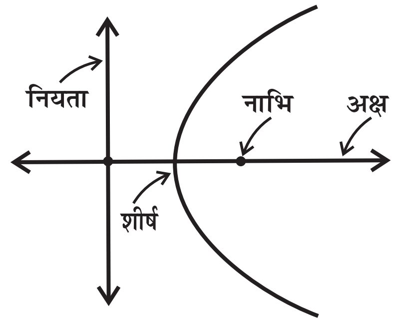
परवलय की नाभि से जाने वाली तथा नियता पर लंब रेखा को परवलय का **अक्ष** कहा जाता है। परवलय का अक्ष जिस बिंदु पर परवलय को काटता है उसे परवलय का **शीर्ष**(vertex) कहते हैं (आकृति 11.14)।

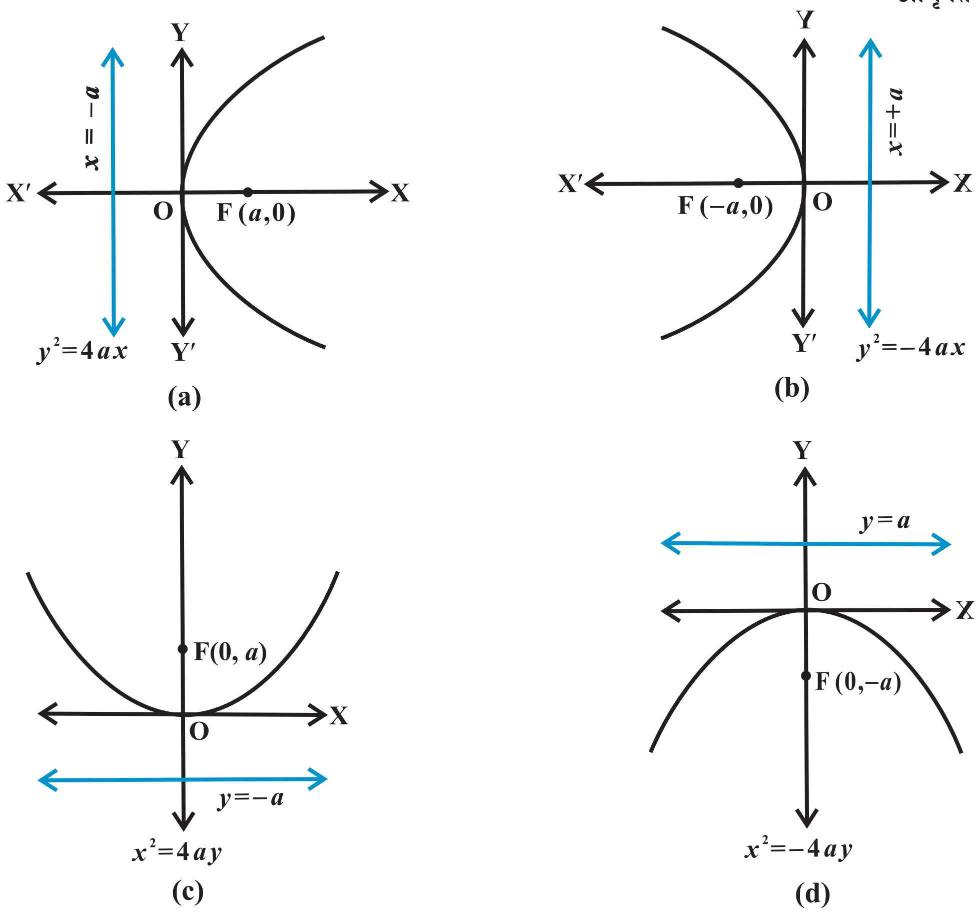


आकृति 11.14

11.4.1 परवलय का प्रमाणिक समीकरण (Standard equation of parabola)

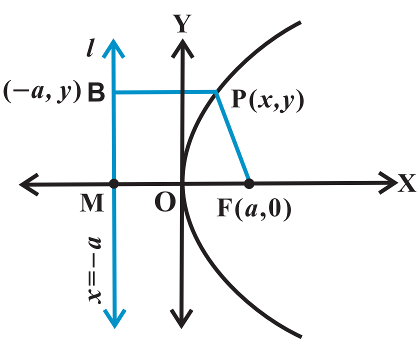
परवलय का समीकरण सरलतम होता है यदि इसका शीर्ष मूल बिंदु पर हो और इसकी सममित अक्ष, x-अक्ष या y-अक्ष के अनुदिश होता है। परवलय के ऐसे चार संभव दिक्विन्यास नीचे आकृति 11.15(a) से (d) तक में दर्शाए गए हैं।

अब हम आकृति 11.15 (a) में दर्शाए गए परवलय का समीकरण जिसकी नाभि $(a, 0)$ $a > 0$ और नियता $x = -a$ को निम्नवत प्राप्त करेंगे।



आकृति 11.15 (a) से (d)

मान लीजिए कि नाभि F और नियता l है। नियता पर लंब FM खींचिए और FM को बिंदु O पर समद्विभाजित कीजिए। MO को X तक बढ़ाइए। परवलय की परिभाषा के अनुसार मध्य बिंदु O परवलय पर है और परवलय का शीर्ष कहलाता है। O को मूल बिंदु मानकर OX को x-अक्ष और इसके लंबवत OY को y-अक्ष लीजिए। मान लीजिए कि नाभि की नियता से दूरी $2a$ है। तब नाभि के निर्देशांक $(a, 0)$, $a > 0$ है तथा नियता का समीकरण $x + a = 0$ जैसा कि आकृति 11.16 में है।



