Chapter
7

द्विपद प्रमेय तथा गणितीय आगमन

द्विपद प्रमेय

द्विपद व्यंजक (Binomial expression)

दो पदों के बीजगणितीय व्यंजक, जिसमें पद धन (+) या ऋण (–) चिन्हों से सम्बन्धित होते हैं, **द्विपद व्यंजक** कहलाते हैं।

उदाहरणार्थ : $(a+b), (2x-3y), \left(\frac{p}{x^2}-\frac{q}{x^4}\right), \left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y^3}\right)$ इत्यादि।

धनात्मक पूर्णांक घातांक के लिए द्विपद प्रमेय (Binomial theorem for positive integral index)

जब एक द्विपद व्यंजक का किसी भी घात के लिए एक श्रेणी के रूप में विस्तार (Expansion) किया जाता है, तो इस सूत्र को द्विपद प्रमेय कहते हैं। यदि n एक धनात्मक पूर्णांक और $x, y \in C$ हो, तब

$$(x+y)^n = {}^nC_0 x^{n-0} y^0 + {}^nC_1 x^{n-1} y^1 + {}^nC_2\, x^{n-2} y^2 + ... + {}^nC_r x^{n-r} y^r + ... + {}^nC_{n-1} x y^{n-1} + {}^nC_n x^0 y^n$$

अर्थात् $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r . x^{n-r} . y^r$ .....(i)

यहाँ ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, ... {}^nC_n$ द्विपद गुणांक कहलाते हैं और ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \le r \le n$.

कुछ महत्वपूर्ण विस्तार (Some important expansions)

(1) समीकरण (i) में y के स्थान पर $-y$ रखने पर,

$$(x-y)^n = {}^nC_0\, x^{n-0} . y^0 - {}^nC_1 x^{n-1} . y^1 + {}^nC_2 x^{n-2} . y^2 - .... + (-1)^r\, {}^nC_r x^{n-r} . y^r + ... + (-1)^n\, {}^nC_n x^0 . y^n$$

अर्थात् $(x-y)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, {}^nC_r x^{n-r} . y^r$ .....(ii)

$(x-y)^n$ के प्रसार में एकान्तर क्रम में धनात्मक और ऋणात्मक पद होते हैं, अन्तिम पद n के सम या विषम होने के अनुसार धनात्मक या ऋणात्मक होता है।

(2) समीकरण (i) में x के स्थान पर 1 और y के स्थान पर x रखने पर,

$$(1+x)^n = {}^nC_0 x^0 + {}^nC_1 x^1 + {}^nC_2 x^2 + ... + {}^nC_r x^r + ... + {}^nC_n x^n,$$

अर्थात् $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r$ यह प्रसार x के आरोही क्रम में है।

(3) समीकरण (i) में x के स्थान पर 1 और y के स्थान पर $-x$ रखने पर, $(1-x)^n = {}^nC_0 x^0 - {}^nC_1 x^1 + {}^nC_2 x^2 - ...... + (-1)^r\, {}^nC_r x^r + ... + (-1)^n\, {}^nC_n x^n$,

अर्थात् $(1-x)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, {}^nC_r x^r$

(4) $(x+y)^n + (x-y)^n = 2[{}^nC_0 x^n y^0 + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + {}^nC_4 x^{n-4} y^4 + ...]$

और $(x+y)^n - (x-y)^n$

$$= 2[{}^nC_1 x^{n-1} y^1 + {}^nC_3 x^{n-3} y^3 + {}^nC_5 x^{n-5} y^5 + ...]$$

(5) $(1+x)^n$ के प्रसार में $(r+1)$ वें पद का गुणांक ${}^nC_r$ है।

(6) $(1+x)^n$ के प्रसार में x^r का गुणांक ${}^nC_r$ है।

व्यापक पद (General term)

प्रसार का व्यापक पद $(r+1)$ वाँ पद होता है। जिसे सामान्यतया T_{r+1} से प्रदर्शित किया जाता है तथा $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r$

- $(x-y)^n$ के प्रसार में, व्यापक पद, $T_{r+1} = (-1)^r\, {}^nC_r x^{n-r} y^r$
- $(1+x)^n$ के प्रसार में, $T_{r+1} = {}^nC_r x^r$
- $(1-x)^n$ के प्रसार में, $T_{r+1} = (-1)^r\, {}^nC_r x^r$.
- $(x+y)^n$ के प्रसार में अन्त से pवाँ पद, प्रारंभ से $(n-p+2)$ वें पद के बराबर होता है।

स्वतंत्रा पद या अचर पद (Independent term or constant term)

द्विपद व्यंजक के प्रसार में जिस चर पद का घातांक शून्य होता है वह पद स्वतंत्र पद या अचर पद कहलाता है।

प्रतिबन्ध : $[x+y]^n$ के प्रसार में, $(n-r)$ [x की घात] + r . [y की घात] = 0

$(a+b+c)^n$ और $(a+b+c+d)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या (Number of terms in the expansion of $(a+b+c)^n$ and $(a+b+c+d)^n$)

$(a+b+c)^n$ का विस्तार निम्न प्रकार करते हैं :

$(a+b+c)^n = \{(a+b)+c\}^n$

$= (a+b)^n + {}^nC_1(a+b)^{n-1}(c)^1 + {}^nC_2(a+b)^{n-2}(c)^2 + ... + {}^nC_n c^n$

$= (n+1)$ पद $+ n$ पद $+ (n-1)$ पद $+ ...+$ एक पद

$\therefore$ पदों की कुल संख्या

$= (n+1)+(n)+(n-1)+ ...... + 1 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

इसी प्रकार, $(a+b+c+d)^n$ के विस्तार में कुल पदों की संख्या $= \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$.

मध्य पद (Middle term)

मध्य पद, n के मान पर निर्भर करता है

(1) **जब n सम पूर्णांक हो]** तब $(x+y)^n$ के प्रसार में कुल पदों की संख्या $n+1$ (विषम) है। इसलिए केवल एक मध्य पद, अर्थात् $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$ वाँ पद होगा; $T_{\left[\frac{n}{2}+1\right]} = {}^nC_{n/2}x^{n/2}y^{n/2}$

(2) **जब n विषम पूर्णांक हो,** तब $(x+y)^n$ के प्रसार में कुल पदों की संख्या $n+1$ (सम) होती है, अतः दो मध्य पद, $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ वें व $\left(\dfrac{n+3}{2}\right)$ वें होंगे।

$T_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = {}^nC_{\frac{n-1}{2}}x^{\frac{n+1}{2}}y^{\frac{n-1}{2}}$ तथा $T_{\left(\frac{n+3}{2}\right)} = {}^nC_{\frac{n+1}{2}}x^{\frac{n-1}{2}}y^{\frac{n+1}{2}}$.

- जब प्रसार में दो मध्य पद हों, तब उनके द्विपद गुणांक समान होते हैं।
- मध्य पद का द्विपद गुणांक महत्तम द्विपद गुणांक होता है।

द्विपद विस्तार में विशेष पद को ज्ञात करना (To determine a particular term in the expansion)

$\left(x^\alpha \pm \dfrac{1}{x^\beta}\right)^n$ के प्रसार में, यदि T_{r+1} में x^m आता है, तो

$n\alpha - r(\alpha+\beta) = m \Rightarrow r = \dfrac{n\alpha - m}{\alpha+\beta}$

यदि दिए हुए प्रसार में, T_{r+1} में x आता है, तो $n\alpha - r(\alpha+\beta) = 0$

$\Rightarrow r = \dfrac{n\alpha}{\alpha+\beta}$

महत्तम पद और महत्तम गुणांक (Greatest term and Greatest coefficient)

(1) **महत्तम पद** (Greatest term) : यदि $(1+x)^n$ के विस्तार में r वाँ और $(r+1)$ वाँ पद T_r और T_{r+1} हो, तो

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{{}^nC_r x^r}{{}^nC_{r-1}x^{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}x$$

माना आँकिक रूप से, उपर्युक्त प्रसार में T_{r+1} महत्तम पद है, तो $T_{r+1} \ge T_r$ या $\dfrac{T_{r+1}}{T_r} \ge 1$

$\therefore \dfrac{n-r+1}{r}|x| \ge 1$ या $r \le \dfrac{(n+1)}{(1+|x|)}|x|$ ......(i)

अब n और x के मान समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर $r \le m+f$ या $r \le m$

जहाँ m एक धनात्मक पूर्णांक और f एक भिन्न इस प्रकार है कि, $0 < f < 1$.

जब n सम हो, तब T_{m+1} महत्तम पद होता है, जब n विषम हो, तब T_m और T_{m+1} महत्तम पद होते हैं एवं दोनों के आंकिक मान समान होते हैं।

संक्षिप्त विधि : $(1+x)^n$ के प्रसार में महत्तम पद (संख्यात्मक रूप से) ज्ञात करना

(i) $m = \left|\dfrac{x(n+1)}{x+1}\right|$ की गणना करते हैं

(ii) यदि m पूर्णांक है, तो T_m और T_{m+1} बराबर हैं एवं दोनों महत्तम पद हैं।

(iii) यदि m पूर्णांक नहीं है, तो $T_{[m]+1}$ महत्तम पद होता है, जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक भाग है।

(2) **महत्तम गुणांक** (Greatest coefficient)

(i) यदि n सम है, तो महत्तम गुणांक ${}^nC_{n/2}$ होगा।

(ii) यदि n विषम है, तो महत्तम गुणांक ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}$ और ${}^nC_{\frac{n+3}{2}}$ होंगे।

द्विपद गुणांकों के गुणधर्म (Properties of binomial coefficients)

$(1+x)^n$ के द्विपद विस्तार में,

$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + ... + {}^nC_rx^r + ... + {}^nC_nx^n$.

जहाँ ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, ..., {}^nC_n$, x की विभिन्न घातों के गुणांक हैं, जोकि द्विपद गुणांक कहलाते हैं।

इनको $C_0, C_1, C_2, ...C_n$ से निरूपित करते हैं।

अतः, $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_rx^r + ... + C_nx^n$ .....(i)

(1) $(1+x)^n$ के विस्तार में द्विपद गुणांकों का योग 2^n होता है।

समीकरण (i) में $x=1$ रखने पर,

$2^n = C_0 + C_1 + C_2 + ... + C_n$ .....(ii)

(2) एकान्तर क्रम में लिए गये चिन्हों के द्विपद गुणांकों का योग : समीकरण (i) में, $x = -1$ रखने पर,

$0 = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + ...$ .....(iii)

(3) $(1+x)^n$ के विस्तार में विषम पदों के गुणांकों का योग, सम पदों के गुणांकों के योग के बराबर होता है तथा प्रत्येक 2^{n-1} के बराबर होता है।

समीकरण (iii) से,

$C_0 + C_2 + C_4 + ... = C_1 + C_3 + C_5 + ...$ ......(iv)

अर्थात् सम पदों का योग, विषम पदों के योग के बराबर होता है।

समीकरण (iii) व (iv) से,

$C_0 + C_2 + C_4 + ... = C_1 + C_3 + C_5 + ... = 2^{n-1}$ ......(v)

(4) ${}^nC_r = \dfrac{n}{r}\,{}^{n-1}C_{r-1} = \dfrac{n}{r}.\dfrac{n-1}{r-1}\,{}^{n-2}C_{r-2}$

(5) **गुणांकों के गुणनफलों का योगफल :** समीकरण (i) में x के स्थान पर $\dfrac{1}{x}$ रखने पर, $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^n = C_0 + \dfrac{C_1}{x} + \dfrac{C_2}{x^2} + ... \dfrac{C_n}{x^n}$.... ....(vi)

समीकरणों (i) व (vi) का गुणा करने पर,

$\dfrac{(1+x)^{2n}}{x^n} = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + ...)\left(C_0 + \dfrac{C_1}{x} + \dfrac{C_2}{x^2} + ...\right)$

अब दोनों पक्षों में x^r के गुणांकों की तुलना करने पर,

$$^{2n}C_{n+r} = C_0C_r + C_1C_{r+1} + ... + C_{n-r}C_n \quad .....(vii)$$

(6) **गुणांकों के वर्गों का योगफल :** समीकरण (vii) में $r=0$ रखने पर, $^{2n}C_n = C_0^2 + C_1^2 + ... + C_n^2$

(7) $^nC_r + ^nC_{r-1} = ^{n+1}C_r$

(8) $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + ... + n.C_n = n.2^{n-1}$

(9) $C_1 - 2C_2 + 3C_3 - .... = 0$

(10) $C_0 + 2C_1 + 3C_2 + ... + (n+1)C_n = (n+2)2^{n-1}$

(11) $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + ... + C_n^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

(12) $C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 + ... = \begin{cases} 0, \text{ यदि } n \text{ विषम है} \\ (-1)^{n/2}.^nC_{n/2}, \text{ यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$

द्विपद प्रमेय में अवकलन व समाकलन का उपयोग
(Use of differentiation and integration in binomial theorem)

(1) **अवकलन का उपयोग** (Use of Differentiation) **:** इस विधि का उपयोग तभी करते हैं, जब द्विपद गुणांक, अंक गुणन में हों।

हल विधि (Solution process) **:** (i) यदि श्रेणी का अन्तिम पद m हो (धनात्मक या ऋणात्मक चिन्ह को छोड़कर), तब m को n से भाग देने पर, यदि भागफल q तथा शेषफल r हो, अर्थात् $m = nq + r$, तब दी हुई श्रेणी में x के स्थान पर x^q रखते हैं एवं दोनों पक्षों में x^r से गुणा करते हैं ।

(ii) Step (i) के बाद, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर एवं $x = 1$ या -1 या i या $-i$ इत्यादि, दी हुई श्रेणी के अनुसार रखते हैं।

(iii) यदि द्विपद गुणांकों के गुणन में अंकों का वर्ग या अंकों का घन हो, तो अवकलन दो बार या तीन बार करते हैं।

(2) **समाकलन का उपयोग** (Use of Integration) **:** इस विधि का उपयोग तभी करते हैं, जब द्विपद गुणांकों के हर अंकों में हों।

हल विधि (Solution process)

यदि $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_nx^n$ हो, तब हम उपयुक्त सीमा में, दोनों पक्षों का समाकलन करते हैं, जिससे अभीष्ट श्रेणी प्राप्त होती है।

(i) यदि गुणांकों के योग में, $C_0, C_1, C_2, ... C_n$ (सभी धनात्मक चिन्हों में) हों, तब समाकलन की सीमा 0 से 1 होती है।

(ii) यदि गुणांकों के योग में, एकान्तर क्रम में चिन्ह (धनात्मक व ऋणात्मक) हों, तब समाकलन की सीमा –1 से 0 होती है।

(iii) यदि योगफल में, विषम गुणांक (अर्थात् $C, C, C.....$) हों, तब समाकलन की सीमा –1 से 1 होती है।

(iv) यदि योगफल में सम गुणांक (अर्थात् $C_1, C_3, C_5.....$) हों, तब (i) से (ii) घटाकर 2 से भाग देते हैं।

(v) यदि द्विपद गुणांकों के हर में दो अंकों का गुणन है, तब दो बार समाकलन करते हैं। सर्वप्रथम सीमा 0 से x लेते हैं और पुनः उचित सीमा लेते हैं।

महत्वपूर्ण प्रमेय (An important theorem)

यदि $(\sqrt{A}+B)^n = I + f$, जहाँ I और n धनात्मक पूर्णांक हैं, n विषम है और $0 \le f < 1$, तब $(I+f).f = K^n$, जहाँ $A - B^2 = K > 0$ और $\sqrt{A} - B < 1$.

- यदि n सम पूर्णांक है, तब $(\sqrt{A}+B)^n + (\sqrt{A}-B)^n = I + f + f'$

अतः बायां पक्ष (L.H.S.) और I पूर्णांक हैं।

$\therefore \; f + f'$ भी पूर्णांक है $\Rightarrow f + f' = 1$; $\therefore \; f' = (1-f)$

अतः $(I+f)(1-f) = (I+f)f' = (\sqrt{A}+B)^n(\sqrt{A}-B)^n$

$$= (A - B^2)^n = K^n.$$

बहुपद प्रमेय (धनात्मक पूर्णांक घातांक के लिए)
(Multinomial theorem for (+*ve*) integral index)

यदि n धनात्मक पूर्णांक है एवं $a_1, a_2, a_3, ...a_n \in C$, तब $(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_m)^n = \sum \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!...n_m!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_m^{n_m}$

जहाँ $n_1, n_2, n_3, ... n_m$ सभी अऋणात्मक पूर्णांक इस प्रकार हैं कि, $n_1 + n_2 + n_3 + ... n_m = n$.

(1) $(a_1 + a_2 + a_3 + ... a_m)^n$ के प्रसार में, $a_1^{n_1}.a_2^{n_2}.....a_m^{n_m}$ का गुणांक $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!....n_m!}$ है।

(2) $(a_1 + a_2 + a_3 + ... a_m)^n$ के प्रसार में महत्तम गुणांक $\frac{n!}{(q!)^{m-r}[(q+1)!]^r}$ है।

जहाँ q भागफल एवं r शेषफल है, जब n को m से भाग देते हैं।

(3) यदि n धनात्मक पूर्णांक है एवं $a_1, a_2, ... a_m \in C$, तब $(a_1 + a_2x + ... a_mx^{m-1})^n$ के प्रसार में x^r का गुणांक $\sum \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!.....n_m!} \left(a_1^{n_1}.a_2^{n_2} .... a_m^{n_m}\right)$ है।

जहाँ $n_1, n_2 ..... n_m$ सभी अऋणात्मक पूर्णांक इस प्रकार हैं कि, $n_1 + n_2 + ... n_m = n$ और $n_2 + 2n_3 + 3n_4 + ... + (m-1)n_m = r$

(4) $(a_1 + a_2 + a_3 + ... a_m)^n$ के प्रसार में विभिन्न पदों की संख्या $^{n+m-1}C_{m-1}$ होती है।

किसी भी घातांक के लिए द्विपद प्रमे;
(Binomial theorem for any index)

कथन : $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + ...$

$$+ \frac{n(n-1)......(n-r+1)}{r!}x^r + ... \infty$$

जब द्विपद की घात n कोई ऋणात्मक पूर्णांक या भिन्न हो, जहाँ $-1 < x < 1$, अन्यथा विस्तार असम्भव होगा।

यदि $x < 1$ हो, तो उपरोक्त प्रसार में पद घटते हुए क्रम में होते हैं एवं 1 की तुलना में x बहुत छोटा है, तब हम देखते हैं कि प्राप्त होने वाले पद छोटे होते जाते हैं और एक स्थिति आती है, जब उच्च घात के पद नगण्य हो जाते हैं, तब $(1+x)^n = 1 + nx$.

यदि प्रथम पद 1 नहीं है, तब निम्न प्रकार से प्रथम पद को इकाई बनाते हैं, $(x+y)^n = x^n\left[1 + \frac{y}{x}\right]^n$, यदि $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$ ण

व्यापक पद (General term)

$$T_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)......(n-r+1)}{r!}x^r$$

कुछ महत्वपूर्ण प्रसार (Some important expansions)

(i) $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 +$

$$....... + \frac{n(n-1)(n-2)......(n-r+1)}{r!}x^r + ...$$

(ii) $(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - ....$

$+ \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!}(-x)^r + ...$

(iii) $(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 +$

$..... + \frac{n(n+1)......(n+r-1)}{r!}x^r + ...$

(iv) $(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 +$

$..... + \frac{n(n+1)......(n+r-1)}{r!}(-x)^r + ...$

(v) $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... \infty$

(vi) $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... \infty$

(vii) $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ... \infty$

(viii) $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... \infty$

(ix) $(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - ....\infty$

(x) $(1-x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + ...\infty$

तीन/चार क्रमागत पद एवं गुणांक
(Three/Four consecutive terms or coefficients)

(1) **यदि क्रमागत गुणांक दिए हों :** इस स्थिति में क्रमागत गुणांकों को युग्म के रूप में भाग देते हैं, तब प्राप्त समीकरण को हल करते हैं।

(2) **;fn Øekxr in fn, gksa%** इस स्थिति में क्रमागत पदों को युग्म के रूप में भाग देते हैं, अर्थात् यदि चार क्रमागत पद $T_r, T_{r+1}, T_{r+2}, T_{r+3}$ हों, तब $\frac{T_r}{T_{r+1}}, \frac{T_{r+1}}{T_{r+2}}, \frac{T_{r+2}}{T_{r+3}} \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (मान लें), तब λ_1 को λ_2 और λ_2 को λ_3 से भाग देकर हल करते हैं।

कुछ महत्वपूर्ण बिन्दु (Some important points)

(1) **पास्कल त्रिभुज** (Pascal's triangle) :

1	$(x+y)^0$
1 1	$(x+y)^1$
1 2 1	$(x+y)^2$
1 3 3 1	$(x+y)^3$
1 4 6 4 1	$(x+y)^4$
1 5 10 10 5 1	$(x+y)^5$

पास्कल त्रिभुज प्रत्यक्ष रूप से द्विपद गुणांक देते हैं।

***उदाहरणार्थ*:** $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$.

(2) **$(a^{1/p} + b^{1/q})^N \forall a, b \in$ अभाज्य संख्यायें, के प्रसार में करणीगत चिन्हों से स्वतंत्र पदों या परिमेय पदों को ज्ञात करने की विधि** : व्यापक पद, $T_{r+1} = {}^N C_r (a^{1/p})^{N-r} (b^{1/q})^r = {}^N C_r \, a^{\frac{N-r}{p}} . b^{\frac{r}{q}}$

$0 \le r \le N$ के मान रखने पर, जबकि a और b के घातांक पूर्णांक हैं।

• अपरिमेय पदों की संख्या = कुल पदों की संख्या – परिमेय पदों की संख्या।

गणितीय आगमन

गणितीय आगमन का प्रथम सिद्धांत
(First principle of mathematical induction)

निम्न तीन स्थितियों के द्वारा गणितीय आगमन का सत्यापन किया जाता है :

Step I : (सत्यापन) : सर्वप्रथम प्रारम्भिक मान "i" के लिए सत्यापन करते हैं।

Step II : (आगमन) : मान लें "k" के लिए कथन सत्य है, $k \ge i$ और $k+1$ (जो अगला पूर्णांक है), के लिए सिद्ध करते हैं कि कथन सत्य है।

Step III : (व्यापक रूप में) : उपरोक्त दोनों स्थितियों को मिलाने पर, कथन $p(n)$, n के सभी धनात्मक पूर्णांक मानों के लिए सत्य होगा, यदि और केवल यदि

(i) यह $n = 1$ के लिए सत्य हो, अर्थात् $p(1)$ सत्य हो और

(ii) यदि $p(n)$, $n = m$ के लिए सत्य हो, तो यह $n = m + 1$ के लिए भी सत्य होगा अर्थात् $p(m)$ सत्य है $\Rightarrow p(m+1)$ सत्य है।

गणितीय आगमन का द्वितीय सिद्धांत
(Second principle of mathematical induction)

निम्न स्थितियों के द्वारा गणितीय आगमन का सत्यापन किया जाता है

Step I : (सत्यापन) : सर्वप्रथम प्रारम्भिक मान i और $(i+1)$ के लिए सत्यापन करते हैं।

Step II : (आगमन) : मान लें $k-1$ और k के लिए कथन सत्य है, $k \ge i+1$ और तब सिद्ध करते हैं कि कथन $k+1$ के लिए भी सत्य है।

Step III : (व्यापक रूप में) : उपरोक्त दोनों स्थितियों को मिलाने पर कथन $p(n)$, n के सभी धनात्मक पूर्णांक मानों के लिए सत्य होगा, यदि और केवल यदि,

(i) $p(1)$ सत्य हो, अर्थात् $p(n)$, $n = 1$ के लिए सत्य हो, और

(ii) $p(n)$ के, $n = 1$ से $n = m$ तक सभी धन पूर्णांकों, अर्थात् $1 \le n \le m$ के लिए सत्य होने पर, $p(m+1)$ भी सत्य हो। तब $p(n)$ सभी प्राकृत संख्याओं के लिए सत्य है।

$a \ne b$ के लिए, व्यंजक $a^n - b^n$ निम्न के द्वारा विभाजित है

(a) $a+b$, यदि n सम है। (b) $a-b$, यदि n सम या विषम है।

विभाजिता समस्यायें (Divisibility problems)

कोई व्यंजक एक पूर्णांक से विभाजित है, इसे सिद्ध करने के लिए

(i) सर्वप्रथम, $a^{pn+r} = a^{pn}.a^r = (a^p)^n.a^r$, रूप में लिखते हैं, जहाँ a, p, n, r धनात्मक पूर्णांक हैं।

(ii) यदि हमें सिद्ध करना है कि दिया गया व्यंजक c से विभाज्य है, तो a^p को निम्नांकित रूप में व्यक्त करते हैं।

$a^p = [1 + (a^p - 1]$, यदि $(a^p - 1)$ की कुछ घात c की गुणज हो।

$a^p = [2 + (a^p - 2)]$, यदि $(a^p - 2)$ की कुछ घात c की गुणज हो।

$a^p = [K + (a^p - K)]$, यदि $(a^p - K)$ की कुछ घात c की गुणज हो।

Tips & Tricks

- $(x+y)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $(n+1)$ होती हैं।

- $(x+y)^n$ के प्रसार में प्रत्येक उत्तरोत्तर पद में x की घात क्रम से घटती जाती है तथा y की घात क्रम से बढ़ती जाती है, परन्तु प्रत्येक पद में x व y की घातों का योग सदैव द्विपद की घात n के बराबर रहता है।

- प्रारंभ तथा अन्त से एक समान दूरी के पदों के द्विपद गुणांक समान होते हैं, अर्थात् ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$.

- $(x+y)^n =$ विषम पदों का योग + सम पदों का योग

- $(x+y)^n$ के प्रसार में, $n \in N$; $\frac{T_{r+1}}{T_r} = \left(\frac{n-r+1}{r}\right)\frac{y}{x}$

- यदि $(1-x)^n$ के प्रसार में p वें, qवें पद के गुणांक बराबर हो, तो $p+q=n+2$.

- $(x-1)(x-2).......(x-n)$ के प्रसार में x^{n-1} का गुणांक $= -\frac{n(n+1)}{2}$

- $(x+1)(x+2).....(x+n)$ के प्रसार में x^{n-1} का गुणांक $= \frac{n(n+1)}{2}$

- $(x+y)^n$ के विस्तार में, महत्तम पद ज्ञात करने के लिए हम दिए हुए द्विपद व्यंजक को $(x+y)^n = x^n\left[1+\frac{y}{x}\right]^n$ के रूप में लिखते हैं।

- $(x+y)^n$ के प्रसार में महत्तम पद $= x^n.\left(1+\frac{y}{x}\right)^n$ के प्रसार में महत्तम पद।

- यदि n विषम है, तो $(x+y)^n+(x-y)^n$ और $(x+y)^n-(x-y)^n$ दोनों के प्रसार में, पदों की संख्या $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ होती है।

- यदि n सम है, तो $(x+y)^n+(x-y)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ तथा $(x+y)^n-(x-y)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $\frac{n}{2}$ होती है।

- यदि n एक ऋण पूर्णांक या भिन्न है, तो $(1+x)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या अनन्त होती है।

- $(x_1+x_2+.........+x_2)^n = {}^{n+r-1}C_{r-1}$ के प्रसार में पदों की संख्या ${}^{n+r-1}C_{r-1}$ होती है।

- यदि $(1+x)^n$ के प्रसार में rवें, $(r+1)$वें, व $(r+2)$वें पदों के गुणांक हरात्मक श्रेणी में हैं, तो $n+(n-2r)^2=0$.

- यदि $(1+x)^n$ के प्रसार में rवें, $(r+1)$वें व $(r+2)$वें पदों के गुणांक समान्तर श्रेणी में हो, तो $n^2-n(4r+1)+4r^2-2=0$.

