમાં તમે વિદ્યુતના કિસ્સામાં વિદ્યુતબળ = (વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા $\vec{E}$) × (વિદ્યુતભાર q) એવું સૂત્ર ભણશો.]

ઉદાહરણ 7 : એક બિંદુએ ગુરુત્વાકર્ષી ક્ષેત્રની તીવ્રતા $\vec{I} = 10^{-9}(\hat{i} + \hat{j})$ N/kg છે. તો તે બિંદુએ 10 kg દળના પદાર્થ પર લાગતા બળનું મૂલ્ય અને તેના પ્રવેગનું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ :

$$\vec{F} = (\vec{I})(m)$$

$$= (10^{-9})(\hat{i} + \hat{j})(10)$$

$$= 10^{-8}\hat{i} + 10^{-8}\hat{j}\ \text{N}$$

$$\therefore\ |\vec{F}| = \sqrt{(10^{-8})^2 + (10^{-8})^2}$$

$$= 10^{-8}\sqrt{2}$$

$$= 1.414 \times 10^{-8}\ \text{N}$$

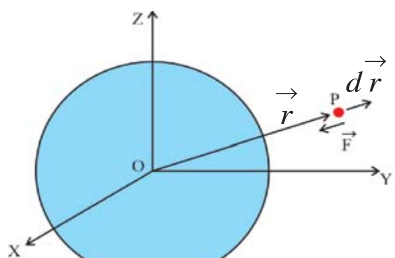
$$g = \frac{|\vec{F}|}{m} = \frac{1.414 \times 10^{-8}}{10}$$

$$= 1.414 \times 10^{-9}\ \text{m/s}^2.$$

3.7 પૃથ્વીના ગુરુત્વક્ષેત્રમાં ગુરુત્વસ્થિતિમાન અને ગુરુત્વ સ્થિતિ-ઊર્જા (Gravitational Potential and Gravitational Potential Energy in the Earth's Gravitational Field)

(*a*) ગુરુત્વસ્થિતિમાન : દરેક પદાર્થ પોતાની આસપાસ ગુરુત્વક્ષેત્ર ઉત્પન્ન કરે છે. આવા ક્ષેત્રની એક લાક્ષણિકતાને **ગુરુત્વસ્થિતિમાન (gravitational potential)** નામની રાશિ તરીકે નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

"એકમ દળના પદાર્થને અનંત અંતરેથી ગુરુત્વક્ષેત્રમાંના આપેલા બિંદુએ લાવવા દરમિયાન ગુરુત્વબળે કરેલા કાર્યના ઋણ મૂલ્યને તે બિંદુ આગળનું ગુરુત્વ સ્થિતિમાન (ϕ) કહે છે." ... ગુરુત્વસ્થિતિમાનનો એકમ J kg^{-1} છે અને તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^0L^2T^{-2}$ છે.



સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતરમાં ગુરુત્વ બળ વડે થતું કાર્ય

આકૃતિ 3.14

પૃથ્વીના ગુરુત્વક્ષેત્રમાં ગુરુત્વસ્થિતિમાનનું સૂત્ર મેળવવા આકૃતિ 3.14ને ધ્યાનમાં લો.

પૃથ્વીના કેન્દ્ર પર આપણે યામતંત્રનું ઊગમબિંદુ O મૂકીશું. પૃથ્વીનું દળ M_e અને ત્રિજ્યા R_e છે. પૃથ્વીના કેન્દ્રથી r અંતરે આવેલા P બિંદુનો સ્થાનસદિશ $\vec{OP} = \vec{r}$. અત્રે $r \geq R_e$ છે. આ બિંદુએ એકમદળના પદાર્થ પર લાગતું પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ

$$\vec{F} = \frac{-GM_e(1)}{r^2}\hat{r}$$

$$= \frac{-GM_e}{r^2}\hat{r} \qquad (3.7.1)$$

આ બળ અચળ નથી પણ અંતર સાથે બદલાય છે, પરંતુ સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતર $d\vec{r}$ દરમ્યાન બળને અચળ ગણી શકાય છે. આથી આ સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતરમાં ગુરુત્વબળ વડે થતું કાર્ય