आकृति 11.16

मान लीजिए परवलय पर कोई बिंदु $P(x, y)$ इस प्रकार है कि

$$PF = PB \qquad \ldots (1)$$

जहाँ PB रेखा l पर लंब है। B के निर्देशांक $(-a, y)$ हैं। दूरी सूत्र से हम पाते हैं

$$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \text{ और } PB = \sqrt{(x+a)^2}$$

क्योंकि $PF = PB$, हम पाते हैं,

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2}$$

इसलिए $(x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2$

या $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$ या $y^2 = 4ax, (a > 0)$.

इस प्रकार परवलय पर कोई बिंदु समीकरण

$y^2 = 4ax$ को संतुष्ट करता है। ... (2)

विलोमतः माना (2) पर $P(x, y)$ एक बिंदु है।

अब
$$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + 4ax}$$
$$= \sqrt{(x+a)^2} = PB \qquad \ldots (3)$$

इसलिए $P(x,y)$, परवलय पर स्थित है।

इस प्रकार (2) और (3) से हमने सिद्ध किया कि एक परवलय जिसका शीर्ष मूल बिंदु पर नाभि $(a,0)$ तथा नियता $x = -a$ का समीकरण $y^2 = 4ax$ होता है।

विवेचना समीकरण (2) में, यदि $a > 0$, x का मान धनात्मक या शून्य हो सकता है परंतु ऋणात्मक नहीं। इस स्थिति में परवलय को प्रथम और चतुर्थ चतुर्थांश में अनिश्चित रूप से दूर तक बढ़ाया जा सकता है और परवलय का अक्ष, x-अक्ष का धनात्मक भाग है।

इसी प्रकार हम परवलयों का समीकरण प्राप्त कर सकते हैं।

आकृति 11.15 (b) में $y^2 = -4ax$,

आकृति 11.15 (c) में $x^2 = 4ay$,

आकृति 11.15 (d) में $x^2 = -4ay$,

इन चार समीकरणों को परवलय के **मानक समीकरण** कहते हैं।

टिप्पणी परवलय के मानक समीकरण में, परवलय की नाभि किसी एक निर्देशांक अक्ष पर स्थित होती है, शीर्ष मूल बिंदु पर होता है और नियता, दूसरे अक्ष के समांतर होती है। यहाँ ऐसे परवलयों का अध्ययन, जिनकी नाभि कोई भी बिंदु हो सकती है और नियता कोई भी रेखा हो सकती है, इस पुस्तक के विषय से बाहर है।

आकृति 11.15, से प्राप्त परवलय के प्रमाणिक समीकरण के निरीक्षण से निम्नांकित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं:

1. परवलय, परवलय अक्ष के सापेक्ष सममित होता है। यदि परवलय के समीकरण में y^2 का पद है तो सममित, x-अक्ष के अनुदिश है और यदि समीकरण में x^2 का पद है तो सममित अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है।
2. यदि सममित अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश हो और
   (a) x का गुणांक धनात्मक हो तो परवलय दाईं ओर खुलता है।
   (b) x का गुणांक ऋणात्मक हो तो परवलय बाईं ओर खुलता है।

3. यदि सममित अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश हो और

(a) y का गुणांक धनात्मक हो तो परवलय ऊपर की ओर खुलता है।

(b) y का गुणांक ऋणात्मक हो तो परवलय नीचे की ओर खुलता है।

11.4.2 *नाभिलंब जीवा (Latus rectum)*

परिभाषा 3 परवलय की नाभि से जाने वाली और परवलय की अक्ष के लंबवत रेखाखंड जिसके अंत्य बिंदु परवलय पर हों, को परवलय की नाभिलंब जीवा कहते हैं (आकृति 11.17)

परवलय $y^2 = 4ax$ की नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात करना (आकृति 11.18)

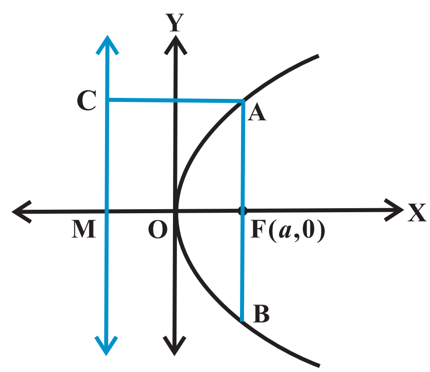
परवलय की परिभाषा के अनुसार, AF = AC

परंतु AC = FM = $2a$

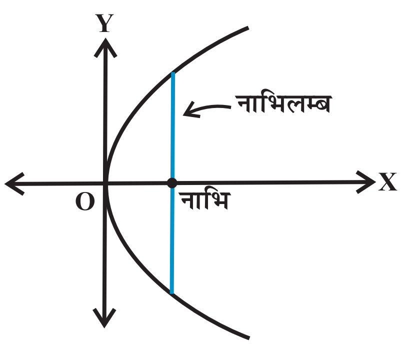
अतः AF = $2a$

और क्योंकि परवलय, x-अक्ष के परितः सममित है। अतः AF = FB और इसलिए

AB = नाभिलंब जीवा की लंबाई $= 4a$



आकृति 11.18



आकृति 11.17

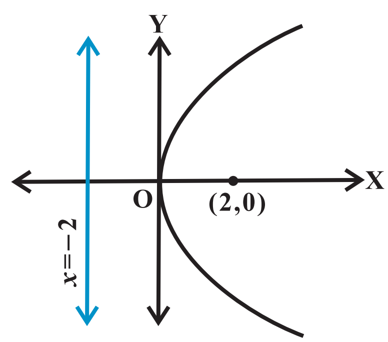
उदाहरण 5 यदि एक परवलय का समीकरण $y^2 = 8x$ है तो नाभि के निर्देशांक, अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल दिए समीकरण में y^2 का पद है इसलिए परवलय x-अक्ष के परितः सममित है।

