मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 16

अनुक्रमांक ....

नाम ....

131/2 335(WB)

2016

गणित

द्वितीय प्रश्नपत्र

(कलन, निर्देशांक ज्यामिति, रैखिक प्रोग्रामन, सदिश तथा त्रिविमीय ज्यामिति)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 50

निर्देश : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Instruction : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

नोट : i) इस प्रश्नपत्र में कुल **आठ** प्रश्न हैं ।

ii) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।

iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड करने हैं ।

iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं ।

v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए ।

vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए ।

Note : i) There are in all *eight* questions in this question paper.

ii) *All* questions are compulsory.

iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted is clearly mentioned.

iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

v) Start from the first question and proceed to the last.

vi) Do not waste time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** खण्डों को हल कीजिए :

क) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta/2)}{\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

ख) $\int \frac{x^2}{x^2 - 9} dx$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

ग) उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की माप 2 इकाई है और यह लम्ब x-अक्ष से 60° का कोण बनाता है । 1

घ) बिन्दुओं (– 1, – 3) एवं (2, 5) को मिलाने वाली रेखा को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए । 1

ङ) सदिशों $2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ और $6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए । 1

1. Attempt any *four* parts of the following :

a) Evaluate $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta/2)}{\theta}$. 1

b) Evaluate $\int \frac{x^2}{x^2 - 9} dx$. 1

c) Find the equation of the line on which the perpendicular drawn from the origin is of 2 units in length and makes an angle of 60° with x-axis. 1

d) Find the equation of the circle drawn on the line joining the points $(-1, -3)$ and $(2, 5)$ as diameter.

1

e) Find the angle between the vectors $2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ and $6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$. 1

2. निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $y = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$, तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$. 2

ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2+y^2}{a^2+x^2}$ को हल कीजिए । 2

ग) यदि D और E त्रिभुज ABC की भुजाओं AB और AC के मध्य बिन्दु हों, तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{BE} + \vec{DC} = \frac{3}{2}\vec{BC}$. 2

घ) उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी उत्केन्द्रता 2, एक नाभि (1, 1) और संगत नियता $x + y + 1 = 0$ हो । 2

ङ) यदि फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ k, & x = 2 \end{cases}$

बिन्दु $x = 2$ पर संतत है, तो k का मान ज्ञात कीजिए । 2

2. Attempt any *four* parts of the following :

a) If $y = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$, show that $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$. 2

b) Solve the differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2+y^2}{a^2+x^2}.$$ 2

c) If D and E be the middle points of the sides AB and AC of the triangle ABC, prove that $\vec{BE} + \vec{DC} = \frac{3}{2}\vec{BC}$. 2

d) Find the equation of the hyperbola whose eccentricity is 2, one focus is (1, 1) and the corresponding directrix is $x + y + 1 = 0$. 2

e) If the function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} &, x \neq 2 \\ k &, x = 2 \end{cases}$$

is continuous at $x = 2$, find the value of k. 2

3. निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** खण्डों को हल कीजिए :

क) बिन्दु 't' पर वक्र $x = at^2$, $y = 2at$ के स्पर्शी का समीकरण ज्ञात कीजिए । 2

ख) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ का समाकलन कीजिए । 2

ग) उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (– 8, – 2) और नियता $y = 2x - 9$ हो । 2

घ) यदि बिन्दुओं (1, – 8, a) और (– 3, – 5, 4) के बीच की दूरी 5 इकाई हो तो, a का मान ज्ञात कीजिए । 2

ङ) यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, तो $\vec{a} \times \vec{b}$ का मान ज्ञात कीजिए । 2

3. Attempt any *four* parts of the following :

a) Find the equation of tangent to the curve $x = at^2$, $y = 2at$ at point 't'. 2

b) Integrate $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$. 2

c) Find the equation of the parabola whose focus is (− 8, − 2) and directrix is $y = 2x - 9$. 2

d) If the distance between the points (1, − 8, a) and (− 3, − 5, 4) is 5 units, find the value of a. 2

e) If $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, find $\vec{a} \times \vec{b}$. 2

4. निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि वृत्तों $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y = 0$ और $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y = 0$ एक-दूसरे को स्पर्श करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $f_1 g_2 = f_2 g_1$. 3

