વિકલ સમીકરણ

● **વિકલ સમીકરણ**

સ્વતંત્ર ચલ, અવલંબી ચલ અને સ્વતંત્ર ચલને સાપેક્ષ અવલંબી ચલના વિકલિતોને સમાવતા સમીકરણને વિકલ સમીકરણ કહે છે.

$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$ ને **વિકલ સમીકરણ** કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, (1) $\frac{dy}{dx} + y = x$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = \sin x - 5$

(3) $e^{\frac{dy}{dx}} = 3$ વગેરે વિકલ સમીકરણો છે.

● **વિકલ સમીકરણની કક્ષા અને પરિમાણ**

વિકલ સમીકરણમાં અવલંબી ચલના સ્વતંત્ર ચલને સાપેક્ષ વિકલિતોમાં ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતની કક્ષાને **વિકલ સમીકરણની કક્ષા** કહે છે.

વિકલ સમીકરણ વિકલિતોની બહુપદી સ્વરૂપે આપેલ હોય, તો વિકલ સમીકરણમાં આવતા ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતના ઉચ્ચતમ ઘાતાંકને વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ કહે છે. વિકલ સમીકરણ મૂળ અને અપૂર્ણાંક ઘાતથી મુક્ત હોય, ત્યારે **વિકલિતના ઉચ્ચતમ ઘાતાંકને વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ** કહે છે. **પરિમાણ હંમેશાં ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા** હોય છે.

● **વિકલ સમીકરણની રચના**

n સ્વૈર અચળોવાળો વિધેયાત્મક સંબંધ $f(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$, જ્યાં $c_1, c_2, \dots c_n$, અચળાંક, છે. તેનું n વખત વિકલન કરતાં આપેલા સંબંધ સહિત કુલ $(n+1)$ સમીકરણ મળે. તેમાંથી અચળાંકોનો લોપ કરતાં મળતું સમીકરણ તે વિકલ સમીકરણ છે.

વિકલ સમીકરણની કક્ષા એ સમીકરણમાં આવેલ સ્વૈર અચળાંકો જેટલી હોય છે.

● **વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ**

$f(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ જ્યાં $c_1, c_2, \dots, c_n$ સ્વૈર અચળો છે. તેનું વિકલ સમીકરણ

$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$ છે. $f(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ને વિકલ સમીકરણ

$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$નો **સામાન્ય ઉકેલ** કહે છે.

● n કક્ષાના વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ એ વિકલ સમીકરણની કક્ષા n જેટલા જ સ્વૈર અચળો ધરાવતું વિધેય હોય, તો તેને વિકલ સમીકરણનો **વ્યાપક ઉકેલ** કહે છે. સ્વૈર અચળોથી મુક્ત ઉકેલને **વિશિષ્ટ ઉકેલ** કહે છે.

ચલ x, y તથા વિકલિતો $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ પરથી કોઈ નિશ્ચિત શરતો દ્વારા વિકલ સમીકરણના વ્યાપક ઉકેલમાં આવતા સ્વૈર અચળોની નિશ્ચિત કિંમતો પ્રારંભિક શરતોને અધીન મળે, તો આવા વિકલ સમીકરણને **વિશિષ્ટ ઉકેલ** કહે છે.

- જો વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ સિવાયનો ઉકેલ એ તેના વ્યાપક ઉકેલમાંથી વિશિષ્ટ ઉકેલ તરીકે ન મળતો હોય, તો આવા ઉકેલને વિકલ સમીકરણનો **અસામાન્ય ઉકેલ** કહે છે.

- $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ કે $f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy = 0$ એ પ્રથમ કક્ષાનું એક પરિમાણીય સમીકરણ છે.

- **વિયોજનીય ચલ**

પ્રથમ કક્ષાના અને એક પરિમાણવાળા વિકલ સમીકરણ $p(x)\, dx + q(y)\, dy = 0$ ને વિયોજનીય ચલ પ્રકારનું વિકલ સમીકરણ કહે છે. જો $p(x)$એ માત્ર x નું વિધેય હોય અને $q(y)$ એ માત્ર નું વિધેય હોય

$\int p(x)\, dx + \int q(y)\, dy = c$ એ તેનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ :

જો વિધેય $f(x, y)$ ને $x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય, તો વિધેય $f(x, y)$ ને ***n* ઘાતવાળું સમપરિમાણીય** વિધેય કહે છે.

- અહીં $\frac{y}{x} = v$ આદેશ લેતાં, સમીકરણ વિયોજનીય ચલ સ્વરૂપમાં ફેરવાય છે. તે પરથી ઉકેલ મેળવવામાં આવે છે.

- **સુરેખ વિકલ સમીકરણ**

જો $P(x)$ અને $Q(x)$ ચલ xનાં વિધેયો હોય, તો વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)$ ને પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ કહે છે.

- સુરેખ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)$નો ઉકેલ મેળવવા સંકલ્યકારક અવયવ $e^{\int P(x)\, dx}$ શોધો.

  સમીકરણને બંને બાજુ સંકલ્યકારક અવયવ વડે ગુણતાં સમીકરણ $e^{\int P(x)\, dx}\, y = \int e^{\int P(x)\, dx}\, Q(x)\, dx.$

  આ પરથી વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ શોધવામાં આવે છે.

બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો

(1) $y = x\frac{d^2y}{dx^2} + 3\sqrt{1 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3}$ ની કક્ષા અને પરિમાણ અનુક્રમે ...... અને ...... છે.

(A) 2, 2 (B) 3, 3 (C) 2, 1 (D) 3, અવ્યાખ્યાયિત

ઉકેલ : આપેલ વિકલ સમીકરણને વર્ગમૂળથી મુક્ત કરતાં,

$$\left(y - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 9\left(1 + \frac{d^3y}{dx^3}\right)^3$$

$$y^2 - 2yx\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 9 + 9\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3$$

$\therefore$ વિકલ સમીકરણની કક્ષા 3 અને પરિમાણ 3 છે. **જવાબ : (B)**

(2) વિકલ સમીકરણ $5\frac{d^2y}{dx^2} = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}$ ની કક્ષા અને પરિમાણ ...... અને ...... છે.

(A) 1, 6 (B) 1, 2 (C) 2, 2 (D) 2, અવ્યાખ્યાયિત

ઉકેલ : $\left(5\ \dfrac{d^2y}{dx}\right)^2 = \left(1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^3$

$\therefore\ 25\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 1+3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^6$

$\therefore$ અહીં કક્ષા 2 અને પરિમાણ 2 છે. **જવાબ : (C)**

(3) $2x = e^{\frac{dy}{dx}}$ ની કક્ષા અને પરિમાણ અનુક્રમે ...... અને ...... છે.

(A) 1, 1 (B) 1, અવ્યાખ્યાયિત (C) 2, 2 (D) અવ્યાખ્યાયિત, 1

ઉકેલ : $2x = e^{\frac{dy}{dx}}$

$\therefore\ \log 2x = \dfrac{dy}{dx}$

$\therefore$ સમીકરણની કક્ષા અને પરિમાણ અનુક્રમે 1 અને 1 છે. **જવાબ : (A)**

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left[y+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}$ વિકલ સમીકરણની કક્ષા અને પરિમાણ ...... અને ...... છે.

(A) 4 અને 2 (B) 1 અને 2 (C) 1 અને 4 (D) 2 અને 4

ઉકેલ : $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^4 = y+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

$\therefore$ કક્ષા 2 અને પરિમાણ 4 છે. **જવાબ : (D)**

(5) વિકલ સમીકરણ $e^x + sin\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 3$ નું પરિમાણ ...... છે.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : અહીં આપેલ વિકલ સમીકરણને વિકલિતોની બહુપદી સ્વરૂપે લખી ન શકાય.
આપેલ વિકલ સમીકરણને પરિમાણ વ્યાખ્યાયિત નથી. **જવાબ : (D)**

(6) $\sqrt[3]{\dfrac{d^2y}{dx^2}} = \sqrt{\dfrac{dy}{dx}}$ ની કક્ષા અને પરિમાણ અનુક્રમે ...... અને ...... છે.

(A) 1, 2 (B) 2, 1 (C) 1, 1 (D) 2, 2

ઉકેલ : $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore\ \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{1}{3}\times 6} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}\times 6}$

$\therefore\ \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3$

$\therefore$ સ્પષ્ટ છે કે કક્ષા 2 અને પરિમાણ 2 છે. **જવાબ : (D)**

(7) $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \left(c\,\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ નું પરિમાણ ...... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 6 (D) વ્યાખ્યાયિત નથી.