Ordinary Thinking

Objective Questions

द्विपद प्रमेय का प्रसार

1. $(\sqrt{2}+1)^6-(\sqrt{2}-1)^6 =$ [MP PET 1984]
   (a) 101 (b) $70\sqrt{2}$
   (c) $140\sqrt{2}$ (d) $120\sqrt{2}$

2. $x^5+10x^4a+40x^3a^2+80x^2a^3+80xa^4+32a^5 =$
   (a) $(x+a)^5$
   (b) $(3x+a)^5$
   (c) $(x+2a)^5$
   (d) $(x+2a)^3$

3. सूत्र $(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + ...$ अनन्त तक सत्य होगा, यदि
   (a) $b<a$ (b) $a<b$
   (c) $|a|<|b|$ (d) $|b|<|a|$

4. $(x+a)^{100}+(x-a)^{100}$ को विस्तार कर सरल करने के बाद पदों की कुल संख्या होगी [Pb. CET 1990]
   (a) 202 (b) 51
   (c) 50 (d) इनमें से कोई नहीं

5. $\frac{1}{\sqrt{5+4x}}$ का द्विपद प्रमेय से विस्तार किया जा सकता है, यदि
   (a) $x<1$ (b) $|x|<1$
   (c) $|x|<\frac{5}{4}$ (d) $|x|<\frac{4}{5}$

6. $(\sqrt{5}+1)^5-(\sqrt{5}-1)^5$ का मान है [MP PET 1985]
   (a) 252 (b) 352
   (c) 452 (d) 532

7. व्यंजक $1+(1+x)+(1+x)^2+.....+(1+x)^n$ के विस्तार में x^k का गुणांक $(0 \le k \le n)$ है [RPET 2000]
   (a) ${}^{n+1}C_{k+1}$ (b) ${}^nC_k$
   (c) ${}^nC_{n-k-1}$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. $99^{50}, 100^{50}$ व 101^{50} में से कौन सा बड़ा है [IIT 1980]
   (a) $99^{50}+100^{50}$ (b) दोनों बराबर हैं
   (c) 101^{50} (d) इनमें कोई नहीं

9. $(1+x)^n-nx-1$ विभाज्य है (जहाँ $n \in N$)
   (a) $2x$ के द्वारा
   (b) x^2 के द्वारा
   (c) $2x^3$ के द्वारा
   (d) उपरोक्त सभी के द्वारा

10. यदि $(x+a)^n$ के विस्तार में, $T_0, T_1, T_2, ...$ पद प्राप्त होते हैं, तो $(T_0 - T_2 + T_4 - ....)^2 + (T_1 - T_3 + T_5 - ....)^2$ बराबर होगा

(a) $(x^2 + a^2)$ (b) $(x^2 + a^2)^n$

(c) $(x^2 + a^2)^{1/n}$ (d) $(x^2 + a^2)^{-1/n}$

11. $(1+3\sqrt{2}x)^9 + (1-3\sqrt{2}x)^9$ के प्रसार में अशून्य पदों की संख्या है [EAMCET 1991]

(a) 9 (b) 0

(c) 5 (d) 10

12. वह बड़े से बड़ा पूर्णांक जो संख्या $101^{100} - 1$ को विभाजित करता है, है [MP PET 1998]

(a) 100 (b) 1000

(c) 10000 (d) 100000

13. $(1.0002)^{3000}$ का लगभग मान होगा [EAMCET 2002]

(a) 1.6 (b) 1.4

(c) 1.8 (d) 1.2

14. वह धनात्मक पूर्णांक, जो $(1 + 0.0001)^{10000}$ से लगभग बड़ा है, होगा [AIEEE 2002]

(a) 4 (b) 5

(c) 2 (d) 3

15. 7^{300} का अन्तिम अंक है [Karnataka CET 2004]

(a) 7 (b) 9

(c) 1 (d) 3

व्यापक पद, *x* की घात का गुणांक, स्वतंत्रा पद, मध्य पद व महत्तम पद और महत्तम गुणांक

1. $\left(2x^2 - \frac{1}{3x^2}\right)^{10}$ के प्रसार में 6 वां पद होगा

(a) $\frac{4580}{17}$ (b) $-\frac{896}{27}$

(c) $\frac{5580}{17}$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. यदि $\left(x - \frac{1}{2x}\right)^n$ के विस्तार में तीसरे तथा चौथे पदों के गुणांकों का अनुपात 1 : 2 हो, तो n का मान होगा

(a) 18 (b) 16

(c) 12 (d) – 10

3. यदि $(1+x)^{20}$ के प्रसार में r वें एवं $(r+4)$ वें पदों के गुणांक बराबर हैं, तो r का मान होगा [RPET 1985, 97; Kerala (Engg.) 2001; MP PET 2002]

(a) 7 (b) 8

(c) 9 (d) 10

4. $(a+2x)^n$ के विस्तार में r वाँ पद होगा

(a) $\frac{n(n+1)....(n-r+1)}{r!} a^{n-r+1} (2x)^r$

(b) $\frac{n(n-1)....(n-r+2)}{(r-1)!} a^{n-r+1} (2x)^{r-1}$

(c) $\frac{n(n+1)....(n-r)}{(r+1)!} a^{n-r} (x)^r$

(d) इनमें से कोई नहीं

5. $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^{17}$ के विस्तार में 16वाँ पद होगा

(a) $136\, xy^7$ (b) $136\, xy$

(c) $-136\, xy^{15/2}$ (d) $-136\, xy^2$

6. यदि द्विपद $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ है और यदि प्रारम्भ से सातवें पद और अन्त से सातवें पद का अनुपात $\frac{1}{6}$ हो, तो $n =$

(a) 7 (b) 8

(c) 9 (d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि $(1+x)^{15}$ के प्रसार में $(2r+3)$ वें तथा $(r-1)$ वें पदों के गुणांक बराबर हैं, तो r का मान है [RPET 1995, 2003; UPSEAT 2001]

(a) 5 (b) 6

(c) 4 (d) 3

8. यदि $\left(x^4 + \frac{1}{x^3}\right)^{15}$ के विस्तार में rवें पद में x^4 आता है, तो $r =$ [MP PET 1995; Pb. CET 2002]

(a) 7 (b) 8

(c) 9 (d) 10

9. यदि $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$ के प्रसार में $(r+1)$ वें पद में a तथा b की समान घातें हैं, तब r का मान है

(a) 9 (b) 10

(c) 8 (d) 6

10. यदि $(1+x)^m$ के द्विपद प्रसार में तृतीय पद $-\frac{1}{8}x^2$ है, तब m का परिमेय मान है

(a) 2 (b) $1/2$

(c) 3 (d) 4

11. यदि $(1+ax)^n$, $(n \neq 0)$ के विस्तार में प्रथम तीन पद क्रमशः 1, $6x$ व $16x$ हैं, तो a व n के मान क्रमशः होंगे [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 2 और 9 (b) 3 और 2

(c) 2/3 और 9 (d) 3/2 और 6

12. यदि $(1+x)^{14}$ के विस्तार में T_r, T_{r+1}, T_{r+2} के गुणांक समांतर श्रेणी में हों, तो $r =$ [Pb. CET 2002]

(a) 6 (b) 7

(c) 8 (d) 9

13. $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$ के प्रसार में x का गुणांक है [Orissa JEE 2004]

(a) $9a^2$ (b) $10a^3$

(c) $10a^2$ (d) $10a$

14. यदि $(1+x)^n$ के विस्तार में p वें, $(p+1)$ वें तथा $(p+2)$ वें पदों के गुणांक समांतर श्रेणी में हों, तो [AIEEE 2005]

(a) $n^2 - 2np + 4p^2 = 0$

(b) $n^2 - n(4p+1) + 4p^2 - 2 = 0$

(c) $n^2 - n(4p+1) + 4p^2 = 0$

(d) इनमें से कोई नहीं

15. $\left(\frac{a}{x} + bx\right)^{12}$ के विस्तार में x^{10} का गुणांक होगा

(a) $12a^{11}$ (b) $12b^{11}a$

(c) $12a^{11}b$ (d) $12a^{11}b^{11}$

16. $(x+a)^n$ के द्विपद विस्तार में पदों $x^{n-r}a^r$ तथा $x^r a^{n-r}$ के गुणांको का अनुपात होगा
(a) $x : a$
(b) $n : r$
(c) $x : n$
(d) इनमें से कोई नहीं

17. यदि A और B, $(1+x)^{2n}$ तथा $(1+x)^{2n-1}$ के विस्तारों में x^n के गुणांक हैं, तब [MP PET 1999; Pb. CET 2004]
(a) $A = B$ (b) $A = 2B$
(c) $2A = B$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. $\left(y^2 + \frac{c}{y}\right)^5$ के विस्तार में y का गुणांक होगा [MNR 1983]
(a) $20c$ (b) $10c$
(c) $10c^3$ (d) $20c^2$

19. यदि p तथा q धनात्मक पूर्णांक हों, तो $(1+x)^{p+q}$ के विस्तार में x^p तथा x^q के गुणांक होंगे [MNR 1983; AIEEE 2002]
(a) बराबर
(b) परिमाण में बराबर तथा चिन्ह में विपरीत
(c) एक दूसरे के व्युत्क्रम
(d) इनमें से कोई नहीं

20. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$ के विस्तार में x से स्वतंत्र पद है [AMU 1982; MP PET 1984; MNR 1979]
(a) – 20 (b) 20
(c) 30 (d) – 30

21. $(x^2 - 2x)^{10}$ के विस्तार में x^{16} का गुणांक है [MP PET 1985]
(a) –1680 (b) 1680
(c) 3360 (d) 6720

22. $\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x^2}\right)^{10}$ के विस्तार में x^4 का गुणांक है [IIT 1983; EAMCET 1985; DCE 2000; RPET 2001; UPSEAT 2002; J & K 2005]
(a) $\frac{405}{256}$ (b) $\frac{504}{259}$
(c) $\frac{450}{263}$ (d) इनमें से कोई नहीं

23. यदि $(1+x)^n$ के विस्तार में पाँचवें, छठवें तथा सांतवें पदों के गुणांक समान्तर श्रेणी में हों, तो $n =$ [Roorkee 1984; Pb. CET 1999]
(a) केवल 7 (b) केवल 14
(c) 7 या 14 (d) इनमें से कोई नहीं

24. $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x}\right)^8$ के प्रसार में x^7 का गुणांक होगा [MNR 1975]
(a) – 56 (b) 56
(c) – 14 (d) 14

25. $\left(ax - \frac{1}{bx^2}\right)^{11}$ के प्रसार में x^{-7} का गुणांक होगा [IIT 1967; RPET 1996; Pb. CET 2003]
(a) $\frac{462\,a^6}{b^5}$ (b) $\frac{462\,a^5}{b^6}$
(c) $\frac{-462\,a^5}{b^6}$ (d) $\frac{-462\,a^6}{b^5}$

26. $\sum_{m=0}^{100} {}^{100}C_m (x-3)^{100-m}.2^m$ के विस्तार में x^{53} का गुणांक है
(a) ${}^{100}C_{47}$ (b) ${}^{100}C_{53}$
(c) $-{}^{100}C_{53}$ (d) $-{}^{100}C_{100}$

27. $\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$ के प्रसार में x^{32} का गुणांक होगा [MP PET 1994]
(a) ${}^{15}C_5$ (b) ${}^{15}C_6$
(c) ${}^{15}C_4$ (d) ${}^{15}C_7$

28. यदि $\left(2 + \frac{x}{3}\right)^n$ में x^7 तथा x^8 के गुणांक बराबर हैं, तब n है [EAMCET 1983; Kurukshetra CEE 1998; DCE 2000; RPET 2001; UPSEAT 2001]
(a) 56 (b) 55
(c) 45 (d) 15

29. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^7$ के विस्तार में x^3 का गुणांक है [MP PET 1997; Pb. CET 2001]
(a) 14 (b) 21
(c) 28 (d) 35

30. यदि $(1+x)^m(1-x)^n$ के प्रसार (expansion) में x और x^2 के गुणांक (coefficient) क्रमशः 3 और – 6 हैं, तो $m =$ [IIT 1999; MP PET 2000]
(a) 6 (b) 9
(c) 12 (d) 24

31. $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{2n}$ के विस्तार में x^m का गुणांक होगा [UPSEAT 1999]
(a) $\frac{(2n)!}{(m)!(2n-m)!}$ (b) $\frac{(2n)!3!3!}{(2n-m)!}$
(c) $\frac{(2n)!}{\left(\frac{2n-m}{3}\right)!\left(\frac{4n+m}{3}\right)!}$ (d) इनमें से कोई नहीं

32. $(1+x)^n$ के द्विपद विस्तार में द्वितीय, तृतीय तथा चतुर्थ पदों के गुणांक समान्तर श्रेणी में हैं, तब $n^2 - 9n$ का मान होगा [RPET 1999; UPSEAT 2002]
(a) – 7 (b) 7
(c) 14 (d) – 14

33. $(1+x+x^3+x^4)^{10}$ के विस्तार में x^4 का गुणांक होगा [MP PET 2000]
(a) ${}^{40}C_4$ (b) ${}^{10}C_4$
(c) 210 (d) 310

34. $(1+x)^{43}$ के विस्तार में $(2r+1)$वें पद और $(r+2)$वें पद के गुणांक बराबर हैं, तब r का मान होगा [UPSEAT 1999]
(a) 14 (b) 15
(c) 13 (d) 16

35. $(a+b)^n$ के विस्तार में चतुर्थ पद 56 हो, तो n का मान होगा [AMU 2000]

(a) 12 (b) 10
(c) 8 (d) 6

36. $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{15}$ के विस्तार में x^{39} का गुणांक होगा [MP PET 2001]

(a) – 455 (b) – 105
(c) 105 (d) 455

37. $(1+x)^{21}+(1+x)^{22}+.........+(1+x)^{30}$ के विस्तार में x^5 का गुणांक होगा [UPSEAT 2001]

(a) ${}^{51}C_5$ (b) ${}^{9}C_5$
(c) ${}^{31}C_6-{}^{21}C_6$ (d) ${}^{30}C_5+{}^{20}C_5$

38. यदि $(1+x)^{2n}$ के विस्तार में दूसरा, तीसरा तथा चौथा पद समान्तर श्रेणी में हैं, तो $2n^2-9n+7$ का मान होगा [AMU 2001; MP PET 2004]

(a) – 1 (b) 0
(c) 1 (d) 3/2

39. $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x}\right)^9$ के विस्तार में x^{-9} का गुणांक होगा [Kerala (Engg.) 2001]

(a) 512 (b) – 512
(c) 521 (d) 251

40. यदि $(3+ax)^9$ के विस्तार में x^2 व x^3 के गुणांक बराबर हों, तो a का मान होगा [DCE 2001]

(a) $-\frac{7}{9}$ (b) $-\frac{9}{7}$
(c) $\frac{7}{9}$ (d) $\frac{9}{7}$

41. $(x+a)^n$ के विस्तार में दूसरा, तीसरा तथा चौथा पद क्रमशः 240, 720 और 1080 हैं, तो n का मान होगा [Kurukshetra CEE 1991; DCE 1995, 2001]

(a) 15 (b) 20
(c) 10 (d) 5

42. $(1+x)^n$ के विस्तार में pवें तथा $(p+1)$वें पदों के गुणांक क्रमशः p व q हों, तो $p+q=$ [EAMCET 2002]

(a) $n+3$ (b) $n+1$
(c) $n+2$ (d) n

43. $\left(x-\frac{1}{2x}\right)^8$ के विस्तार में x^2 का गुणांक होगा [UPSEAT 2002]

(a) $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{-1}{7}$
(c) – 7 (d) 7

44. $(x+3)^6$ के विस्तार में x^5 का गुणांक होगा [DCE 2002]

(a) 18 (b) 6
(c) 12 (d) 10

45. $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{15}$ के विस्तार में x^{32} का गुणांक होगा [Karnataka CET 2003; Pb. CET 2000]

(a) ${}^{15}C_4$ (b) ${}^{15}C_3$
(c) ${}^{15}C_2$ (d) ${}^{15}C_5$

46. यदि $(1+x)^{21}$ के प्रसार में x^r तथा x^{r+1} के गुणांक बराबर हैं, तो r का मान है [UPSEAT 2004]

(a) 9 (b) 10
(c) 11 (d) 12

47. $\left(\sqrt{\frac{x}{3}}+\frac{3}{2x^2}\right)^{10}$ के विस्तार में x से स्वतंत्र पद होगा [IIT 1965; BIT Ranchi 1993; KCET 2000; UPSEAT 2001]

(a) 3/2 (b) 5/4
(c) 5/2 (d) इनमें से कोई नहीं

48. $\left(\frac{1}{2}x^{1/3}+x^{-1/5}\right)^8$ के विस्तार में x से स्वतंत्र पद होगा [Roorkee 1985]

(a) 5 (b) 6
(c) 7 (d) 8

49. $\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{3x}\right)^9$ के विस्तार में x से स्वतंत्र पद है [MNR 1981; AMU 1983; JMI EEE 2001]

(a) ${}^{9}C_3.\frac{1}{6^3}$ (b) ${}^{9}C_3\left(\frac{3}{2}\right)^3$
(c) ${}^{9}C_3$ (d) इनमें से कोई नहीं

50. $\left(2x-\frac{1}{2x^2}\right)^{12}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद है [RPET 1985]

(a) – 7930 (b) – 495
(c) 495 (d) 7920

51. $\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^{15}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद है [MP PET 1993; Pb. CET 2002]

(a) ${}^{15}C_6 2^6$ (b) ${}^{15}C_5 2^5$
(c) ${}^{15}C_4 2^4$ (d) ${}^{15}C_8 2^8$

52. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^9$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद होगा [EAMCET 1982; MP PET 2003]

(a) 1 (b) –1
(c) – 48 (d) इनमें से कोई नहीं

53. $\left(2x+\frac{1}{3x}\right)^6$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद है [MNR 1995]

(a) $\frac{160}{9}$ (b) $\frac{80}{9}$
(c) $\frac{160}{27}$ (d) $\frac{80}{3}$

54. $\left(x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$ के प्रसार में x रहित पद होगा [Roorkee 1981; RPET 1990, 95; Pb. CET 2000]

(a) $\frac{28}{81}$ (b) $\frac{28}{243}$
(c) $-\frac{28}{243}$ (d) $-\frac{28}{81}$

55. $\left(2x-\frac{3}{x}\right)^6$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद होगा [Pb. CET 1999]

(a) 4320 (b) 216

(c) – 216 (d) – 4320

56. $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{12}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद होगा [MP PET 2001]

(a) 10वाँ (b) 9वाँ

(c) 8वाँ (d) 7वाँ

57. $\left(x-\frac{3}{x^2}\right)^9$ के विस्तार में x से स्वतंत्र पद होगा

[Karnataka CET 2001]

(a) अस्तित्वहीन (b) ${}^9C_2$

(c) 2268 (d) – 2268

58. यदि $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ के विस्तार में मध्य पद $924x^6$ हो, तो $n=$

(a) 10 (b) 12

(c) 14 (d) इनमें से कोई नहीं

59. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ के विस्तार में मध्य पद है

[BIT Ranchi 1991; RPET 2002; Pb. CET 1991]

(a) ${}^{10}C_4\frac{1}{x}$ (b) ${}^{10}C_5$

(c) ${}^{10}C_5 x$ (d) ${}^{10}C_7 x^4$

60. $\left(x^2-\frac{3\sqrt{3}}{x^3}\right)^{10}$ के विस्तार में x से स्वतंत्र पद होगा

[RPET 1999]

(a) 153090 (b) 150000

(c) 150090 (d) 153180

61. $(1+x)^{10}$ के विस्तार में मध्य पद का गुणांक होगा

[UPSEAT 2001]

(a) $\frac{10!}{5!6!}$ (b) $\frac{10!}{(5!)^2}$

(c) $\frac{10!}{5!7!}$ (d) इनमें से कोई नहीं

62. $(1+x)^{2n}$ के विस्तार में मध्य पद होगा [DCE 2002]

(a) $\frac{(2n)!}{n!}x^2$ (b) $\frac{(2n)!}{n!(n-1)!}x^{n+1}$

(c) $\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$ (d) $\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}x^n$

63. $(1+x)^{2n+2}$ के प्रसार में महत्तम गुणांक है [BIT Ranchi 1992]

(a) $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ (b) $\frac{(2n+2)!}{\{(n+1)!\}^2}$

(c) $\frac{(2n+2)!}{n!(n+1)!}$ (d) $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

64. $\sqrt{3}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{20}$ के विस्तार में महत्तम पद है

(a) $\frac{25840}{9}$ (b) $\frac{24840}{9}$

(c) $\frac{26840}{9}$ (d) इनमें से कोई नहीं

65. यदि n एक सम धनात्मक पूर्णांक है, तब $(1+x)^n$ के प्रसार में महत्तम पद का गुणांक भी महत्तम हो, इसकी शर्त है

(a) $\frac{n}{n+2}<x<\frac{n+2}{n}$ (b) $\frac{n+1}{n}<x<\frac{n}{n+1}$

(c) $\frac{n}{n+4}<x<\frac{n+4}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

66. $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में महत्तम पद का गुणांक भी महत्तम होने के लिये x का मान निम्न अन्तराल में आता है

(a) $\left(\frac{n-1}{n},\frac{n}{n-1}\right)$ (b) $\left(\frac{n}{n+1},\frac{n+1}{n}\right)$

(c) $\left(\frac{n}{n+2},\frac{n+2}{n}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

67. $(1+x)^{2n+1}$ के विस्तार में महत्तम गुणांक का मान होगा

[RPET 1997]

(a) $\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}$ (b) $\frac{(2n+2)!}{n!(n+1)!}$

(c) $\frac{(2n+1)!}{[(n+1)!]^2}$ (d) $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

68. $(1+x+x^2+x^3)^n$ के प्रसार मे x^4 का गुणांक है

[MNR 1993; RPET 2001; DCE 1998]

(a) ${}^nC_4$ (b) ${}^nC_4+{}^nC_2$

(c) ${}^nC_4+{}^nC_2+{}^nC_4.{}^nC_2$ (d) ${}^nC_4+{}^nC_2+{}^nC_1.{}^nC_2$

69. $(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ के प्रसार में $\frac{1}{x}$ का गुणांक है

(a) $\frac{n!}{(n-1)!(n+1)!}$ (b) $\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$

(c) $\frac{(2n)!}{(2n-1)!(2n+1)!}$ (d) इनमें से कोई नहीं

70. $(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद है [EAMCET 1989]

(a) $C_0^2+2C_1^2+....+(n+1)C_n^2$ (b) $(C_0+C_1+....+C_n)^2$

(c) $C_0^2+C_1^2+.....+C_n^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

71. $(1+t^2)^{12}(1+t^{12})(1+t^{24})$ के विस्तार में t^{24} का गुणांक होगा

[IIT Screening 2003]

(a) ${}^{12}C_6+2$ (b) ${}^{12}C_5$

(c) ${}^{12}C_6$ (d) ${}^{12}C_7$

72. $(x^2-x-2)^5$ के विस्तार में x^5 का गुणांक होगा

[EAMCET 2003]

(a) – 83 (b) – 82

(c) – 81 (d) 0

73. $(1+x)(1-x)^n$ के प्रसार में x^n का गुणांक है

[AIEEE 2004]

(a) $(-1)^{n-1}n$ (b) $(-1)^n(1-n)$

(c) $(-1)^{n-1}(n-1)^2$ (d) $(n-1)$

74. $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^{2n}$ के विस्तार में मध्य पद है [MP PET 1995]

(a) $\frac{1.3.5....(2n-3)}{n!}$ (b) $\frac{1.3.5....(2n-1)}{n!}$

(c) $\frac{1.3.5....(2n+1)}{n!}$ (d) इनमें से कोई नहीं

75. $(1+3x+2x^2)^6$ के प्रसार में x^{11} का गुणांक है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) 144 (b) 288
(c) 216 (d) 576
(e) (3)(2)

76. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{18}$ के प्रसार में मध्य पद है [Karnataka CET 2005]

(a) ${}^{18}C_9$ (b) $-{}^{18}C_9$

(c) ${}^{18}C_0$ (d) $-{}^{18}C_{10}$

द्विपद गुणांकों के गुणधर्म

1. ${}^{10}C_1+{}^{10}C_3+{}^{10}C_5+{}^{10}C_7+{}^{10}C_9=$ [MP PET 1982]

(a) 2^9 (b) 2^{10}

(c) $2^{10}-1$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. $C_0C_r+C_1C_{r+1}+C_2C_{r+2}+....+C_{n-r}C_n=$ [BIT Ranchi 1986]

(a) $\frac{(2n)!}{(n-r)!(n+r)!}$ (b) $\frac{n!}{(-r)!(n+r)!}$

(c) $\frac{n!}{(n-r)!}$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. ${}^nC_0-\frac{1}{2}{}^nC_1+\frac{1}{3}{}^nC_2-......+(-1)^n\frac{{}^nC_n}{n+1}=$

(a) n (b) $\frac{1}{n}$

(c) $\frac{1}{n+1}$ (d) $\frac{1}{n-1}$

4. यदि $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+..........+C_nx^n$, तो $C_0^2+C_1^2+C_2^2+C_3^2+......+C_n^2=$ [MP PET 1985; Karnataka CET 1995; MNR 1999]

(a) $\frac{n!}{n!n!}$ (b) $\frac{(2n)!}{n!n!}$

(c) $\frac{(2n)!}{n!}$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+..........+C_nx^n$, तब $\frac{C_1}{C_0}+\frac{2C_2}{C_1}+\frac{3C_3}{C_2}+....+\frac{nC_n}{C_{n-1}}=$

[BIT Ranchi 1986; RPET 1996, 97]

(a) $\frac{n(n-1)}{2}$ (b) $\frac{n(n+2)}{2}$

(c) $\frac{n(n+1)}{2}$ (d) $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

6. $C_1+2C_2+3C_3+4C_4+....+nC_n=$ [RPET 1995; MP PET 2002; Orissa JEE 2005]

(a) 2^n (b) $n.\ 2^n$

(c) $n.\ 2^{n-1}$ (d) $n.\ 2^{n+1}$

7. $\frac{C_0}{1}+\frac{C_2}{3}+\frac{C_4}{5}+\frac{C_6}{7}+....=$ [RPET 1999]

(a) $\frac{2^{n+1}}{n+1}$ (b) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

(c) $\frac{2^n}{n+1}$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. $\frac{C_0}{1}+\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}+....+\frac{C_n}{n+1}=$ [RPET 1996]

(a) $\frac{2^n}{n+1}$ (b) $\frac{2^n-1}{n+1}$

(c) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. $\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{3!(n-3)!}+\frac{1}{5!(n-5)!}+....=$ [AMU 2005]

(a) $\frac{2^n}{n!}$ (b) $\frac{2^{n-1}}{n!}$

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

10. श्रेणी $\frac{C_0}{2}-\frac{C_1}{3}+\frac{C_2}{4}-\frac{C_3}{5}+.....$के $(n+1)$ पदों का योग है

(a) $\frac{1}{n+1}$ (b) $\frac{1}{n+2}$

(c) $\frac{1}{n(n+1)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

11. यदि a तथा d दो सम्मिश्र संख्यायें हों, तब $aC_0-(a+d)C_1+(a+2d)C_2-........+.....$ के $(n+1)$ पदों का योग है

(a) $\frac{a}{2^n}$ (b) na

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

12. यदि $(1+x)^{15}=C_0+C_1x+C_2x^2+......+C_{15}x^{15}$ हो, तब $C_2+2C_3+3C_4+....+14C_{15}$ का मान है [IIT 1966]

(a) 14.2^{14}
(b) $13.2^{14}+1$
(c) $13.2^{14}-1$
(d) इनमें से कोई नहीं

13. $\frac{C_1}{2}+\frac{C_3}{4}+\frac{C_5}{6}+.....$ का मान है [Karnataka CET 2000]

(a) $\frac{2^n-1}{n+1}$ (b) $n.2^n$

(c) $\frac{2^n}{n}$ (d) $\frac{2^n+1}{n+1}$

14. $(1+x)^n$ के प्रसार में x की विषम घातों के गुणांकों का योग है [MP PET 1986, 93, 2003]

(a) 2^n+1 (b) 2^n-1

(c) 2^n (d) 2^{n-1}

15. $C_0-C_1+C_2-C_3+.....+(-1)^n C_n$ बराबर होगा [MNR 1991; RPET 1995; UPSEAT 2000]

(a) 2^n (b) 2^n-1

(c) 0 (d) 2^{n-1}

16. $(x^2+x-3)^{319}$ के प्रसार में सभी गुणांकों का योग है [Bihar CEE 1994]

(a) 1 (b) 2

(c) – 1 (d) 0

17. यदि $(x-2y+3z)^n$ के प्रसार में गुणांकों का योग 128 हो, तो $(1+x)^n$ के प्रसार में सबसे बड़ा गुणांक है

(a) 35 (b) 20

(c) 10 (d) इनमें से कोई नहीं

18. यदि $(1+x-2x^2)^6=1+a_1x+a_2x^2+....+a_{12}x^{12}$, तब व्यंजक $a_2+a_4+a_6+....+a_{12}$ का मान है [RPET 1986, 99; UPSEAT 2003]

(a) 32 (b) 63

(c) 64 (d) इनमें से कोई नहीं

19. यदि n, 1 से बड़ा पूर्णांक है, तब

$a-{}^nC_1(a-1)+{}^nC_2(a-2)+....+(-1)^n(a-n)=$ [IIT 1972]

(a) a (b) 0

(c) a^2 (d) 2^n

20. $(1+x+x^2+x^3)^5$ के विस्तार में x की सम घातों के गुणांकों का योगफल है [EAMCET 1988]

(a) 256 (b) 128

(c) 512 (d) 64

21. $(x+3)^{n-1}+(x+3)^{n-2}(x+2)+(x+3)^{n-3}(x+2)^2+...+(x+2)^{n-1}$ के विस्तार में $x^r[0\le r\le(n-1)]$ का गुणांक है

(a) ${}^nC_r(3^r-2^n)$ (b) ${}^nC_r(3^{n-r}-2^{n-r})$

(c) ${}^nC_r(3^r+2^{n-r})$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. यदि $(\alpha^2x^2-2\alpha x+1)^{51}$ के प्रसार में गुणांकों का योगफल 0 है, तब α का मान है [IIT 1991; Pb. CET 1988]

(a) 2 (b) –1

(c) 1 (d) – 2

23. यदि $x+y=1$, तब $\sum_{r=0}^{n} r^2\,{}^nC_r x^r y^{n-r}$ बराबर है

(a) nxy (b) $nx(x+yn)$

(c) $nx(nx+y)$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. ${}^{4n}C_0+{}^{4n}C_4+{}^{4n}C_8+....+{}^{4n}C_{4n}$ का मान है