ख) यदि $y = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}$, तो सिद्ध कीजिए कि $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y\log x}$. 3

ग) सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}.$$ 3

घ) दीर्घवृत्त $4x^2 + 9y^2 = 144$ की नाभियाँ एवं उत्क्रेन्द्रता ज्ञात कीजिए । 3

4. Attempt any *three* parts of the following :

a) If the circles

$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y = 0$ and

$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y = 0$ touch

each other, prove that $f_1 g_2 = f_2 g_1$. 3

b) If $y = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot\infty}}}}}$, prove that $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y \log x}$. 3

c) Prove that

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}.$$ 3

d) Find the foci and eccentricity of the ellipse $4x^2 + 9y^2 = 144$. 3

5. निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि उस त्रिभुज का क्षेत्रफल, जिसके शीर्षों के स्थिति सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ हैं, $\frac{1}{2}|\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}|$ होगा । 3

ख) $\sin\theta + \cos\theta$ का महत्तम मान ज्ञात कीजिए । 3

ग) अवकल समीकरण

$y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए । 3

घ) वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें समतल $x + y - z = \frac{1}{5}$ बिन्दुओं (3, 1, 4) और (4, 2, 5) को मिलाने वाली रेखा को विभाजित करता है । 3

5. Attempt any *three* parts of the following :

a) Prove that the area of the triangle, the position vectors of whose vertices are $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$, is

$$\frac{1}{2} \left| \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} \right|.$$ 3

b) Find the maximum value of $\sin\theta + \cos\theta$. 3

c) Find the general solution of the differential equation

$y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$. 3

d) Find the ratio in which the plane $x + y - z = \frac{1}{5}$ divides the line joining the points (3, 1, 4) and (4, 2, 5). 3

6. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) दर्शाइए कि एक निश्चित आयतन के शंक्वाकार डेरे के निर्माण में कम से कम कपड़ा लगेगा जब उसकी ऊँचाई और आधार की त्रिज्या का अनुपात $\sqrt{2} : 1$ है । 4

ख) वक्र $x^2 = 4y$ और रेखा $x = 4y - 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 4

6. Attempt any *one* part of the following :

a) Show that the cloth required to construct a conical tent of given volume is minimum when the ratio of its height and the radius of the base is $\sqrt{2} : 1$. 4

b) Find the area enclosed between the curve $x^2 = 4y$ and the line $x = 4y - 2$. 4

7. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) लेखाचित्रीय विधि से $Z = 150x + 250y$ का निम्नलिखित शर्तों के अधीन अधिकतम मान ज्ञात कीजिए :

$$x + y \leq 24$$

$$2x + y \leq 32$$

$$x, y \geq 0.$$ 4

ख) यदि रेखा $lx + my + n = 0$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर अभिलम्ब हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$. 4

7. Attempt any *one* part of the following :

a) By graphical method find the maximum value of $Z = 150x + 250y$ subject to the constraints :

$$x + y \leq 24$$

$$2x + y \leq 32$$

$$x, y \geq 0.$$ 4

b) If the straight line $lx + my + n = 0$ is normal to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, prove that $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$. 4

. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) उन सभी सरल रेखाओं के लिए, जो मूल बिन्दु से इकाई दूरी पर हैं, अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए । 4

ख) सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (4, – 2, 5) और समतलों $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 7\hat{j} + 2\hat{k}) = 15$ एवं $\vec{r} \cdot (4\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 16$ की प्रतिच्छेदन रेखा से गुजरने वाले समतल का समीकरण $\vec{r} \cdot (201\hat{i} - 136\hat{j} - 73\hat{k}) = 897$ है । 4

8. Attempt any *one* part of the following :

a) Find the differential equation for all those straight lines which are at unit distance from the origin. 4

b) Prove that the equation of the plane passing through the point (4, – 2, 5) and the line of intersection of the planes $\vec{r} . (3\hat{i} - 7\hat{j} + 2\hat{k}) = 15$ and $\vec{r} . (4\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 16$ is $\vec{r} . (201\hat{i} - 136\hat{j} - 73\hat{k}) = 897$. 4