ઉકેલ : $\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(c\,\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}\times 6} = \left(c\,\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{1}{3}\times 6}$

$\therefore \left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3} = \left(c\,\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{2}$

$\therefore$ પરિમાણ 2 છે. **જવાબ : (B)**

(8) t સમયે હયાત સસલાંઓની વસ્તીનું વિકલ સમીકરણ $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2}p(t) - 200$ છે. જો $p(0) = 100$ હોય, તો $p(t) = ...$

(A) $400 + 300e^{\frac{t}{2}}$ (B) $300 - 200e^{\frac{-t}{2}}$ (C) $600 - 500e^{\frac{t}{2}}$ (D) $400 - 300e^{\frac{-t}{2}}$

ઉકેલ : $\frac{dp}{dt} = \frac{p-400}{2}$

$\frac{dp}{p-400} = \frac{1}{2}dt$

$\int \frac{dp}{p-400} = \frac{1}{2}dt$

$\therefore \log|p-400| = \frac{1}{2}t + c$

જ્યારે $t = 0$ હોય ત્યારે $p = 100$

$\therefore \log 300 = c$

$\log|p-400| = \frac{1}{2}t + \log 300$

$\therefore |p-400| = 300\,e^{\frac{1}{2}t}$ **જવાબ : (A)**

(9) $y = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$ જેનો વ્યાપક ઉકેલ હોય, તેવા વિકલ સમીકરણની કક્ષા ...... છે. c_1 અને c_2 સ્વૈર અચળાંકો છે.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) અવ્યાખ્યાયિત છે

ઉકેલ : $y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

$\therefore\ y_2 = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$

$\therefore\ y_2 = y$

$\therefore$ કક્ષા 2 છે.

નોંધ : અહીં ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં બે સ્વૈર અચળ છે. તેથી તેના વિકલ સમીકરણની કક્ષા 2 થાય. **જવાબ : (C)**

(10) ધારો કે વિધેય f એ $f(x) \ge 0,\ \forall x \in [0,1]$ પ્રકારનું છે.

જો $\int\limits_0^x \sqrt{1-\left(f'(t)\right)^2}\, dt = \int\limits_0^x f(t)\, dt,\ 0 \le x \le 1$ અને $f(0) = 0$, તો

(A) $f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$ અને $f\left(\frac{1}{3}\right) > \frac{1}{3}$

(B) $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$ અને $f\left(\frac{1}{3}\right) > \frac{1}{3}$

(C) $f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$ અને $f\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{3}$

(D) $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$ અને $f\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{3}$

ઉકેલ : $\int\limits_0^x \sqrt{1-\left(f'(t)\right)^2}\, dt = \int\limits_0^x f(t)\, dt,\ 0 \le x \le 1$

વિકલન કરતાં, $1-\left(f'(x)\right)^2 = f(x)$

$\therefore\ 1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2$ ($y = f(x)$ લેતાં)

$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-y^2}$

$\therefore\ \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm\, dx$

સંકલન કરતાં, $sin^{-1} y = c \pm x$

$f(0) = 0$ હોવાથી, $c = 0$.

$\therefore\ sin^{-1} y = \pm\, x$

$\therefore\ y = f(x) = \pm\, sin\ x$

વળી, $f(x) \ge 0,\ \forall x \in [0,1]$

$\therefore\ f(x) = sin\ x$

આપણે જાણીએ છીએ કે $sin\ x < x, \forall\ x\ \in [0,1]$

$\therefore\ f(x) < x,\ \forall x \in [0,1]$

$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$ અને $f\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{3}$ **જવાબ : (C)**

(11) જો વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \phi\left(\frac{x}{y}\right)$ ને સામાન્ય ઉકેલ $y = \frac{x}{\log|x|}$ હોય તો $\phi\left(\frac{x}{y}\right) =$ ......

(A) $\frac{-x^2}{y^2}$ (B) $\frac{y^2}{x^2}$ (C) $\frac{x^2}{y^2}$ (D) $\frac{-y^2}{x^2}$

ઉકેલ : $y = vx$ મૂકતાં, $x\frac{dv}{dx} + v = \frac{dy}{dx}$

આપેલ સમીકરણમાં મૂકતાં

$x\frac{dv}{dx} + v = v + \phi\left(\frac{1}{v}\right) \Rightarrow \frac{dv}{\phi\left(\frac{1}{v}\right)} = \frac{dx}{x}$

સંકલન કરતાં, $\int \frac{dv}{\phi\left(\frac{1}{v}\right)} = \log|cx|$ c સ્વૈર અચળ (1)

આપેલ છે કે $y = \frac{x}{\log|x|}$ એ સામાન્ય ઉકેલ છે.

$\therefore \log|cx| = \frac{x}{y} = \frac{1}{v}$

(1) પરથી, $\int \frac{dv}{\phi\left(\frac{1}{v}\right)} = \frac{1}{v}$

વિકલન કરતાં, $\frac{1}{\phi\left(\frac{1}{v}\right)} = -\frac{1}{v^2}$

$\therefore \phi\left(\frac{1}{v}\right) = -v^2$ આથી $\phi\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y^2}{x^2}$ **જવાબ : (D)**

(12) ધારો કે વિધેય f એ અંતરાલ $(0, \infty)$ પર વિકલનીય છે. $\lim\limits_{t \to x} \frac{t^2 f(x) - x^2 f(t)}{t - x} = 1$ તથા $f(1) = 1$ હોય તો

$f(x)$ = ... + c

(A) $\frac{1}{3x^3}$ (B) $3x + \frac{3}{2x^2}$ (C) $\frac{1}{3x} + \frac{2x^2}{3}$ (D) $\frac{1}{x} + 2x^2$

ઉકેલ : આપેલ છે કે, $\lim\limits_{t \to x} \frac{t^2 f(x) - x^2 f(t)}{t - x} = 1$

$\therefore \lim\limits_{t \to x} \frac{2t\, f(x) - x^2 f'(t)}{1} = 1$

$\therefore 2x\, f(x) - x^2 f'(x) = 1$

$\therefore x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = -1$ ($y = f(x)$)

$\therefore \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} y = \frac{-1}{x^2}$ સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{\int \frac{-2}{x} dx} = e^{-2\log x} = \frac{1}{x^2}$

$\therefore$ સામાન્ય ઉકેલ, $y\left(\frac{1}{x^2}\right) = \int \left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right) dx + c$

$y\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3x^3} + c$

વળી, $f(1)=1$ હોવાથી, $1=\frac{1}{3}+c \Rightarrow c=\frac{2}{3}$

$\therefore\ y\frac{1}{x^2}=\frac{1}{3x^3}+\frac{2}{3}$ આથી $y=\frac{1}{3x}+\frac{2x^2}{3}$ **જવાબ : (C)**

(13) જો વિકલ સમીકરણ $\left(p-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\cdot\frac{dy}{dx}=q$ નો ઉકેલ $y=\left(sin^{-1}x\right)^2+\text{A}\,cos^{-1}x+\text{B}$ (જ્યાં A, B સ્વૈર અચળ) હોય તો $p+q=$ ......

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : $y=\left(sin^{-1}x\right)^2+\text{A}\,cos^{-1}x+\text{B}$

વિકલન કરતાં, $\frac{dy}{dx}=\frac{2\,sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\text{A}}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore\ \sqrt{1-x^2}\ y'=2\,sin^{-1}x-\text{A}$

ફરીથી વિકલન કરતાં, $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)y'+\sqrt{1-x^2}\ y''=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore -xy'+\left(1-x^2\right)y''=2$

$\therefore \left(1-x^2\right)y''-xy'=2$

$\therefore p=1,\ q=2$. આથી $p+q=3$ **જવાબ : (C)**

(14) વિધેય f એ R પરનું વિકલનીય વિધેય છે, જ્યાં $f(1)=1$. વક્ર $y=f(x)$ પરના બિંદુ $\text{P}(x, y)$ એ દોરેલ સ્પર્શકનો y અંતઃખંડ એ બિંદુ P ના x-યામના ઘન જેટલો હોય તો, $f(-3)$ = ...

(A) 9 (B) –9 (C) 10 (D) 1

ઉકેલ : વક્ર $y=f(x)$ પરના બિંદુ $\text{P}(x, y)$ એ દોરેલ સ્પર્શકનું સમીકરણ

$Y-y=f'(x)(X-x)$

y-અક્ષ પરનો અંતઃખંડ $y-x\,f'(x)$

આપેલ છે કે $y-x\,f'(x)=x^3$

$y-x\frac{dy}{dx}=x^3$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=-x^2$ સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

સંકલ્યકારક અવયવ $\text{I.F.}=e^{\int\frac{-1}{x}dx}=e^{-\log|x|}=\frac{1}{x}$

$\therefore$ ઉકેલ $y\frac{1}{x}=-\int xdx=\frac{-1}{2}x^2+c$

$\therefore\ f(x)=\frac{-1}{2}x^3+cx$

વળી, $f(1)=1$

$\therefore\ 1=\frac{-1}{2}(1)+c$. આથી $c=\frac{3}{2}$

$\therefore\ f(x) = \frac{-1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x$

$\therefore\ f(-3) = 9$ **જવાબ : (A)**

(15) વક્ર $y = f(x)$ના બિંદુ $P(x, y)$ આગળ દોરેલ અભિલંબ X-અક્ષને બિંદુ Q માં મળે છે. જો વક્રબિંદુ $(0, k)$માંથી પસાર થાય તથા PQ ની લંબાઈ અચળ k હોય, તો તે ......