(a) $2^{4n-2}+(-1)^n2^{2n-1}$ (b) $2^{4n-2}+2^{2n-1}$

(c) $2^{2n-1}+(-1)^n2^{4n-2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

25. $(1+x)^{15}$ के प्रसार में अन्तिम आठ पदों के गुणांकों का योगफल है

(a) 2^{16} (b) 2^{15}

(c) 2^{14} (d) इनमें से कोई नहीं

26. यदि $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+....+C_nx^n$, तो $C_0+2C_1+3C_2+....+(n+1)C_n$ का मान होगा [MP PET 1996; RPET 1997; DCE 1995; AMU 1995; EAMCET 2001; IIT 1971]

(a) $(n+2)2^{n-1}$ (b) $(n+1)2^n$

(c) $(n+1)2^{n-1}$ (d) $(n+2)2^n$

27. ${}^{15}C_0^2-{}^{15}C_1^2+{}^{15}C_2^2-....-{}^{15}C_{15}^2$ का मान है [MP PET 1996]

(a) 15 (b) – 15

(c) 0 (d) 51

28. $2C_0+\frac{2^2}{2}C_1+\frac{2^3}{3}C_2+....+\frac{2^{11}}{11}C_{10}=$ [MP PET 1999; EAMCET 1992]

(a) $\frac{3^{11}-1}{11}$ (b) $\frac{2^{11}-1}{11}$

(c) $\frac{11^3-1}{11}$ (d) $\frac{11^2-1}{11}$

29. यदि $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+....+C_nx^n$, तब $C_0C_2+C_1C_3+C_2C_4+C_{n-2}C_n$ का मान होगा [RPET 1996]

(a) $\frac{(2n)!}{(n+1)!(n+2)!}$ (b) $\frac{(2n)!}{(n-2)!(n+2)!}$

(c) $\frac{(2n)!}{(n)!(n+2)!}$ (d) $\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+2)!}$

30. यदि $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+...+C_nx^n$, तब $C_0+C_2+C_4+C_6+.....$ का मान होगा [RPET 1997]

(a) 2^{n-1} (b) 2^n-1

(c) 2^n (d) $2^{n-1}-1$

31. संख्या 111......1 (91 बार) [UPSEAT 1999]

(a) अभाज्य नहीं है (b) एक सम संख्या है

(c) एक विषम संख्या नहीं है (d) इनमें से कोई नहीं

32. यदि $C_0, C_1, C_2, ..., C_n$ द्विपद गुणांक हो, तो $2.C_1+2^3.C_3+2^5.C_5+....$ का n पदों तक मान होगा [AMU 1999]

(a) $\frac{3^n+(-1)^n}{2}$ (b) $\frac{3^n-(-1)^n}{2}$

(c) $\frac{3^n+1}{2}$ (d) $\frac{3^n-1}{2}$

33. $(x+2y+3z)^8$ के विस्तार में गुणांकों का योग होगा [RPET 2000]

(a) 3^8 (b) 5^8

(c) 6^8 (d) इनमें से कोई नहीं

34. $(1+x)^{50}$ के विस्तार में x की विषम घातों के पदों के गुणांकों का योग होगा [UPSEAT 2001; Pb. CET 2004]

(a) 0 (b) 2^{49}

(c) 2^{50} (d) 2^{51}

35. $n^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$ होगा [AMU 2001]

(a) $<\left(\frac{n+1}{2}\right)^3$ (b) $>\left(\frac{n+1}{2}\right)^3$

(c) $<(n!)^3$ (d) $>(n!)^3$

36. $(1+x-3x^2)^{2134}$ के गुणांकों का योग होगा [Kurukshetra CEE 2001]

(a) – 1 (b) 1

(c) 0 (d) 2^{2134}

37. $(1+x+x^2)^n$ के विस्तार में गुणांकों का योग होगा [EAMCET 2002]

(a) 2 (b) 3^n

(c) 4^n (d) 2^n

38. $(1+x-3x^2)^{3148}$ के विस्तार में गुणांकों का योगफल होगा [Karnataka CET 2003]

(a) 7 (b) 8

(c) – 1 (d) 1

39. यदि $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$, जबकि $k = 1, 2, 3, 4, ..., n$, तब $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 =$ [EAMCET 2000]

(a) $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ (b) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$

(c) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^4$ (d) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^6$

40. $(1+x)^5$ के विस्तार में पदों के गुणांकों का योगफल होगा [RPET 1992, 97; Kurukshetra CEE 2000]

(a) 80 (b) 16

(c) 32 (d) 64

41. $\sum_{k=0}^{10} {}^{20}C_k =$ [Orissa JEE 2004]

(a) $2^{19} + \frac{1}{2}\,{}^{20}C_{10}$ (b) 2^{19}

(c) ${}^{20}C_{10}$ (d) इनमें से कोई नहीं

42. यदि $S_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{{}^nC_r}$ और $t_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{r}{{}^nC_r}$, तो $\frac{t_n}{S_n} =$ [AIEEE 2004]

(a) $\frac{2n-1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}n - 1$

(c) $n-1$ (d) $\frac{1}{2}n$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{{}^nC_0 + ... + {}^nC_n}{{}^nP_n}$ का मान है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) e^2 (b) e

(c) $e^2 - 1$ (d) $e - 1$

(e) $e^2 + 1$

44. $(x^2 - x - 1)^{99}$ के गुणांकों का योग है [Orissa JEE 2005]

(a) 1 (b) 0

(c) –1 (d) इनमें से कोई नहीं

किसी भी घातांक के लिए द्विपद प्रमेय

1. $(1-2x)^{3/2}$ के प्रसार में 4वाँ पद होगा [RPET 1989]

(a) $-\frac{3}{4}x^4$ (b) $\frac{x^3}{2}$

(c) $-\frac{x^3}{2}$ (d) $\frac{3}{4}x^4$

2. 217 का घनमूल है

(a) 6.01 (b) 6.04

(c) 6.02 (d) इनमें से कोई नहीं

3. $\frac{1}{(4-3x)^{1/2}}$ का द्विपद प्रमेय से विस्तार किया जा सकता है, यदि

(a) $x < 1$ (b) $|x| < 1$

(c) $-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. यदि $(a+bx)^{-2} = \frac{1}{4} - 3x + ...$, तो $(a, b) =$ [UPSEAT 2002]

(a) (2, 12) (b) (–2, 12)

(c) (2, –12) (d) इनमें से कोई नहीं

5. $\frac{1}{\sqrt[3]{6-3x}} =$

(a) $6^{1/3}\left[1 + \frac{x}{6} + \frac{2x^2}{6^2} + ...\right]$

(b) $6^{-1/3}\left[1 + \frac{x}{6} + \frac{2x^2}{6^2} + ...\right]$

(c) $6^{1/3}\left[1 - \frac{x}{6} + \frac{2x^2}{6^2} - ....\right]$

(d) $6^{-1/3}\left[1 - \frac{x}{6} + \frac{2x^2}{6^2} - ....\right]$

6. $\left(\frac{a}{a+x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}} =$ [DCE 1994; Pb. CET 2002; AIEEE 2002]

(a) $2 + \frac{3x^2}{4a^2} + ...$ (b) $1 + \frac{3x^2}{8a^2} + ...$

(c) $2 + \frac{x}{a} + \frac{3x^2}{4a^2} + ...$ (d) $2 - \frac{x}{a} + \frac{3x^2}{4a^2} + ...$

7. $(1-x)^{-4}$ के विस्तार में $(r+1)$ वाँ पद होगा

(a) $\frac{x^r}{r!}$

(b) $\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}x^r$

(c) $\frac{(r+2)(r+3)}{2}x^r$

(d) इनमें से कोई नहीं

8. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$ के विस्तार में x^n का गुणांक होगा

(a) $4n$ (b) $4n-3$

(c) $4n+1$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. $\dfrac{1}{(2+x)^4}=$

(a) $\frac{1}{2}\left(1-2x+\frac{5}{2}x^2-....\right)$ (b) $\frac{1}{16}\left(1-2x+\frac{5}{2}x^2-....\right)$

(c) $\frac{1}{16}\left(1+2x+\frac{5}{2}x^2+....\right)$ (d) $\frac{1}{2}\left(1+2x+\frac{5}{2}x^2+....\right)$

10. $\dfrac{1}{\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}}$ का द्विपद प्रमेय से विस्तार किया जा सकता है, यदि

(a) $x<1$ (b) $|x|<1$

(c) $x>1$ (d) $|x|>1$

11. $\dfrac{(1+3x)^2}{1-2x}$ के विस्तार में x^3 का गुणांक होगा

(a) 8 (b) 32

(c) 50 (d) इनमें से कोई नहीं

12. यदि $|x|<1$, तो $(1+x+x^2+....)^2$ के विस्तार में x^n का गुणांक होगा [Pb. CET 1989]

(a) 1 (b) n

(c) $n+1$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. यदि $|x|>1$, तो $(1+x)^{-2}=$

(a) $1-2x+3x^2-....$ (b) $1+2x+3x^2+....$

(c) $1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-....$ (d) $\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}-...$

14. यदि $|x|<1$ हो, तब $(1+2x+3x^2+4x^3+....)^{1/2}$, के विस्तार में x^n का गुणांक है

(a) n (b) $n+1$

(c) 1 (d) –1

15. $(7.995)^{1/3}$ का दशमलव के 4 स्थानों तक लगभग मान है [MNR 1991; UPSEAT 2000]

(a) 1.9995 (b) 1.9996

(c) 1.9990 (d) 1.9991

16. यदि $|x|<1$ तो

$1+n\left(\frac{2x}{1+x}\right)+\frac{n(n+1)}{2!}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2+.....\infty$ का मान होगा [AMU 1983]

(a) $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n$ (b) $\left(\frac{2x}{1+x}\right)^n$

(c) $\left(\frac{1+x}{2x}\right)^n$ (d) $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

17. $1+n\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{n(n+1)}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+.....\infty$, का मान होगा [Roorkee 1975]

(a) x^n (b) x^{-n}

(c) $\left(1-\frac{1}{x}\right)^n$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. $(1-x)^{3/2}$ के प्रसार में प्रथम चार पद हैं [RPET 1989]

(a) $1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3$ (b) $1-\frac{3}{2}x-\frac{3}{8}x^2-\frac{x^3}{16}$

(c) $1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{x^3}{16}$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. $\dfrac{(1+x)^2}{(1-x)^3}$ में x^n का गुणांक है

(a) $3n^2+2n+1$ (b) $2n^2+2n+1$

(c) n^2+n+1 (d) $2n^2-2n+1$

20. $1+\frac{1}{3}x+\frac{1.4}{3.6}x^2+\frac{1.4.7}{3.6.9}x^3+....=$

(a) x (b) $(1+x)^{1/3}$

(c) $(1-x)^{1/3}$ (d) $(1-x)^{-1/3}$

21. $1-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}.\frac{3}{16}-\frac{1.3.5}{8.16.24}+.....=$ [EAMCET 1990]

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{5}$

(c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. यदि $(1+x)^{7/2}$ के प्रसार में $(r+1)$वां पद प्रथम ऋणात्मक पद है, तब r का मान है

(a) 5 (b) 6

(c) 4 (d) 7

23. $(1-2x+3x^2-4x^3+.....)^{-n}$ के प्रसार में x^n का गुणांक है

(a) $\frac{(2n)!}{n!}$ (b) $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

(c) $\frac{1}{2}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. $(1-9x+20x^2)^{-1}$ के प्रसार में x^n का गुणांक है

(a) 5^n-4^n (b) $5^{n+1}-4^{n+1}$

(c) $5^{n-1}-4^{n-1}$ (d) इनमें से कोई नहीं

25. $\dfrac{1}{(1-x)(3-x)}$ के प्रसार में x^n का गुणांक है

(a) $\frac{3^{n+1}-1}{2.3^{n+1}}$ (b) $\frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}}$

(c) $\left(\frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. $(1+x+x^2+....)^{-n}$ के प्रसार में x^n का गुणांक है

(a) 1 (b) $(-1)^n$

(c) n (d) $n+1$

27. यदि $y=3x+6x^2+10x^3+....$, तब y के पदों में x का मान है

(a) $1-(1-y)^{-1/3}$ (b) $1-(1+y)^{1/3}$

(c) $1+(1+y)^{-1/3}$ (d) $1-(1+y)^{-1/3}$

28. x की आरोही घातों में $\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^{-1}$ के विस्तार में x का गुणांक जबकि $|x|<1$, है [MP PET 1996]

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{1}{2}$ (d) 1

29. $1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+.........=$ [RPET 1996; EAMCET 2001]

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) $\sqrt{3}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

30. यदि x धनात्मक हो, तो $(1+x)^{27/5}$ के विस्तार में प्रथम ऋणात्मक पद होगा [AIEEE 2003]

(a) 7 वां (b) 5 वां

(c) 8 वां (d) 6 वां

31. $(1-2x)^{-1/2}$ के विस्तार में x^r का गुणांक होगा [Kurukshetra CEE 2001]

(a) $\frac{(2r)!}{(r!)^2}$ (b) $\frac{(2r)!}{2^r(r!)^2}$

(c) $\frac{(2r)!}{(r!)^2 2^{2r}}$ (d) $\frac{(2r)!}{2^r.(r+1)!.(r-1)!}$

32. $\sum_{k=1}^{n} k\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1} =$ [EAMCET 2002; Pb. CET 2002]

(a) $n(n-1)$ (b) $n(n+1)$

(c) n^2 (d) $(n+1)^2$

33. $[x+(x^3-1)^{1/2}]^5+[x-(x^3-1)^{1/2}]^5$ के प्रसार में बहुपद की घात है [Pb. CET 2000]

(a) 5 (b) 6

(c) 7 (d) 8

34. यदि x इतना छोटा है कि x^3 और x की अधिकतम घात को नगण्य माना जा सकता है, तो $\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-\left(1+\frac{1}{2}x\right)^3}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ का लगभग मान है [AIEEE 2005]

(a) $-\frac{3}{8}x^2$ (b) $\frac{x}{2}-\frac{3}{8}x^2$

(c) $1-\frac{3}{8}x^2$ (d) $3x+\frac{3}{8}x^2$

बहुपद प्रमेय, $(a^{1/p}+b^{1/q})$ के प्रसार में करणीगत चिन्हों से स्वतंत्रा पद, तीन/चार क्रमागत पदों या गुणांकों पर आधारित प्रश्न

1. $(1+x)^n$ के विस्तार में दो क्रमागत पदों के गुणांक बराबर होंगे यदि

(a) n कोई पूर्णांक है (b) n विषम है

(c) n सम है (d) इनमें से कोई नहीं

2. यदि $(1+x)^n$ के विस्तार में तीन क्रमागत गुणांक a, b, c हों, तो $n=$

(a) $\frac{ac+ab+bc}{b^2+ac}$

(b) $\frac{2ac+ab+bc}{b^2-ac}$

(c) $\frac{ab+ac}{b^2-ac}$

(d) इनमें से कोई नहीं

3. यदि n एक धनात्मक पूर्णांक हो और $(1+x)^n$ के विस्तार में तीन क्रमागत गुणांकों का अनुपात 6 : 33 : 110 हो, तो $n=$

(a) 4 (b) 6

(c) 12 (d) 16

4. $(a+b+c)^n$ के विस्तार में पदों की संख्या होगी

(a) $n+1$ (b) $n+3$

(c) $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि $(1+x)^n$ के विस्तार में तीन क्रमागत गुणांक 28, 56 तथा 70 हैं, तब n का मान है [MP PET 1985]

(a) 6 (b) 4

(c) 8 (d) 10

6. $(5^{1/2}+7^{1/8})^{1024}$ के विस्तार में पूर्णांक पदों की संख्या है

(a) 128 (b) 129

(c) 130 (d) 131

7. $(y^{1/5}+x^{1/10})^{55}$ के विस्तार में करणीगत चिन्हों से स्वतंत्र पदों की संख्या है

(a) 5 (b) 6

(c) 7 (d) इनमें से कोई नहीं

8. माना $R=(5\sqrt{5}+11)^{2n+1}$ तथा $f=R-[R]$, जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन प्रदर्शित करता है। $R.f$ का मान होगा [IIT 1988]

(a) 4^{2n+1} (b) 4^{2n}

(c) 4^{2n-1} (d) 4^{-2n}

9. $(\sqrt{2}+1)^6$ से कम तथा बराबर महत्तम पूर्णांक है [RPET 2000]

(a) 196 (b) 197

(c) 198 (d) 199

10. यदि $(x-2y+3z)^n$ के विस्तार में 45 पद हैं, तब $n=$

(a) 7 (b) 8

(c) 9 (d) इनमें से कोई नहीं

11. $\frac{(18^3+7^3+3.18.7.25)}{3^6+6.243.2+15.81.4+20.27.8+15.9.16+6.3.32+64}$ का मान है [IIT 1960]

(a) 1 (b) 5

(c) 25 (d) 100

12. यदि $(1+x)^n$ के प्रसार में चार क्रमिक पदों के गुणांक a_1, a_2, a_3, a_4 हैं, तब $\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=$ [IIT 1975]

(a) $\frac{a_2}{a_2+a_3}$ (b) $\frac{1}{2}\frac{a_2}{(a_2+a_3)}$

(c) $\frac{2a_2}{a_2+a_3}$ (d) $\frac{2a_3}{a_2+a_3}$

$\left\{\text{जहाँ } m=\frac{1}{2}(2n-k^2+k-2)\right\}$

13. $(5^{1/2}+7^{1/6})^{642}$ के विस्तार में पूर्णांक पदों की संख्या है [Kurukshetra CEE 1996]

(a) 106 (b) 108

(c) 103 (d) 109

14. व्यंजक $(2+\sqrt{2})^4$ का मान निम्न के मध्य होगा [AMU 2001]

(a) 134 और 135 (b) 135 और 136

(c) 136 और 137 (d) इनमें से कोई नहीं

15. संख्या $(183\,!) + 3^{183}$ में इकाई के स्थान पर आने वाला अंक होगा [Karnataka CET 2002]

(a) 7 (b) 6
(c) 3 (d) 0

16. $\left(\sqrt{3}+\sqrt[8]{5}\right)^{256}$ के विस्तार में पूर्णांक पदों की संख्या होगी [AIEEE 2003]

(a) 32 (b) 33
(c) 34 (d) 35

17. यदि $(1+x+x^2)^n$ के विस्तार में x^r का गुणांक a_r हो, तो $a_1 - 2a_2 + 3a_3 - .... - 2n\,a_{2n} =$ [EAMCET 2003]

(a) 0 (b) n
(c) $-n$ (d) $2n$

गणितीय आगमन और विभाजिता सम्बन्धी प्रश्न

1. n के सभी धनात्मक पूर्णांक मानों के लिए, $3^{2n} - 2n + 1$ किससे विभाज्य है।

(a) 2 (b) 4
(c) 8 (d) 12

2. यदि $n \in N$, तो $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ किससे विभाज्य है।

(a) $x+y$ (b) $x-y$
(c) x^2+y^2 (d) x^2+xy

3. यदि $n \in N$, तो $7^{2n} + 2^{3n-3}.\ 3^{n-1}$ किससे विभाज्य होगा। [IIT 1982]

(a) 25 (b) 35
(c) 45 (d) इनमें से कोई नहीं

4. यदि $n \in N$, तो $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ किससे विभाज्य है [Roorkee 1982]

(a) 113 (b) 123
(c) 133 (d) इनमें से कोई नहीं

5. सभी प्राकृत संख्या n के लिए, $n(n^2-1)$ किससे विभाज्य है [RPET 1991]

(a) 4 (b) 6
(c) 10 (d) इनमें से कोई नहीं

6. सभी प्राकृत संख्या n के लिए

(a) $n > 2^n$ (b) $n < 2^n$
(c) $n \ge 2^n$ (d) $n \le 2^n$

7. सभी $n \in N$ के लिए, सही कथन है

(a) $2^n < n$ (b) $n^2 > 2^n$
(c) $n^4 < 10^n$ (d) $2^{3n} > 7n+1$

8. प्राकृत संख्या n के लिए, $2^n(n-1)! < n^n$ मान्य होगा, यदि

(a) $n < 2$ (b) $n > 2$
(c) $n \ge 2$ (d) कभी नहीं

9. यदि n एक प्राकृत संख्या है, तो $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \ge n!$ सही है। जब

(a) $n > 1$ (b) $n \ge 1$
(c) $n > 2$ (d) $n \ge 2$

10. धनात्मक पूर्णांक n के लिए $10^{n-2} > 81n$ मान्य होगा, यदि

(a) $n > 5$ (b) $n \ge 5$
(c) $n < 5$ (d) $n > 6$

11. धनात्मक पूर्णांक n के लिए $2^n < n!$ मान्य होगा, यदि

(a) $n < 4$ (b) $n \ge 4$
(c) $n < 3$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. सभी धनात्मक पूर्णांक n के लिए, $3^n > n^3$ मान्य होगा, यदि

(a) $n > 2$ (b) $n \ge 3$
(c) $n \ge 4$ (d) $n < 4$

13. प्राकृत संख्या n के लिए $(n!)^2 > n^2$ मान्य होगा, यदि

(a) $n > 3$ (b) $n > 4$
(c) $n \ge 4$ (d) $n \ge 3$

14. माना $P(n)$ कथन "(n^2+n) विषम है।" को व्यक्त करता हो यह पाया गया कि $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ तो P_n सत्य है सभी [IIT JEE 1996]

(a) $n > 1$ के लिए (b) n के लिए
(c) $n > 2$ के लिए (d) इनमें से कोई नहीं

15. यदि p अभाज्य संख्या हो, तो $n^p - n$, p से विभाज्य होगा। जब n है

(a) 1 से बड़ी प्राकृत संख्या (b) अपरिमेय संख्या
(c) सम्मिश्र संख्या (d) विषम संख्या

16. $x(x^{n-1} - na^{n-1}) + a^n(n-1)$, n के किस मान के लिए $(x-a)^2$ से विभाज्य है

(a) $n > 1$ (b) $n > 2$
(c) सभी प्राकृत संख्या n (d) इनमें से कोई नहीं

17. यदि $P(n) = 2 + 4 + 6 + ... + 2n,\ n \in N$, तो $P(k) = k(k+1) + 2 \Rightarrow P(k+1) = (k+1)(k+2) + 2$ सभी $k \in N$ के लिए n के किस मान के लिए $P(n) = n(n+1) + 2$ सत्य होगा

(a) सभी $n \in N$ (b) $n > 1$
(c) $n > 2$ (d) कुछ नही कहा जा सकता

18. सभी प्राकृत संख्या n के लिए $n(n+1)$ सदैव होगा

(a) सम (b) विषम
(c) 3 का गुणज (d) 4 का गुणज

19. कथन $P(n)$ "$1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + ... + n\times n! = (n+1)! - 1$" होगा

(a) सभी $n > 1$ के लिए
(b) किसी भी n के लिए सत्य नहीं
(c) सभी $n \in N$ के लिए सत्य
(d) इनमें से कोई नहीं

20. जब 5^{99} को 13 से विभाजित करते है तो शेषफल होगा

(a) 6 (b) 8
(c) 9 (d) 10

21. 2^{301}, 5 से विभाजित है, तो न्यूनतम धनात्मक शेषफल है [Karnataka CET 2005]

(a) 4 (b) 8
(c) 2 (d) 6

22. धनात्मक पूर्णांक n के लिए

माना $a(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{(2^n) - 1}$ तब [IIT 1999]

(a) $a(100) \le 100$ (b) $a(100) > 100$
(c) $a(200) \le 100$ (d) $a(200) > 100$

23. $10^n + 3(4^{n+2}) + 5\ \ (n \in N)$ से भाज्य है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) 7 (b) 5
(c) 9 (d) 17
(e) 13

Critical Thinking

Objective Questions

1. व्यंजक $(\sqrt{2}+1)^6+(\sqrt{2}-1)^6$ का मान होगा [RPET 1997]
(a) – 198 (b) 198
(c) 99 (d) – 99

2. यदि $(1+ax)^n=1+8x+24x^2+....$, हो, तब a तथा n के मान क्रमशः हैं [IIT 1983; Pb. CET 1994, 99]
(a) 2, 4 (b) 2, 3
(c) 3, 6 (d) 1, 2

3. $(1+x^2)^5(1+x)^4$ के विस्तार में x^5 का गुणांक होगा [EAMCET 1996; UPSEAT 2001; Pb. CET 2002]
(a) 30 (b) 60
(c) 40 (d) इनमें से कोई नहीं

4. यदि x के छोटे मानों के लिये $\frac{(1-3x)^{1/2}+(1-x)^{5/3}}{\sqrt{4-x}}$ का मान लगभग $a+bx$ हो, तो $(a,b)=$
(a) $\left(1,\frac{35}{24}\right)$ (b) $\left(1,-\frac{35}{24}\right)$
(c) $\left(2,\frac{35}{12}\right)$ (d) $\left(2,-\frac{35}{12}\right)$

5. व्यंजक $[x+x^{\log_{10}(x)}]^5$ में x का मान है, यदि इसके विस्तार में तीसरा पद 10^6 हो [Roorkee 1992]
(a) 10 (b) 11
(c) 12 (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि $(1+x)^{2n+2}$ के प्रसार में मध्य पद का गुणांक p है तथा $(1+x)^{2n+1}$ के प्रसार में मध्य पदों के गुणांक q तथा r हैं, तब
(a) $p+q=r$ (b) $p+r=q$
(c) $p=q+r$ (d) $p+q+r=0$

7. बहुपद $(x-1)(x-2)(x-3)......... ....(x-100)$, में x^{99} का गुणांक होगा [AMU 2002]
(a) 5050 (b) – 5050
(c) 100 (d) 99

8. $\sum_{j=0}^{200}(1+x)^j$ के विस्तार में x^{100} का गुणांक है [UPSEAT 2004]
(a) $\binom{200}{100}$ (b) $\binom{201}{102}$
(c) $\binom{200}{101}$ (d) $\binom{201}{100}$

9. यदि $\left(ax^2+\frac{1}{bx}\right)^{11}$ में x^7 का गुणांक, $\left(ax-\frac{1}{bx^2}\right)^{11}$ में x^{-7} के गुणांक के समान हो, तब $ab=$ [MP PET 1999; AMU 2001; Pb. CET 2002; AIEEE 2005]
(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$
(c) 2 (d) 3

10. यदि $\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^5$ के विस्तार में x का गुणांक 270 हो, तो $k=$ [EAMCET 2002]
(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

11. $(1+x)^n$ के विस्तार में तीन क्रमागत पदों के गुणांक क्रमशः 165, 330 और 462 हैं, तब n का मान होगा [UPSEAT 1999]
(a) 11 (b) 10
(c) 12 (d) 8

12. $(1+x)^{18}$ के प्रसार में यदि $(2r+4)$वें तथा $(r-2)$वें पदों के गुणांक बराबर हैं, तब $r=$ [MP PET 1997; Pb. CET 2001]
(a) 12 (b) 10
(c) 8 (d) 6

13. $(1+x)^{2n}$ के विस्तार में मध्य पद होगा [Pb. CET 1998]
(a) $\frac{1.3.5....(5n-1)}{n!}x^n$ (b) $\frac{2.4.6....2n}{n!}x^{2n+1}$
(c) $\frac{1.3.5....(2n-1)}{n!}x^n$ (d) $\frac{1.3.5....(2n-1)}{n!}2^n x^n$

14. $\binom{30}{0}\binom{30}{10}-\binom{30}{1}\binom{30}{11}+\binom{30}{2}\binom{30}{12}+.......+\binom{30}{20}\binom{30}{30}$ का मान है [IIT Screening 2005]
(a) ${}^{60}C_{20}$ (b) ${}^{30}C_{10}$
(c) ${}^{60}C_{30}$ (d) ${}^{40}C_{30}$

15. $(1+3x+3x^2+x^3)^6$ के प्रसार में मध्य पद है [MP PET 1997]
(a) चौथा (b) तीसरा
(c) दसवाँ (d) इनमें से कोई नहीं

16. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{11}$ के विस्तार में मध्य पद होगा
(a) $231x$ और $\frac{231}{x}$ (b) $462x$ और $\frac{462}{x}$
(c) $-462x$ और $\frac{462}{x}$ (d) इनमें से कोई नहीं

17. $(y^{-1/6}-y^{1/3})^9$ के विस्तार में y से स्वतंत्र पद है [BIT Ranchi 1980]
(a) 84 (b) 8.4
(c) 0.84 (d) – 84

18. $(1+x+2x^3)\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$ के विस्तार में x से स्वतंत्र पद का गुणांक है [DCE 1994]
(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{19}{54}$
(c) $\frac{17}{54}$ (d) $\frac{1}{4}$

19. $\left[\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{x^2}\right]^{10}$ में x से स्वतंत्र पद है [EAMCET 1984; RPET 2000]
(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{5}{3}$
(c) $\frac{4}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

20. $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^{18}$ में x से स्वतंत्र पद है [EAMCET 1990]
(a) ${}^{18}C_6 2^6$ (b) ${}^{18}C_6 2^{12}$
(c) ${}^{18}C_{18} 2^{18}$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. $(3+2x)^{50}$ के विस्तार में महत्तम पद है, जहाँ $x=\frac{1}{5}$

[IIT Screening 1993]

(a) 5वाँ (b) 51वाँ

(c) 7वाँ (d) 6वाँ

22. $\frac{C_1}{C_0}+2\frac{C_2}{C_1}+3\frac{C_3}{C_2}+....+15\frac{C_{15}}{C_{14}}=$ [IIT 1962]