क्योंकि समीकरण में पद x का गुणांक धनात्मक है इसलिए परवलय दाहिनी ओर खुलता है। दिए गए समीकरण $y^2 = 4ax$, से तुलना करने पर, $a = 2$

अतः परवलय की नाभि (2, 0) है और परवलय की नियता का समीकरण $x = -2$ है (आकृति 11.19)।

नाभिलंब जीवा की लंबाई $4a = 4 \times 2 = 8$



आकृति 11.19

उदाहरण 6 नाभि (2,0) और नियता $x = -2$ वाले परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि नाभि (2,0) x-अक्ष पर है इसलिए x-अक्ष स्वयं परवलय का अक्ष है।

अतः परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ या $y^2 = -4ax$ के रूप में होना चाहिए क्योंकि नियता $x = -2$ है और नाभि (2,0) है, इसलिए परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ के रूप में है जहाँ $a = 2$. अतः परवलय का अभीष्ट समीकरण $y^2 = 4(2)x = 8x$ है।

उदाहरण 7 एक परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (0,0)और नाभि (0, 2) है।

हल क्योंकि शीर्ष (0,0) पर और नाभि (0,2) पर है, जो y-अक्ष पर स्थित है, अत: परवलय का अक्ष, y-अक्ष है। इसलिए परवलय का समीकरण, $x^2 = 4ay$ के रूप में है। अत: परवलय का समीकरण है $x^2 = 4(2)y$, अर्थात् $x^2 = 8y$

उदहारण 8 उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष के परित: सममित हो और बिंदु (2,–3) से गुज़रता है।

हल क्योंकि परवलय y-अक्ष के परित: सममित है और इसका शीर्ष मूल बिंदु पर है, अत: इसका समीकरण $x^2 = 4ay$ या $x^2 = -4ay$, के रूप में है जहाँ चिह्न परवलय के ऊपर या नीचे खुलने पर निर्भर करता है परंतु परवलय चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित बिंदु (2, −3) से गुज़रता है इसलिए यह अवश्य ही नीचे की ओर खुलेगा। अत: परवलय का समीकरण $x^2 = -4ay$ के अनुरूप है, क्योंकि परवलय (2,–3), से गुज़रता है, अत: हमें प्राप्त होता है,

$$2^2 = -4a(-3), \text{ अर्थात् } a = \frac{1}{3}$$

अत: परवलय का समीकरण है

$$x^2 = -4\left(\frac{1}{3}\right)y, \text{ अर्थात् } 3x^2 = -4y$$

प्रश्नावली 11.2

निम्नलिखित प्रश्न 1 से 6 तक प्रत्येक में नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए:

1. $y^2 = 12x$ **2.** $x^2 = 6y$ **3.** $y^2 = -8x$

4. $x^2 = -16y$ **5.** $y^2 = 10x$ **6.** $x^2 = -9y$

निम्नलिखित प्रश्न 7 से 12 तक प्रत्येक में परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है:

7. नाभि (6,0), नियता $x = -6$ **8.** नाभि (0,–3), नियता $y = 3$

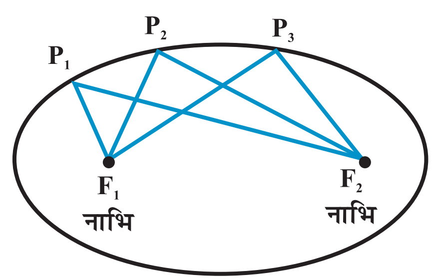
9. शीर्ष (0,0), नाभि (3,0) **10.** शीर्ष (0,0), नाभि (–2,0)

11. शीर्ष (0,0), (2,3) से जाता है और अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।

12. शीर्ष (0,0), (5,2) से जाता है और y-अक्ष के सापेक्ष सममित है।

11.5 दीर्घवृत्त (Ellipse)

परिभाषा 4 एक दीर्घवृत्त तल के उन बिंदुओं का समुच्चय है जिनका तल में दो स्थिर बिंदुओं से दूरी का योग अचर होता है। दो स्थिर बिंदुओं को दीर्घवृत्त की **नाभियाँ** कहते हैं (आकृति 11.20)।



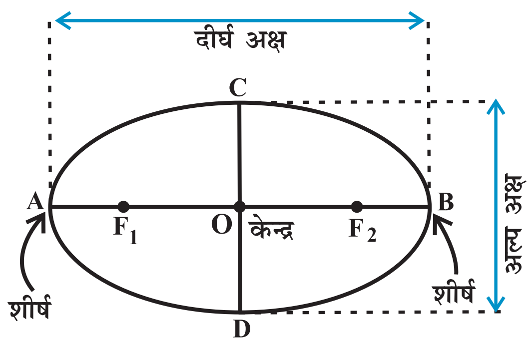
$P_1F_1 + P_1F_2 = P_2F_1 + P_2F_2 = P_3F_1 + P_3F_2$