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(\frac{-GM_e}{r^2}\hat{r}\right)(dr\,\hat{r}) \qquad (3.7.2)$$

$$= \frac{-GM_e}{r^2}dr \qquad (3.7.3)$$

P બિંદુથી અનંત અંતર સુધીના સમગ્ર ગાળાને મોટી સંખ્યાના સૂક્ષ્મ ગાળાઓમાં વિભાગેલો કલ્પી શકાય. આ દરેક સૂક્ષ્મ ગાળામાં બળ અચળ ગણીને તે ગાળા દરમિયાન થતું કાર્ય ગણી શકાય અને એવા બધા કાર્યનો સરવાળો કરવાથી કુલ કાર્ય W મળે. આ પ્રક્રિયા સતત હોવાથી સરવાળાને સંકલન રૂપે લખી શકાય. આથી, આ કિસ્સામાં આ પદાર્થને r અંતરે રહેલા બિંદુ Pથી અનંત અંતરે લઈ જવા દરમિયાન ગુરુત્વબળ વડે થતું કાર્ય.

$$W_{r\to\infty} = \int dW = \int_r^\infty\left(-\frac{GM_e}{r^2}\right)dr \qquad (3.7.4)$$

$$= -GM_e\int_r^\infty\frac{1}{r^2}dr \qquad (3.7.5)$$

$$= -GM_e\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty \qquad (3.7.6)$$

$$= \frac{-GM_e}{r} \qquad (3.7.7)$$

હવે આ પદાર્થને અનંત અંતરેથી r અંતરના P બિંદુએ લાવીએ, તો તે દરમિયાન **ગુરુત્વબળ વડે થતું કાર્ય** ($W_{\infty\to r}$) એ સમીકરણ (3.7.7) થી મળતા કાર્ય જેટલું જ પણ વિરુદ્ધ ચિહ્ન ધરાવતું હશે.

[$W_{\infty\to r} = -W_{r\to\infty}$], કારણ કે ગુરુત્વબળ એ સંરક્ષી બળ છે.

$$\therefore\ W_{\infty\to r} = \frac{GM_e}{r} \qquad (3.7.8)$$

આ કાર્ય ($W_{\infty\to r}$) ના ઋણ મૂલ્યને વ્યાખ્યા મુજબ P બિંદુ આગળનું ગુરુત્વસ્થિતિમાન ϕ કહે છે.

$\therefore$ P આગળનું ગુરુત્વસ્થિતિમાન

$$\phi = \frac{-GM_e}{r} \qquad (3.7.9)$$

આ પરથી પૃથ્વીની સપાટી પર ($r = R_e$ મૂકતાં) ગુરુત્વસ્થિતિમાન

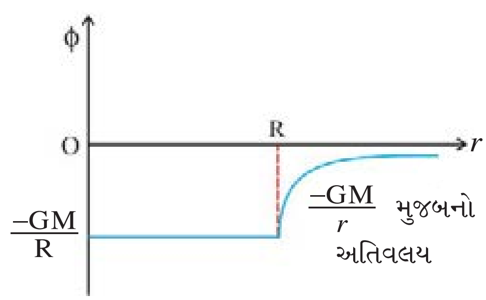
$$\phi_e = \frac{-GM_e}{R_e} \qquad (3.7.10)$$

આપણે ગુરુત્વસ્થિતિમાન અંગેની કેટલીક બાબતોની નોંધ લઈએ :

(1) પૃથ્વીના કેન્દ્રથી અનંત અંતરે ગુરુત્વસ્થિતિમાન = 0.

(2) ગોળાકાર નિયમિત કવચની અંદરના ભાગમાં **બધા બિંદુએ ગુરુત્વસ્થિતિમાન એકસમાન છે** અને તે તેની સપાટી પરના મૂલ્ય જેટલું જ એટલે કે $\frac{-GM}{R}$ જેટલું છે, જ્યાં M = કવચનું દળ, R = કવચની ત્રિજ્યા. આનું કારણ એ છે કે કવચની અંદર બધા બિંદુએ ગુરુત્વબળ શૂન્ય હોવાથી **કવચની અંદરના** ભાગમાંની પદાર્થની ગતિ દરમિયાન કોઈ **કાર્ય કરવું પડતું નથી.** માત્ર ∞થી સપાટી સુધીની ગતિમાંનું કાર્ય જ ગણતરીમાં આવે છે.

(3) M દળની અને R ત્રિજ્યાની કવચના કેન્દ્રથી અંતર r સાથે સ્થિતિમાન ϕ નો ફેરફાર આકૃતિ 3.15માં દર્શાવેલ છે.