(a) 100 (b) 120

(c) -120 (d) इनमें से कोई नहीं

23. $\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+.....+2^n\binom{n}{n}$ का मान होगा

[AMU 2000]

(a) 2^n (b) 0

(c) 3^n (d) इनमें से कोई नहीं

24. यदि ${}^nC_r$ के लिए C_r को प्रयुक्त किया जाता हो, तो श्रेणी

$\frac{2(n/2)!(n/2)!}{n!}[C_0^2-2C_1^2+3C_2^2-.....+(-1)^n(n+1)C_n^2]$, जहाँ n सम धनात्मक पूर्णांक है, का योग होगा [IIT 1986]

(a) 0 (b) $(-1)^{n/2}(n+1)$

(c) $(-1)^n(n+2)$ (d) $(-1)^{n/2}(n+2)$

25. यदि $(x+a)^n$, के विस्तार में विषम पदों का योग A तथा सम पदों का योग B हो, तो [RPET 1987; UPSEAT 2004]

(a) $AB=\frac{1}{4}(x-a)^{2n}-(x+a)^{2n}$

(b) $2AB=(x+a)^{2n}-(x-a)^{2n}$

(c) $4AB=(x+a)^{2n}-(x-a)^{2n}$

(d) इनमें से कोई नहीं

26. यदि $(x+a)^n$ के विस्तार में विषम पदों का योग P तथा सम पदों का योग Q हो, तो (P^2-Q^2) का मान होगा

[RPET 1997; Pb. CET 1998]

(a) $(x^2+a^2)^n$ (b) $(x^2-a^2)^n$

(c) $(x-a)^{2n}$ (d) $(x+a)^{2n}$

27. $(1+x-3x^2)^{2163}$ के विस्तार में गुणांकों का योग होगा [IIT 1982]

(a) 0

(b) 1

(c) -1

(d) 2^{2163}

28. यदि $(1-3x+10x^2)^n$ के विस्तार में गुणांकों का योग a तथा $(1+x^2)^n$ के विस्तार में गुणांकों का योग b हो, तो

[UPSEAT 2001]

(a) $a=3b$ (b) $a=b^3$

(c) $b=a^3$ (d) इनमें से कोई नहीं

29. यदि $(x+y)^n$ के विस्तार में गुणांकों का योग 4096 है, तो इसके विस्तार में महत्तम गुणांक का मान होगा

[Kurukshetra CEE 1998; AIEEE 2002]

(a) 1024 (b) 924

(c) 824 (d) 724

30. यदि $(\alpha x^2-2x+1)^{35}$ के प्रसार में गुणांकों का योग $(x-\alpha y)^{35}$ के प्रसार में गुणांकों के योग के बराबर हो, तब $\alpha=$

(a) 0

(b) 1

(c) कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है

(d) ऐसे मान का अस्तित्व नहीं है

31. सभी n प्राकृत संख्याओं के लिए, $3^{n+2}-8n-9$ किससे विभाज्य है। [IIT 1977]

(a) 16 (b) 128

(c) 256 (d) इनमें से कोई नहीं

32. 17^{30} को 5 से विभाजित करने पर न्यूनतम शेषफल होगा

[Karnataka CET 2003]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

33. प्राकृत संख्या n के किस मान के लिए असमिका $2^n>2n+1$ मान्य होगी । [MNR 1994]

(a) $n\geq 3$ के लिए

(b) $n<3$ के लिए

(c) mn के लिए

(d) केवल n के लिए

34. माना $P(n)$ कोई कथन है तथा सभी प्राकृत संख्या n के लिए, $P(n)\Rightarrow P(n+1)$, तो $P(n)$ सत्य होगा

(a) n के सभी मानों के लिए

(b) $n>1$ के लिए

(c) $n>m$ के लिए जहाँ m स्थिर धनात्मक पूर्णांक है

(d) कुछ नहीं कहा जा सकता

35. $(1+x)^n-nx-1$ किसके द्वारा विभाज्य है जहाँ $n\in N$

(a) $2x$ (b) x^2

(c) $2x^3$ (d) उपरोक्त सभी से

Answers

द्विपद प्रमेय का प्रसार

1	c	2	c	3	d	4	b	5	c
6	b	7	a	8	c	9	b	10	b
11	c	12	c	13	a	14	d	15	c

व्यापक पद, x की घात का गुणांक, स्वतंत्रा पद, मध्य पद व महत्तम पद और महत्तम गुणांक

1	b	2	d	3	c	4	b	5	c
6	c	7	a	8	c	9	a	10	b
11	c	12	d	13	b	14	b	15	c
16	d	17	b	18	c	19	a	20	a
21	c	22	a	23	c	24	c	25	b
26	c	27	c	28	b	29	b	30	c
31	c	32	d	33	d	34	a	35	c
36	a	37	c	38	b	39	b	40	d
41	d	42	b	43	c	44	a	45	a
46	b	47	b	48	c	49	a	50	d
51	b	52	d	53	c	54	b	55	d
56	b	57	d	58	b	59	b	60	a
61	b	62	c	63	b	64	a	65	a
66	b	67	a	68	d	69	b	70	c
71	a	72	c	73	b	74	b	75	d
76	b								

द्विपद गुणांकों के गुणधर्म

1	a	2	a	3	c	4	b	5	c
6	c	7	c	8	c	9	b	10	d
11	c	12	b	13	a	14	d	15	c
16	c	17	a	18	d	19	b	20	c
21	b	22	c	23	c	24	a	25	c
26	a	27	c	28	a	29	b	30	a
31	a	32	b	33	c	34	b	35	b,d
36	b	37	b	38	d	39	b	40	c
41	a	42	d	43	c	44	c		

किसी भी घातांक के लिए द्विपद प्रमेय

1	b	2	a	3	d	4	a	5	b
6	a	7	b	8	a	9	b	10	d
11	c	12	c	13	d	14	c	15	a
16	a	17	a	18	c	19	b	20	d
21	c	22	a	23	b	24	b	25	a
26	b	27	d	28	d	29	a	30	c
31	b	32	c	33	c	34	a		

बहुपद प्रमेय,$(a^{1/p}+b^{1/q})$ के प्रसार में करणीगत चिन्हों से स्वतंत्रा पद, तीन/चार क्रमागत पदों या गुणांकों पर आधारित प्रश्न

1	b	2	b	3	c	4	c	5	c
6	b	7	b	8	a	9	b	10	b
11	a	12	c	13	b	14	b	15	a
16	b	17	c						

गणितीय आगमन और विभाजिता सम्बन्धी प्रश्न

1	a	2	a	3	a	4	c	5	b
6	b	7	c	8	b	9	b	10	b
11	b	12	c	13	d	14	d	15	a
16	c	17	d	18	a	19	c	20	b
21	c	22	a,d	23	c				

Critical Thinking Questions

1	b	2	a	3	b	4	b	5	a
6	c	7	b	8	a	9	a	10	c
11	a	12	d	13	d	14	b	15	c
16	c	17	d	18	c	19	b	20	a
21	c	22	b	23	c	24	d	25	c
26	b	27	c	28	b	29	b	30	b
31	a	32	d	33	a	34	d	35	b

Answers and Solutions

द्विपद प्रमेय का प्रसार

1. (c) $(x+a)^n-(x-a)^n$

$=2[{}^nC_1x^{n-1}a+{}^nC_3x^{n-3}a^3+{}^nC_5x^{n-5}a^5+......]$

$\therefore (\sqrt{2}+1)^6-(\sqrt{2}-1)^6$

$=2[{}^6C_1(\sqrt{2})^5(1)^1+{}^6C_3(\sqrt{2})^3(1)^3+{}^6C_5(\sqrt{2})^1(1)^5]$

$\because (\sqrt{2}+1)^6-(\sqrt{2}-1)^6=2[6\times 4\sqrt{2}+20\times 2\sqrt{2}+6\sqrt{2}]$

$=2[24\sqrt{2}+40\sqrt{2}+6\sqrt{2}]=140\sqrt{2}$.

2. (c) $(x+a)^n={}^nC_0x^n+{}^nC_1x^{n-1}a+{}^nC_2x^{n-2}a^2+.....$

अतः

$(x+2a)^5=x^5+10x^4a+40x^3a^2+80x^2a^3+80xa^4+32a^5$.

3. (d) व्यंजक को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है $a^m\left\{\left(1+\frac{b}{a}\right)^m\right\}$

अतः यह तभी परिभाषित होगा जब $\left|\frac{b}{a}\right|<1 \Rightarrow |b|<|a|$.

4. (b) हम जानते हैं कि

$\frac{1}{2}\{(1+a)^n+(1-a)^n\}={}^nC_0+{}^nC_2a^2+{}^nC_4a^4+.....$

अतः $\{(x+a)^{100}+(x-a)^{100}\}$ के प्रसार में पदों की संख्या 51 है।

5. (c) दिया गया व्यंजक $5^{-1/2}\left(1+\frac{4}{5}x\right)^{-1/2}$ है यह तभी परिभाषित होगा जब $\left|\frac{4}{5}x\right|<1 \Rightarrow |x|<\frac{5}{4}$.

6. (b) $(\sqrt{5}+1)^5-(\sqrt{5}-1)^5$

$=2\{{}^5C_1(\sqrt{5})^4+{}^5C_3(\sqrt{5})^2+{}^5C_5.1\}=352$

7. (a) व्यंजक गुणोत्तर श्रेणी में है

अतः $E=1+(1+x)+(1+x)^2+....+(1+x)^n$

$=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{(1+x)-1}=x^{-1}\{(1+x)^{n+1}-1\}$

$\therefore$ E मे x का गुणांक

$=\{(1+x)^{n+1}-1\}$ में x^{k+1} का गुणांक $={}^{n+1}C_{k+1}$.

8. (c) यहाँ

$101^{50}=(100+1)^{50}=100^{50}+50.100^{49}+\frac{50.49}{2.1}100^{48}+....$ .....(i)

एवं $99^{50}=(100-1)^{50}=100^{50}-50.100^{49}+\frac{50.49}{2.1}100^{48}-..$ .....(ii)

(i) में से (ii) को घटाने पर

$101^{50}-99^{50}=100^{50}+2\frac{50.49.48}{1.2.3}100^{47}>100^{50}$

अतः $101^{50}>100^{50}+99^{50}$.

9. (b) $(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+....$

$\therefore (1+x)^n-nx-1=x^2\left[\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x+....\right]$

अतः $(1+x)^n-nx-1$, x से विभाजित है।

10. (b) $(x+a)^n$ के प्रसार में a की जगह ai व $-ai$ रखने पर

$(x+ai)^n=(T_0-T_2+T_4-....)+i(T_1-T_3+T_5-....)$ ....(i)

व $(x-ai)^n=(T_0-T_2+T_4-....)-i(T_1-T_3+T_5-....)$ ......(ii)

(ii) व (i) का गुणा करने पर,

$(x^2+a^2)^n=(T_0-T_2+T_4-....)^2+(T_1-T_3+T_5-....)^2$

11. (c) दिया गया व्यंजक

$=2[1+{}^9C_2(3\sqrt{2}x)^2+{}^9C_4(3\sqrt{2}x)^4+{}^9C_6(3\sqrt{2}x)^6+{}^9C_8(3\sqrt{2}x)^8]$

अतः अशून्य पदों की संख्या 5 है।

12. (c) $(1+100)^{100}=1+100.100+\frac{100.99}{1.2}.(100)^2+\frac{100.99.98}{1.2.3}(100)^3+....$

$(101)^{100}-1=100.100\left[1+\frac{100.99}{1.2}+\frac{100.99.98}{1.2.3}.100+....\right]$

अतः स्पष्ट है कि

$(101)^{100}-1$, $(100)^2=10000$ से विभाजित है।

13. (a) $(1.0002)^{3000}=(1+0.0002)^{3000}$

$=1+(3000)(0.0002)+\frac{(3000)(2999)}{1.2}(0.0002)^2+\frac{(3000)(2999)(2998)}{1.2.3}(0.0002)^3+$

दशमलव के एक स्थान तक सही उत्तर देने के लिए आगे वाले पदों को छोड़ने पर

$=1+(3000)(0.0002)=1.6$

14. (d) हम जानते हैं कि $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ और $2<e<3$.

$\therefore (1+0.0001)^{10000}<3$ ($n=10000$ रखने पर)

$(1+0.0001)^{10000}=1+10000\times 10^{-4}+\frac{10000\times 9999}{2!}\times 10^{-8}+......$ 10001 पदों तक

$\Rightarrow (1+0.0001)^{10000}>2$. अतः 3 वह धनात्मक पूर्णांक है जो कि $(1+0.0001)^{10000}>2$ ठीक बड़ा है।

अतः विकल्प (d) सही है।

15. (c) $7^2=49=50-1$

अब $7^{300}=(7^2)^{150}=(50-1)^{150}$

$={}^{150}C_0(50)^{150}(-1)^0+{}^{150}C_1(50)^{149}(-1)^1+......+{}^{150}C_{150}(50)^0(-1)^{150}$

7^{300} का अंतिम अंक ${}^{150}C_{150}.1.1$ अर्थात् 1 है।

व्यापक पद, x की घात का गुणांक, स्वतंत्रा पद, मध्य पद व महत्तम पद और महत्तम गुणांक

1. (b) $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} a^r$, $(x+a)^n$ के लिए

अतः $T_6 = {}^{10}C_5 (2x^2)^5 \left(-\frac{1}{3x^2}\right)^5$

$= -\frac{10!}{5!5!} 32 \times \frac{1}{243} = -\frac{896}{27}$

2. (d) $T_3 = {}^nC_2 (x)^{n-2} \left(-\frac{1}{2x}\right)^2$ एवं $T_4 = {}^nC_3 (x)^{n-3} \left(-\frac{1}{2x}\right)^3$

लेकिन प्रश्नानुसार,

$\frac{-n(n-1)\times 3\times 2\times 1\times 8}{n(n-1)(n-2)\times 2\times 1\times 4} = \frac{1}{2} \Rightarrow n = -10$

3. (c) ${}^{20}C_{r-1} = {}^{20}C_{r+3} \Rightarrow 20 - r + 1 = r + 3 \Rightarrow r = 9$.

4. (b) $(a+2x)^n$ का rवाँ पद ${}^nC_{r-1}(a)^{n-r+1}(2x)^{r-1}$

$= \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!} a^{n-r+1}(2x)^{r-1}$

$= \frac{n(n-1).....(n-r+2)}{(r-1)!} a^{n-r+1}(2x)^{r-1}$

5. (c) $T_{16} = {}^{17}C_{15}(\sqrt{x})^2(-\sqrt{y})^{15}$

$= -\frac{17\times 16}{2\times 1} \times xy^{15/2} = -136\, xy^{15/2}$

6. (c) $\frac{1}{6} = \frac{{}^nC_6 (2^{1/3})^{n-6}(3^{-1/3})^6}{{}^nC_{n-6}(2^{1/3})^6 (3^{-1/3})^{n-6}}$ या $6^{-1} = 6^{-4}.6^{n/3} = 6^{n/3-4}$

$\therefore \frac{n}{3} - 4 = -1 \Rightarrow n = 9$.

7. (a) ${}^{15}C_{2r+2} = {}^{15}C_{r-2}$

लेकिन ${}^{15}C_{2r+2} = {}^{15}C_{15-(2r+2)} = {}^{15}C_{13-2r}$

$\Rightarrow {}^{15}C_{13-2r} = {}^{15}C_{r-2} \Rightarrow r = 5$.

8. (c) $T_r = {}^{15}C_{r-1}(x^4)^{16-r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{r-1} = {}^{15}C_{r-1}x^{67-7r}$

$\Rightarrow 67 - 7r = 4 \Rightarrow r = 9$.

9. (a) $T_{r+1} = {}^{21}C_r \left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}\right)^{21-r}\left(\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^r$

$= {}^{21}C_r a^{7-(r/2)} b^{(2/3)r-(7/2)}$

$\because$ a तथा b की घातें समान हैं

$\therefore 7 - \frac{r}{2} = \frac{2}{3}r - \frac{7}{2} \Rightarrow r = 9$

10. (b) $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ...$

परिकल्पना से $\frac{m(m-1)}{2}x^2 = -\frac{1}{8}x^2$

$\Rightarrow 4m^2 - 4m = -1 \Rightarrow (2m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$.

11. (c) $T_1 = {}^nC_0 = 1$ .....(i)

$T_2 = {}^nC_1 ax = 6x$ .....(ii)

$T_3 = {}^nC_2 (ax)^2 = 16x^2$ .....(iii)

(ii) से $\frac{n!}{(n-1)!}a = 6 \Rightarrow na = 6$ .....(iv)

(iii) से $\frac{n(n-1)}{2}a^2 = 16$ .....(v)

केवल विकल्प (c) समीकरण (iv) व (v) को संतुष्ट करता है।

12. (d) $T_r = {}^{14}C_{r-1}x^{r-1}$; $T_{r+1} = {}^{14}C_r x^r$; $T_{r+2} = {}^{14}C_{r+1}x^{r+1}$

प्रतिबंधानुसार $2.{}^{14}C_r = {}^{14}C_{r-1} + {}^{14}C_{r+1}$ .....(i)

$\Rightarrow 2.\frac{14!}{r!\,(14-r)!} = \frac{14!}{(r-1)!\,(15-r)!} + \frac{14!}{(r+1)!(13-r)!}$

$\Rightarrow \frac{2}{r.(r-1)!.(14-r).(13-r)!}$

$= \frac{1}{(r-1)!.(15-r).(14-r).(13-r)!} + \frac{1}{(r+1)r(r-1)!(13-r)!}$

$\Rightarrow \frac{2}{r(14-r)} = \frac{1}{(15-r)(14-r)} + \frac{1}{(r+1)r}$

$\Rightarrow \frac{1}{r(14-r)} - \frac{1}{(15-r)(14-r)} = \frac{1}{(r+1)r} - \frac{1}{r(14-r)}$

$\Rightarrow \frac{(15-r)-r}{r(15-r)(14-r)} = \frac{(14-r)-(r+1)}{(r+1)r(14-r)}$

$\Rightarrow \frac{15-2r}{15-r} = \frac{13-2r}{r+1}$

$\Rightarrow 15r + 15 - 2r^2 - 2r = 195 - 30r - 13r + 2r^2$

$\Rightarrow 4r^2 - 56r + 180 = 0 \Rightarrow r^2 - 14r + 45 = 0$

$\Rightarrow (r-5)(r-9) = 0 \Rightarrow r = 5, 9$

लेकिन 5 किसी भी विकल्प में नहीं दिया है अतः $r = 9$ होगा।

ट्रिक : विकल्प से r का मान समीकरण (i) में रखने पर केवल (d) इसे संतुष्ट करता है।

13. (b) $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$ के प्रसार में व्यापक पद

$T_{r+1} = {}^5C_r (x^2)^{5-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r = {}^5C_r a^r x^{10-3r}$

जहाँ x की घात $10 - 3r = 1 \Rightarrow r = 3$ है

$\therefore T_{2+1} = {}^5C_3 a^3 x = 10a^3.x$

अतः x का गुणांक $10a^3$ है।

14. (b) $(1+x)^n$ के प्रसार में p वें, $(p+1)$ वें व $(p+2)$ वें पद क्रमशः ${}^nC_{p-1}, {}^nC_p, {}^nC_{p+1}$ हैं।

तब $2\,{}^nC_p = {}^nC_{p-1} + {}^nC_{p+1}$

$\Rightarrow n^2 - n(4p+1) + 4p^2 - 2 = 0$

ट्रिक: माना $p = 1$, अतः ${}^nC_0, {}^nC_1$ व ${}^nC_2$ समान्तर श्रेणी में होंगे।

$\Rightarrow 2.{}^nC_1 = {}^nC_0 + {}^nC_2 \Rightarrow 2n = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$

$\Rightarrow 4n = 2 + n^2 - n \Rightarrow n^2 - 5n + 2 = 0$

जो (b) द्वारा प्राप्त होता है।

15. (c) $\left[\exp\frac{a}{x}\right]^{12-r} + [\exp bx]^r = -10$

$\Rightarrow -12 + r + r = -10 \Rightarrow r = 1$

x^{-10} का गुणांक ${}^{12}C_1(a)^{11}(b)^1 = 12a^{11}b$.

16. (d) $x^{n-r}a^r$ व $x^r a^{n-r}$ के गुणांकों का अनुपात

$= \frac{{}^nC_r}{{}^nC_{n-r}} = \frac{{}^nC_r}{{}^nC_r} = \frac{1}{1}$

17. (b) $\frac{(1+x)^{2n} \text{ के प्रसार में } x^n \text{ का गुणांक}}{(1+x)^{2n-1} \text{ के प्रसार में } x^n \text{ का गुणांक}}$

$= \frac{{}^{2n}C_n}{{}^{(2n-1)}C_n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \times \frac{(n-1)!n!}{(2n-1)!}$

$= \frac{(2n)(2n-1)!(n-1)!}{n(n-1)!\,(2n-1)!} = \frac{2n}{n} = 2:1$

$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{2}{1} \Rightarrow A = 2B$.

18. (c) $2(5-r) + (-1)\,r = 1 \Rightarrow 10 - 2r - r = 1 \Rightarrow r = 3$

अतः y का गुणांक ${}^5C_3c^3 = \frac{5\times4}{2\times1}c^3 = 10c^3$.

19. (a) x^p का गुणांक $= {}^{(p+q)}C_p$ एवं x^q का गुणांक ${}^{(p+q)}C_q$.

परन्तु ${}^{(p+q)}C_p = {}^{(p+q)}C_q$, $(\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$.

20. (a) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$ के प्रसार में व्यापक पद

$= {}^6C_r x^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}^6C_r(-1)^r x^{6-2r}$

x से स्वतंत्र पद के लिए $6 - 2r = 0 \Rightarrow r = 3$

अभीष्ट गुणांक $= (-1)^3.{}^6C_3 = -20$.

21. (c) $(x^2 - 2x)^{10}$ के प्रसार में x^{16} का गुणांक

$=$ $x^{10}(x-2)^{10}$ के प्रसार में x^{16} का गुणांक

$=$ $(x-2)^{10}$ के प्रसार में x^6 का गुणांक

$= {}^{10}C_4.2^4,\ \left(\because T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r}a^r\right)$

$= 210 \times 16 = 3360$.

22. (a) $\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x^2}\right)^{10}$ के प्रसार में व्यापक पद =

$T_{r+1} = {}^{10}C_r\left(\frac{x}{2}\right)^{10-r}.\left(-\frac{3}{x^2}\right)^r$

$= {}^{10}C_r(-1)^r.\frac{3^r}{2^{10-r}}x^{10-r-2r}$

यहाँ x की घात 4 है। अतः $10 - 3r = 4 \Rightarrow r = 2$

$\therefore\ T_{2+1} = {}^{10}C_2\left(\frac{x}{2}\right)^8\left(-\frac{3}{x^2}\right)^2 = \frac{10.9}{1.2}.\frac{1}{2^8}.3^2.x^4$

$= \frac{405}{256}x^4$

$\therefore$ अभीष्ट गुणांक $= \frac{405}{256}$.

23. (c) T_5 का गुणांक $= {}^nC_4, T_6 = {}^nC_5$ व $T_7 = {}^nC_6$

प्रतिबंध के अनुसार $2\ {}^nC_5 = {}^nC_4 + {}^nC_6$

$\Rightarrow 2\left[\frac{n!}{(n-5)!5!}\right] = \left[\frac{n!}{(n-4)!4!} + \frac{n!}{(n-6)!6!}\right]$

$\Rightarrow 2\left[\frac{1}{(n-5)5}\right] = \left[\frac{1}{(n-4)(n-5)} + \frac{1}{6\times5}\right]$

सरल करने पर n=7 या 14.

24. (c) $(8-r)(2) + r(-1) = 7 \Rightarrow 16 - 2r - r = 7 \Rightarrow r = 3$

अतः x का गुणांक

$= {}^8C_3\left(\frac{1}{2}\right)^5(-2)^3 = -\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}\times\frac{1}{4} = -14$.

25. (b) पदों की संख्या के लिए

$(11-r)(1) + r(-2) = -7 \Rightarrow 11 - r - 2r = -7 \Rightarrow r = 6$

अतः x^7 का गुणांक ${}^{11}C_6(a)^5\left(-\frac{1}{b}\right)^6 = \frac{462}{b^6}a^5$

26. (c) दिया गया व्यंजक है

$[(x-3)+2]^{100} = (x-1)^{100} = (1-x)^{100}$.

$\therefore\ x^{53}$, T_{54} में आएगा

$T_{54} = {}^{100}C_{53}(-x)^{53}$

$\therefore$ गुणांक $- {}^{100}C_{53}$ है।

27. (c) माना T_{r+1} वें पद में x^{32} है

अतः ${}^{15}C_r x^{4r}\left(\frac{-1}{x^3}\right)^{15-r}$

$\Rightarrow x^{4r}x^{-45+3r} = x^{32} \Rightarrow 7r = 77 \Rightarrow r = 11$.

अतः x^{32} का गुणांक ${}^{15}C_{11}$ या ${}^{15}C_4$ हैं।

28. (b) T_8 तथा T_9 में x^7, x^8 आयेंगे

चूँकि T_8 एवं T_9 के गुणांक बराबर हैं

$\therefore {}^nC_7 2^{n-7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 = {}^nC_8 2^{n-8}\left(\frac{1}{3}\right)^8 \Rightarrow n = 55$.

29. (b) $7 - 2r = 3 \Rightarrow r = 2$

$\therefore$ गुणांक $= {}^7C_2 = 21$.

30. (c) $(1+x)^m(1-x)^n$

$= \left(1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + ...\right)\left(1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - ....\right)$

$= 1 + (m-n)x + \left[\frac{n^2-n}{2} - mn + \frac{(m^2-m)}{2}\right]x^2 + ...$

दिया है, $m - n = 3$ या $n = m - 3$

अतः $\frac{n^2-n}{2} - mn + \frac{m^2-m}{2} = -6$

$\Rightarrow \frac{(m-3)(m-4)}{2} - m(m-3) + \frac{m^2-m}{2} = -6$

$\Rightarrow m^2 - 7m + 12 - 2m^2 + 6m + m^2 - m + 12 = 0$

$\Rightarrow -2m + 24 = 0 \Rightarrow m = 12$

31. (c) $T_{r+1} = {}^{2n}C_r x^{2n-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = {}^{2n}C_r x^{2n-3r}$,

$2n - 3r = m$ अर्थात् $r = \frac{2n-m}{3}$

$\therefore$ x का गुणांक $= {}^{2n}C_r$, $r = \frac{2n-m}{3}$

$= \frac{2n!}{(2n-r)!r!} = \frac{2n!}{\left(2n - \frac{2n-m}{3}\right)!\left(\frac{2n-m}{3}\right)!}$

$= \frac{2n!}{\left(\frac{4n+m}{3}\right)!\left(\frac{2n-m}{3}\right)!}$.

32. (d) द्वितीय, तृतीय तथा चतुर्थ पदों के गुणांक क्रमशः ${}^nC_1, {}^nC_2$ तथा ${}^nC_3$ समान्तर श्रेणी में हैं

$\Rightarrow 2.{}^nC_2 = {}^nC_1 + {}^nC_3$

$\Rightarrow \frac{2n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{3!(n-3)!}$

हल करने पर, $n^2 - 9n + 14 = 0 \Rightarrow n^2 - 9n = -14$.

33. (d) $(1 + x + x^3 + x^4)^{10} = (1+x)^{10}(1+x^3)^{10}$

$= (1 + {}^{10}C_1.x + {}^{10}C_2.x^2 + ...)\ (1 + {}^{10}C_1.x^3 + {}^{10}C_2.x^6 + ...)$

$\therefore x^4$ का गुणांक $= {}^{10}C_1.{}^{10}C_1 + {}^{10}C_4 = 310$.

34. (a) $(1+x)^{43}$ के विस्तार में $(2r+1)$वें पद का गुणांक $= {}^{43}C_{2r}$ और $(r+2)$वें पद का गुणांक $= \{(r+1)+1\}$वें पद का गुणांक $= {}^{43}C_{r+1}$

प्रश्नानुसार ${}^{43}C_{2r} = {}^{43}C_{r+1} = {}^{43}C_{43-(r+1)}$

तब $2r = 43 - (r+1)$ या $3r = 42$ या $r = 14$.

35. (c) $T_4 = T_{3+1} = {}^nC_3\ a^{n-3}b^3$

$\Rightarrow {}^nC_3 = 56 \Rightarrow \frac{n!}{3!\ (n-3)!} = 56$

$\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 56.6 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 8.7.6$

$\Rightarrow n = 8$.

36. (a) $T_{r+1} = {}^{15}C_r(x^4)^{15-r}(-1/x^3)^r = (-1)^r\ {}^{15}C_r(x)^{60-7r}$

x^{39} के गुणांक के लिए $60 - 7r = 39 \Rightarrow r = 3$

$\therefore T_4 = {}^{15}C_3(x^4)^{12}(-1/x^3)^3 = -455\ x^{39}$

अतः अभीष्ट गुणांक – 455 है

37. (c) $(1+x)^{21} + (1+x)^{22} + ... + (1+x)^{30}$

$= (1+x)^{21}\left[\frac{(1+x)^{10}-1}{(1+x)-1}\right] = \frac{1}{x}[(1+x)^{31} - (1+x)^{21}]$

$\therefore$ दिये गये व्यंजक में x का गुणांक

$= \left\{\frac{1}{x}[(1+x)^{31} - (1+x)^{21}]\right\}$ में x का गुणांक

$= [(1+x)^{31} - (1+x)^{21}]$ में x का गुणांक

$= {}^{31}C_6 - {}^{21}C_6$.