आकृति 11.20

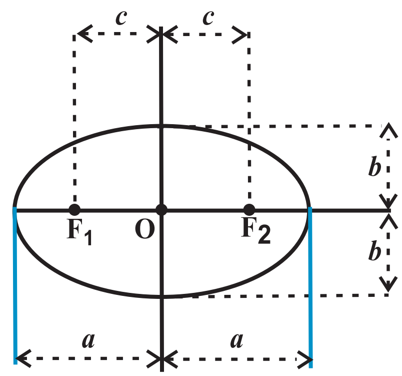
टिप्पणी दीर्घवृत्त पर किसी बिंदु का दो स्थिर बिंदुओं से दूरियों का योग अचर होता है, वह स्थिर बिंदुओं के बीच की दूरी से अधिक होता है।

नाभियों को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु को दीर्घवृत्त का **केंद्र** कहते हैं। दीर्घवृत्त की नाभियों से जाने वाला रेखाखंड, दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष (Major axis) कहलाता है और केंद्र से जाने वाला और दीर्घ अक्ष पर लंबवत रेखाखंड, दीर्घवृत्त का **लघु अक्ष** (Minor axis) कहलाता है। दीर्घ अक्ष के अन्त्य बिंदुओं को दीर्घवृत्त के **शीर्ष** कहते हैं (आकृति 11.21)।

हम दीर्घ अक्ष की लंबाई को, $2a$ से लघु अक्ष की लंबाई को, $2b$ से और नाभियों के बीच की दूरी को $2c$ से लिखते हैं। अत: अर्ध-दीर्घ अक्ष की लंबाई a तथा अर्ध-लघु अक्ष की लंबाई b है (आकृति 11.22)।

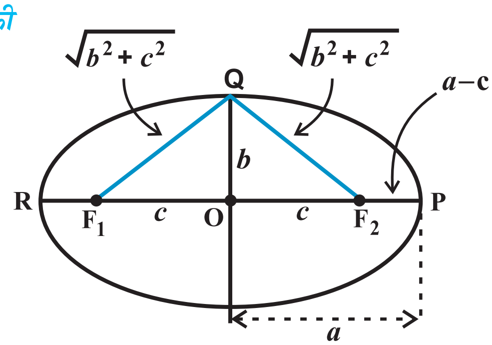


आकृति 11.21



आकृति 11.22

11.5.1 *अर्ध-दीर्घ अक्ष, अर्ध-लघु अक्ष और दीर्घवृत्त के केंद्र से नाभि की दूरी के बीच में संबंध (आकृति 11.23)।*



आकृति 11.23

आकृति 11.23 में दीर्घवृत्त के दीर्घ अक्ष पर एक अंत्य बिंदु P लीजिए।

बिंदु P की नाभियों से दूरियों का योग

$$F_1P + F_2P = F_1O + OP + F_2P$$

$$(\text{क्योंकि } F_1P = F_1O + OP)$$

$$= c + a + a - c = 2a$$

अब लघु अक्ष पर एक अंत्य बिंदु Q लीजिए।

बिंदु Q की नाभियों से दूरियों का योग

$$F_1Q + F_2Q = \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} = 2\sqrt{b^2 + c^2}$$

क्योंकि P और Q दोनों दीर्घवृत्त पर स्थित हैं।

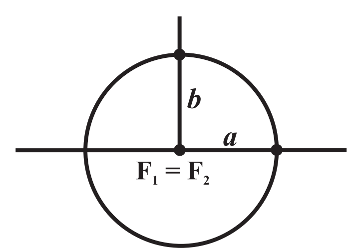
अत: दीर्घवृत्त की परिभाषा से हम पाते हैं

$$2\sqrt{b^2 + c^2} = 2a, \qquad \text{अर्थात्} \qquad a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

या $$a^2 = b^2 + c^2, \quad \text{अर्थात्} \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

11.5.2 *एक दीर्घवृत्त की विशेष स्थितियाँ (Special cases of an ellipse)*

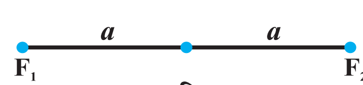
उपरोक्त प्राप्त समीकरण $c^2 = a^2 - b^2$ में, यदि हम a का मान स्थिर रखें और c का मान 0 से a, तक बढ़ायें तो परिणामी दीर्घवृत्त के आकार निम्नांकित प्रकार से बदलेंगे।



आकृति 11.24

स्थिति (i) यदि $c = 0$, हो तो दोनों नाभियाँ, दीर्घवृत्त के केंद्र में मिल जाती हैं और $a^2 = b^2$, या $a = b$, और इसलिए दीर्घवृत्त एक वृत्त बन जाता है (आकृति 11.24)। इस प्रकार वृत्त, एक दीर्घवृत्त की विशेष स्थिति है जिसे अनुच्छेद 11.3 में वर्णित किया गया है।

स्थिति (ii) यदि $c = a$, हो तो $b = 0$. और दीर्घवृत्त दोनों नाभियों को मिलाने वाले रेखाखंड F_1F_2 तक सिमट जाता है (आकृति 11.25)।