(A) $(1+k)^2 x^2 + y^2 = k^2$ (B) $x^2 + (1+x^2)y^2 = k^2$

(C) $x^2 + y^2 = k^2$ (D) $x^2 + y^2 = 1$

ઉકેલ : વક્ર $y = f(x)$ પરના બિંદુ $P(x, y)$ આગળ અભિલંબનું સમીકરણ

$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$

તે X-અક્ષને બિંદુ Q માં મળે છે. આથી Q ના યામ $\left(x + y\frac{dy}{dx}, 0\right)$ થાય

$PQ^2 = \left(y\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = k^2$

$\therefore\ \left(y\frac{dy}{dx}\right)^2 = k^2 - y^2$

$\therefore\ y\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{k^2 - y^2}$

$\therefore\ \frac{y\,dy}{\sqrt{k^2 - y^2}} = \pm\,dx$. સંકલન કરતાં, $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{k^2 - y^2}} = \int \pm\,dx$

$\therefore\ -\sqrt{k^2 - y^2} = \pm\,x + c$

વક્ર $(0, k)$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore\ -\sqrt{k^2 - k^2} = \pm(0) + c$

$\therefore\ c = 0$

$\therefore\ -\sqrt{k^2 - y^2} = \pm\,x$

$\therefore\ k^2 - y^2 = x^2$

$\therefore\ x^2 + y^2 = k^2$ **જવાબ : (C)**

(16) ધારો કે વિધેય f એ અંતરાલ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ પર વ્યાખ્યાયિત થયેલ આવૃત વિધેય છે. જો

$\int_0^x (f'(t) - \sin 2t)\,dt = \int_x^0 f(t)\tan t\,dt$ અને $f(0) = 1$, તો ......

(A) $f(0) = 1$ એ વિધેય f નું મહત્તમ મૂલ્ય થશે. (B) $f(0) > 1$ એ વિધેય f નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય થશે.

(C) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$ (D) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણની બંને બાજુ વિકલન કરતાં,

$f'(x) - sin 2x = - f(x) \, tan \, x$

$y = f(x)$ લેતાં, $y' + y \, tan \, x = sin 2x$ સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

સંકલ્યકારક અવયવ $e^{\int tan \, n \, dx} = sec \, x$

સમીકરણનો ઉકેલ $y(x) = cos \, x \left[\int 2 \, sin \, x dx + c \right]$

$= c \, cos \, x - 2 cos^2 x$

$y(0) = 1$ હોવાથી, $c = 3$ $\quad [1 = c - 2]$

$\therefore \; f(x) = y = 3 \, cos \, x - 2 cos^2 x$

$= -2\left(cosx - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$

$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ હોવાથી, $0 \le cos \, x \le 1$. $cos \, x = \frac{3}{4}$ હોય ત્યારે મહત્તમ $= \frac{9}{8}$

$f(x)$ની મહત્તમ કિંમત $f(0) = 1$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1$ અને $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ **જવાબ :** (C, D)

(17) વિકલ સમીકરણ $y^5 x + y - x\frac{dy}{dx} = 0$ નો ઉકેલ ......

(A) $\frac{x^4}{4} + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^5 = c$

(B) $\frac{x^5}{5} + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{y}\right)^4 = c$

(C) $\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x^4}{4} = c$

(D) $(xy)^4 + \frac{x^5}{5} = c$

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણ $y^5 x + y - x\frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; y^5 x dx + y dx - x dy = 0$

$\frac{x^3}{y^5}$થી ગુણતાં, $x^4 dx + \frac{x^3}{y^3}\left(\frac{y dx - x dy}{y^2}\right) = 0$

$x^4 dx + u^3 du = 0$ $\quad$ ($u = \frac{x}{y}$ લેતાં)

સંકલન કરતાં, $\frac{x^5}{5} + \frac{u^4}{4} = c$

$\therefore \; \frac{x^5}{5} + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{y}\right)^4 = c$ **જવાબ :** (B)

(18) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 2\frac{\phi^{\left(\frac{y}{x}\right)}}{\phi'^{\left(\frac{y}{x}\right)}}$ નો ઉકેલ ......

(A) $x^2 \phi\left(\frac{y}{x}\right) = k$

(B) $y^2 \phi\left(\frac{y}{x}\right) = k$

(C) $\phi\left(\frac{y}{x}\right) = kx^2$

(D) $\phi\left(\frac{y}{x}\right) = ky^2$

ઉકેલ : $\frac{y}{x} = u$ મૂકતાં $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણ, $u + x\frac{du}{dx} = u + 2\frac{\phi(u)}{\phi'(u)}$

$\therefore\ x\frac{du}{dx} = 2\frac{\phi(u)}{\phi'(u)}$

$\therefore\ \frac{\phi'(u)}{\phi(u)}du = 2\frac{dx}{x}$

સંકલન કરતાં, $\log|\phi(u)| = \log x^2 + \log k$

$\therefore\ |\phi(u)| = kx^2$

$\therefore\ \phi\left(\frac{y}{x}\right) = kx^2$, k અચળ

જવાબ : (C)

(19) વક્ર $y = f(x)$ના કોઈ પણ બિંદુ (x, y) આગળ દોરેલ સ્પર્શક x-અક્ષની ધન દિશા સાથે $tan^{-1}(2x+3y)$ માપનો ખૂણો બનાવે છે. જો આ વક્ર બિંદુ $(1, 2)$ માંથી પસાર થાય તો તેનું સમીકરણ ......

(A) $6x + 9y + 2 = 26\,e^{3(x-1)}$ (B) $6x + 9y - 2 = 26\,e^{3(x-1)}$

(C) $6x - 9y + 2 = 26\,e^{3(x-1)}$ (D) $6x - 9y - 2 = 26\,e^{3(x-1)}$

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = tan\left[tan^{-1}(2x+3y)\right]$

$\frac{dy}{dx} = 2x + 3y$

$\therefore\ \frac{dy}{dx} - 3y = 2x$ સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{-\int 3dx} = e^{-3x}$

$\therefore\ ye^{-3x} = \int 2xe^{-3x}dx$

$= -\frac{2}{3}xe^{-3x} + \frac{2}{3}\int e^{-3x}dx$

$\therefore\ ye^{-3x} = -\frac{2}{3}xe^{-3x} - \frac{2}{9}e^{-3x} + c$

$\therefore\ y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{9} + ce^{3x}$

વક્ર $(1, 2)$ માંથી પસાર થાય છે. આથી $2 = -\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + ce^3$

$\therefore\ c = \frac{26}{9}e^{-3}$

$\therefore\ y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{9} + \frac{26}{9}e^{3(x-1)}$

$\therefore\ 9y = -6x - 2 + 26\,e^{3(x-1)}$

$\therefore\ 6x + 9y + 2 = 26\,e^{3(x-1)}$

જવાબ : (A)

(20) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy\left[x^2 \sin y^2+1\right]}$ નો ઉકેલ ......

(A) $x^2\left(\cos y^2-\sin y^2-2c\,e^{-y^2}\right)=2$ (B) $y^2\left(\cos x^2-\left(\sin y^2-2c\,e^{-y^2}\right)\right)=2$

(C) $x^2\left(\cos y^2-\sin y^2-e^{-y^2}\right)=4$ (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : આપેલ વિકલ સમીકરણ $\frac{dx}{dy}=xy\left[x^2 \sin y^2+1\right]$

$\therefore\ \frac{1}{x^3}\frac{dx}{dy}-\frac{1}{x^2}y=y\sin y^2$

$-\frac{1}{x^2}=u$ લેતાં, $\frac{2dx}{x^3}=du$

$\frac{du}{dy}+2uy=2y\sin y^2$ સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

સંકલ્યકારક અવયવ $=e^{y^2}$

$$ue^{y^2}=\int 2y\sin y^2\, e^{y^2}dy+c$$

$$=\int \sin t\, e^t\, dt+c=\frac{e^t}{2}(\sin t-\cos t) \qquad \left(y^2=t\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{y^2}\left(\sin y^2-\cos y^2\right)+c$$

$$\therefore\ 2u=\left(\sin y^2-\cos y^2\right)+2c\,e^{-y^2}$$

$$\therefore\ 2=x^2\left(\cos y^2-\sin y^2-2c\,e^{-y^2}\right)$$

જવાબ : (A)

(21) ધારો કે વક્ર $y=f(x)$એ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે. વક્ર પરના કોઈ પણ બિંદુ (x, y)માંથી X-અક્ષ અને Y-અક્ષને સમાંતર રેખાઓ દોરવામાં આવે છે. બંને અક્ષને સમાંતર રેખાઓ અને બંને અક્ષોથી રચાતો લંબચોરસ વક્રના પ્રદેશને બે ભાગમાં વહેંચે છે. જો એક ભાગનું ક્ષેત્રફળ બીજા ભાગના ક્ષેત્રફળથી બમણું હોય, તો આ વક્ર સંહતિ...... હોય.