ϕ માં અંતર r સાથે ફેરફાર

આકૃતિ 3.15

(b) ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા : "આપેલા (m દળના) પદાર્થને પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષી ક્ષેત્રમાં અનંત અંતરેથી આપેલા બિંદુએ લાવવા દરમિયાન ગુરુત્વબળે કરેલા કાર્યના ઋણ મૂલ્યને તે બિંદુ પાસે તે પદાર્થની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા U કહે છે. તે ખરેખર તો પૃથ્વી + તે પદાર્થના તંત્રની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા છે.

ગુરુત્વસ્થિતિમાન અને ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જાની વ્યાખ્યાઓને ધ્યાનમાં લેતાં, સમીકરણ (3.7.8) પરથી, પૃથ્વીના કેન્દ્રથી $r(\geq R_e)$ અંતરે, m દળના પદાર્થની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા

$$U = \phi m = \frac{-GM_e m}{r} \qquad (3.7.10)$$

આથી પૃથ્વીની સપાટી પર ($r = R_e$) રહેલા m દળના પદાર્થની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા

$$U_e = \frac{-GM_e m}{R_e} \qquad (3.7.11)$$

ગુરુત્વસ્થિતિમાન એ એકમદળના પદાર્થની સ્થિતિ-ઊર્જા છે, એમ પણ આપણે કહી શકીએ.

પૃથ્વીના કેન્દ્રથી અનંત અંતરે તે પદાર્થ પરનું પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ શૂન્ય છે અને ઉપરની વ્યાખ્યા મુજબ આપણે કહી શકીએ કે તેની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા પણ શૂન્ય છે.

સ્થિતિ-ઊર્જા (કે સ્થિતિમાન)ના **નિરપેક્ષ મૂલ્યનું કોઈ મહત્ત્વ નથી,** માત્ર તેના મૂલ્યમાં થતા **ફેરફારનું જ મહત્ત્વ છે.** એટલે શૂન્ય સ્થિતિ-ઊર્જા (કે શૂન્ય સ્થિતિમાન) માટેનું સંદર્ભબિંદુ આપણે ગમે ત્યાં લઈ શકીએ છીએ. (યાદ કરો, "કાર્ય, ઊર્જા અને પાવર"ના પ્રકરણમાં આપણે પૃથ્વીની સપાટી પર સ્થિતિ-ઊર્જા શૂન્ય લીધી હતી, જ્યારે અહીં આપણે અનંત અંતરે સ્થિતિ-ઊર્જા શૂન્ય લીધી છે. પરંતુ બંને કિસ્સામાં માત્ર ફેરફારો જ મહત્ત્વના હોવાથી કોઈ વિરોધાભાસ સર્જાતો નથી.)

અત્રે સ્થિતિ-ઊર્જા U એ પૃથ્વી અને પદાર્થથી બનેલા તંત્રની છે પણ આ ક્રિયામાં પૃથ્વીના સ્થાનમાં કે વેગમાં ખાસ કંઈ ફેરફાર થતો ન હોવાથી તેને રૂઢિગત રીતે **પદાર્થની** સ્થિતિ-ઊર્જા તરીકે પણ ઉલ્લેખવામાં આવે છે. જ્યારે પણ આવો ઉલ્લેખ થાય ત્યારે આપણે એમ સમજવાનું છે કે આ સ્થિતિ-ઊર્જા તત્ત્વતઃ **તો એ તંત્રની** છે પણ તે સ્થિતિ-ઊર્જાનો બધો ફેરફાર **માત્ર પદાર્થ જ** અનુભવતો દેખાય છે.

આગળ ઉપર આપણે ઉપગ્રહનો પણ વિચાર કરવાના છીએ. તે કિસ્સામાં સ્થિતિ-ઊર્જા પૃથ્વી અને ઉપગ્રહથી બનેલા તંત્રની હોય છે. પણ આપણે ઉપગ્રહની સ્થિતિ-ઊર્જા તરીકે તેનો ઉલ્લેખ કરીશું.

ઉદાહરણ 8 : આકૃતિ (3.16) માં દર્શાવ્યા મુજબ જેની પ્રત્યેક બાજુનું માપ l છે તેવા ચોરસના દરેક શિરોબિંદુ પર m દળ ધરાવતા કણ રહેલ છે. આ ચાર કણોથી બનતા તંત્રની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા શોધો. આ ચોરસના કેન્દ્ર પર ગુરુત્વસ્થિતિમાન પણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં કણોની દરેક જોડથી મળતી સ્થિતિ-ઊર્જાને $U_{ij} = \frac{-Gm_i m_j}{r_{ij}}$ તરીકે લખી શકાય, જ્યાં