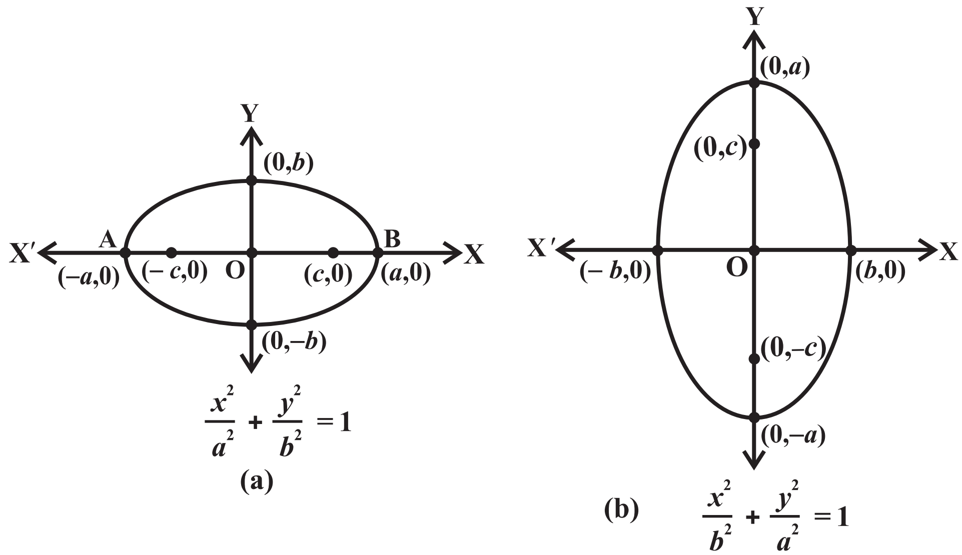
आकृति 11.25

11.5.3 उत्केंद्रता (*Eccentricity*)

परिभाषा 5 दीर्घवृत्त की उत्केंद्रता, दीर्घवृत्त के केंद्र से नाभि और केंद्र से शीर्ष की दूरियों का अनुपात है। उत्केंद्रता को e के द्वारा निर्दिष्ट करते हैं, अर्थात् $e = \frac{c}{a}$ है।

क्योंकि नाभि की केंद्र से दूरी c है इसलिए उत्केंद्रता के पद में नाभि की केंद्र से दूरी ae है।

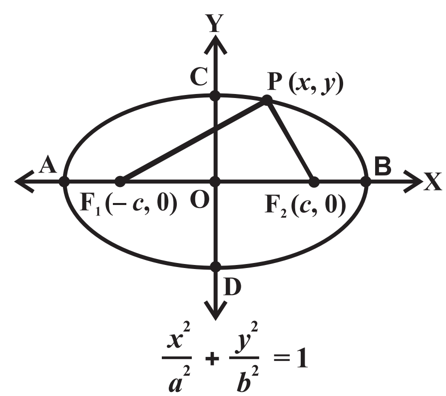
11.5.4 दीर्घवृत्त का मानक समीकरण *(Standard equation of an ellipse)* एक दीर्घवृत्त का समीकरण सरलतम होता है यदि दीर्घवृत्त का केंद्र मूल बिंदु पर हो और नाभियाँ x-अक्ष या y-अक्ष पर स्थित हों। ऐसे दो संभव दिकविन्यास आकृति 11.26 में दर्शाए गए हैं।



आकृति 11.26

अब हम आकृति 11.26 (a) में दर्शाए गए दीर्घवृत्त, जिसकी नाभियाँ x-अक्ष पर स्थित हैं, का समीकरण व्युत्पन्न करेंगें।

मान लीजिए F_1 और F_2 नाभियाँ हैं और रेखाखंड F_1F_2 का मध्य बिंदु O है। मान लीजिए O मूल बिंदु है और O से F_2 की ओर धनात्मक x-अक्ष व O से F_1 की ओर ऋणात्मक x-अक्ष है। माना O से x-अक्ष पर लंब रेखा y-अक्ष है। F_1 के निर्देशांक $(-c, 0)$ तथा F_2 के निर्देशांक $(c, 0)$ मान लेते हैं (आकृति 11.27)।



आकृति 11.27

मान लीजिए दीर्घवृत्त पर कोई बिंदु $P(x, y)$ इस प्रकार है कि P से दोनों नाभियों की दूरियों का योग $2a$ है अर्थात्

$$PF_1 + PF_2 = 2a \qquad \ldots (1)$$

दूरी सूत्र से हम पाते हैं,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

अर्थात्
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$
जिसे सरल करने पर मिलता है

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$$
पुनः वर्ग करने व सरल करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

अर्थात्
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{क्योंकि } c^2 = a^2 - b^2)$$
अतः दीर्घवृत्त पर कोई बिंदु

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \dots (2)$$
को संतुष्ट करता है।

विलोमतः माना P (x, y) समीकरण (2) को संतुष्ट करता है, $0 < c < a$. तब

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

इसलिए PF$_1$
$$= \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)}$$
$$= \sqrt{(x+c)^2 + (a^2 - c^2)\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)} \quad (\text{क्योंकि } b^2 = a^2 - c^2)$$
$$= \sqrt{\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2} = a + \frac{c}{a}x$$