(A) વર્તુળ (B) પરવલય (C) અતિવલય (D) ઉપવલય

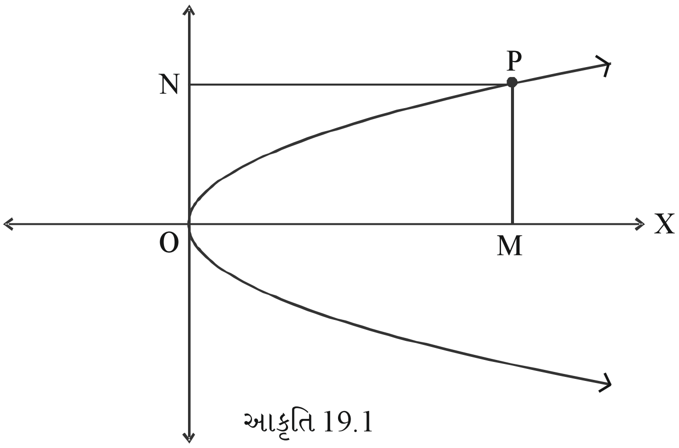
ઉકેલ : ધારો કે P(x, y) એ વક્ર પરનું બિંદુ છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $\overleftrightarrow{PN}$ અને $\overleftrightarrow{PM}$ એ X-અક્ષ અને Y-અક્ષને સમાંતર રેખા છે.

પ્રદેશ POM નું ક્ષેત્રફળ $=\int_0^x y\,dx$

પ્રદેશ PON નું ક્ષેત્રફળ $=xy-\int_0^x y\,dx$

ધારો કે $2(\text{POM})=\text{PON}$

$\therefore\ 2\int_0^x y\,dx=xy-\int_0^x y\,dx$



આકૃતિ 19.1

$\therefore\ 3\int_0^x y\,dx = xy$.

વિકલન કરતાં, $3y = x\frac{dy}{dx} + y$

$\therefore\ 2y = x\frac{dy}{dx}$

$\therefore\ \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$

$\therefore\ \log|y| = 2\log|x| + \log c$ આથી $y = x^2 c$ **જવાબ : (B)**

(22) વક્રોની સંહતિ $x^2 + y^2 = 2ax$ નું વિકલ સમીકરણ ...... છે. (a સ્વૈર અચળ)

(A) $2y\frac{dy}{dx} = x^2$ (B) $2xy\frac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0$

(C) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ (D) $x + y\frac{dy}{dx} = y$

ઉકેલ : $x^2 + y^2 = 2ax$

$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2a$

$x + y\frac{dy}{dx} = a$

$\therefore\ x^2 + y^2 = 2x\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)$

$\therefore\ 2xy\frac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0$ **જવાબ : (B)**

(23) શિરોલંબ ન હોય તેવી રેખાઓની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ ...... છે. (m, c સ્વૈર અચળ)

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (B) $\frac{dy}{dx} = x$ (C) $y = x\frac{dy}{dx}$ (D) $x = y\frac{dy}{dx}$

ઉકેલ : રેખાઓની સંહતિ $y = mx + c$ m, c સ્વૈર અચળ

$\therefore\ \frac{dy}{dx} = m$

$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (બે સ્વૈર અચળ હોવાથી) **જવાબ : (A)**

(24) વક્ર $y = e^{-x} + ax + b$ નું વિકલ સમીકરણ ...... છે. (a, b સ્વૈર અચળ)

(A) $e^x\frac{d^2y}{dx^2} = 1$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2} + e^x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

(C) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = e^x$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$

ઉકેલ : $y = e^{-x} + ax + b$

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x} + a$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-x}$$

$\therefore\ e^x \dfrac{d^2y}{dx^2} = 1$ માંગેલ વિકલ સમીકરણ છે. **જવાબ : (A)**

(25) વક્રોની સંહતિ $y = e^x (A\cos x + B\sin x)$ નું વિકલ સમીકરણ ...... છે.

(A) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\dfrac{dy}{dx} - y$
(B) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\dfrac{dy}{dx} - 2y$

(C) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy}{dx} - 2y$
(D) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\dfrac{dy}{dx} + y$

ઉકેલ : $y = e^x (A\cos x + B\sin x)$

$$y_1 = e^x(-A\sin x + B\cos x) + e^x(A\cos x + B\sin x)$$

$$y_1 = e^x(-A\sin x + B\cos x) + y$$

$$y_2 = e^x(-A\cos x - B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x) + y_1$$

$$y_2 = -y + y_1 - y + y_1$$

$$y_2 = 2y_1 - 2y$$

જવાબ : (B)

બીજી રીત : $ye^{-x} = A\cos x + B\sin x$

$$\therefore\ -ye^{-x} + e^{-x}\frac{dy}{dx} = -A\sin x + B\cos x$$

$$\therefore\ ye^{-x} - e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}\frac{dy}{dx} + e^{-x}\frac{d^2y}{dx^2} = -A\cos x - B\sin x = ye^{-x}$$

$$\therefore\ y - y_1 - y_1 + y_2 = -y$$

$$\therefore\ y_2 - 2y_1 + 2y = 0$$

(26) જેનો વ્યાપક ઉકેલ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ (a એ નિશ્ચિત અચળ) હોય, તેવા વક્ર સંહતિનું વિકલ સમીકરણ ...... છે.
(h, k સ્વૈર અચળ છે.)

(A) $\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = a^2 \dfrac{d^2y}{dx^2}$
(B) $\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = a^2 \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2$

(C) $\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)\right]^3 = a^2 \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2$
(D) $(y-k)\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = -1$ (IIT : 1992)

ઉકેલ : $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ (i)

$\therefore \ (x-h) + (y-k)\dfrac{dy}{dx} = 0$ (ii)

$\therefore \ 1 + (y-k)\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

(i) તથા (ii) પરથી $(y-k)^2\left(\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right) = a^2$

$$\frac{\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right) = a^2$$

$$\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right]^3 = a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

જવાબ : (B)

(27) વિકલ સમીકરણ $\dfrac{dy}{dx} = 1 - e^x y$ નો સંકલ્યકારક અવયવ ...... છે.

(A) e^{x^x} (B) e^{e^x} (C) e^{-x} (D) e^{-e^x}

ઉકેલ : $\dfrac{dy}{dx} + e^x\ y = 1$

સંકલ્યકારક અવયવ $e^{\int P dx} = e^{\int e^x\, dx} = e^{e^x}$ **જવાબ : (B)**

(28) વિકલ સમીકરણ $sec^2 x\, tan\, y\, dx + sec^2 y\, tan\, x\, dy = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ ...... છે.

જ્યાં $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

(A) $tan\, x\ cot\, y = c$ (B) $cot\, x\ cot\, y = c$ (C) $cot\, x\ tan\, y = c$ (D) $sec\, x\ sec\, y = c$

ઉકેલ : $sec^2 x\, tan\, y\, dx = -\,sec^2 y\, tan\, x\, dy$

$\therefore \ \int \dfrac{1}{tan\, x}\cdot sec^2 x\, dx = -\int \dfrac{1}{tan\, y}\cdot sec^2 y\, dy$

$\therefore \ \log|tan\, x| = -\log|tan\, y| + \log|c_1|$

$\therefore \ \log|tan\, x\ tan\, y| = \log|c_1|$

$\therefore \ tan\, x\ tan\, y = \pm\, c_1$

$\therefore \ \pm\dfrac{1}{c_1} = cot\, x\ cot\, y$

$\therefore \ cot\, x\ cot\, y = c$ ($\pm\dfrac{1}{c_1} = c$ લેતાં) **જવાબ : (B)**

(29) વક્ર $x^2 = 4y$ ના બિંદુ (–2, 1) આગળના અવાભિલંબની લંબાઈ ...... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) $\frac{1}{4}$

ઉકેલ : $x^2 = 4y$

$$2x = 4 \cdot \frac{dy}{dx}$$

$\therefore \ \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$. આથી $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-2,1)} = -\frac{2}{2} = -1$

$\therefore$ અવાભિલંબની લંબાઈ $= \left| y \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-2,1)} \right|$

$= |1(-1)| = 1$ **જવાબ : (A)**

(30) પ્રારંભિક શરત $y(1) = 1$ હોય તેવા વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$ નો ઉકેલ ...... છે.

(A) $y = x \log x + x^2$ (B) $y = xe^{x-1}$

(C) $y = x \log x + x$ (D) $y = x + \log x$

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 1$

$$\therefore \ \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \ \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{y}{x} = \log x + c$$

$x = 1, y = 1$ મૂકતાં

$\therefore \ 1 = \log 1 + c.$ આથી $c = 1$

$\therefore \ \frac{y}{x} = \log x + 1.$ આથી $y = x \log x + x$ **જવાબ : (C)**

(31) ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી શિરોલંબ ન હોય તેવી રેખાઓની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ ...... છે.