38. (b) $T_2 = {}^{2n}C_1\ x$, $T_3 = {}^{2n}C_2\ x^2$, $T_4 = {}^{2n}C_3\ x^3$

T_2, T_3, T_4 के गुणांक समान्तर श्रेणी में हैं।

$\Rightarrow 2.{}^{2n}C_2 = {}^{2n}C_1 + {}^{2n}C_3$

$\Rightarrow 2\frac{2n!}{2!(2n-2)!} = \frac{2n!}{(2n-1)!} + \frac{2n!}{3!(2n-3)!}$

$\Rightarrow \frac{2.2n(2n-1)}{2} = 2n + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}$

$\Rightarrow n(2n-1) = n + \frac{(n)(2n-1)(2n-2)}{6}$

$\Rightarrow 6(2n^2 - n) = 6n + 4n^3 - 6n^2 + 2n$

$\Rightarrow 6n(2n-1) = 2n(2n^2 - 3n + 4)$

$\Rightarrow 6n - 3 = 2n^2 - 3n + 4$

$\Rightarrow 0 = 2n^2 - 9n + 7 \Rightarrow 2n^2 - 9n + 7 = 0$.

39. (b) यहाँ $T_{r+1} = {}^9C_r\left(\frac{x^2}{2}\right)^{9-r}\left(\frac{-2}{x}\right)^r$

$= {}^9C_r\frac{x^{18-3r}(-2)^r}{2^{9-r}}$, x^{-9} के गुणांक के लिए $18 - 3r = -9$

अर्थात् $r = 9$ x^{-9} का गुणांक

$= {}^9C_9\frac{(-2)^9}{2^0} = -2^9 = -512$.

40. (d) $T_{r+1} = {}^9C_r(3)^{9-r}(ax)^r = {}^9C_r(3)^{9-r}a^r x^r$

$\therefore$ x^r का गुणांक $= {}^9C_r 3^{9-r}a^r$

अतः x^2 का गुणांक $= {}^9C_2 3^{9-2}a^2$ तथा x^3 का गुणांक $= {}^9C_3 3^{9-3}a^3$

अतः ${}^9C_2 3^7 a^2 = {}^9C_3 3^6 a^3$

$\Rightarrow \frac{9.8}{1.2}.3 = \frac{9.8.7}{1.2.3}.a \Rightarrow a = \frac{9}{7}$.

41. (d) $T_2 = n(x)^{n-1}(a)^1 = 240$ .....(i)

$T_3 = \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}a^2 = 720$ .....(ii)

$T_4 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}a^3 = 1080$ .....(iii)

x को विलोपित करने पर,

$\frac{T_2.T_4}{T_3^2} = \frac{240.1080}{720.720} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_3}.\frac{T_4}{T_3} = \frac{1}{2}$

अब $\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$

उपरोक्त व्यंजक में $r = 3$ एवं 2 रखने पर

$\Rightarrow \frac{n-2}{3}.\frac{2}{n-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 5$.

42. (b) pवां पद $= T_p = {}^nC_{p-1}(x)^{n-p+1}(1)^{p-1} = p$

$(p+1)$वां पद $= T_{p+1} = {}^nC_p(x)^{n-p}(1)^p = q$

तब $\frac{p}{q}$ का गुणांक $= \frac{{}^nC_{p-1}}{{}^nC_p}$

$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!}.\frac{p!\ (n-p)!}{n!}$

$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{p}{n-p+1}$

$\Rightarrow p + q = n + 1$.

43. (c) $T_{r+1} = {}^8C_r(x)^{8-r}\left(-\frac{1}{2x}\right)^r = {}^8C_r\left(\frac{-1}{2}\right)^r x^{8-r-r}$

x^2 के गुणांक के लिए $8-2r=2 \Rightarrow r=3$

x^2 का गुणांक $= {}^8C_3\left(\frac{-1}{2}\right)^3 = -\frac{8!}{5!3!}\frac{1}{2^3} = -7$.

44. (a) $T_{r+1} = {}^6C_r x^{6-r} 3^r$

x^5 के गुणांक के लिए $6 - r = 5 \Rightarrow r = 1$

x^5 का गुणांक $= {}^6C_1 3^1 = 18$.

45. (a) $T_{r+1} = {}^{15}C_r (x^4)^{15-r}\left(\frac{-1}{x^3}\right)^r$

$\therefore T_{r+1} = {}^{15}C_r \frac{(x)^{60-4r}(-1)^r}{(x)^{3r}} = {}^{15}C_r(-1)^r(x)^{60-7r}$

अब $60-7r=32$ रखने पर

$\Rightarrow 60-32=7r \Rightarrow r=\frac{28}{7}=4$

$\therefore r^{32}$ का गुणांक $= {}^{15}C_4(-1)^4 = {}^{15}C_4$.

46. (b) $T_{r+1} = {}^{21}C_r(1)^{21-r}(x)^r = {}^{21}C_r$

$\therefore x^r$ का गुणांक $= {}^{21}C_r$ तथा x^{r+1} का गुणांक $= {}^{21}C_{r+1}$

अतः ${}^{21}C_r = {}^{21}C_{r+1} \Rightarrow r = 10$.

47. (b) $(10-r)\left(\frac{1}{2}\right)+r(-2)=0 \Rightarrow 5-\frac{r}{2}-2r=0 \Rightarrow r=2$

अतः x से स्वतंत्र पद

$= {}^{10}C_2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{10\times 9}{2\times 1}\times\frac{1}{3\times3\times2\times2} = \frac{5}{4}$

48. (c) $\frac{1}{3}(8-r)+r\left(-\frac{1}{5}\right)=0 \Rightarrow \frac{8}{3}-\frac{r}{3}-\frac{r}{5}=0 \Rightarrow r=5$

अतः x से स्वतंत्र पद $= {}^8C_5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3(1)^5$

$= \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}\times\frac{1}{8} = 7$

49. (a) $\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{1}{3x}\right)^9$ के प्रसार में व्यापक पद

$T_{r+1} = {}^9C_r.\left(\frac{3x^2}{2}\right)^{9-r}\left(-\frac{1}{3x}\right)^r = {}^9C_r\left(\frac{3}{2}\right)^{9-r}\left(-\frac{1}{3}\right)^r x^{18-3r}$

x से स्वतंत्र पद के लिए $18 - 3r = 0 \Rightarrow r = 6$

अतः $T_{6+1} = {}^9C_6\left(\frac{3}{2}\right)^{9-6}\left(-\frac{1}{3}\right)^6 = {}^9C_3.\frac{1}{6^3}$

50. (d) $(x)^{12-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = x^0 \Rightarrow x^{12-3r} = x^0 \Rightarrow r = 4$

अतः अभीष्ट पद ${}^{12}C_4 2^8\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 7920$.

51. (b) $(15-r)(1)+r(-2)=0 \Rightarrow 15-3r=0 \Rightarrow r=5$

अतः x से स्वतंत्र पद

$= {}^{15}C_5(1)^{10}(2)^5 = {}^{15}C_5 2^5$.

52. (d) $(9-r)(2)+r(-1)=0$

$\Rightarrow 18-2r-r=0 \Rightarrow r=6$

तब x से स्वतंत्र पद ${}^9C_6(1)^3(-1)^6 = 84$ है

53. (c) $1(6-r)+(-1)r=0 \Rightarrow r=3,$ अतः चौथा पद x से स्वतंत्र होगा अर्थात् ${}^6C_3(2x)^3\left(\frac{1}{3x}\right)^3 = 20\times8\times\frac{1}{27} = \frac{160}{27}$.

54. (b) $\left(x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$ में

$T_{r+1} = {}^9C_r(x^2)^{9-r}\left(-\frac{1}{3x}\right)^r = {}^9C_r x^{18-2r}\frac{(-1)^r}{3^r}x^{-r}$

यह x से स्वतंत्र पद है।

$\therefore 18-3r=0 \Rightarrow r=6$

$\therefore T_7 = {}^9C_6 x^{18-12}\frac{(-1)^6}{3^6}x^{-6} = {}^9C_6\frac{(-1)^6}{36} = \frac{28}{243}$

55. (d) $T_{r+1} = {}^6C_r(2x)^{6-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r = {}^6C_r(2)^{6-r}(-3)^r(x)^{6-2r}$

x से स्वतंत्र पद के लिए $6-2r=0$ अर्थात् $r=3$

$\therefore T_4 = {}^6C_3 2^{6-3}(-3)^3 = -4320$.

56. (b) $T_{r+1} = {}^{12}C_r(2x^2)^{12-r}(-1)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r$

x से स्वतंत्र पद के लिए

$24-3r=0 \Rightarrow r=8$. अतः 9 वां पद x से स्वतंत्र है।

57. (d) $T_{r+1} = {}^9C_r(x)^{9-r}\left(-\frac{3}{x^2}\right)^r = {}^9C_r(-3)^r(x)^{9-3r}$

x से स्वतंत्र पद के लिए $9-3r=0 \Rightarrow r=3$

$T_4 = {}^9C_3(-3)^3 = -2268$.

58. (b) $\because n$ सम है अतः $\left(\frac{n}{2}+1\right)$वां पद मध्य पद होगा

अतः ${}^nC_{n/2}(x^2)^{n/2}\left(\frac{1}{x}\right)^{n/2} = 924x^6$

$\Rightarrow x^{n/2} = x^6 \Rightarrow n = 12$.

59. (b) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ का मध्य पद $T_6 = {}^{10}C_5$.

60. (a) $T_{r+1} = {}^{10}C_r(x^2)^{10-r}\left(\frac{-3\sqrt{3}}{x^3}\right)^r$

x से स्वतंत्र पद के लिए $20-2r-3r=0 \Rightarrow r=4$

$\therefore T_{4+1} = {}^{10}C_4(-3)^4(\sqrt{3})^4 = 153090$.

61. (b) यहाँ $n=10$, एक सम संख्या है अतः $\left(\frac{10+2}{2}\right)$वाँ अर्थात् छठवाँ पद मध्य पद होगा

$T_6 = {}^{10}C_5 x^5 \Rightarrow$ मध्य पद का गुणांक $= {}^{10}C_5$.

62. (c) मध्य पद = $T_{\frac{2n+2}{2}} = T_{n+1} = {}^{2n}C_n x^n = \frac{2n!}{(n!)^2}.x^n$.

63. (b) $(1+x)^{2n+2}$ का महत्तम गुणांक

$= {}^{(2n+2)}C_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{\{(n+1)!\}^2}$

64. (a) माना $(r+1)$वां पद महत्तम पद है, तब

$T_{r+1} = \sqrt{3}.\,{}^{20}C_r\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^r$ तथा $T_r = \sqrt{3}.\,{}^{20}C_{r-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{r-1}$

अब $\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{20-r+1}{r}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\therefore T_{r+1} \ge T_r \Rightarrow 20 - r + 1 \ge \sqrt{3}r$

$\Rightarrow 21 \ge r(\sqrt{3}+1) \Rightarrow r \le \frac{21}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow r \le 7.686 \Rightarrow r = 7$

अतः महत्तम पद

$T_8 = \sqrt{3}\;{}^{20}C_7\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^7 = \frac{25840}{9}$

65. (a) यदि n सम है, तब महत्तम गुणांक ${}^nC_{n/2}$ है

इसलिए महत्तम पद $= {}^nC_{n/2}x^{n/2}$

$\therefore {}^nC_{n/2}x^{n/2} > {}^nC_{(n/2)-1}x^{(n-2)/2}$

एवं ${}^nC_{n/2}x^{n/2} > {}^nC_{(n/2)+1}x^{(n/2)+1}$

$\Rightarrow \frac{n-\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}}x > 1$ एवं $\frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+1}x < 1$

$\Rightarrow x > \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+1}$ एवं $x < \frac{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}}$

$\Rightarrow x > \frac{n}{n+2}$ एवं $x < \frac{n+2}{n}$

66. (b) यहाँ महत्तम गुणांक ${}^{2n}C_n$ है।

$\therefore {}^{2n}C_n x^n > {}^{2n}C_{n+1}x^{n-1} \Rightarrow x > \frac{n}{n+1}$

तथा ${}^{2n}C_n x^n > {}^{2n}C_{n-1}x^{n+1} \Rightarrow x < \frac{n+1}{n}$

अतः अभीष्ट अंतराल $\left(\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n}\right)$ है।

67. (a) $\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{N-r+1}{r}.x$

यहाँ, $N = 2n+1 \Rightarrow \frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{2n+2-r}{r}.x$

$\therefore T_{r+1} \ge T_r$

$\Rightarrow 2n+2-r \ge r \Rightarrow 2n+2 \ge 2r \Rightarrow r \le n+1$

$\therefore r = n$

$T_{r+1} = T_{n+1} = {}^{2n+1}C_{n+1} = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}$.

68. (d) $(1+x+x^2+x^3)^n = \{(1+x)^n(1+x^2)\}$

$= (1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+....+{}^nC_nx^n)$

$(1+{}^nC_1x^2+{}^nC_2x^4+....+{}^nC_nx^{2n})$

अतः x का गुणांक

$= {}^nC_2+{}^nC_2.{}^nC_1+{}^nC_4 = {}^nC_4+{}^nC_2+{}^nC_1.{}^nC_2$

69. (b) $(1+x)^n = {}^nC_0+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+....+{}^nC_nx^n$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = {}^nC_0+{}^nC_1\frac{1}{x}+{}^nC_2\frac{1}{x^2}+....+{}^nC_n\left(\frac{1}{x}\right)^n$

स्पष्टतः $\frac{1}{x}$ का अभीष्ट गुणांक दिया जा सकता है:

${}^nC_0\,{}^nC_1+{}^nC_1\,{}^nC_2+....+{}^nC_{n-1}{}^nC_n = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$

70. (c) उपरोक्त प्रश्न की तरह स्पष्टतः x से स्वतंत्र पद

${}^nC_0.{}^nC_0+{}^nC_1.{}^nC_1+.....{}^nC_n.{}^nC_n = C_0^2+C_1^2+....+C_n^2$.

71. (a) $(1+t^2)^{12}(1+t^{12})(1+t^{24})$

$= (1+{}^{12}C_1t^2+{}^{12}C_2t^4+...+{}^{12}C_4t^8+...+{}^{12}C_{10}t^{20}+....)$

$(1+t^{12}+t^{24}+t^{36})$

$\therefore t^{24}$ का गुणांक $= {}^{12}C_6+2$.

72. (c) $(x^2-x-2)^5 = (x-2)^5(1+x)^5$

$= [\,{}^5C_0x^5 - {}^5C_1x^4\times 2+...\,]\;[\,{}^5C_0+{}^5C_1x+...\,]$

x का गुणांक

$= 1-5.5.2+10.10.4-10.10.8+5.5.16-32$

$= 1-50+400-800+400-32 = -81$.

73. (b) $(1+x)(1-x)^n$ के प्रसार में x^n का गुणांक

अर्थात् $(1-x)^n$ के प्रसार में x^n का गुणांक +

$(1-x)^n$ के प्रसार में x^{n-1} का गुणांक

$\therefore (-1)^n\,{}^nC_n+(-1)^{n-1}\,{}^nC_{n-1}$

$= (-1)^n[{}^nC_n-{}^nC_{n-1}] = (-1)^n[1-n]$.

74. (b) स्पष्टतः मध्य पद

$= {}^{2n}C_n(x)^n.\left(\frac{1}{2x}\right)^n = \frac{2n!}{n!n!.2^n} = \frac{1.3.5....(2n-1)}{n!}$.

75. (d) $(1+3x+2x^2)^6 = [1+x(3+2x)]^6$

$= 1+{}^6C_1x(3+2x)+{}^6C_2x^2(3+2x)^2$

$+{}^6C_3x^3(3+2x)^3+{}^6C_4x^4(3+2x)^4$

$+{}^6C_5x^5(3+2x)^5+{}^6C_6x^6(3+2x)^6$

x^{11} केवल ${}^6C_6x^6(3+2x)^6$ से प्राप्त होता है।

$\because {}^6C_6x^6(3+2x)^6 = x^6(3+2x)^6$

$\therefore x^{11}$ का गुणांक $= {}^6C_5\,3.2^5 = 576$.

76. (b) चूँकि n सम है

$\therefore$ 10वां पद मध्य पद है

$\Rightarrow T_{10} = {}^{18}C_9(x)^9.\left(-\frac{1}{x}\right)^9 = -{}^{18}C_9$.

द्विपद गुणांकों के गुणधर्म

1. (a) हम जानते हैं कि

$$2^{n-1} = {}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + ... = {}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + ...$$

अतः ${}^{10}C_1 + {}^{10}C_3 + {}^{10}C_5 + ... + {}^{10}C_9 = 2^{10-1} = 2^9$

2. (a) $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_rx^r + ...$ .....(i)

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = C_0 + C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{1}{x^2} + ... + C_r\frac{1}{x^r} + ...$ .....(ii)

दोनों समीकरणों का गुणा करके x^r के गुणांकों की तुलना करने पर अभीष्ट व्यंजक का मान

$= {}^{2n}C_{n+r} = \frac{(2n)!}{(n-r)!(n+r)!}$ प्राप्त होता है।

ट्रिक :

$n=1$ व $r=0$ पहले पद में रखने पर (दिये गये प्रतिबंध में)

(i) ${}^1C_0{}^1C_0 + {}^1C_1{}^1C_1 = 1+1 = 2$, $(\because r \le n)$

$n=2, r=1$ रखने पर

(ii) ${}^2C_0{}^2C_1 + {}^2C_1{}^2C_2 = 2+2 = 4$

अब विकल्पों से परीक्षण करने पर

(a) (i) $n=1, r=0$ रखने पर $\frac{2!}{(1)!\,(1)!} = 2$

(ii) $n=2, r=1$ रखने पर $\frac{4!}{(1)!\,(3)!} = 4$

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न को सर्वसमिका की तरह याद रखें।

3. (c) **ट्रिक :** n = 1, 2 रखने पर,

$n=1$ पर ${}^1C_0 - \frac{1}{2}{}^1C_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$n=2$ पर ${}^2C_0 - \frac{1}{2}{}^2C_1 + \frac{1}{3}{}^2C_2 = 1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

जो विकल्प (c) से प्राप्त होता हैं

4. (b) $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_nx^n$ .....(i)

एवं $\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = C_0 + C_1\frac{1}{x} + C_2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + ... + C_n\left(\frac{1}{x}\right)^n$ ....(ii)

(i) व (ii) का गुणा करने पर,

$C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + ... + C_n^2$, x से स्वतंत्र पद हैं जो कि $(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ में x से स्वतंत्र पद के बराबर होगा

या $\frac{1}{x^n}(1+x)^{2n}$ में या $(1+x)^{2n}$ में x^n के गुणांक के बराबर होगा या $(1+x)^{2n}$ में x^n का गुणांक $= T_{n+1}$

$= {}^{2n}C_n = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$

ट्रिक : $n=1, n=2, ...$ रखने पर $S_1 = {}^1C_0^2 + {}^1C_1^2 = 2$,

$S_2 = {}^2C_0^2 + {}^2C_1^2 + {}^2C_2^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$

अब विकल्पों से

(a) दिये गये प्रतिबंध को संतुष्ट नहीं करता है

(b) (i) $n=1$ रखने पर $\frac{2!}{1!1!} = 2$

(ii) $n=2$ रखने पर $\frac{4!}{2!2!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1} = 6$

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न को सर्वसमिका की तरह याद रखें।

5. (c) $\frac{C_1}{C_0} + 2.\frac{C_2}{C_1} + 3.\frac{C_3}{C_2} + ... + n.\frac{C_n}{C_{n-1}}$

$= \frac{n}{1} + 2\frac{n(n-1)/1.2}{n} + 3\frac{n(n-1)(n-2)/3.2.1}{n(n-1)/1.2} + ... + n.\frac{1}{n}$

$= n + (n-1) + (n-2).... + 1 = \sum n = \frac{n(n+1)}{2}$

ट्रिक : $n = 1,2,3$ ....., रखने पर $S_1 = \frac{{}^1C_1}{{}^1C_0} = 1$,

$S_2 = \frac{{}^2C_1}{{}^2C_0} + 2\frac{{}^2C_2}{{}^2C_1} = \frac{2}{1} + 2.\frac{1}{2} = 2+1 = 3$

विकल्पों से (n=1,2......रखने पर) (a) व (b) प्रतिबंध को संतुष्ट नहीं करते परन्तु (c) $\frac{n(n+1)}{2}$ में n =1, 2...... रखने पर,

$S_1 = 1, S_2 = 3$ जो कि सत्य है।

6. (c) **ट्रिक :** n = 1, 2, 3,.... रखने पर

$S_1 = 1,\ S_2 = 2+2 = 4$

अब विकल्प (c)में n = 1, 2 रखने पर

$S_1 = 1.2^0 = 1, S_2 = 2.2^1 = 4$

7. (c) $C_0, C_2, C_4 ....$, के मान रखने पर,

$= 1 + \frac{n(n-1)}{3.2!} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{5.4!} + ...$

$= \frac{1}{n+1}\left[(n+1) + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5!} + ...\right]$

$n+1 = N$ रखने पर,

$= \frac{1}{N}\left[N + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!} + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)}{5!} + ...\right]$

$= \frac{1}{N}\left\{{}^NC_1 + {}^NC_3 + {}^NC_5 + ...\right\}$

$= \frac{1}{N}\left\{2^{N-1}\right\} = \frac{2^n}{n+1}$ $\{\because N = n+1\}$

ट्रिक : n=1 रखने पर, $S_1 = \frac{{}^1C_0}{1} = \frac{1}{1} = 1$

n=2 रखने पर, $S_2 = \frac{{}^2C_0}{1} + \frac{{}^2C_2}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

(c) $\Rightarrow S_1 = 1, S_2 = \frac{4}{3}$

8. (c) उपरोक्त प्रश्न की तरह हल करें। $n+1=N$ रखने पर

$\frac{1}{N}\left\{{}^NC_1 + {}^NC_2 + {}^NC_3 + ...\right\}$

$= \frac{1}{N}\left\{2^N - 1\right\} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$ $(\because N = n+1)$

9. (b) प्रत्येक पद को $n!$ से गुणा करने पर,

$$\frac{n!}{1!(n-1)!}+\frac{1}{3!}.\frac{n!}{(n-3)!}+\frac{1}{5!}.\frac{n!}{(n-5)!}+....$$

$$={}^nC_1+{}^nC_3+{}^nC_5+....=2^{n-1}.$$

इस प्रकार $\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{3!(n-3)!}+\frac{1}{5!(n-5)!}+...=\frac{1}{n!}2^{n-1}$.

10. (d) $(1-x)^n=C_0-C_1x+C_2x^2-C_3x^3+.....$

$\Rightarrow x(1-x)^n=C_0x-C_1x^2+C_2x^3-C_3x^4+.....$

$\Rightarrow \int_0^1 x(1-x)^n dx=\int_0^1(C_0x-C_1x^2+C_2x^3....)dx$ ......(i)

LHS का समाकलन

$=\int_1^0(1-t)t^n(-dt),\ \ 1-x=t$ रखने पर

$$=\int_0^1(t^n-t^{n+1})dt=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

(i) के RHS का समाकलन

$$=\left[\frac{C_0x^2}{2}-\frac{C_1x^3}{3}+\frac{C_2x^4}{4}-....\right]=\frac{C_0}{2}-\frac{C_1}{3}+\frac{C_2}{4}-....$$

$\therefore\ \frac{C_0}{2}-\frac{C_1}{3}+\frac{C_2}{4}-....$ $(n+1)$ पदों तक

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

11. (c) हम लिख सकते हैं

$aC_0-(a+d)C_1+(a+2d)C_2-....$ $(n+1)$ पदों तक

$=a(C_0-C_1+C_2-....)+d(-C_1+2C_2-3C_3+....)$ ....(i)

$(1-x)^n=C_0-C_1x+C_2x^2-....+(-1)^nC_nx^n$ ....(ii)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$-n(1-x)^{n-1}=-C_1+2C_2x-....+(-1)^nC_nnx^{n-1}$ ....(iii)

(ii) व (iii) में $x=1$ रखने पर,

$C_0-C_1+C_2-....+(-1)^nC_n=0$

एवं $-C_1+2C_2-....+(-1)^nn.C_n=0$

अतः (i) से $(n+1)$ पदों का अभीष्ट योग $=a.0+d.0=0$.

12. (b) $(1+x)^{15}=C_0+C_1x+C_2x^2.+....+C_{15}x^{15}$

$$\Rightarrow \frac{(1+x)^{15}-1}{x}=C_1+C_2x+....+C_{15}x^{14}$$

x के सापेक्ष दोनों पक्षों का अवकलन करने पर,

$$=\frac{x.15(1+x)^{14}-(1+x)^{15}+1}{x^2}$$

$=C_2+2C_3x+......+14\,C_{15}x^{13}$

$x=1$ रखने पर,

$C_2+2C_3+....+14C_{15}=15.2^{14}-2^{15}+1=13.2^{14}+1.$

13. (a) हम जानते हैं कि

$$\frac{(1+x)^n-(1-x)^n}{2}=C_1x+C_3x^3+C_5x^5+....$$

$x=0$ से $x=1$ तक समाकलन करने पर,

$$\frac{1}{2}\int_0^1\{(1+x)^n-(1-x)^n\}dx$$

$$=\int_0^1(C_1x+C_3x^3+C_5x^5+....)dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left\{\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}+\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right\}_0^1=\frac{C_1}{2}+\frac{C_3}{4}+\frac{C_5}{6}+....$$

या $\frac{C_1}{2}+\frac{C_3}{4}+\frac{C_5}{6}+....=\frac{1}{2}\left\{\frac{2^{n+1}-1}{n+1}+\frac{0-1}{n+1}\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2^{n+1}-2}{n+1}\right)=\frac{2^n-1}{n+1}$$

14. (d) x की विषम घातों के गुणांकों का योग

$=C_1+C_3+C_5+....=2^{n-1}$

15. (c) हम जानते हैं $(1+x)^n={}^nC_0+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+....+{}^nC_nx^n$

$x=-1$ रखने पर,

$(1-1)^n={}^nC_0-{}^nC_1+{}^nC_2-.....+(-1)^n\,{}^nC_n$

इसलिए $C_0-C_1+C_2-C_3+....+(-1)^nC_n=0$

16. (c) $(x^2+x-3)^{319}$ में $x=1$ रखने पर,

गुणांकों का योग $=(1+1-3)^{319}=-1$

17. (a) $(x-2y+3z)^n$ के प्रसार में गुणांकों का योग

$(1-2+3)^2=2^n$

$\therefore\ 2^n=128\Rightarrow n=7$

अतः $(1+x)^7$ के प्रसार में सबसे बड़ा गुणांक ${}^7C_3$ या ${}^7C_4$ होंगे अर्थात् दोनों 35 के बराबर हैं।

18. (d) $(1+x-2x^2)^6=1+a_1x+a_2x^2+....+a_{12}x^{12}$.

उपरोक्त में $x=1$ तथा $x=-1$ रखकर व प्राप्त परिणामों को जोड़ने पर

$64=2(1+a_2+a_4+...)$

$\therefore\ a_2+a_4+a_6+....+a_{12}=31$.