इसी प्रकार
$$\text{PF}_2 = a - \frac{c}{a}x$$

अतः
$$\text{PF}_1 + \text{PF}_2 = a + \frac{c}{a}x + a - \frac{c}{a}x = 2a \qquad \dots (3)$$

इसलिए, कोई बिंदु जो $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, को संतुष्ट करता है, वह ज्यामितीय अनुबंधों को भी संतुष्ट करता है और इसलिए P(x, y) दीर्घवृत्त पर स्थित है।

इस प्रकार (2) ओर (3) से हमने सिद्ध किया कि एक दीर्घवृत्त, जिसका केंद्र मूल बिंदु और दीर्घ अक्ष x-अक्ष के अनुदिश है, का समीकरण $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ है।

विवेचना दीर्घवृत्त के समीकरण से हम यह निष्कर्ष पाते हैं कि दीर्घवृत्त पर प्रत्येक बिंदु P (x, y) के लिए

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\leq 1,\ \text{अर्थात्}\ x^2\leq a^2,\ \text{इसलिए}\ -a\leq x\leq a.$$

अतः दीर्घवृत्त रेखाओं $x=-a$ और $x=a$ के बीच में स्थित है और इन रेखाओं को स्पर्श भी करता है। इसी प्रकार, दीर्घवृत्त, रेखाओं $y=-b$ और $y=b$ के बीच में इन रेखाओं को स्पर्श करता हुआ स्थित है।

इसी प्रकार, हम आकृति 11.26 (b) में, दर्शाए गए दीर्घवृत्त के समीकरण $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ को व्युत्पन्न कर सकते हैं। इन दो समीकरणों को दीर्घवृत्त के **मानक समीकरण** कहते हैं।

टिप्पणी दीर्घवृत्त के मानक समीकरण में, दीर्घवृत्त का केंद्र, मूल बिंदु पर और दीर्घ अक्ष व लघु अक्ष निर्देशांक्षों पर स्थित है। यहाँ ऐसे दीर्घवृत्तों का अध्ययन, जिनका केंद्र कोई अन्य बिंदु हो सकता है और केंद्र से गुज़रने वाली रेखा, दीर्घ अक्ष व लघु अक्ष हो सकते हैं, इस पुस्तक की विषय वस्तु से बाहर हैं।

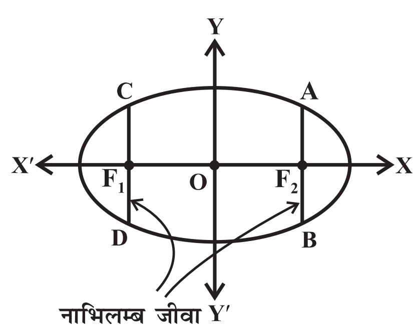
आकृति 11.26 से प्राप्त दीर्घवृत्त के मानक समीकरण के निरीक्षण से हमें निम्नांकित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं।

1. दीर्घवृत्त दोनों निर्देशांक्षों के सापेक्ष सममित है क्योंकि यदि दीर्घवृत्त पर एक बिंदु (x, y) है तो बिंदु $(-x, y)$, $(x, -y)$ और $(-x, -y)$ भी दीर्घवृत्त पर स्थित हैं।

2. दीर्घवृत्त की नाभियाँ सदैव दीर्घ अक्ष पर स्थित होती हैं। दीर्घ अक्ष को सममित रेखा पर अन्तः खंड निकालकर प्राप्त किया जा सकता है। जैसे कि यदि x^2 का हर बड़ा है तो दीर्घ अक्ष x-अक्ष के अनुदिश है और यदि y^2 का हर बड़ा है तो दीर्घ अक्ष y-अक्ष के अनुदिश होता है।

11.5.5 नाभिलंब जीवा (*Latus rectum*)

परिभाषा 6 दीर्घवृत्त की नाभियों से जाने वाली और दीर्घ अक्ष पर लंबवत रेखाखंड जिसके अंत्य बिंदु दीर्घवृत्त पर हों, को दीर्घवृत्त की नाभिलंब जीवा कहते हैं (आकृति 11.28)।



आकृति 11.28

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात करना

माना AF_2 की लंबाई l है तब A के निर्देशांक (c, l), अर्थात् (ae, l) है।

क्योंकि A, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, पर स्थित है। इससे हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{(ae)^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow l^2=b^2(1-e^2)$$

परंतु $$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

इसलिए $$l^2 = \frac{b^4}{a^2}, \text{ अर्थात् } l = \frac{b^2}{a}$$

क्योंकि दीर्घवृत्त y-अक्ष के सापेक्ष सममित होता है, (निःसंदेह यह दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित हैं) इसलिए $AF_2 = F_2B$. अतः नाभिलंब जीवा की लंबाई $\frac{2b^2}{a}$ है।

उदाहरण 9 दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ के नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ एव लघु अक्ष की लंबाइयाँ, उत्केंद्रता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $\frac{x^2}{25}$ का हर, $\frac{y^2}{9}$ के हर से बड़ा है, इसलिए दीर्घ अक्ष x-अक्ष के अनुदिश हैं। दिए गए समीकरण की $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, से तुलना करने पर

$$a = 5 \text{ और } b = 3$$

साथ ही $$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

अतः नाभियों के निर्देशांक $(-4,0)$ और $(4,0)$ है, शीर्षों के निर्देशांक $(-5, 0)$ और $(5, 0)$ हैं। दीर्घ अक्ष की लंबाई $2a = 10$ इकाइयाँ, लघु अक्ष की लंबाई $2b = 6$ इकाइयाँ और उत्केंद्रता $\frac{4}{5}$ और नाभिलंब $\frac{2b^2}{a} = \frac{18}{5}$ है।