(A) $x\frac{dy}{dx} + y = 0$ (B) $x\frac{dy}{dx} - y = 0$

(C) $\frac{dy}{dx} = m$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : માંગેલ રેખાઓની સંહતિ $y = mx$, m સ્વૈર અચળ (1)

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = m$$

સમીકરણ (1) પરથી $y = x\frac{dy}{dx}$. આથી $x\frac{dy}{dx} - y = 0$ **જવાબ : (B)**

(32) વક્રોની સંહતિનો સ્પર્શક અતિવલય $xy = c^2$ સાથે $\frac{\pi}{4}$ માપનો ખૂણો બનાવતો હોય, તો તેવા વક્રોની સંહતિ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ ...... છે.

(A) $\frac{dy}{dx} = -\frac{c^2}{x^2}$ (B) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + c^2}{c^2 - x^2}$ (C) $\frac{dy}{dx} = \frac{c^2 - x^2}{x^2 + c^2}$ (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $xy = c^2$

$\therefore \ y + x\frac{dy}{dx} = 0$

$m_1 = -\frac{y}{x}$

ધારો કે માંગેલ વક્રોની સંહતિનો ઢાળ m_2 છે.

હવે $\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ આથી, $\pm 1 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

વિકલ્પ (I)

$$1 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\therefore \quad m_1 - m_2 = 1 + m_1 m_2$$

$$\therefore \quad \frac{-y}{x} - \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{-y}{x} - 1 = \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{-(y+x)}{x} = \left(\frac{x-y}{x}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(y+x)}{x-y} = \frac{x+y}{y-x} = \frac{x + \frac{c^2}{x}}{\frac{c^2}{x} - x} \qquad \left(y = \frac{c^2}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + c^2}{c^2 - x^2}$$

તે જ રીતે **વિકલ્પ (II)**

$-1 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ લેતાં $\frac{dy}{dx} = \frac{c^2 - x^2}{x^2 + c^2}$ **જવાબ : (B), (C)**

(33) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0$ ની પ્રારંભિક શરત $y(1) = 1$ હોય તો વિશિષ્ટ ઉકેલ ...... છે.

(A) $xy^2 = 1$ (B) $x^2 y = 1$ (C) $x = 2y^2$ (D) $x^2 = 2y$

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0$

$\therefore \ \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{2}{x}\,dx$

$\therefore \ \log|y| = -2\log|x| + \log(c)$

$\therefore \ yx^2 = c$. હવે $x=1,\ y=1 \Rightarrow c=1$. આથી $x^2y=1$ **જવાબ : (B)**

(34) $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x = \sec x$ નો ઉકેલ ...... મળે.

(A) $y = \sin x + c\cos x$ (B) $y = \sin x - c\cos x$

(C) $y = \tan x + \cos x + c$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ. (IIT : 1990)

ઉકેલ : $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x = \sec x$

સંકલ્યકારક અવયવ $e^{\int \tan x\,dx} = e^{\log|\sec x|} = \sec x$

$\therefore \ y\sec x = \int \sec^2 x\,dx$ (સુરેખ સમીકરણ)

$\therefore \ y\sec x = \tan x + c$

$y = \sin x + c\cos x$ **જવાબ : (A), (B)**

(35) વિકલ સમીકરણ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ax+b}{cy+d}$ એ રેખા દર્શાવે, તો c અને a ની કિંમત ...... છે.

(A) $a=0, c=0$ (B) $a=1, c=0$ (C) $a=-1, c=1$ (D) $a \in R$

ઉકેલ : $(cy+d)\,dy = (ax+b)\,dx$

$\dfrac{cy^2}{2} + dy = \dfrac{ax^2}{2} + bx + c_1$

$a=0, c=0 \Rightarrow dy = bx + c_1$ રેખા દર્શાવે છે.

નોંધ : રેખા માટે $\dfrac{dy}{dx}$ ઢાળ અચળ હોય, તેથી $a=c=0$ **જવાબ : (A)**

(36) વિકલ સમીકરણ $\dfrac{dy}{dx}(1+x) - xy = 1-x$ નો સંકલ્યકારક અવયવ ...... છે.

(A) $x\,e^x$ (B) $(1+x)e^{-x}$ (C) $1+x$ (D) $\log(1+x)$

ઉકેલ : $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{x}{1+x}\,y = \dfrac{1-x}{1+x}$

સંકલ્યકારક અવયવ $e^{\int P\,dx} = e^{\int -\frac{x}{1+x}\,dx} = e^{\int\left(\frac{1}{1+x}-1\right)dx}$

$= e^{\log(1+x)-x}$

$= e^{\log(1+x)} \cdot e^{-x}$ **જવાબ : (B)**

$= (1+x)\,e^{-x}$

(37) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = 0$ નો ઉકેલ ...... છે.

(A) $y = c e^{-\int P\,dx}$ (B) $y = c e^{\int P\,dx}$ (C) $x = c e^{\int P\,dy}$ (D) $x = c e^{-\int P\,dy}$

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = -P(x)\ y$

$\therefore \int \frac{1}{y}\ dy = -\int P(x)\ dx$

$\therefore \log\ y = -\int P(x)dx + \log c$

$\therefore \frac{y}{c} = -\int P(x)\,dx$

$\therefore \quad y = c\ e^{-\int P(x)\ dx}$ **જવાબ : (A)**

(38) વિકલ સમીકરણ $\left(x^2 + 4y^2 + 4xy\right) dy = \left(2x + 4y + 1\right) dx$ નો ઉકેલ

$v - 2\log\left|v^2 + 4v + 2\right| + \frac{3}{\sqrt{2}} \log\left|\frac{v+2-\sqrt{2}}{v+2+\sqrt{2}}\right| = x + c$, તો

(A) $v = x + 2y$ (B) $v = 2x + y$ (C) $v = x + y$ (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+4y+1}{x^2+4y^2+4xy}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2(x+2y)+1}{(x+2y)^2}$ (1)

ધારો કે, $x + 2y = v$

$\therefore 1 + 2\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$. આથી $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{dv}{dx} - 1\right]$

$\therefore$ સમીકરણ (1) પરથી, $\frac{1}{2}\left[\frac{dv}{dx} - 1\right] = \frac{2v+1}{v^2}$

$\therefore \frac{dv}{dx} = \frac{4v+2}{v^2} + 1 = \frac{v^2+4v+2}{v^2}$

$\therefore \frac{v^2\ dv}{v^2+4v+2} = dx$

$\therefore \frac{v^2+4v+2-4v-2}{v^2+4v+2}\ dv = dx$

$\therefore \frac{v^2+4v+2-2(2v+4)+6}{v^2+4v+2}\ dv = dx$

$\therefore \int 1\ dv - 2\int \frac{2v+4}{v^2+4v+2}\ dv + 6\int \frac{1}{v^2+4v+4-2}\ dv = \int dx$

$\therefore v - 2\log\left|v^2+4v+2\right| + \frac{3}{\sqrt{2}} \log\left|\frac{v+2-\sqrt{2}}{v+2+\sqrt{2}}\right| = x + c$ **જવાબ : (A)**

(39) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = e^{y+x} + e^{y-x}$ નો ઉકેલ ...... છે.

(A) $e^{-y} = e^{-x} - e^{x} + c$ (B) $e^{x} = e^{y} - e^{-x} + c$

(C) $e^{-y} = e^{x} - e^{-x} + c$ (D) $-e^{-x} = e^{-y} + e^{x} + c$

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = e^{y} \cdot e^{x} + e^{y} \cdot e^{-x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{y}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$

$\therefore e^{-y}\ dy = \left(e^{x} + e^{-x}\right) dx$

$\therefore \frac{e^{-y}}{(-1)} = e^{x} + \frac{e^{-x}}{(-1)} - c$

$\therefore -e^{-y} = e^{x} - e^{-x} - c$

$\therefore e^{-y} = e^{-x} - e^{x} + c$ **જવાબ : (A)**

(40) વિકલ સમીકરણ $(x+y-1)\ dx + (2x+2y-3)\ dy = 0$ નો ઉકેલ ...... છે.

(A) $2y - x - \log(3x+3y-4) = c_4$ (B) $y + 2x + \log(x+y-2) = c$

(C) $2y + x + \log(x+y-2) = c$ (D) $2y + 2x + \log(x+y-2) = c$

ઉકેલ : $(2x+2y-3)\ dy = -\ (x+y-1)\ dx$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x+y-1}{2x+2y-3}$

ધારો કે, $x+y-1 = t$

$\therefore 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

$\therefore \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{-t}{2t-1}$ આથી $\frac{dt}{dx} = \frac{-t}{2t-1} + 1$

$= \frac{-t+2t-1}{2t-1}$

$\therefore \frac{dt}{dx} = \frac{t-1}{2t-1}$

$\therefore \frac{2t-1}{t-1}\ dt = dx$

$\therefore \frac{2t-2+1}{t-1}\ dt = dx$

$\therefore \left(2 + \frac{1}{t-1}\right) dt = dx$

$\therefore 2t + \log|t-1| = x + c_1$

$\therefore \quad 2x+2y-2+\log|x+y-2| = x+c_1$

$\therefore \quad x+2y+\log|x+y-2|+c$, જ્યાં $c = c_1 + 2$ **જવાબ : (C)**

(41) વિકલ સમીકરણ $\left(2x-10y^3\right)\dfrac{dy}{dx}+y=0$ નો ઉકેલ ...... છે.