19. (b) L.H.S. $=a[C_0-C_1+C_2-C_3+....+(-1)^n.C_n]$

$+[C_1-2C_2+3C_3-....+(-1)^{n-1}n.C_n]$

$=a.0+0=0$

20. (c) $(1+x+x^2+x^3)^5=(1+x)^5(1+x^2)^5$

$=(1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5)$

$\times(1+5x^2+10x^4+10x^6+5x^8+x^{10})$

अतः अभीष्ट गुणांकों का योग

$=(1+10+5).2^5=16\times32=512$

नोट : $2^n=2^5=$ द्वितीय कोष्ठक के सभी द्विपद जिसमें x की सभी घातें सम हैं।

21. (b) $(x+3)^{n-1}+(x+3)^{n-2}(x+2)+$

$(x+3)^{n-3}(x+2)^2+....+(x+2)^{n-1}$

$$=\frac{(x+3)^n-(x+2)^n}{(x+3)-(x+2)}=(x+3)^n-(x+2)^n$$

$$(\because \frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+x^{n-2}a^1+x^{n-3}a^2+....+a^{n-1})$$

इसलिए दिये गए व्यंजक में x^r का गुणांक

$=[(x+3)^n-(x+2)^n]$

$={}^nC_r3^{n-r}-{}^nC_r2^{n-r}={}^nC_r(3^{n-r}-2^{n-r})$

22. (c) $(\alpha^2x^2-2\alpha x+1)^{51}$ में $x=1$ रखने पर

हम बहुपद $(\alpha^2x^2-2\alpha x+1)^{51}$ के प्रसार में गुणांकों का योगफल प्राप्त करते हैं इसलिए परिकल्पना से

$(\alpha^2-2\alpha+1)^{51}=0\Rightarrow\alpha=1$

23. (c) $\sum_{r=0}^{n} r^2\ {}^nC_r x^r y^{n-r}$

$=\sum_{r=0}^{n}[r(r-1)+r]\,{}^nC_r x^r y^{n-r}$

$=\sum_{r=0}^{n} r(r-1)\,{}^nC_r x^r y^{n-r}+\sum_{r=0}^{n} r\,{}^nC_r x^r y^{n-r}$

$=\sum_{r=2}^{n-2} r(r-1)\frac{n}{r}.\frac{n-1}{r-1}\,{}^{n-2}C_{r-2}x^2x^{r-2}y^{n-r}$

$+\sum_{r=1}^{n-1} r\frac{n}{r}\,{}^{n-1}C_{r-1}x\ x^{r-1}y^{n-r}$

$=n(n-1)x^2\sum_{r=2}^{n-2}\,{}^{n-2}C_{r-2}x^{r-2}y^{(n-2)-(r-2)}$

$+nx\sum_{r=2}^{n-1}\,{}^{n-1}C_{r-1}x^{r-1}y^{(n-1)-(r-1)}$

$=n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}+nx(x+y)^{n-1}$

$=n(n-1)x^2+nx,\ \ (\because x+y=1)$

$=nx(nx-x+1)=nx(nx+y),(\because x+y=1)$

24. (a) ${}^{4n}C_0+{}^{4n}C_2x^2+{}^{4n}C_4x^4+...+{}^{4n}C_{4n}x^{4n}$

$=\frac{1}{2}[(1+x)^{4n}+(1-x)^{4n}]$

$x=1$ एवं $x=i$ रखने पर,

${}^{4n}C_0+{}^{4n}C_2+{}^{4n}C_4+...+{}^{4n}C_{4n}=\frac{1}{2}[2^{4n}]$

एवं ${}^{4n}C_0-{}^{4n}C_2+{}^{4n}C_4-...+{}^{4n}C_{4n}=\frac{1}{2}[(1+i)^{4n}+(1-i)^{4n}]$

इस प्रकार, $2[{}^{4n}C_0+{}^{4n}C_4+...+{}^{4n}C_{4n}]$

$=2^{4n-1}+\frac{1}{2}[(1+i)^{4n}+(1-i)]^{4n}$

अब, $(1+i)^{4n}+(1-i)^{4n}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{4n}$

$+\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{4n}$

$=2^{2n}(\cos n\pi+i\sin n\pi)+2^{2n}(\cos n\pi-i\sin n\pi)$

$=2^{2n+1}\cos n\pi=2^{2n+1}(-1)^n$

$\therefore\ 2[{}^{4n}C_0+{}^{4n}C_4+...+{}^{4n}C_{4n}]=2^{4n-1}+\frac{1}{2}2^{2n+1}(-1)^n$

$\Rightarrow\ {}^{4n}C_0+{}^{4n}C_4+...+{}^{4n}C_{4n}=2^{4n-2}+(-1)^n2^{2n-1}$

ट्रिक : $n=1, 2$ रखकर जांच कीजिये

25. (c) ${}^{15}C_0+{}^{15}C_1+...+{}^{15}C_{15}=2^{15}$

$\Rightarrow\ 2({}^{15}C_8+{}^{15}C_9+...+{}^{15}C_{15})=2^{15}\quad(\because\ {}^nC_r={}^nC_{n-r})$

$\Rightarrow\ {}^{15}C_8+{}^{15}C_9+...+{}^{15}C_{15}=2^{14}$

26. (a) **ट्रिक :** $n=1$ रखने पर ${}^1C_0+2.{}^1C_1=1+2=3$

केवल विकल्प (a) ही यह मान देता है।

27. (c) चूंकि हम जानते हैं कि

${}^nC_0-{}^nC_1^2+{}^nC_2^2-{}^nC_3^2+...+(-1)^n.{}^nC_n^2=0$,

(यदि n विषम है)

एवं प्रश्नों में $n=15$ (विषम)दिया है

28. (a) दिया है $(1+x)^{10}=C_0+C_1x+C_2x^2+...+C_{10}x^{10}$

दोनों पक्षों का 0 से 2 तक समाकलन करने पर

$\frac{3^{11}-1}{11}=2C_0+\frac{2^2}{2}C_1+\frac{2^3}{3}C_2+....+\frac{2^{11}}{11}C_{10}$.

29. (b) $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2....+C_nx^n$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=C_0+C_1.\frac{1}{x}+C_2.\frac{1}{x^2}+...+C_n\left(\frac{1}{x^n}\right)$

दोनों प्रसारों का गुणा करने पर

$\frac{(1+x)^{2n}}{x^n}=\sum C_0^2+x\sum C_0C_1+x^2\sum C_0C_2+....$

$+x^r\sum C_0C_r+.....$

$\frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$ के बायें पक्ष में

$\sum C_0^2+x\sum C_0C_1+x^2\sum C_0C_2+....\sum C_0C_r$

$x^0,x,x^2,.....,x^r$ के गुणांक हैं या $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में $x^n,x^{n+1},x^{n+2},.....,x^{n+r}$ के गुणांक हैं जो कि $T_{n+1,}T_{n+2},....$ से प्राप्त होते हैं व ${}^{2n}C_n,{}^{2n}C_{n+1},{}^{2n}C_{n+2}....{}^{2n}C_{n+r}$ हैं।

${}^{2n}C_{n+2}=\frac{(2n)!}{(n-2)!(n+2)!}$

30. (a) $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+....+C_nx^n$

$x=1$ रखने पर,

$\Rightarrow 2^n=C_0+C_1+C_2+.....+C_n$ .....(i)

या $C_1+C_2+C_3+....+C_n=2^n-1\quad[\because C_0={}^nC_0=1]$

पुनः $x=-1$ रखने पर,

$0=C_0-C_1+C_2-C_3+....$

या $C_0+C_2+C_4+....=C_1+C_3+C_5+....$ अर्थात् $A=B$

(i) से $A+B=2^n$ या $A=2^{n-1}=B$

अतः $C_0+C_2+C_4+....=2^{n-1}$.

31. (a) 111.....1 (91 बार)

$= 1+10+10^2+.....+10^{90}$

$= \dfrac{10^{91}-1}{10-1} = \dfrac{(10^7)^{13}-1}{10-1} = \dfrac{t^{13}-1}{9}$, जहाँ $t = 10^7$

$= \left(\dfrac{t-1}{9}\right)(t^{12}+t^{11}+.....+t+1)$

$= \left(\dfrac{10^7-1}{10-1}\right)(1+t+t^2+....+t^{12})$

$= (1+10+10^2+....+10^6)(1+t+t^2+...+t^{12})$

$\therefore$ 111.....1(91 बार) अभाज्य संख्या नहीं है।

32. (b) $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + ... + C_nx^n$

$(1-x)^n = C_0 - C_1x + C_2x^2 - C_3x^3 + ... + (-1)^n C_nx^n$

$[(1+x)^n - (1-x)^n] = 2[C_1x + C_3x^3 + C_5x^5 + ...]$

$\dfrac{1}{2}[(1+x)^n - (1-x)^n] = C_1x + C_3x^3 + C_5x^5 + ...$

$x = 2$ रखने पर, $2.C_1 + 2^3.C_3 + 2^5.C_5 + ... = \dfrac{3^n-(-1)^n}{2}$

33. (c) $x = y = z = 1$ रखने पर,

गुणांकों का योग $= (1+2+3)^8 = 6^8$.

34. (b) $(1+x)^{50} = \sum_{r=0}^{50} {}^{50}C_r x^r$.

अतः x की विषम घातों के गुणांकों का योग

$= {}^{50}C_1 + {}^{50}C_3 + ... + {}^{50}C_{49}$

$= \dfrac{1}{2}[{}^{50}C_0 + {}^{50}C_1 + ... + {}^{50}C_{50}] = \dfrac{1}{2}[2^{50}] = 2^{49}$.

35. (b,d) $y = n^n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n}$

$n = 2$ रखने पर, $y = 2^2\left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = 4.\dfrac{81}{8\times 2} = \dfrac{81}{4} \simeq 20$

विकल्प (a) से $= \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{8} < y$

विकल्प (b) से $= \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{8} < y$

विकल्प (c) से $= (2!)^3 = 8 < y$

विकल्प (d) से $= (2!)^3 = 8 < y$.

36. (b) गुणांकों के योगफल के लिए $x = 1$ रखने पर,

$(1+1-3)^{2134} = 1$.

37. (b) गुणांकों के योगफल के लिए $x = 1$ रखने पर,

$\Rightarrow (1+x+x^2)^n = (1+1+1)^n = 3^n$.

38. (d) $(1+x-3x^2)^{3148}$ के प्रसार में गुणांकों का योग $x = 1$ रखकर प्राप्त कर सकते हैं

$\therefore$ गुणांकों का योग $= (1+1-3.1^2)^{3148}$

$= (2-3)^{3148} = (-1)^{3148} = 1$.

39. (b) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$

$= \left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+...+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$= 1-\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$

$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2$.

40. (c) गुणांकों का योग $= (1+1)^5 = 2^5 = 32$.

41. (a) $\sum_{k=0}^{10} {}^{20}C_k$ अर्थात् ${}^{20}C_0 + {}^{20}C_1 + ... + {}^{20}C_{10}$

हम जानते हैं कि

$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x^1 + {}^nC_2x^2 + ... + {}^nC_n.x^n$

$x = 1$ रखने पर, $2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_n$

$n = 20$ रखने पर, $2^{20} = {}^{20}C_0 + {}^{20}C_1 + {}^{20}C_2 + ... + {}^{20}C_{20}$

$2^{20} + {}^{20}C_{10} = 2[{}^{20}C_0 + {}^{20}C_1 + ... + {}^{20}C_{10}]$

$[{}^{20}C_0 + {}^{20}C_1 + ... + {}^{20}C_{10}] = 2^{19} + \dfrac{1}{2}{}^{20}C_{10}$

$\sum_{k=0}^{10} {}^{20}C_k = 2^{19} + \dfrac{1}{2}{}^{20}C_{10}$.

42. (d) $S_n = \sum_{r=0}^{n} \dfrac{1}{{}^nC_r}$ एवं $t_n = \sum_{r=0}^{n} \dfrac{r}{{}^nC_r}$

$t_n = \sum_{r=0}^{n} \dfrac{n-(n-r)}{{}^nC_{n-r}}$, $\qquad [\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r}]$

$= n\sum_{r=0}^{n} \dfrac{1}{{}^nC_r} - \sum_{r=0}^{n} \dfrac{n-r}{{}^nC_{n-r}}$

$t_n = n.S_n - \left[\dfrac{n}{{}^nC_n} + \dfrac{n-1}{{}^nC_{n-1}} + ... + \dfrac{1}{{}^nC_1} + 0\right]$

$t_n = n.S_n - \sum_{r=0}^{n} \dfrac{r}{{}^nC_r}$

$\Rightarrow \quad t_n = n.S_n - t_n \quad \Rightarrow \quad 2t_n = {}^nS_n \Rightarrow \dfrac{t_n}{S_n} = \dfrac{n}{2}$.

43. (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{{}^nC_0 + ... + {}^nC_n}{{}^nP_n}$

$= \dfrac{{}^1C_0 + {}^1C_1}{{}^1P_1} + \dfrac{{}^2C_0 + {}^2C_1 + {}^2C_2}{{}^2P_2} + \dfrac{{}^3C_0 + {}^3C_1 + {}^3C_2 + {}^3C_3}{{}^3P_3} + ...$

$= \dfrac{2^1}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \dfrac{2^3}{3!} + ... \qquad \left(1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \dfrac{2^3}{3!} + ...\right) - 1$

$= e^2 - 1$.

44. (c) $(x^2-x-1)^{99}$ में $x = 1$ रखने पर,

$(x^2-x-1)^{99}$ के गुणांकों का योग $= (1^2-1-1)^{99} = -1$.

किसी भी घातांक के लिए द्विपद प्रमेय

1\. (b) $(1-2x)^{3/2}$ का प्रसार

$$=1+\frac{3}{2}(-2x)+\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}(-2x)^2+\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{6}(-2x)^3+.....$$

अतः 4 वाँ पद $\frac{x^3}{2}$ है

2\. (a) $(217)^{1/3}=(6^3+1)^{1/3}=6\left(1+\frac{1}{6^3}\right)^{1/3}$

$$=6\left(1+\frac{1}{3\times 216}-\frac{1\times 2}{3\times 3\times 2}\left(\frac{1}{216}\right)^2+.....\right)=6.01$$

3\. (d) दिया गया व्यंजक $4^{-1/2}\left(1-\frac{3}{4}x\right)^{-1/2}$ है। यह तभी परिभाषित होगा जब $\left|\frac{3}{4}x\right|<1\Rightarrow -\frac{4}{3}<x<\frac{4}{3}$.

4\. (a) $(a+bx)^{-2}=\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{b}{a}x\right)^{-2}=\frac{1}{a^2}\left[a+\frac{(-2)}{1!}\left(\frac{b}{a}\right)x+....\right]$

इसकी तुलना $\frac{1}{4}-3x+....$ से करने पर, $a=2, b=12$.

5\. (b) $\frac{1}{(6-3x)^{1/3}}=(6-3x)^{-1/3}=6^{-1/3}\left[1-\frac{x}{2}\right]^{-1/3}$

$$=6^{-1/3}\left[1+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{x}{2}\right)x+\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{2.1}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+....\right]$$

$$=6^{-1/3}\left[1+\frac{x}{6}+\frac{2x^2}{6^2}+....\right]$$

6\. (a) $\left(\frac{a+x}{a}\right)^{-1/2}+\left(\frac{a-x}{a}\right)^{-1/2}=\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-1/2}+\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-1/2}$

$$=\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2.1}\left(\frac{x}{a}\right)^2+....\right]$$

$$+\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{a}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2.1}\left(-\frac{x}{a}\right)^2+....\right]$$

$$=2+\frac{3x^2}{4a^2}+.........$$

जहाँ विषम पद एक दूसरे से निरस्त हो जाते हैं

7\. (b) $(1-x)^{-4}=\left[\frac{1.2.3}{6}x^0+\frac{2.3.4}{6}x+\frac{3.4.5}{6}x^2+\frac{4.5.6}{6}x^3+...\right.$

$$\left.+\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}x^r+....\right]$$

इसलिए $T_{r+1}=\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}x^r$.

8\. (a) दिया गया है $(1+x)^2(1-x)^{-2}$

$$=(1+2x+x^2)[1+2x+3x^2+....+(n-1)x^{n-2}$$
$$+nx^{n-1}+(n+1)x^n+....]$$

$$=x^n(n+1+2n+n-1)+....$$

अतः x^n का गुणांक $4n$ है।

9\. (b) $(x+2)^{-4}=2^{-4}\left[1+\frac{x}{2}\right]^{-4}=\frac{1}{16}\left[1-2x+\frac{5}{2}x^2-....\right]$

10\. (d) दिया गया व्यंजक $x^{-8/3}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{-4/3}$

अतः $\left|\frac{1}{x^3}\right|<1\Rightarrow |x|>1$.

11\. (c) $(1+3x)^2(1-2x)^{-1}=(1+3x)^2\left(1+2x+\frac{1.2}{2.1}(-2x)^2+....\right)$

$$=(1+6x+9x^2)(1+2x+4x^2+8x^3+....)$$

अतः x^3 का गुणांक $(8+24+18)=50$ हैं।

12\. (c) दिया गया व्यंजक $(1+x+x^2+.....)^2$

$$=[(1-x)^{-1}]^2=(1-x)^{-2}$$

$$=(1+2x+3x^2+4x^3+....+(n+1)x^n+nx^{n-1}+....)$$

अतः x^n का गुणांक $(n+1)$ है।

13\. (d) दिया है $|x|>1$. दिया गया व्यंजक है

$$x^{-2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2}=x^{-2}\left[1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}+....\right]$$

$$=\left[\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}-\frac{4}{x^5}+....\right]$$

14\. (c) चूंकि $1+2x+3x^2+4x^3+....\infty=(1-x)^{-2}$

अतः $(1+2x+3x^2+4x^3+....\infty)^{1/2}=\{(1-x)^{-2}\}^{1/2}$

$$=(1-x)^{-1}=1+x+x^2+....+x^n+....\infty$$

$\therefore$ x^n का गुणांक $=1$.

15\. (a) $(7.995)^{1/3}=(8-0.005)^{1/3}=(8)^{1/3}\left[1-\frac{0.005}{8}\right]^{1/3}$

$$=2\left[1-\frac{1}{3}\times\frac{0.005}{8}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2+1}\left(\frac{0.005}{8}\right)^2+.....\right]$$

$$=2\left[1-\frac{0.005}{24}-\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}{1}\times\frac{(0.005)^2}{8}+.....\right]$$

$$=2(1-0.000208)=2\times 0.999792=1.9995$$

16\. (a) $(1+x)^n={}^nC_0+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+....+{}^nC_nx^n+....$

यदि x को $-\left(\frac{2x}{1+x}\right)$ से तथा n को $-n$ से प्रतिस्थापित कर दिया जाए, तो $\left[1-\left(\frac{2x}{1+x}\right)\right]^{-n}=1+(-n)\left[-\left(\frac{2x}{1+x}\right)\right]$

$+\frac{(-n)(-n-1)}{2!}\left(-\frac{2x}{1+x}\right)^2+....$

$\left[\frac{1-x}{1+x}\right]^{-n}=1+n\left(\frac{2x}{1+x}\right)+\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2+....$

या $\left[\frac{1+x}{1-x}\right]^{n}=1+n\left(\frac{2x}{1+x}\right)+\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2+....$

17. (a) $(1+x)^n={}^nC_0+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+.....\infty$

यदि x को $-\left(1-\frac{1}{x}\right)$ से एवं n को $-n$ से प्रतिस्थापित किया जाए, तब $\left[1-\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]^{-n}$.

$=1+(-n)\left[-\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]+\frac{(-n)(-n-1)}{2!}\left[-\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]^2+...$

या $x^n=1+n\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{n(n+1)}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+....$

18. (c) $(1-x)^{3/2}$

$=\left[1+\frac{3}{2}(-x)+\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2!}(-x)^2+\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3!}(-x)^3+...\right]$

$=1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{x^3}{16}$ (केवल चार पद)

19. (b) $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^3}=(1+x)^2(1-x)^{-3}$

$=(1+2x+x^2)[1+{}^3C_1x+{}^4C_2x^2+....$

$+{}^{3+n-3}C_{n-2}x^{n-2}+{}^{3+n-2}C_{n-1}x^{n-1}+{}^{3+n-1}C_nx^n+....]$

$\therefore$ x^n का गुणांक $={}^{3+n-1}C_n+2.{}^{3+n-2}C_{n-1}+{}^{3+n-3}C_{n-2}$

$={}^{2+n}C_n+2.{}^{n+1}C_{n-1}+{}^nC_{n-2}$

$=\frac{(2+n)!}{n!2!}+\frac{2.(n+1)!}{(n-1)!2!}+\frac{n!}{(n-2)!2!}$

$=\frac{n![(2+n)(1+n)+2(n+1)n+n(n-1)]}{n!2!}$

$=2n^2+2n+1$.

20. (d) माना $(1+y)^n=1+\frac{1}{3}x+\frac{1.4}{3.6}x^2+\frac{1.4.7}{3.6.9}x^3+....$

$=1+ny+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+.....$

पदों की तुलना करने पर

$ny=\frac{1}{3}x,\frac{n(n-1)}{2!}y^2=\frac{1.4}{3.6}x^2$

हल करने पर, $n=-\frac{1}{3},y=-x$.

अतः दी गयी श्रेणी $=(1-x)^{-1/3}$

21. (c) दिये गये व्यंजक

$1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+....$ अर्थात् $(1+x)^n$ से तुलना करने पर,

$nx=-\frac{1}{8}$ एवं $\frac{n(n-1)}{2!}x^2=\frac{3}{128}\Rightarrow x=\frac{1}{4},n=-\frac{1}{2}$

अतः $1-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}.\frac{3}{16}-....=\left(1+\frac{1}{4}\right)^{-1/2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

22. (a) $T_{r+1}=\frac{\frac{7}{2}\left(\frac{7}{2}-1\right)\left(\frac{7}{2}-2\right)...\left(\frac{7}{2}-r+1\right)x^r}{r!}$

प्रथम ऋणात्मक पद होगा जब $\frac{7}{2}-r+1<0$ अर्थात् $r>\frac{9}{2}$

अतः $r=5$.

23. (b) $(1-2x+3x^2-4x^3+...)^{-n}=[(1+x)^{-2}]^{-n}=(1+x)^{2n}$

$\therefore$ $(1-2x+3x^2-4x^3+...)^{-n}$ में x^n का गुणांक

$=(1+x)^{2n}$ में x^n का गुणांक

$={}^{2n}C_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

24. (b) $(1-9x+20x^2)^{-1}=[(1-5x)(1-4x)]^{-1}$

$=\frac{1}{(1-5x)(1-4x)}=\frac{5}{1-5x}-\frac{4}{1-4x}$

$=5(1-5x)^{-1}-4(1-4x)^{-1}$

$=5[1+5x+(5x)^2+...+(5x)^n+...]$

$-4[1+4x+(4x)^2.....+(4x)^n+...]$

अतः $(1-9x+20x^2)^{-1}$ में x^n का गुणांक

$=5(5^n)-4(4^n)=5^{n+1}-4^{n+1}$

25. (a) $\frac{1}{(1-x)(3-x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3-x}\right)$

$=\frac{1}{2}[(1-x)^{-1}-(3-x)^{-1}]=\frac{1}{2}\left[(1-x)^{-1}-\frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-1}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[(1+x+x^2+x^3+...)-\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+...\right)\right]$

$\therefore$ x^n का गुणांक $=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}.\frac{1}{3^n}\right]=\frac{1}{2}\frac{[3^{n+1}-1]}{3^{n+1}}$

26. (b) $(1+x+x^2+...)^{-n}=[(1-x)^{-1}]^{-n}=(1-x)^n$

$={}^nC_0-{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+...+(-1)^n\ {}^nC_n.x^n$

x^n का गुणांक $=(-1)^n\ {}^nC_n=(-1)^n$.

27. (d) $y=3x+6x^2+10x^3+....$

$\therefore 1+y=1+3x+6x^2+10x^3+...$

$\Rightarrow$ $1+y=(1-x)^{-3}$ $\Rightarrow 1-x=(1+y)^{-1/3}$

$\Rightarrow$ $x=1-(1+y)^{-1/3}$

28. (d) $[\sqrt{1+x^2}-x]^{-1}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\times\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)}{(\sqrt{1+x^2}+x)}$

$=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{1+x^2-x^2}=x+\sqrt{1+x^2}=x+(1+x^2)^{1/2}$

$= x+1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^4}{2!}+...$

स्पष्टतः x का गुणांक 1 है।

29. (a) माना कि दी हुई श्रेणी $(1+x)^n$ के प्रसार के समरूप है अर्थात् $1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+....;|x|<1$ तब $nx=\frac{1}{4}$ तथा $\frac{n(n-1)}{2}x^2=\frac{1}{4}.\frac{3}{8}=\frac{3}{32}$ दोनों समीकरणों को n और x के लिए हल करने पर $x=-\frac{1}{2}$ तथा $n=-\frac{1}{2}$.

$\therefore$ दी हुई श्रेणी का योग

$= (1+x)^n=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-1/2}=2^{1/2}=\sqrt{2}.$

30. (c) $(1+x)^{27/5}$

$T_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)......(n-r+1)}{r!}(x)^r$

प्रथम ऋणात्मक पद के लिए $n-r+1<0$; $r>\frac{32}{5}$.

$\therefore$ 8वां पद प्रथम ऋणात्मक पद है

31. (b) x^r का गुणांक

$=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)...\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-2)^r$

$\frac{1.3.5...(2r-1)}{2^r}.\frac{(-1)^r(-1)^r2^r}{r!}$

$=\frac{1.3.5...(2r-1)}{r!}=\frac{2r!}{r!\,r!\,2^r}.$

32. (c) $\sum_{k=1}^{n}k\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}$

$=1+2\left(1+\frac{1}{n}\right)^1+3\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+....$ n पदों तक

$=1+2t+3t^2+...$ n पदों तक

$=(1-t)^{-2}=\left[1-\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{-2}=\left(\frac{1}{n}\right)^{-2}=(n)^2=n^2.$

33. (c) दिया गया व्यंजक

$=2[x^5+{}^5C_2x^3\{(x^3-1)^{1/2}\}^2+{}^5C_4x\{(x^3-1)^{1/2}\}^4]$

$=2[x^5+10x^3(x^3-1)+5x(x^3-1)^2]$

$=5x^7+10x^6+x^5-10x^4-10x^3+5x$,

जो कि 7 घात का बहुपद है।

34. (a) $\frac{(1+x)^{3/2}-\left(1+\frac{1}{2}x\right)^3}{(1-x)^{1/2}}$

$=\frac{1+\frac{3}{2}x+\frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}}{2}x^2-\left(1+\frac{3x}{2}+\frac{3.2}{2}\frac{x^2}{4}\right)}{(1-x)^{1/2}}$

$=\frac{-\frac{3}{8}x^2}{(1-x)^{1/2}}=-\frac{3}{8}x^2(1-x)^{-1/2}$

$=-\frac{3}{8}x^2\left(1+\frac{x}{2}+....\right)=-\frac{3}{8}x^2.$

बहुपद प्रमेय,$(a^{1/p}+b^{1/q})$ के प्रसार में करणीगत चिन्हों से स्वतंत्रा पद, तीन/चार क्रमागत पदों या गुणांकों पर आधारित प्रश्न

1. (b) माना क्रमागत पद ${}^nC_r$ एवं ${}^nC_{r+1}$ हैं।

$\Rightarrow \frac{n!}{(n-r)!r!}=\frac{n!}{(n-r-1)!(r+1)!}$

$\Rightarrow \frac{1}{(n-r)(n-r-1)!r!}=\frac{1}{(n-r-1)!(r+1)r!}$

$\Rightarrow r+1=n-r \Rightarrow n=2r+1$. अतः n विषम है।

2. (b) **ट्रिक :** यहाँ $a={}^nC_r, b={}^nC_{r+1}$ तथा $c={}^nC_{r+2}$

$n=2, r=0$ रखने पर विकल्प (b) प्रतिबंध को संतुष्ट करता है

अर्थात् $n=\frac{2ac+ab+bc}{b^2-ac}$

3. (c) माना $(1+x)^n$ के क्रमागत गुणांक ${}^nC_{r-1}, {}^nC_r, {}^nC_{r+1}$ हैं।

प्रतिबंध से ${}^nC_{r-1}:{}^nC_r:{}^nC_{r+1}=6:33:110$

अब ${}^nC_{r-1}:{}^nC_r=6:33$

$\Rightarrow 2n-13r+2=0$ .....(i)

एवं ${}^nC_r:{}^nC_{r+1}=33:110$

$\Rightarrow 3n-13r-10=0$ .....(ii)

(i) व (ii) को हल करने पर n=12 एवं r=2.

वैकल्पिक : प्रथम n=4 लेने पर [विकल्प (a) से] लेकिन (a) संतुष्ट नहीं करता है इसी प्रकार (b) के लिये परीक्षण करते है।

अतः विकल्प (c), n =12 देता है

$(1+x)^{12}=\left[1+12x+\frac{12.11}{2.1}x^2+\frac{12.11.10}{3.2.1}x^3+....\right]$

अतः II, III एवं IV पदों के गुणांक

12, 6 × 11, 2 × 11 × 10.

अतः 12 : 6 × 11 : 2 × 11 × 10 = 6 : 33 :110.

4. (c) n= 1, 2 रखने पर, पदों की संख्या 3, 6 है

अतः $(a+b+c)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

5. (c) माना तीन क्रमागत गुणांक

${}^nC_{r-1}=28, {}^nC_r=56$ एवं ${}^nC_{r+1}=70$ हैं, तब

$\frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}}=\frac{n-r+1}{r}=\frac{56}{28}=2$

तथा $\frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r}=\frac{n-r}{r+1}=\frac{70}{56}=\frac{5}{4}$

यह $n+1=3r$ तथा $4n-5=9r$ देता है

$\therefore \frac{4n-5}{n+1}=3 \Rightarrow n=8$

6. (b) यहाँ $n=1024=2^{10}$, 2 की घात जहाँ 7 की घात $\frac{1}{8}=2^{-3}$ है।

अब प्रथम पद ${}^{1024}C_0\left(5^{1/2}\right)^{1024}=5^{512}$ (पूर्णांक)

एवं 8 पदों बाद 9 वां पद

$= {}^{1024}C_8(5^{1/2})^{1016}(7^{1/8})^8$ = पूर्णांक

पुनः 17वां पद $= {}^{1024}C_{16}(5^{1/2})^{1008}(7^{1/8})^{16}$

= पूर्णांक

इसी तरह जारी रखने पर समान्तर श्रेणी 1, 9, 17, ..., 1025 प्राप्त होती है क्योंकि 1025वां पद = प्रसार का अंतिम पद

$= {}^{1024}C_{1024}\left(7^{1/8}\right)^{1024} = 7^{128}$ (पूर्णांक)

यदि n उपरोक्त श्रेणी के पदों की संख्या है, तब

$1025 = T_n = 1+(n-1)8 \Rightarrow n = 129$.

7. (b) $(y^{1/5}+x^{1/10})^{55}$ के प्रसार में व्यापक पद

$T_{r+1} = {}^{55}C_r(y^{1/5})^{55-r}(x^{1/10})^r = {}^{55}C_r.y^{11-r/5}x^{r/10}$.