उदाहरण 10 दीर्घवृत्त $9x^2 + 4y^2 = 36$ के नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ और लघु अक्ष की लंबाइयाँ, और उत्केंद्रता ज्ञात कीजिए।

हल दिए गए दीर्घवृत्त की समीकरण की प्रमाणिक समीकरण के रूप में लिखने पर

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

क्योंकि $\frac{y^2}{9}$ का हर, $\frac{x^2}{4}$ के हर से बड़ा, इसलिए दीर्घ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है । दिए गए समीकरण की मानक समीकरण $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, से तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है $b = 2$ और $a = 3$

और $$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

एवं $$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

अतः नाभियों के निर्देशांक $(0, \sqrt{5})$ व $(0, -\sqrt{5})$, हैं। शीर्षों के निर्देशांक $(0,3)$ व $(0, -3)$ हैं । दीर्घ अक्ष की लंबाई $2a = 6$ इकाइयाँ लघु अक्ष की लंबाई 4 इकाइयाँ और दीर्घवृत्त की उत्केंद्रता $\frac{\sqrt{5}}{3}$ है।

उदाहरण 11 उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसकी नाभियों के निर्देशांक $(\pm 5, 0)$ तथा शीर्षों के निर्देशांक $(\pm 13, 0)$ हैं।

हल क्योंकि दीर्घवृत्त का शीर्ष x-अक्ष पर स्थित है अत: इसका समीकरण $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के अनुरूप होगा, जहाँ अर्ध-दीर्घ अक्ष की लंबाई a है। हमें ज्ञात है, कि, $a = 13$, $c = \pm 5$.

अत: $c^2 = a^2 - b^2$, के सूत्र से हमें प्राप्त होता है, $25 = 169 - b^2$ या $b = 12$

अत: दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ है।

उदाहरण 12 उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके दीर्घ अक्ष की लंबाई 20 है तथा नाभियाँ $(0, \pm 5)$ हैं।

हल क्योंकि नाभियाँ y-अक्ष पर स्थित हैं, इसलिए दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ के अनुरूप है।

दिया है $\quad a =$ अर्ध दीर्घ अक्ष $=\frac{20}{2}=10$

और सूत्र $\quad c^2 = a^2 - b^2$ से प्राप्त होता है,

$5^2 = 10^2 - b^2$ या $b^2 = 75$

अत: $$\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{100}=1$$

उदाहरण 13 उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसकी दीर्घ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है और $(4, 3)$ तथा $(-1,4)$ दीर्घवृत्त पर स्थित हैं।

हल दीर्घवृत्त के समीकरण का मानक रूप $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ है। चूँकि बिंदु $(4, 3)$ तथा $(-1, 4)$ दीर्घवृत्त पर स्थित हैं। अत: हमें प्राप्त होता है,

$$\frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \qquad \ldots (1)$$

और $$\frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (1) और (2) को हल करने पर $a^2=\frac{247}{7}$ व $b^2=\frac{247}{15}$ प्राप्त होता है।

अत: अभीष्ट समीकरण:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{247}{7}\right)}+\frac{y^2}{\frac{247}{15}}=1 \text{ या } 7x^2 + 15y^2 = 247 \text{ है।}$$

प्रश्नावली 11.3

निम्नलिखित प्रश्नों 1 से 9 तक प्रत्येक दीर्घवृत्त में नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ और लघु अक्ष की लंबाइयाँ, उत्केंद्रता तथा नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए:

1. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ **2.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ **3.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ **4.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$

5. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$ **6.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{400}=1$ **7.** $36x^2 + 4y^2 = 144$ **8.** $16x^2 + y^2 = 16$

9. $4x^2 + 9y^2 = 36$

निम्नलिखित प्रश्नों 10 से 20 तक प्रत्येक में, दिए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए:

10. शीर्षों $(\pm 5, 0)$, नाभियाँ $(\pm 4, 0)$

11. शीर्षों $(0, \pm 13)$, नाभियाँ $(0, \pm 5)$

12. शीर्षों $(\pm 6, 0)$, नाभियाँ $(\pm 4, 0)$

13. दीर्घ अक्ष के अंत्य बिंदु $(\pm 3, 0)$, लघु अक्ष के अंत्य बिंदु $(0, \pm 2)$

14. दीर्घ अक्ष के अंत्य बिंदु $(0, \pm\sqrt{5})$, लघु अक्ष के अंत्य बिंदु $(\pm 1, 0)$

15. दीर्घ अक्ष की लंबाई 26, नाभियाँ $(\pm 5, 0)$

16. दीर्घ अक्ष की लंबाई 16, नाभियाँ $(0, \pm 6)$.