(A) $x+y=ce^{2x}$ (B) $y^2=2x^3+c$ (C) $xy^2=2y^5+c$ (D) $x\left(y^2+xy\right)=0$

ઉકેલ : $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{2x-10y^3}$

$\therefore \quad \dfrac{dx}{dy} = 10y^2 - \dfrac{2x}{y}$

$\therefore \quad \dfrac{dx}{dy} + \dfrac{2}{y}x = 10y^2$

સંકલ્યકારક અવયવ $e^{\int P\,dy} = e^{\int \frac{2}{y}\,dy} = e^{2\log y} = y^2$

$\therefore \quad y^2\dfrac{dx}{dy} + 2xy = 10y^4$

$\therefore \quad \dfrac{d}{dy}\left(y^2x\right) = 10y^4$

$\therefore \quad y^2x = \dfrac{10y^5}{5} + c = 2y^5 + c$ **જવાબ : (C)**

(42) વિકલ સમીકરણ $y\,dx - x\,dy - 3x^2y^2e^{x^3}\,dx = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ ...... છે.

(A) $x = ye^{x^3}+cy$ (B) $y = xe^{x^3}+cx$ (C) $ye^{x^3}=cx$ (D) $\dfrac{y}{x}e^{x^3}=0$

ઉકેલ : $y\,dx - x\,dy - 3x^2y^2e^{x^3}\,dx = 0$

$\therefore \quad \dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2} - 3x^2e^{x^3}\,dx = 0$

$\therefore \quad d\left(\dfrac{x}{y}\right) - d\left(e^{x^3}\right) = 0$

$\therefore \quad \dfrac{x}{y} = e^{x^3} + c$ આથી $x = ye^{x^3} + cy$ **જવાબ : (A)**

(43) વિકલ સમીકરણ $\left(\dfrac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)\dfrac{dx}{dy} = 1,\ x \neq 0$ નો ઉકેલ ...... છે.

(A) $ye^{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+c$ (B) $y = 2\sqrt{x}\,e^{2\sqrt{x}}+c$

(C) $2\sqrt{x}\,e^{2\sqrt{x}} = y+c$ (D) $y = \sqrt{x}\,e^{2\sqrt{x}}+c$

ઉકેલ : $\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ આથી $P(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

સંકલ્યકારક અવયવ $\int_e \frac{1}{\sqrt{x}} dx = e^{2\sqrt{x}}$

$\therefore ye^{2\sqrt{x}} = \int e^{2\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx + c = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx + c$

$\therefore ye^{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$ **જવાબ : (A)**

(44) વિકલ સમીકરણ $\cos y\, dx + \left(1 + 2e^{-x}\right) \sin y\, dy$, જ્યાં $y(0) = \frac{\pi}{4}$ નો ઉકેલ ...... છે.

(A) $e^x + 2 = 3\sqrt{2}\, cos\, y$ (B) $e^x + 2 = 3\sqrt{2}\, cos\, y$

(C) $e^x + 2 = 3\sqrt{2}\, sec\, y$ (D) $e^x - 2 = 3\sqrt{2}\, sec\, y$

ઉકેલ : $cos\, y\, dx + \left(1 + 2e^{-x}\right) sin\, y\, dy = 0$

$\therefore cos\, y\, dx = -\left(1 + 2e^{-x}\right) sin\, y\, dy$

$\therefore \frac{1}{1 + 2e^{-x}} dx = -tan\, y\, dy$

$\therefore \int \frac{e^x}{e^x + 2} dx = -\int tan\, y\, dy$

$\therefore \log\left|e^x + 2\right| = \log\left|cos\, y\right| + \log c$. આથી $\left(e^x + 2\right) = c\, cos\, y$

$y(0) = \frac{\pi}{4}$.

આથી, $e^0 + 2 = c\, cos \frac{\pi}{4}$ આથી $3 = \frac{c}{\sqrt{2}}$ આથી $c = 3\sqrt{2}$

$\therefore e^x + 2 = 3\sqrt{2}\, cos\, y$ **જવાબ : (A)**

(45) વિકલ સમીકરણ $\left(1 + y^2\right) + \left(x - e^{tan^{-1}y}\right) \frac{dy}{dx} = 0$ નો ઉકેલ ...... છે.

(A) $2x\, e^{tan^{-1}y} = e^{2tan^{-1}y} + c$ (B) $x e^{tan^{-1}y} = e^{tan^{-1}y} + c$

(C) $x e^{2tan^{-1}y} = e^{tan^{-1}y} + c$ (D) $x - 2 = c e^{-tan^{-1}y}$

ઉકેલ : અહીં $\left(1 + y^2\right) + \left(x - e^{tan^{-1}y}\right) \frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \quad \left(1+y^2\right) = -\left(x - e^{tan^{-1}y}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1+y^2}{x - e^{tan^{-1}y}}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{x - e^{tan^{-1}y}}{1+y^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} + \frac{1}{1+y^2}\,x = \frac{e^{tan^{-1}y}}{1+y^2}$$

સંકલ્યકારક અવયવ $e^{\int \frac{1}{1+y^2}\,dy} = e^{tan^{-1}y}$

$$\therefore \quad x e^{tan^{-1}y} = \int e^{2\,tan^{-1}y} \cdot \frac{1}{1+y^2}\,dy$$

$$\therefore \quad x e^{tan^{-1}y} = \frac{1}{2}\,e^{2\,tan^{-1}y} + c_1$$

$$\therefore \quad 2x e^{tan^{-1}y} = e^{2\,tan^{-1}y} + 2c_1$$

$$\therefore \quad 2x e^{tan^{-1}y} = e^{2\,tan^{-1}y} + c$$

જવાબ : (A)

(46) વિકલ સમીકરણ $x\frac{dy}{dx} = y(\log y - \log x + 1)$ નો ઉકેલ ...... છે.

(A) $x\log\left(\frac{y}{x}\right) = cy$ (B) $y\log\left(\frac{x}{y}\right) = cx$ (C) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = cy$ (D) $\log\left(\frac{y}{x}\right) = cx$

ઉકેલ : $x\frac{dy}{dx} = y(\log y - \log x + 1)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left(\log\frac{y}{x} + 1\right)$$

ધારો કે, $\frac{y}{x} = v$ આથી, $y = xv$ આથી, $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = v(\log v + 1)$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = v\log v$$

$$\therefore \quad \int \frac{dv}{v\cdot\log v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \quad \log|\log v| = \log|x| + \log|c|$$

$$\therefore \quad \log v = xc$$

$$\therefore \quad \log\frac{y}{x} = cx$$

જવાબ : (D)

(47) વિકલ સમીકરણ $y\,dx + (x + x^2 y)\, dy = 0$ નો ઉકેલ ...... છે.

(A) $\frac{1}{xy} + \log y = c$ (B) $-\frac{1}{xy} + \log y = c$ (C) $-\frac{1}{xy} = c$ (D) $\log y = cx$

ઉકેલ : $y\,dx + \left(x + x^2 y\right) dy = 0$

$\therefore\ y\,dx + x\,dy + x^2 y\, dy = 0$

$\therefore\ \dfrac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^2} = -\dfrac{dy}{y}$

$\therefore\ \dfrac{d(xy)}{(xy)^2} = \dfrac{-dy}{y}$

સંકલન કરતાં,

$\therefore\ -\dfrac{1}{xy} = -\log y + c$

$\therefore\ -\dfrac{1}{xy} + \log y = c$

જવાબ : (B)

(48) વિકલ સમીકરણ $\cos x\, dy = y\left(\sin x - y\right) dx$ નો ઉકેલ ...... છે.

(A) $y \sec x = \tan x + c$ (B) $y \tan x = \sec x + c$

(C) $\tan x = \left(\sec x + c\right) y$ (D) $\sec x = \left(\tan x + c\right) y$

ઉકેલ : $\cos x\, dy = y\left(\sin x - y\right) dx$

$\cos x \dfrac{dy}{dx} = y \sin x - y^2$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = y \tan x - y^2 \sec x$

$\dfrac{1}{y^2} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y} \tan x - \sec x$

ધારો કે, $\dfrac{1}{y} = v$

$\therefore\ \dfrac{-1}{y^2} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$. આથી $-\dfrac{dv}{dx} = v \tan x - \sec x$

$\therefore\ \dfrac{dv}{dx} + v \tan x = \sec x$

સંકલ્યકારક અવયવ $e^{\int \tan x\, dx} = e^{\log|\sec x|} = \sec x$

$\therefore\ v \sec x = \int \sec^2 x\, dx + c$

$\therefore\ v \sec x = \tan x + c$

$\therefore\ \dfrac{1}{y} \sec x = \tan x + c$

$\therefore\ \sec x = y\left(\tan x + c\right)$

જવાબ : (D)

(49) વિકલ સમીકરણ $2ye^{\frac{x}{y}}\,dx - \left(y + 2xe^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0$ નો ઉકેલ ...... છે.