यह T_{r+1} करणी मुक्त होगा यदि $0 \le r \le 55$ के लिए $r/5$ व $r/10$ पूर्णांक हो अतः जब $r = 0,10,20,30,40,50$.

$\therefore$ अतः 6 पद हैं। अर्थात् $T_1, T_{11}, T_{21}, T_{31}, T_{41}, T_{51}$ जो कि करणी मुक्त हैं।

8. (a) $\because (5\sqrt{5}-11)(5\sqrt{5}+11) = 4$

$\Rightarrow 5\sqrt{5}-11 = \dfrac{4}{5\sqrt{5}+11}$,

$\because\ 0 < 5\sqrt{5}-11 < 1 \Rightarrow 0 < (5\sqrt{5}-11)^{2n+1} < 1$,

धनात्मक पूर्णांक n के लिये

पुनः $(5\sqrt{5}+11)^{2n+1} - (5\sqrt{5}-11)^{2n+1}$

$= 2\left\{{}^{2n+1}C_1(5\sqrt{5})^{2n}.11 + {}^{2n+1}C_3(5\sqrt{5})^{2n-2} \times 11^3 + ... + {}^{2n+1}C_{2n+1}11^{2n+1}\right\}$

$= 2\left\{{}^{2n+1}C_1(125)^n.11 + {}^{2n+1}C_3(125)^{n-1}11^3 + ... + {}^{2n+1}C_{2n+1}11^{2n+1}\right\}$

= $2k$, (कुछ धनात्मक पूर्णांक k के लिए)

माना $f' = (5\sqrt{5}-11)^{2n+1}$, तब $[R]+f-f' = 2k$

$\Rightarrow f-f' = 2k-[R] \Rightarrow f-f'$ पूर्णांक है

लेकिन $0 \le f < 1; 0 < f' < 1 \Rightarrow -1 < f-f' < 1$

$\Rightarrow f-f' = 0$ (पूर्णांक) $\Rightarrow f = f'$

$\therefore Rf = Rf' = (5\sqrt{5}+11)^{2n+1}(5\sqrt{5}-11)^{2n+1}$

$= [(5\sqrt{5})^2 - 11^2]^{2n+1} = 4^{2n+1}$.

9. (b) माना $(\sqrt{2}+1)^6 = k+f$, जहाँ k पूर्णांक है एवं f भिन्न है $(0 \le f < 1)$.

माना $(\sqrt{2}-1)^6 = f', (0 < f' < 1)$,

चूंकि $0 < (\sqrt{2}-1) < 1$

अब $k+f+f' = (\sqrt{2}+1)^6 + (\sqrt{2}-1)^6$

$= 2\left\{{}^6C_0.2^3 + {}^6C_2.2^2 + {}^6C_4.2 + {}^6C_6\right\} = 198$ .....(i)

$\therefore\ f+f' = 198-k =$ पूर्णांक

लेकिन $0 \le f < 1$ एवं $0 < f' < 1 \Rightarrow 0 < (f+f') < 2$

$\Rightarrow f+f' = 1$, $(\because f+f'$ पूर्णांक है)

$\therefore$ (i) द्वारा $I = 198 - (f+f') = 198 - 1 = 197$.

10. (b) $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2} = 45$ या $n^2+3n-88 = 0 \Rightarrow n = 8$.

11. (a) $\because\ a^3+b^3+3ab(a+b) = (a+b)^3$ है

$\therefore N^r = (18+7)^3 = 25^3$

$\therefore D^r = 3^6 + {}^6C_1 3^5.2^1 + {}^6C_2 3^4.2^2 + {}^6C_3 3^3.2^3 + {}^6C_4 3^2.2^4 + {}^6C_5 3.2^5 + {}^6C_6 2^6$

यह स्पष्ट है कि $(3+2)^6$ का प्रसार $= 5^6 = (25)^3$

$\therefore\ \dfrac{N^r}{D^r} = \dfrac{(25)^3}{(25)^3} = 1$

12. (c) यदि $(1+x)^n$ के प्रसार में $(r+1)$वें, $(r+2)$वें, $(r+3)$वें तथा $(r+4)$वें पदों के गुणांक क्रमशः a_1, a_2, a_3, a_4 है

तब $a_1 = {}^nC_r, a_2 = {}^nC_{r+1}, a_3 = {}^nC_{r+2}, a_4 = {}^nC_{r+3}$

अब $\dfrac{a_1}{a_1+a_2} + \dfrac{a_3}{a_3+a_4} = \dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_r + {}^nC_{r+1}} + \dfrac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_{r+2} + {}^nC_{r+3}}$

$= \dfrac{{}^nC_r}{{}^{n+1}C_{r+1}} + \dfrac{{}^nC_{r+2}}{{}^{n+1}C_{r+3}} = \dfrac{{}^nC_r}{\dfrac{n+1}{r+1}{}^nC_r} + \dfrac{{}^nC_{r+2}}{\dfrac{n+1}{r+3}{}^nC_{r+2}}$

$(\because {}^nC_r = \dfrac{n}{r}\,{}^{n-1}C_{r-1})$

$= \dfrac{r+1}{n+1} + \dfrac{r+3}{n+1} = \dfrac{2(r+2)}{n+1}$

$= 2\dfrac{{}^nC_{r+1}}{{}^{n+1}C_{r+2}} = 2\dfrac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_{r-1} + {}^nC_{r+2}} = \dfrac{2a_2}{a_2+a_3}$

13. (b) $T_{r+1} = {}^{642}C_r(5^{1/2})^{642-r}.(7^{1/6})^r$

स्पष्टतः r, 6 का गुणांक होना चाहिए

कुल संख्यायें $= \dfrac{642}{6} = 107$; लेकिन प्रथम पद $r = 0$ के लिए भी पूर्णांक है अतः कुल पद $= 107+1 = 108$ है।

14. (b) $(2+\sqrt{2})^4 = (\sqrt{2})^4(\sqrt{2}+1)^4$

$= 4[{}^4C_0 + {}^4C_1(\sqrt{2}) + {}^4C_2(\sqrt{2})^2 + {}^4C_3(\sqrt{2})^3 + {}^4C_4(\sqrt{2})^4]$

$= 4\left[1 + 4\sqrt{2} + \dfrac{4.3}{2}.2 + \dfrac{4.3.2}{1.2.3}.2\sqrt{2} + 4\right]$

$= 4[1 + 4\sqrt{2} + 12 + 8\sqrt{2} + 4]$ $= 4[17 + 12\sqrt{2}]$

$= 4[17 + (\simeq 17)]$ $= 4[34] = 136$.

15. (a) हम जानते हैं $n!$, $n \ge 5$ के लिए 0 पर टर्मिनेट होता है और 3^{4n} , 1 पर $(\because 3^4 = 81)$ टर्मिनेट होता है।

$\therefore 3^{180} = (3^4)^{45}$, 1 पर टर्मिनेट होता है।

साथ ही 3^3 = 27, 7 पर टर्मिनेट होता है

$\therefore\ 3^{183} = 3^{180}3^3$, 7 पर टर्मिनेट होता है

$\therefore\ 183! + 3^{183}$, 7 पर टर्मिनेट होता है अर्थात् इकाई पर आने वाला अंक 7 है।

16. (b) $T_{r+1} = {}^{256}C_r(\sqrt{3})^{256-r}(\sqrt[8]{5})^r = {}^{256}C_r(3)^{\frac{256-r}{2}}(5)^{r/8}$

पूर्णांक पदों के लिए $\dfrac{256-r}{2}$ तथा $\dfrac{r}{8}$ दोनों के मान धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए

$\because\ 0 \le r \le 256$, $\therefore r = 0, 8, 16, 24, ..., 256$

r के उपरोक्त मानों के लिए $\left(\dfrac{256-r}{2}\right)$ एक पूर्णांक है।

अतः पूर्णांक पदों की संख्या $r = 33$.

17. (c) माना $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n} = (1 + x + x^2)^n$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$a_1 + 2a_2x + ... + 2n\,a_{2n}x^{2n-1} = n(1 + x + x^2)^{n-1}(2x + 1)$

$x = -1$ रखने पर $\Rightarrow a_1 - 2a_2 + 3a_3 - .... + 2n\,a_{2n} = -n$.

गणितीय आगमन एवं विभाजिता सम्बन्धी प्रश्न

1. (a) $3^{2n} - 2n + 1$ में $n = 2$ रखने पर,

$3^{2\times2} - 2\times2 + 1 = 81 - 4 + 1 = 78$, जो कि 2 से विभाज्य है

2. (a) $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ हमेशा बराबर विषम घात रखेगा जो कि $x + y$ से हमेशा विभाज्य है।

3. (a) $7^{2n} + 2^{3n-3}.3^{n-1}$ में $n = 1$ रखने पर,

तब $7^{2\times1} + 2^{3\times1-3}.3^{1-1}$

$= 7^2 + 2^0.3^0 = 49 + 1 = 50$ ......(i)

साथ ही $n = 2$

$7^{2\times2} + 2^{3\times2-3}.3^{2-1} = 2401 + 24 = 2425$ ......(ii)

(i) व (ii) से, यह हमेशा 25 से विभाज्य है।

4. (c) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ में $n = 1$ रखने पर,

$11^{1+2} + 12^{2\times1+1} = 11^3 + 12^3 = 3059$ जो कि 133 से विभाज्य है।

5. (b) $n(n^2 - 1) = (n-1)(n)(n+1)$

यह तीन लगातार प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल है लेंग्रेराज प्रमेय से यह 3 से विभाज्य है अर्थात् 6

6. (b) माना $n = 1$ तब विकल्प (a) एवं (d) का विलोपन करते है n के किसी मान के लिए समानता नहीं हो सकती है अतः विकल्प (b) संतुष्ट करता है।

7. (c) माना $n = 1$, तब विकल्प (a), (b) एवं (d) n के किसी भी मान के लिये संतुष्ट नहीं करते हैं। केवल विकल्प (c) संतुष्ट करता है।

8. (b) विकल्प के परीक्षण से प्रतिबंध $2^n(n-1)! < n^n$, $n > 2$ के लिए संतुष्ट करता है।

9. (b) विकल्प के परीक्षण से, प्रतिबंध $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \ge n!$, $n \ge 1$ के लिए सत्य है।

10. (b) विकल्प के परीक्षण से प्रतिबंध $10^{n-2} > 81n$, $n \ge 5$ के लिए संतुष्ट करता है।

11. (b) विकल्प के परीक्षण से जब $n \ge 4$ प्रतिबंध $2^n < n!$ सत्य है।

12. (c) विकल्प के परीक्षण से जब $n \ge 4$ प्रतिबंध $3^n > n^3$ सत्य है।

13. (d) विकल्प के परीक्षण से जब $n \ge 3$ प्रतिबंध $(n!)^2 > n^n$ सत्य है।

14. (d) $P(n) = n^2 + n$. यह हमेशा विषम (कथन) है, लेकिन कोई भी विषम संख्या का वर्ग हमेशा विषम होता है। दो विषम संख्याओं का योग हमेशा सम होता है। अतः 'n' के किसी भी मान के लिए यह कथन सत्य नहीं है।

15. (a) एक से बड़ी किसी भी प्राकृतिक संख्या के लिए p, $n^p - n$ से विभाज्य है। यह फरमेट की प्रमेय हैं

ट्रिक : माना $n = 4$ एवं $p = 2$

तब $(4)^2 - 4 = 16 - 4 = 12$, यह 2 से विभाज्य है।

अतः यह किसी भी एक से बड़ी प्राकृतिक संख्या के लिए सत्य है।

16. (c) विकल्पों के परीक्षण से, प्रतिबंध सभी $n \in N$ के लिए संतुष्ट करता है।

17. (d) यह स्पष्ट है (कुछ नहीं कह सकते हैं)

18. (a) दो क्रमागत संख्याओं का गुणनफल हमेशा सम होता है।

19. (c) $n = 1, 2, 3 ....$ के लिए जांच करें। यह सभी $n \in N$ के लिए सत्य है।

20. (b) $5^{99} = (5)(5^2)^{49} = 5(25)^{49} = 5(26 - 1)^{49}$

$= 5 \times (26) \times$(धनात्मक पद)$- 5$, अतः जब 13 से विभाजित करते हैं तब शेषफल – 5 या (13 – 5) अर्थात् 8 है।

21. (c) $2^4 \equiv 1 \pmod 5; \Rightarrow (2^4)^{75} \equiv (1)^{75} \pmod 5$

अर्थात् $2^{300} \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2^{300} \times 2 \equiv (1.2) \pmod 5$

$\Rightarrow 2^{301} \equiv 2 \pmod 5$, $\therefore$ न्यूनतम धनात्मक शेषफल 2 है

22. (a,d) गणितीय आगमन की सहायता से सिद्ध कर सकते हैं $\frac{n}{2} > a(n) \le n$.

$\therefore \frac{200}{2} < a(200) \Rightarrow a(200) > 100$ एवं $a(100) \le 100$.

23. (c) $10^n + 3(4^{n+2}) + 5$

$n = 2$ लेने पर, $10^2 + 3\times4^4 + 5$

$= 100 + 768 + 5 = 873$

अतः यह 9 से विभाज्य है।

Critical Thinking Questions

1. (b) $(x+a)^n + (x-a)^n = 2\,[x^n + {}^nC_2x^{n-2}a^2 + {}^nC_4x^{n-4}a^4 + {}^nC_6x^{n-6}a^6 + ...]$

यहाँ, $n = 6, x = \sqrt{2}, a = 1$; ${}^6C_2 = 15, {}^6C_4 = 15, {}^6C_6 = 1$

$\therefore (\sqrt{2}+1)^6 + (\sqrt{2}-1)^6 = 2[(\sqrt{2})^6 + 15.(\sqrt{2})^4.1 + 15(\sqrt{2})^2.1 + 1.1]$

$= 2[8 + 15\times4 + 15\times2 + 1] = 198$.

2. (a) दिया है $(1 + ax)^n = 1 + 8x + 24x^2 + ...$

$\Rightarrow 1 + \frac{n}{1}ax + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^2 + ... = 1 + 8x + 24x^2 + ...$

$\Rightarrow na = 8, \frac{n(n-1)}{1.2}a^2 = 24 \Rightarrow na(n-1)a = 48$

$\Rightarrow 8(8 - a) = 48 \Rightarrow 8 - a = 6 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow n = 4$.

3. (b) $(1 + x^2)^5(1 + x)^4$

$= ({}^5C_0 + {}^5C_1x^2 + {}^5C_2x^4 + ...)\,({}^4C_0 + {}^4C_1x + {}^4C_2x^2 + {}^4C_3x^3 + {}^4C_4x^4)$

अतः $[(1 + x^2)^5(1 + x)^4]$ में x^5 का गुणांक

$= {}^5C_2.{}^4C_1 + {}^4C_3.{}^5C_1 = 60$.

4. (b) $\dfrac{(1-3x)^{1/2}+(1-x)^{5/3}}{2\left[1-\dfrac{x}{4}\right]^{1/2}}$

$$=\frac{\left[1+\frac{1}{2}(-3x)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}(-3x)^2+....\right]+\left[1+\frac{5}{3}(-x)+\frac{5}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{2}(-x)^2+....\right]}{2\left[1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{4}\right)^2+....\right]}$$

$$=\frac{\left[1-\frac{19}{12}x+\frac{53}{144}x^2-....\right]}{\left[1-\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2-....\right]}=1-\frac{35}{24}x+....$$

x की उच्चतम घातों को छोड़ने पर,

$a+bx=1-\frac{35}{24}x \Rightarrow a=1, b=-\frac{35}{24}$.

5. (a) $T_3={}^5C_2.x^2(x^{\log_{10}x})^3=10^6$

${}^5C_2=10$ रखने पर, $[\because \log_{10}10=1]$.

यदि $x=10$, तब $10^3.10^{2.1}=10^5$ संतुष्ट है।

अतः $x=10$.

6. (c) चूंकि $(1+x)^{2n+2}$ के प्रसार में मध्य पद $(n+2)$वां पद है इसलिए $p={}^{2n+2}C_{n+1}$.

चूंकि $(1+x)^{2n+1}$ के प्रसार में मध्य पद $(n+1)$वां तथा $(n+2)$वां पद है इसलिए $q={}^{2n+1}C_n$ एवं $r={}^{2n+1}C_{n+1}$ लेकिन ${}^{2n+1}C_n+{}^{2n+1}C_{n+1}={}^{2n+2}C_{n+1}$

$\therefore q+r=p$

7. (b) $(x-1)(x-2)(x-3)....(x-100)$

पदों की संख्या = 100;

$\therefore$ $(x-1)(x-2)(x-3)...(x-100)$ में x^{99} का गुणांक =

$=(-1-2-3-......-100)=-(1+2+.....+100)$

$=-\frac{100\times 101}{2}=-5050$.

8. (a) $T_{r+1}={}^{200}C_r(1)^{200-r}.(x)^r$

x^{100} का गुणांक $={}^{200}C_{100}=\begin{pmatrix}200\\100\end{pmatrix}$.

9. (a) $\left(ax^2+\frac{1}{bx}\right)^{11}$ के प्रसार में व्यापक पद

$T_{r+1}={}^{11}C_r(ax^2)^{11-r}\left(\frac{1}{bx}\right)^r={}^{11}C_r a^{11-r}\frac{1}{b^r}x^{22-3r}$

x^7 के लिए $22-3r=7 \Rightarrow r=5$ एवं

x^7 का गुणांक $={}^{11}C_5.a^{11-5}\frac{1}{b^5}={}^{11}C_5\frac{a^6}{b^5}$

इसी प्रकार $\left(ax-\frac{1}{bx^2}\right)^{11}$ के प्रसार में व्यापक पद

$T_{r+1}={}^{11}C_r(-1)^r\frac{a^{11-r}}{b^r}.x^{11-3r}$

x^{-7} के लिए $11-3r=-7 \Rightarrow r=6$, एवं

x^{-7} का गुणांक ${}^{11}C_6\frac{a^5}{b^6}={}^{11}C_5\frac{a^5}{b^6}$.

दिया है ${}^{11}C_5\frac{a^6}{b^5}={}^{11}C_5\frac{a^5}{b^6}\Rightarrow ab=1$.

10. (c) $T_{r+1}={}^5C_r(x^2)^{5-r}\left(\frac{k}{x}\right)^r$

x के गुणांक के लिए $10-2r-r=1 \Rightarrow r=3$

अतः $T_{3+1}={}^5C_3(x^2)^{5-3}\left(\frac{k}{x}\right)^3$

प्रश्नानुसार, $10k^3=270 \Rightarrow k=3$.

11. (a) माना $(1+x)^n$ के विस्तार में तीन क्रमागत पदों अर्थात् $(r+1)$वां, $(r+2)$वां, $(r+3)$वां पदों के गुणांक क्रमशः 165,330 और 462 हैं। $(r+1)$वें पद का गुणांक $={}^nC_r=165$

$(r+2)$वें पद का गुणांक $={}^nC_{r+1}=330$ और

$(r+3)$वें पद का गुणांक $={}^nC_{r+2}=462$

$\therefore \frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r}=\frac{n-r}{r+1}=2$

या $n-r=2(r+1)$ या $r=\frac{1}{3}(n-2)$

एवं $\frac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_{r+1}}=\frac{n-r-1}{r+2}=\frac{231}{165}$

या $165(n-r-1)=231(r+2)$ या $165n-627=396r$

या $165n-627=396\times\frac{1}{3}\times(n-2)$

या $165n-627=132(n-2)$ या $n=11$.

12. (d) ${}^{18}C_{2r+3}={}^{18}C_{r-3}\Rightarrow 2r+3+r-3=18\Rightarrow r=6$

13. (d) $(1+x)^{2n}$ का मध्य पद $T_{n+1}={}^{2n}C_nx^n$

$=\frac{(2n)!}{n!\,n!}x^n=\frac{1.3.5....(2n-1)}{n!}2^nx^n$.

14. (b) $(1-x)^{30}={}^{30}C_0x^0-{}^{30}C_1x^1+{}^{30}C_2x^2+......+(-1)^{30}\,{}^{30}C_{30}x^{30}$ ....(i)

$(x+1)^{30}={}^{30}C_0x^{30}+{}^{30}C_1x^{29}+{}^{30}C_2x^{28}+......+{}^{30}C_{10}x^{20}+....+{}^{30}C_{30}x^0$ ....(ii)

(i) एवं (ii) का गुणा करके दोनों पक्षों x^{20} के गुणांकों की तुलना करने पर अभीष्ट योग $=(1-x^2)^{30}$ में x^{20} का गुणांक $={}^{30}C_{10}$.

15. (c) $(1+3x+3x^2+x^3)^6=\{(1+x)^3\}^6=(1+x)^{18}$

अतः मध्य पद 10वां पद है।

16. (c) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{11}$ का मध्य पद $T_6={}^{11}C_5(x)^6\left(-\frac{1}{x}\right)^5=-462x$

एवं $T_7={}^{11}C_6(x)^5\left(-\frac{1}{x}\right)^6=\frac{462}{x}$

17. (d) $(9-r)\left(-\frac{1}{6}\right)+r\left(\frac{1}{3}\right)=0\Rightarrow r=3$

अतः y से स्वतंत्र पद

$={}^9C_3(y^{-1/6})^6(-y^{1/3})^3=-84$.

18. (c) $\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^9$ के प्रसार में व्यापक पद

$$T_{r+1} = {}^9C_r\left(\frac{3}{2}x^2\right)^{9-r}\left(-\frac{1}{3x}\right)^r = {}^9C_r\left(\frac{3}{2}\right)^{9-r}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{18-3r} \quad ......(i)$$

अब $(1+x+2x^3)\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^9$ ......(ii) के प्रसार में x से स्वतंत्र पद का गुणांक =

$\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^9$ के प्रसार में x^o, x^{-1}, x^{-3} के गुणांकों का योग

(i) में x^0 के लिए $18 - 3r = 0 \Rightarrow r = 6$

(i) में x^{-1} के लिए r के किसी मान का अस्तित्व नहीं है

(i) में x^{-3} के लिए $18 - 3r = -3 \Rightarrow r = 7$

$\therefore$ (ii) में x से स्वतंत्र पद के लिए गुणांक

$$= 1 \times {}^9C_6(-1)^6\left(\frac{3}{2}\right)^{9-6}\left(\frac{1}{3}\right)^6 + 2 \times {}^9C_7(-1)^7\left(\frac{3}{2}\right)^{9-7}\left(\frac{1}{3}\right)^7$$

$$= \frac{9.8.7}{1.2.3}.\frac{3^3}{2^3}.\frac{1}{3^6} + 2\frac{9.8}{1.2}(-1)\frac{3^2}{2^2}.\frac{1}{3^7} = \frac{7}{18} - \frac{2}{27} = \frac{17}{54}.$$

19. (b) प्रश्नानुसार, $(\sqrt{x})^{10-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = x^0 \Rightarrow r = 2$

अतः पद ${}^{10}C_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^8.(\sqrt{3})^2 = \frac{5}{3}.$

20. (a) $T_{r+1} = {}^{18}C_r(\sqrt{x})^{18-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r = {}^{18}C_r x^{9-r/2-r}(-2)^r$

यदि T_{r+1}, x से स्वतंत्र है, तब $9 - \frac{r}{2} - r = 0 \Rightarrow r = 6$.

$\therefore$ x से स्वतंत्र पद $= T_7 = {}^{18}C_6 2^6$

21. (c) $3^{50}\left(1 + \frac{2x}{3}\right)^{50}$

$\therefore \frac{T_{r+1}}{T_r} \ge 1 \Rightarrow 102 - 2r \ge 15r \Rightarrow r \le 6$

22. (b) हम जानते हैं कि

$$\frac{C_1}{C_0} + 2\frac{C_2}{C_1} + 3\frac{C_3}{C_2} + ... + n.\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

n=15 रखने पर, $\frac{15 \times (15+1)}{2} = 120$.

23. (c) $(1+x)^n = {}^nC_0 + x.{}^nC_1 + x^2.{}^nC_2 + ... + x^n.{}^nC_n$

x = 2 रखने पर,

$\Rightarrow 3^n = {}^nC_0 + 2.{}^nC_1 + 2^2.{}^nC_2 + 2^3.{}^nC_3 + ... + 2^n.{}^nC_n$.

24. (d) यहाँ $C_0^2 - 2C_1^2 + 3C_2^2 - ..... + (-1)^n(n+1)C_n^2$

$$= [C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 - .... + (-1)^n C_n^2] - [C_1^2 - 2C_2^2 + 3C_3^2 .... - (-1)^n nC_n^2]$$

$$= (-1)^{n/2}\frac{n!}{(n/2)!(n/2)!} - (-1)^{(n/2)-1}.\frac{1}{2}n\ {}^nC_{n/2}$$

$$= (-1)^{n/2}.\frac{n!}{(n/2)!(n/2)!}.\left(1 + \frac{n}{2}\right)$$

अतः दिये गये व्यंजक का मान =

$$\frac{2(n/2)!(n/2)!}{n!} \times (-1)^{n/2}.\frac{(n)!}{(n/2)!(n/2)!}\left(1 + \frac{n}{2}\right)$$

$$= (-1)^{n/2}(2+n)$$

25. (c) $(x+a)^n = {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}a + {}^nC_2x^{n-2}a^2 + {}^nC_3x^{n-3}a^3 + ...$

लेकिन प्रतिबंध से,

$A = {}^nC_0x^n + {}^nC_2x^{n-2}a^2 + {}^nC_4x^{n-4}a^4 + ...$

एवं $B = {}^nC_1x^{n-1}a + {}^nC_3x^{n-3}a^3 + ...$

अतः $AB = \frac{1}{4}\{(x+a)^{2n} - (x-a)^{2n}\}$

या $4AB = (x+a)^{2n} - (x-a)^{2n}$

26. (b) $(x+a)^n = x^n + {}^nC_1x^{n-1}a + {}^nC_2x^{n-2}a^2 + {}^nC_3x^{n-3}a^3 + ...$

$$= (x^n + {}^nC_2x^{n-2}a^2 + ... + ({}^nC_1x^{n-1}a + {}^nC_3x^{n-3}a^3 + ...)$$

$= P + Q$

$\therefore$ $(x-a)^n = P - Q$, पद क्रमशः एकांतर क्रम में धनात्मक एवं ऋणात्मक हैं।

$\therefore$ $P^2 - Q^2 = (P+Q)(P-Q) = (x+a)^n(x-a)^n$

$P^2 - Q^2 = (x^2 - a^2)^n$

27. (c) $(1+x-3x)^{2163}$ मे x=1 रखने पर,

गुणांकों का योग $= (1+1-3)^{2163} = (-1)^{2163} = -1$.

28. (b) $a = (1 - 3x + 10x^2)^n$ के विस्तार में गुणांकों का योग

$= (1 - 3 + 10)^n = (8)^n$

$\Rightarrow (1 - 3x + 10x^2)^n = (2)^{3n}$, [$x$ = 1 रखने पर]

b= $(1 + x^2)^n$ के विस्तार मे गुणांकों का योग

$= (1+1)^n = 2^n$. स्पष्टतः $a = b^3$

29. (b) परिकल्पना से, $2^n = 4096 = 2^{12} \Rightarrow n = 12$

$\because$ n सम है अतः महत्तम गुणांक

$$= {}^nC_{n/2} = {}^{12}C_6 = \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6} = 924.$$

30. (b) प्रश्नानुसार $(\alpha - 2 + 1)^{35} = (1-\alpha)^{35}$

$\Rightarrow (\alpha - 1)^{35} = (1-\alpha)^{35} \Rightarrow \alpha = 1$

31. (a) $3^{2n+2} - 8n - 9, \forall n \in N$

$n = 2$ रखने पर,

$3^{2\times2+2} - 8 \times 2 - 9 = 729 - 16 - 9 = 704$

यह 16 से विभाज्य है।

32. (d) $17 = 2 \pmod 5$

$(17)^5 = (2)^5 \pmod 5 = 2 \pmod 5$

$\Rightarrow (17^5)^6 = (2)^6 \pmod 5 \Rightarrow (17)^{30} = 4 \pmod 5$

अतः अभीष्ट शेषफल = 4.

33. (a) विकल्पों के परीक्षण से, प्रतिबंध $2^n > 2n+1$, $n \ge 3$ के लिए मान्य है।

34. (d) कुछ नहीं कह सकते हैं यह प्रतिबंध पर निर्भर करता है।

35. (b) $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + ...$

$\Rightarrow (1+x)^n - nx - 1$

$= x^2\left[\frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-3)}{3!}x + ...\right]$

उपरोक्त, से यह स्पष्ट है कि $(1+x)^n - nx - 1$, x^2 से विभाज्य है।

ट्रिक : $(1+x)^n - nx - 1$, $n = 2$ रखने पर $x = 3$; तब $4^2 - 2.3 - 1 = 9$, 6 से विभाज्य नहीं है, एवं 54, 9 से विभाज्य है जो कि विकल्प (b) द्वारा दिया गया है अर्थात् $x^2 = 9$.