(A) $2ce^{\frac{x}{y}} = \log y$ (B) $2ce^{\frac{x}{y}} = \log x$ (C) $2ce^{\frac{y}{x}} = \log y$ (D) $2ce^{\frac{y}{x}} = \log x$

ઉકેલ : $2ye^{\frac{x}{y}}\,dx - \left(y + 2xe^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y + 2xe^{\frac{x}{y}}}{2ye^{\frac{x}{y}}} = \frac{1 + 2\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}}{2e^{\frac{x}{y}}}$$

$\frac{x}{y} = v$ ધારતાં, $x = vy$.

$\frac{dx}{dy} = v + y \cdot \frac{dv}{dy}$. સમીકરણમાં મૂકતાં, $y\frac{dv}{dy} = \frac{1+2ve^{v}}{2e^{v}} - v$

$$\therefore \quad y\frac{dv}{dy} = \frac{1+2ve^{v} - 2ve^{v}}{2e^{v}} = \frac{1}{2e^{v}}$$

$$\therefore \quad 2e^{v}\,dv = \frac{1}{y}\,dy$$

$$\therefore \quad 2e^{v} = \log|y| - \log c_1$$

$\therefore \quad 2ce^{v} = \log y$ $\quad (\log c_1 + 2e^{v} = c\,2e^{v}$ લેતાં$)$

$\therefore \quad 2ce^{\frac{x}{y}} = \log y$ **જવાબ : (A)**

JEE અને Advanced માં પુછાયેલા પ્રશ્નો

(50) કોઈ વક્ર બિંદુ $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$ માંથી પસાર થાય છે. વક્રના કોઈ પણ બિંદુ (x, y) આગળનો ઢાળ $\frac{y}{x} + \sec\left(\frac{y}{x}\right)$, $x > 0$ હોય, તો વક્રનું સમીકરણ ...... છે.

(A) $\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \log x + \frac{1}{2}$ (B) $\operatorname{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) = \log x + 2$

(C) $\sec\left(\frac{2y}{x}\right) = \log x + 2$ (D) $\cos\left(\frac{2y}{x}\right) = \log x + \frac{1}{2}$

ઉકેલ : વક્રનો ઢાળ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sec\frac{y}{x}$ છે.

$\frac{y}{x} = v$ ધારતાં, $y = vx$ આથી $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = v + \sec v$$

$$\therefore \quad \int \cos v\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\therefore \quad \sin v = \log x + c$$

$\therefore \quad sin\,\frac{y}{x} = \log x + c$

વક્ર બિંદુ $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$ માંથી પસાર થાય છે.

$sin\,\frac{\pi}{6} = \log 1 + c$

$c = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad sin\,\frac{y}{x} = \log x + \frac{1}{2}$ **જવાબ : (A)**

(51) વિકલ સમીકરણ $(x \log x)\frac{dy}{dx} + y = 2x \log x \ (x \geq 1)$ નો ઉકેલ $y(x)$ હોય, તો $y(e) =$ ......

(A) e (B) 0 (C) 2 (D) $2e$

ઉકેલ : $(x \log x)\frac{dy}{dx} + y = 2x \log x$

વિકલ્પ (1) $x = 1 \Rightarrow y = 0.$

વિકલ્પ (2) $x > 1$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x \log x} = 2$$

સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{\int \frac{1}{x \log x} dx} = e^{\log(\log x)} = \log x$

$\therefore \quad y \log x = 2\int \log x\, dx + c$

$\therefore \quad y \log x = 2[x \log x - x] + c$ (1)

$x = 1, y = 0$ પરિણામ (1) માં મૂકતાં $0 \log 1 = 2[1 \log 1 - 1] + c$

$\therefore \quad c = 2$

$\therefore \quad y \log x = 2[x \log x - x] + 2$

$\therefore \quad y \log e = 2[e \log e - e] + 2 = 2$

$\therefore \quad y = 2$ **જવાબ : (C)**

(52) વિકલ સમીકરણ $2x\frac{dy}{dx} - y = 0;\ y(1) = 2$ નો ઉકેલ ...... દર્શાવે છે.

(A) રેખા (B) પરવલય (C) વર્તુળ (D) ઉપવલય

ઉકેલ : $2x\frac{dy}{dx} - y = 0$

$\therefore \quad \frac{2}{y}dy = \frac{dx}{x}$

સંકલન કરતાં,

$\therefore \quad 2 \log|y| = \log|x| + \log(c)$

$\therefore \quad y^2 = xc$

$y(1) = 2$. આથી, $x = 1 \Rightarrow y = 2$

$4 = 1 \cdot c$ આથી, $c = 4$

$y^2 = 4x$. આ સમીકરણ પરવલય દર્શાવે છે. **જવાબ : (B)**

(53) વક્રના કોઈ બિંદુ (x, y) આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ અને તે બિંદુના y–યામનો ગુણાકાર એ બિંદુના x–યામ જેટલો હોય તથા વક્રબિંદુ (1, 2)માંથી પસાર થતો હોય, તો વક્ર ...... છે.

(A) વર્તુળ (B) પરવલય (C) લંબાતિવલય (D) ઉપવલય

ઉકેલ : અહીં $\frac{dy}{dx} \cdot y = x$

$\therefore \quad y\,dy = x\,dx$

સંકલન કરતાં, $\int y\,dy = \int x\,dx$

$\therefore \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{c}{2}$ (1)

$\therefore \quad y^2 - x^2 = c$

તે (1, 2)માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \quad 4 - 1 = c$ આથી $c = 3$

$\therefore \quad y^2 - x^2 = 3$

આ સમીકરણ લંબાતિવલય દર્શાવે છે. **જવાબ : (C)**

(54) એક કિરણોત્સર્ગી પદાર્થના વિઘટનનો દર તેના તે સમયના જથ્થાના સમપ્રમાણમાં છે. વિઘટન શરૂ થયાના એક કલાક બાદ પદાર્થનો જથ્થો 100 ગ્રામ હોય અને બે કલાક બાદ 80 ગ્રામ હોય, તો શરૂઆતમાં પદાર્થનો મૂળ જથ્થો ...... ગ્રામ હશે.

(A) 100 (B) 120 (C) 125 (D) 105

ઉકેલ : ધારો કે શરૂઆતનો મૂળ જથ્થો m_0 ગ્રામ છે.

t – સમયે પદાર્થનો જથ્થો m ગ્રામ હોય તો તેનો વિઘટન દર $\frac{dm}{dt} \propto m$

$\therefore \quad \frac{dm}{dt} = -\lambda m$. આથી, $\int \frac{1}{m} dm = -\lambda \int dt$

$\therefore \quad \log m = -\lambda t + c$ (1)

$\therefore \quad t = 0 \Rightarrow m = m_0$. આથી, $\log m_0 = c$

(1) પરથી, $\log m = -\lambda t + \log m_0$

$\therefore \quad \log \frac{m}{m_0} = -\lambda t$

$\therefore \quad m = m_0 e^{-\lambda t}$

$t = 1$ ત્યારે $m = 100$ ગ્રામ. આથી, $100 = m_0\, e^{-\lambda}$

$t = 2$ ત્યારે $m = 80$ ગ્રામ. આથી, $80 = m_0\, e^{-2\lambda}$

$\therefore \quad \frac{100}{80} = \frac{m_0\, e^{-\lambda}}{m_0\, e^{-2\lambda}} \Rightarrow e^{\lambda} = \frac{5}{4}$

$100 = m_0 \frac{4}{5}$

$\therefore \quad m_0 = 125$ ગ્રામ **જવાબ : (C)**

ટૂંકી રીત :

80 ના 25% એટલે કે 20 ઉમેરતાં 100 મળે.

100 ના 25% એટલે કે 25 ઉમેરતાં 125 મળે.

એટલે કે $\frac{x}{100} = \frac{100}{80} \Rightarrow x = 125$

(55) એક પ્રયોગશાળામાં કરેલ પરીક્ષણ મુજબ બૅક્ટેરિયાનો વૃદ્ધિદર કોઈ પણ સમયે હાજર બૅક્ટેરિયાની સંખ્યાના પ્રમાણમાં છે. જો એક કલાકમાં બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા બમણી થાય, તો 3 કલાકના અંતે બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા ...... ગણી હશે.

(A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 32

ઉકેલ : ધારો કે t સમયે બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા x છે.

$\therefore$ વૃદ્ધિદર $\frac{dx}{dt} \alpha \ x$

$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \lambda x$. આથી $\frac{dx}{x} = \lambda \ dt$ ($\lambda \neq 0$ અચળ)

સંકલન કરતાં, $\log|x| = \lambda t + \log c$

$\therefore \quad \log\frac{x}{c} = \lambda t$. આથી, $\frac{x}{c} = e^{\lambda t}$. આથી $x = ce^{\lambda t}$

ધારો કે $t = 0$ સમયે બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા x_0 છે.

$\therefore \quad x_0 = ce^{\circ}$ આથી $c = x_0$

$\therefore \quad x = x_0 e^{\lambda t}$ (1)

1 કલાકના અંતે સંખ્યા બમણી થાય છે. આથી, $x = 2x_0$

પરિણામ (1) પરથી, $2x_0 = x_0 e^{\lambda}$

$\therefore \ 2 = e^{\lambda}$ આથી $\lambda = \log_e 2$

$\therefore \quad x = x_0 \quad e^{t \log_e 2}$

હવે $t = 3$ કલાકે $x = x_0 \ e^{3 \log 2}$

$\therefore \ x = 8x_0$

$\therefore$ બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા 8 ગણી થશે. **જવાબ : (B)**

નોંધ : 1 કલાક બમણી, 2 કલાક 4 ગણી, 3 કલાક 8 ગણી.

(56) એક શહેરની વસતીનો વધારાનો દર 1 % છે, તો કેટલા સમયમાં વસતી બમણી થશે ?

(A) 30 વર્ષ (B) 301 વર્ષ (C) 35 વર્ષ (D) 30.1 વર્ષ

ઉકેલ : ધારો કે હાલમાં વસતી p_0 છે.

t સમયે વસતી p હોય, તો વૃદ્ધિદર $\frac{dp}{dt}$ થાય.

$\therefore \quad \frac{dp}{dt} = \frac{1}{100} p$

$\therefore \quad \int \frac{1}{p} dp = \frac{1}{100} \int 1 dt$

$\therefore \ \log p = \frac{1}{100} t + \log c$

$t = 0$ સમયે $p = p_0$

$\therefore \ \log p_0 = \log c$

$\therefore \quad c = p_0$

$\therefore \ \log p = \frac{1}{100} t + \log p_0$

$\therefore \ \log \frac{p}{p_0} = \frac{1}{100} t$

$\therefore \ p = p_0 \, e^{\frac{t}{100}}$

હવે વસ્તી બમણી થાય એટલે કે $p = 2p_0$

$\therefore \ 2p_0 = p_0 \, e^{\frac{t}{100}}$ આથી $2 = e^{\frac{t}{100}}$

$\therefore \ \log 2 = \frac{t}{100}$. આથી $t = 100 \times 0.3010 = 30.1$ વર્ષ. **જવાબ : (D)**

(57) સમ પરિમાણ વિધેય $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ નું પરિમાણ ...... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) વ્યાખ્યાયિત નથી.

ઉકેલ : $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$

$$= \frac{x^3\left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^3\right)}{x^2\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}$$

$$= x \, \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$\therefore$ પરિમાણ 1 છે. **જવાબ : (A)**

(58) લંબાતિવલય $x^2 - y^2 = a^2$ સમુદાયનું વિકલ સમીકરણ ...... છે.

(A) $y_2 = 0$ (B) $xy + y_2 = 0$ (C) $xy + y_1 = 0$ (D) $y\,y_1 = x$

ઉકેલ : $x^2 - y^2 = a^2$

$\therefore \ 2x - 2y \frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \ x - y\,y_1 = 0$

$\therefore \quad x = y\,y_1$ **જવાબ : (D)**

(59) જેનો અક્ષ X–અક્ષ હોય તેવા પરવલયોના સમુદાયના વિકલ સમીકરણની કક્ષા અને પરિમાણ અનુક્રમે ...... અને ...... છે.

(A) 1, 2 (B) 3, 2 (C) 2, 3 (D) 2, 1

(A.I.EEE :2003)

ઉકેલ : પરવલયોનો સમૂહ $y^2 = 4a(x - b)$ છે, જ્યાં a, b સ્વૈર અચળાંક છે.

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

$\therefore$ બે સ્વૈર અચળ હોવાથી બીજી વખત વિકલન કરવું પડે.

$$\therefore \quad 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$\therefore$ વિકલ સમીકરણની કક્ષા 2 અને પરિમાણ 1 છે. **જવાબ : (D)**

(60) $y = (c_1 + c_2)\, sin(x+c_3) - c_4 e^{x+c_5}$ જેનો વ્યાપક ઉકેલ હોય તેવા વિકલ સમીકરણની કક્ષા ...... છે.

(IIT : 1998)

(A) 5 (B) 4 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $y = (c_1 + c_2)\, sin(x+c_3) - c_4 e^{c_5} e^x$

$$y = k_1\, sin(x+c_3) - k_2 e^x$$

$\therefore$ અહીં 3 સ્વૈર અચળાંક છે, માટે વિકલ સમીકરણની કક્ષા 3 છે. **જવાબ : (D)**

(61) કોઈ એક કંપની હાલ 2000 વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરે છે. એક અનુમાન મુજબ ઉત્પાદનનો દર એ તેના વધારાના કામદારની સંખ્યા x પર $\frac{dp}{dx} = 100 - 12\sqrt{x}$ આધારિત છે. જો કંપની 25 વધુ કામદાર ઉમેરે, તો ઉત્પાદન ...... થાય.

(A) 2500 (B) 3000 (C) 3500 (D) 4500

(JEE MAIN : 2013)

ઉકેલ : $\frac{dp}{dx} = 100 - 12\sqrt{x}$

$$\therefore \quad dp = (100 - 12\sqrt{x})\, dx$$

$$\therefore \quad p = 100\,x - 12\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\therefore \quad p = 100\,x - 8x^{\frac{3}{2}} + c$$

જો $x = 0$ તો $p = 2000$ આથી, $c = 2000$

$$\therefore \quad p = 100\,x - 8x^{\frac{3}{2}} + 2000$$

$x = 25 \Rightarrow p = 2500 - 8.25^{\frac{3}{2}} + 2000 = 4500 - 1000 = 3500$ **જવાબ : (C)**

(62) અમુક ઉંદરની પ્રજાતિની t સમયે વસતી $p(t)$એ વિકલ સમીકરણ $\frac{dp(t)}{dt} = 0.5\, p(t) - 450$ને અનુસરે છે. જો $p(0) = 850$ હોય તો કયા સમયે આ ઉંદરની પ્રજાતિ નામશેષ થઈ જશે ?

(A) 2 log 18 (B) log 9 (C) $\frac{1}{2}$ log 18 (D) log 18

ઉકેલ : $\frac{dp(t)}{dt} = \frac{1}{2}\, p(t) - 450$

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{p(t) - 900}{2}$$

$$\therefore \quad 2 \int \frac{dp(t)}{p(t) - 900} = \int dt$$

$$\therefore \; 2 \log |p(t) - 900| = t + c$$

$t = 0$ હોય ત્યારે $p = 850$. આથી $2 \log 50 = c$

$$\therefore \; 2 \log |p(t) - 900| = t + 2 \log 50$$

હવે, $p(t) = 0$

$$\therefore \; 2 \log 900 = t + 2 \log 50$$

$$\therefore \; t = 2 (\log 900 - \log 50)$$

$$\therefore \; t = 2 \log\left(\frac{900}{50}\right) = 2 \log \; 18$$

જવાબ : (A)

નિષ્કર્ષ તથા કારક પ્રકારના પ્રશ્નો

(63) **વિધાન 1** વિકલ સમીકરણ $xy' + y = y^2 \log x$નો ઉકેલ $y(1 + \log x + cx) = 1$ છે.

વિધાન 2 આપેલ વિકલ સમીકરણ સુરેખ છે તથા તેનો સંકલ્યકારક અવયવ x છે.

ઉકેલ : $xy' + y = y^2 \log x \Rightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\frac{1}{y} = \frac{\log x}{x}$ જે સુરેખ વિકલ સમીકરણ નથી પરંતુ સુરેખ વિકલ સમીકરણમાં રૂપાંતરિત કરી શકાય.

$\frac{1}{y} = z$ મૂકતાં $\frac{-1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

$$\therefore \; \frac{-dz}{dx} + \frac{1}{x} z = \frac{\log x}{x} \Rightarrow \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x} z = -\frac{\log x}{x}$$

સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\log x} = \frac{1}{x}$

$$\therefore \; z\frac{1}{x} = -\int \frac{\log x}{x^2} dx + c$$

$$\therefore \; \frac{1}{y}\frac{1}{x} = -\left[\frac{-1}{x}\log x + 1\int \frac{1}{x^2} dx\right] + c$$

$$= -\left[\frac{-1}{x}\log x - \frac{1}{x}\right] + c$$

$$\therefore \; \frac{1}{y} = [1 + \log x] + cx$$

$$\therefore \; 1 = y(1 + \log x + cx)$$

જવાબ : (C)

વિધાન 1 સત્ય છે. વિધાન 2 અસત્ય છે.