द्विपद प्रमेय तथा गणितीय आगमन

SET Self Evaluation Test - 7

1. यदि $(a+b)^n$ के प्रसार में $\frac{T_2}{T_3}$ व $(a+b)^{n+3}$ के प्रसार में $\frac{T_3}{T_4}$ समान हैं, तब $n=$ [RPET 1987, 96]
   (a) 3 (b) 4
   (c) 5 (d) 6

2. यदि n एक धनात्मक पूर्णांक है तथा $C_k = {}^nC_k$, तब $\sum_{k=1}^{n} k^3\left(\frac{C_k}{C_{k-1}}\right)^2 =$ [Roorkee 1991]
   (a) $\frac{n(n+1)(n+2)}{12}$ (b) $\frac{n(n+1)^2}{12}$
   (c) $\frac{n(n+2)^2(n+1)}{12}$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. माना n एक विषम पूर्णांक है। यदि θ के सभी मानों के लिये $\sin n\theta = \sum_{r=0}^{n} b_r \sin^r\theta$ हो, तो [IIT 1998; Pb. CET 2003]
   (a) $b_0 = 1, b_1 = 3$
   (b) $b_0 = 0, b_1 = n$
   (c) $b_0 = -1, b_1 = n$
   (d) $b_0 = 0, b_1 = n^2 - 3n + 3$

4. यदि $(1-x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}$, तो $a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{2n}$ बराबर है [MNR 1992; DCE 1996; RPET 1999; AMU 1998; Karnataka CET 1999; UPSEAT 1999]
   (a) $\frac{3^n+1}{2}$ (b) $\frac{3^n-1}{2}$
   (c) $\frac{1-3^n}{2}$ (d) $3^n + \frac{1}{2}$

5. श्रेणी $1 + \frac{1}{5} + \frac{1.3}{5.10} + \frac{1.3.5}{5.10.15} + ...$ का योगफल है [Roorkee 1998]
   (a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
   (c) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ (d) $\sqrt{5}$

6. यदि $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r x^r$, तो $\left(1+\frac{C_1}{C_0}\right)\left(1+\frac{C_2}{C_1}\right)....\left(1+\frac{C_n}{C_{n-1}}\right) =$ [BIT Ranchi 1987; Kerala (Engg.) 2005]
   (a) $\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$ (b) $\frac{(n+1)^{n-1}}{(n-1)!}$
   (c) $\frac{(n+1)^n}{n!}$ (d) $\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$

7. श्रेणी $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \; {}^nC_r\left(\frac{1}{2^r} + \frac{3^r}{2^{2r}} + \frac{7^r}{2^{3r}} + \frac{15^r}{2^{4r}} + ...m \text{ पदों तक}\right)$ का योगफल है [IIT 1985]
   (a) $\frac{2^{mn}-1}{2^{mn}(2^n-1)}$ (b) $\frac{2^{mn}-1}{2^n-1}$
   (c) $\frac{2^{mn}+1}{2^n+1}$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि $(x+y)^n$ के विस्तार में गुणांकों का योग 1024 हो, तो विस्तार में सबसे बड़े गुणांक का मान होगा
   (a) 356 (b) 252
   (c) 210 (d) 120

9. यदि x का मान इतना छोटा हो कि x^2 व उच्च घात वाले पदों को छोडा जा सकें, तो $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{1+x+\sqrt{1+x}}$ बराबर होगा [Roorkee 1962]
   (a) $1+\frac{5}{6}x$ (b) $1-\frac{5}{6}x$
   (c) $1+\frac{2}{3}x$ (d) $1-\frac{2}{3}x$

10. $(1-x)^{21}$ के प्रसार में संख्यात्मक रूप से महत्तम पद, महत्तम गुणांक के बराबर हो, इसके लिये x का मान निम्न अन्तराल में आता है
   (a) $\left[\frac{5}{6},\frac{6}{5}\right]$ (b) $\left(\frac{5}{6},\frac{6}{5}\right)$
   (c) $\left(\frac{4}{5},\frac{5}{4}\right)$ (d) $\left[\frac{4}{5},\frac{5}{4}\right]$

11. यदि द्विपद $\left[\sqrt{2^{\log(10-3^x)}} + \sqrt[5]{2^{(x-2)\log 3}}\right]^m$ के प्रसार में 6वां पद 21 के बराबर है तथा यह ज्ञात है कि प्रसार में दूसरे, तीसरे तथा चौथे पदों के द्विपद गुणांक क्रमशः समान्तर श्रेणी के प्रथम, तृतीय तथा पंचम पद हैं. (संकेत log आधार 10 के सापेक्ष लघुगणक के लिये प्रयुक्त है), तब $x=$ [Roorkee 1993]
   (a) 0 (b) 1
   (c) 2 (d) 3

12. यदि $\left\{2^{\log_2\sqrt{(9^{x-1}+7)}} + \frac{1}{2^{(1/5)\log_2(3^{x-1}+1)}}\right\}^7$ के प्रसार में छठवां पद 84 है, तब x का मान है [Pb. CET 1992]
   (a) 4 (b) 3
   (c) 2 (d) 1

13. $(1+2x)^{-1/2}$ का अनन्त श्रेणी के रूप में विस्तार करने पर x का रेंज (परिसर) होगा [AMU 2002]

(a) $\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$ (b) $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$

(c) $[-2,2]$ (d) $(-2,2)$

14. $49^n+16n-1$ निम्न से विभाज्य है [Kurukshetra CEE 2001]

(a) 3 से (b) 19 से

(c) 64 से (d) 29 से

15. $(1+\alpha x)^4$ व $(1-\alpha x)^6$ के प्रसार में मध्य पद के गुणांक समान होंगे यदि α का मान है [AIEEE 2004]

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{10}{3}$

(c) $\frac{-3}{10}$ (d) $-\frac{10}{3}$

16. यदि धनात्मक पूर्णांकों $r>1, n>2$ के लिए $(1+x)^{2n}$ के विस्तार में x की $(3r)$ वीं तथा $(r+2)$ वीं घातों के गुणांक समान हों, तब

[IIT 1983; BIT 1990; Kurukshetra CEE 1992; UPSEAT 1998, 2002; DCE 2000; AIEEE 2002]

(a) $n=2r$ (b) $n=3r$

(c) $n=2r+1$ (d) इनमें से कोई नहीं

17. यदि $(1+x)^n$ के विस्तार में द्वितीय, तृतीय तथा चतुर्थ पदों के गुणांक समान्तर श्रेणी (A.P.) में हों, तब n बराबर है

[IIT 1994; RPET 2002]

(a) 7 (b) 2

(c) 6 (d) इनमें से कोई नहीं

18. $(a-b)^n, n\ge 5,$ के द्विपद विस्तार में पांचवें तथा छठवें पदों का योग शून्य है, तब $\frac{a}{b}$ का मान होगा

[IIT Screening 2001; Karnataka CET 2002]

(a) $\frac{1}{6}(n-5)$ (b) $\frac{1}{5}(n-4)$

(c) $\frac{5}{(n-4)}$ (d) $\frac{6}{(n-5)}$

19. दिया गया है कि $\left(2+\frac{3}{8}x\right)^{10}$ के प्रसार में चौथा पद महत्तम संख्यात्मक मान रखता है, तो इसके लिये x के मान का परास होगा

[Roorkee 1994]

(a) $-\frac{64}{21}<x<-2$

(b) $-\frac{64}{21}<x<2$

(c) $\frac{64}{21}<x<4$

(d) इनमें से कोई नहीं

20. माना n और k धनात्मक पूर्णांक इस प्रकार हैं कि $n\ge\frac{k(k+1)}{2}$. $x_1+x_2+....+x_k=n$ को सन्तुष्ट करने वाले हलों $(x_1,x_2,....x_k)$, जहाँ $x_1\ge 1, x_2\ge 2,....x_k\ge k,$ तथा सभी पूर्णांक हैं, की संख्या है [IIT 1996]

(a) ${}^mC_{k-1}$

(b) ${}^mC_{k+1}$

(c) ${}^mC_k$

(d) इनमें से कोई नहीं

{जहाँ $m=\frac{1}{2}(2n-k^2+k-2)$}

21. n का न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक मान, जिसके लिये $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ है, होगा [Pb. CET 2001]

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

22. माना $S(k)=1+3+5+.......+(2k-1)=3+k^2$, तब निम्न में से कौन सा सत्य है [AIEEE 2004]

(a) गणितीय आगमन के सिद्धान्त का उपयोग दिये गये सूत्र को सिद्ध करने के लिये कर सकते हैं

(b) $S(k)\Rightarrow S(k+1)$

(c) $S(k)\not\Rightarrow S(k+1)$

(d) $S(1)$ सही है

23. यदि P एक प्राकृत संख्या है, तब $P^{n+1}+(P+1)^{2n-1}$ विभाज्य है

[IIT 1994]

(a) P से (b) P^2+P से

(c) P^2+P+1 से (d) P^2-1 से

24. दिया है, $U_{n+1}=3U_n-2U_{n-1}$ तथा $U_0=2$, $U_1=3$, तब $n\in N$ के सभी मानों के लिये U_n का मान है

(a) 2^n-1 (b) 2^n+1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

25. एक पूर्णांक तथा इसके घन का अन्तर, विभाज्य है

[MP PET 1999]

(a) 4 से

(b) 6 से

(c) 9 से

(d) इनमें से कोई नहीं

Answers and Solutions

(SET - 7)

1. (c) प्रश्नानुसार, $\frac{T_2}{T_3}=\frac{{}^nC_1a^{n-1}b}{{}^nC_2a^{n-2}b^2}$ ......(i)

$\frac{T_3}{T_4}=\frac{{}^{n+3}C_2a^{n+1}b^2}{{}^{n+3}C_3a^nb^3}$ ......(ii)

(i) = (ii) $\Rightarrow \frac{2n}{n(n-1)}=\frac{6(n+3)(n+2)}{2(n+3)(n+2)(n+1)}$

$\Rightarrow 2(n+1)=3(n-1)\Rightarrow n=5$.

2. (d) $\sum_{k=1}^{n}k^3\left(\frac{C_k}{C_{k-1}}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}k^3\left(\frac{n-k+1}{k}\right)^2\left[\because \frac{{}^nC_k}{{}^nC_{k-1}}=\frac{n-k+1}{k}\right]$

$\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)^2=\sum_{k=1}^{n}k[(n+1)^2-2k(n+1)+k^2]$

$=(n+1)^2\sum_{k=1}^{n}k-2(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k^3$

$=(n+1)^2.\frac{n(n+1)}{2}-2(n+1).\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$=\frac{n(n+1)^2}{12}[6(n+1)-4(2n+1)+3n]$

$=\frac{n(n+1)^2}{12}.(n+2)=\frac{n(n+2)(n+1)^2}{12}$

ट्रिक : $n=1, 2$ लेकर जांच कीजिये।

3. (b) दिया है $\sin n\theta=\sum_{r=0}^{n}b_r\sin^r\theta$

$\Rightarrow \sin n\theta=b_0\sin^0\theta+b_1\sin^1\theta$

$+b_2\sin^2\theta+b_3\sin^3\theta+.....+b_n\sin^n\theta$

$\Rightarrow \sin n\theta=b_0+b_1\sin\theta+b_2\sin^2\theta+....+b_n\sin^n\theta$

(n विषम पूर्णांक है)

$\because \sin n\theta={}^nC_1\sin\theta\cos^{n-1}\theta-{}^nC_3\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta+....$

$={}^nC_1\sin\theta(1-\sin^2\theta)^{(n-1)/2}$

$-{}^nC_3\sin^3\theta(1-\sin^2\theta)^{(n-3)/2}+....$

$\therefore b_0=0, b_1=\sin\theta$ का गुणांक $={}^nC_1=n$

($\because n-1 = n-3$ सभी सम पूर्णांक हैं)

4. (a) $(1-x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_{2n}x^{2n}$

$x=1$ रखने पर,

$(1-1+1)^n=a_0+a_1+a_2+.....+a_{2n}$

$\Rightarrow 1=a_0+a_1+a_2+....+a_{2n}$ .....(i)

$x=-1$ रखने पर,

$\Rightarrow 3^n=a_0-a_1+a_2-....+a_{2n}$ ......(ii)

(i) व (ii) जोड़ने पर,

$\frac{3^n+1}{2}=a_0+a_2+a_4+....+a_{2n}$.

5. (c) $S=1+\frac{1}{5}+\frac{1.3}{5.10}+\frac{1.3.5}{5.10.15}+.....$

$(1+x)^n=1+\frac{nx}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+..$

$\Rightarrow nx=\frac{1}{5}$ व $\frac{n(n-1)x^2}{2!}=\frac{1.3}{5.10}$

$\Rightarrow n=-\frac{1}{2}$ व $x=\frac{-2}{5}$

$\therefore S=\left(1-\frac{2}{5}\right)^{-1/2}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-1/2}=\sqrt{\frac{5}{3}}$.

6. (c) $\left(1+\frac{C_1}{C_0}\right)\left(1+\frac{C_2}{C_1}\right)....\left(1+\frac{C_n}{C_{n-1}}\right)$

$=\left(1+\frac{n}{1}\right)\left(1+\frac{n(n-1)/2!}{n}\right)...\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$=\frac{(1+n)}{1}.\frac{(1+n)}{2}.\frac{(1+n)}{3}....\frac{(1+n)}{n}=\frac{(n+1)^n}{n!}$

7. (a) $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\,{}^nC_r\left(\frac{1}{2^r}+\frac{3^r}{2^{2r}}+\frac{7^r}{2^{3r}}+....m \text{ पदों तक}\right)$

$=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\,{}^nC_r.\frac{1}{2^r}+\sum_{r=0}^{n}(-1)^r.{}^nC_r\frac{3^r}{2^{2r}}$

$+\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\,{}^nC_r\frac{7^r}{2^{3r}}+.....$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)^n+\left(1-\frac{3}{4}\right)^n+\left(1-\frac{7}{8}\right)^n+....$ m पदों तक

$=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{8^n}+....$ m पदों तक

$=\frac{\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^{nm}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}=\frac{2^{mn}-1}{2^{mn}(2^n-1)}$

8. (b) दिया है $2^n=1024$, $\therefore n=10$

$\therefore$ महत्तम गुणांक $={}^{10}C_5=252$.

9. (b) दिये गये व्यंजक को निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$=\frac{(1+x)^{1/2}+(1-x)^{2/3}}{1+x+(1+x)^{1/2}}$

$\frac{\left[1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2....\right]+\left[1-\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}x^2-....\right]}{1+x+\left[1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+....\right]}$

$\frac{\left[1-\frac{1}{12}x-\frac{1}{144}x^2....\right]}{\left[1+\frac{3}{4}x-\frac{1}{16}x^2....\right]}=1-\frac{5}{6}x+...=1-\frac{5}{6}x$

जब x, x .... को नगण्य माना जाए।

10. (b) यदि n विषम है, तब $(1-x)^n$ के प्रसार में संख्यात्मक रूप से महत्तम गुणांक ${}^nC_{(n-1)/2}$ या ${}^nC_{(n+1)/2}$ है इसलिए $(1-x)^{21}$ की स्थिति में, संख्यात्मक रूप से महत्तम गुणांक ${}^{21}C_{10}$ या ${}^{21}C_{11}$ है इसलिये संख्यात्मक रूप से महत्तम पद $= {}^{21}C_{11}x^{11}$ या ${}^{21}C_{10}x^{10}$

$\therefore\ {}^{21}C_{11}x^{11} > {}^{21}C_{12}x^{12}$ तथा ${}^{21}C_{10}x^{10} > {}^{21}C_9x^9$

$\Rightarrow \frac{21!}{10!\,11!} > \frac{21!}{9!\,12!}x$ तथा $\frac{21!}{11!\,10!}x > \frac{21!}{9!\,12!}$

$\Rightarrow \frac{6}{5} > x$ तथा $x < \frac{5}{6} \Rightarrow x \in \left(\frac{5}{6}, \frac{6}{5}\right)$

11. (a,c) चूंकि T_2, T_3, T_4 के गुणांक ${}^mC_1, {}^mC_2$ तथा ${}^mC_3$ समान्तर श्रेणी के प्रथम, तृतीय तथा पंचम पद है जो कि उभयनिष्ठ सार्वअंतर $2d$ वाली समान्तर श्रेणी भी होगी।

अतः $2\,{}^mC_2 = {}^mC_1 + {}^mC_3 \Rightarrow (m-2)(m-7) = 0$.

चूंकि 6वां पद 21 है $m = 2$ नियम के विरूद्ध है अतः हम $m = 7$ लेते हैं तथा

$$T_6 = 21 = {}^7C_5\left[\sqrt{2^{\log(10-3^x)}}\right]^{7-5} \times \left[\sqrt[5]{2^{(x-2)}\log 3}\right]^5$$

$\Rightarrow 21 = 21\,.\,2^{\log(10-3^x)+\log 3^{x-2}}$

$\Rightarrow 2^{\log[(10-3^x)\,3^{x-2}]} = 1 = 2^0$

सरल करने पर, $x = 0, 2$.

12. (c,d) $\left[2^{\log_2\sqrt{9^{x-1}+7}} + \frac{1}{2^{(1/5)\log_2(3^{x-1}+1)}}\right]^7$

$= \left[\sqrt{9^{x-1}+7} + \frac{1}{(3^{x-1}+1)^{1/5}}\right]^7$

$\therefore\ T_6 = {}^7C_5\left(\sqrt{9^{x-1}+7}\right)^{7-5}\left[\frac{1}{(3^{x-1}+1)^{1/5}}\right]^5$

$= {}^7C_5(9^{x-1}+7)\frac{1}{(3^{x-1}+1)}$

अब $T_6 = 84 \Rightarrow {}^7C_5\frac{(9^{x-1}+7)}{(3^{x-1}+1)} = 84$

$\Rightarrow 9^{x-1}+7 = 4(3^{x-1}+1)$

$\Rightarrow 3^{2x} - 12(3^x) + 27 = 0 \Rightarrow y^2 - 12y + 27 = 0$

(जहाँ $y = 3^x$)

$\Rightarrow y = 3, 9 \Rightarrow 3^x = 3, 9 \Rightarrow x = 1, 2$

13. (b) $(1+2x)^{-1/2}$ का विस्तार कर सकते हैं यदि $|2x| < 1$ अर्थात् यदि $|x| < \frac{1}{2}$, अर्थात् $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ अर्थात् यदि $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

14. (c) $49^n + 16n - 1 = (1+48)^n + 16n - 1$

$1 + {}^nC_1(48) + {}^nC_2(48)^2 + ... + {}^nC_n(48)^n + 16n - 1$

$= (48n + 16n) + {}^nC_2(48)^2 + {}^nC_3(48)^3 + ... + {}^nC_n(48)^n$

$= 64n + 8^2[{}^nC_2.6^2 + {}^nC_3.6^3.8 + {}^nC_4.6^4.8^2 + .. + {}^nC_n.6^n.8^{n-2}]$

अतः $49^n + 16n - 1$, 64 से विभाज्य है।

15. (c) $(1+\alpha x)^4$ के प्रसार में मध्य पद $= {}^4C_2(\alpha x)^2$

$(1-\alpha x)^6$ के प्रसार में मध्य पद $= {}^6C_3(-\alpha x)^3$

प्रश्नानुसार, ${}^4C_2\alpha^2 = -\,{}^6C_3\alpha^3$

$\Rightarrow\ \alpha = -3/10$.

16. (c) $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में व्यापक पद $= {}^{2n}C_k, 0 \le k \le 2n$

$r > 1, n > 2$ के लिए ${}^{2n}C_{3r} = {}^{2n}C_{r+2}$

$\Rightarrow$ या तो $3r = r + 2$ या $3r = 2n - (r+2)$, $(\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$

$\Rightarrow r = 1$ या $n = 2r + 1 \Rightarrow n = 2r + 1$, $(\because r > 1)$.

17. (a) $(1+x)^n$ के प्रसार में दिया गया है कि ${}^nC_1, {}^nC_2, {}^nC_3$ समान्तर श्रेणी में है।

$\Rightarrow 2.{}^nC_2 = {}^nC_1 + {}^nC_3$

$\Rightarrow 2.\frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$

$\Rightarrow 6(n-1) = 6 + (n-2)(n-1)$

$\Rightarrow n^2 - 9n + 14 = 0 \Rightarrow n = 2$ या $n = 7$.

परन्तु $n = 2$ नहीं लिया जा सकता है क्योंकि $n = 2$ के लिए $(1+x)^2$ के प्रसार में केवल तीन पद होंगे, $\therefore\ n = 7$.

18. (b) $T_{r+1} = {}^nC_r(a)^{n-r}(-b)^r$.

$T_5 = T_{4+1} = {}^nC_4a^{n-4}(-b)^4 = {}^nC_4a^{n-4}b^4$

एवं 6वां पद

$= (T_6) = T_{5+1} = {}^nC_5\,a^{n-5}(-b)^5 = -\,{}^nC_5\,a^{n-5}\,b^5$

$\because T_5 + T_6 = 0$ इसलिए

${}^nC_4\,a^{n-4}\,b^4 - {}^nC_5\,a^{n-5}\,b^5 = 0 \Rightarrow \frac{a^{n-4}\,b^4}{a^{n-5}\,b^5} = \frac{{}^nC_5}{{}^nC_4}$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{n!}{(n-5)!\,5!}.\frac{4!\,(n-4)!}{n!} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{n-4}{5}$.

19. (a) दिये गये प्रसार में T_3, T_4, T_5 क्रमशः

${}^{10}C_2\,2^8\left(\frac{3x}{8}\right)^2, {}^{10}C_3\,2^7\left(\frac{3x}{8}\right)^3, {}^{10}C_4\,2^6\left(\frac{3x}{8}\right)^4$

या $1620\,x^2, 810\,x^3, \frac{8505}{32}x^4$ हैं।

हमें दिया गया है कि T_4 संख्यात्मक रूप से महत्तम पद है इसलिए $|T_4| > |T_3|$ एवं $|T_4| > |T_5|$

$\therefore\ |x| > 2$ और $\frac{64}{21} > |x|$

$2 < |x| < \frac{64}{21}$ .....(i)

उपरोक्त असमिका (i), दो असमिकाओं $2 < x < \frac{64}{21}$ और $-\frac{64}{21} < x < -2$ के तुल्य है।

20. (a) $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$ के हलों की संख्या

$= (t + t^2 + t^3 + ...)(t^2 + t^3 + ...)....(t^k + t^{k+1} + ...)$ के प्रसार में t का गुणांक

$= t^{1+2+...+k}(1 + t + t^2 + ...)^k$ के प्रसार में t^n का गुणांक

लेकिन $1 + 2 + ... + k = \frac{1}{2}k(k+1) = r$ (माना)

एवं $1 + t + t^2 + ... = \frac{1}{(1-t)}$

अतः अभीष्ट हलों की संख्या

$= (1-t)^{-k}$ में t^{n-r} का गुणांक

$= [1 + {}^kC_1 t + {}^{k+1}C_2 t^2 + {}^{k+2}C_3 t^3 + ...]$ में t^{n-r} का गुणांक

$= {}^{k+n-r-1}C_{k-1} = {}^{k+n-r-1}C_{k-1} = {}^mC_{k-1}$,

(जहाँ $m = k+n-r-1$)

$= k+n-1-\frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2}[2k+2n-2-k^2-k]$

$= \frac{1}{2}(2n-k^2+k-2)$

21. (b) माना $P(n)$: $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

पद I : $n=2$ के लिए $\Rightarrow$ $2! < \left(\frac{2+1}{2}\right)^2 \Rightarrow 2 < \frac{9}{4}$

$\Rightarrow$ $2 < 2.25$ जो कि सत्य है अतः $P(2)$ सत्य है

पद II : माना $P(k)$ सत्य है, तब $P(k)$: $k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k$

पद III : $n = k+1$ के लिए $P(k+1) : (k+1)! < \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}$

$\Rightarrow$ $k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k \Rightarrow (k+1)k! < \frac{(k+1)^{k+1}}{2^k}$

$\Rightarrow (k+1)! < \frac{(k+1)^{k+1}}{2^k}$ .....(i)

एवं $\frac{(k+1)^{k+1}}{2^k} < \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}$ .....(ii)

$\Rightarrow \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} > 2 \Rightarrow \left[1+\frac{1}{k+1}\right]^{k+1} > 2$

$\Rightarrow 1 + (k+1)\frac{1}{k+1} + {}^{k+1}C_2\left(\frac{1}{k+1}\right)^2 + ... > 2$

$\Rightarrow 1 + 1 + {}^{k+1}C_2\left(\frac{1}{k+1}\right)^2 + ... > 2$

जो कि सत्य है अतः (ii) सत्य है।

(i) व (ii) से, $(k+1)! < \frac{(k+1)^{k+1}}{2^k} < \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}$

$\Rightarrow$ $(k+1)! < \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}$

अतः $P(k+1)$ सत्य है अतः $n \in N$ के लिए, $P(n)$ गणितीय आगमन सिद्धांत से सत्य है।

ट्रिक : विकल्पों के परीक्षण से,

(a) $n=1$ के लिए $1! < \left(\frac{1+1}{2}\right)^1 \Rightarrow 1 < 1$ जो कि गलत है।

(b) $n=2$ के लिए $2! < \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow 2 < \frac{9}{4}$ जो कि सत्य है।

(c) $n=3$ के लिए $3! < \left(\frac{3+1}{2}\right)^3 \Rightarrow 6 < 8$ जो कि सत्य है।

(d) $n=4$ के लिए $4! < \left(\frac{4+1}{2}\right)^4 \Rightarrow 24 < \left(\frac{5}{2}\right)^4$

$\Rightarrow 24 < 39.0625$ जो कि सही है

लेकिन न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक n, 2 है।

22. (c) $S(k) = 1+3+5+...... +(2k-1) = 3+k^2$,

$S(1) \Rightarrow 1 = 4$, जो कि सत्य नहीं है एवं $S(2) \Rightarrow 3 = 7$, जो कि सत्य नहीं है।

अतः आगमन का प्रयोग नहीं कर सकते हैं एवं $S(k) \not\Rightarrow S(k+1)$.

23. (c) $n=1$ के लिए

$P^{n+1} + (P+1)^{2n-1} = P^2 + (P+1)^1 = P^2 + P + 1$,

$P^2 + P + 1$ से विभाज्य है अतः $n=1$ के लिए सत्य है

माना $n = m \in N$ के लिए दिया गया परिणाम सत्य है।

अर्थात् $P^{m+1} + (P+1)^{2m-1}$, $P^2 + P + 1$ से विभाज्य है

अर्थात् $P^{m+1} + (P+1)^{2m-1} = k(P^2 + P + 1)$ $\forall$ $k \in N$ .....(i)

अब $P^{(m+1)+1} + (P+1)^{2(m+1)-1}$

$= P^{m+2} + (P+1)^{2m+1} = P^{m+2} + (P+1)^2(P+1)^{2m-1}$

$= P^{m+2} + (P+1)^2[k(P^2+P+1) - P^{m+1}]$ (i) प्रयोग से

$= P^{m+2} + (P+1)^2 \cdot k(P^2+P+1) - (P+1)^2(P)^{m+1}$

$= P^{m+1}[P-(P+1)^2] + (P+1)^2 \cdot k(P^2+P+1)$

$= P^{m+1}[P-P^2-2P-1] + (P+1)^2 \cdot k(P^2+P+1)$

$= -P^{m+1}[P^2+P+1] + (P+1)^2 \cdot k(P^2+P+1)$

$= (P^2+P+1)[k \cdot (P+1)^2 - P^{m+1}]$

जो कि P^2+P+1 से विभाज्य है अतः $n = m+1$ के लिये परिणाम सत्य है। इसलिए आगमन से, सभी $n \in N$ के लिए दिया गया परिणाम सत्य है।

ट्रिक : $n=2$ के लिए $P^{n+1} + (P+1)^{2n-1} = P^3 + (P+1)^3$

$= P^3 + P^3 + 1 + 3P^2 + 3P = 2P^3 + 3P^2 + 3P + 1$

जो कि $P^2 + P + 1$ से विभाज्य है

दिया गया परिणाम $n \in N$ के लिए सत्य है।

24. (b) $\because U_{n+1} = 3U_n - 2U_{n-1}$ .....(i)

पद I : दिया है $U_1 = 3$

$n=1$ के लिए $U_{1+1} = 3U_1 - 2U_0$, $U_2 = 3.3 - 2.2 = 5$

विकल्प (b) $U_n = 2^n + 1$

$n=1$ के लिए $U_1 = 2^1 + 1 = 3$ जो कि सत्य है

$n=2$ के लिए $U_2 = 2^2 + 1 = 5$ जो कि सत्य है।

इसलिए $n=1$ एवं $n=2$ के लिए परिणाम सत्य है

पद II : माना $n = k$ के लिए यह सत्य है

तब $U_k = 2^k + 1$ .....(ii)

एवं $U_{k-1} = 2^{k-1} + 1$ .....(iii)

पद III : समीकरण (i) में $n = k$ रखने पर,

$U_{k+1} = 3U_k - 2U_{k-1} = 3[2^k+1] - 2[2^{k-1}+1]$

$= 3.2^k + 3 - 2.2^{k-1} - 2 = 3.2^k + 1 - 2.2^{k-1}$

$\Rightarrow$ $3.2^k - 2^k + 1 = 2.2^k + 1 = 2^{k+1} + 1$

$\Rightarrow$ $U_{k+1} = 2^{k+1} + 1$

यह सिद्ध करता है कि परिणाम $n = k+1$ के लिए सत्य है अतः गणितीय आगमन के सिद्धांत से, सभी $n \in N$ के लिए दिया हुआ परिणाम सत्य है।

25. (b) माना संख्या x है तब $x - x^3 = x(1-x^2) = (1-x)(x)(1+x)$

लैगरान्ज प्रमेय के अनुसार यह 3! अर्थात् 6 से विभाज्य है।

* * *