17. नाभियाँ $(\pm 3, 0)$, $a = 4$

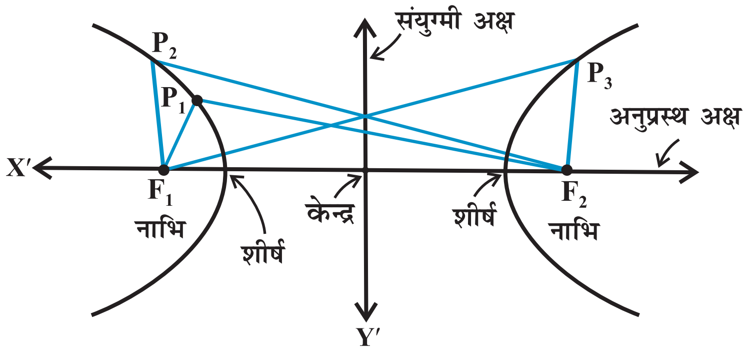
18. $b = 3$, $c = 4$, केंद्र मूल बिंदु पर, नाभियाँ x अक्ष पर

19. केंद्र (0,0) पर, दीर्घ-अक्ष, y-अक्ष पर और बिंदुओं (3, 2) और (1,6) से जाता है।

20. दीर्घ अक्ष, x-अक्ष पर और बिंदुओं (4,3) और (6,2) से जाता है।

11.6 अतिपरवलय (Hyperbola)

परिभाषा 7 एक अतिपरवलय, तल के उन सभी बिंदुओं का समुच्चय है जिनकी तल में दो स्थिर बिंदुओं से दूरी का अंतर अचर होता है।



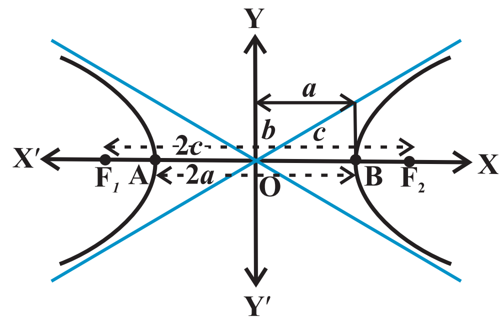
$$P_1F_2 - P_1F_1 = P_2F_2 - P_2F_1 = P_3F_1 - P_3F_2$$

आकृति 11.29

परिभाषा में 'अंतर' शब्द का प्रयोग किया गया है जिसका अर्थ है दूर स्थित बिंदु से दूरी ऋण निकट स्थित बिंदु से दूरी। दो स्थिर बिंदुओं को दीर्घवृत्त की **नाभियाँ** कहते हैं। नाभियों को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु को **अतिपरवलय का केंद्र**

कहते हैं। नाभियों से गुज़रने वाली रेखा को **अनुप्रस्थ अक्ष** (transverse axis) तथा केंद्र से गुज़रने वाली रेखा और अनुप्रस्थ अक्ष पर लंबवत् रेखा को संयुग्मी अक्ष (conjugate axis) कहते हैं। अतिपरवलय, अनुप्रस्थ अक्ष को जिन बिंदुओं पर काटता है, उन्हें अतिपरवलय के शीर्ष (vertices) कहते हैं (आकृति 11.29)।

दोनों नाभियों के बीच की दूरी को हम $2c$ से प्रदर्शित करते हैं, दोनों शीर्षों के बीच की दूरी (अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई) को $2a$ से प्रदर्शित करते हैं और हम राशि b को इस प्रकार परिभाषित करते हैं कि $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $2b$ को **संयुग्मी अक्ष की लंबाई** भी कहते है (आकृति11.30)।



आकृति 11.30

समीकरण (1) की अचर राशि $P_1F_2 - P_1F_1$ ज्ञात करना

आकृति 11.30 में A तथा B पर बिंदु P को रखने पर हमें प्राप्त होता है,

$BF_1 - BF_2 = AF_2 - AF_1$ (अतिपरवलय की परिभाषा के अनुसार)

$BA + AF_1 - BF_2 = AB + BF_2 - AF_1$

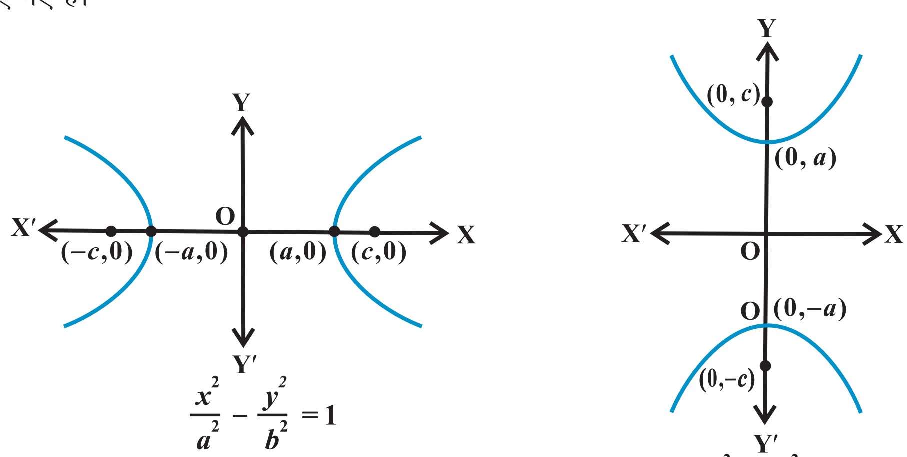
अर्थात् $AF_1 = BF_2$

इसलिए, $BF_1 - BF_2 = BA + AF_1 - BF_2 = BA = 2a$

11.6.1 उत्केंद्रता *(Eccentricity)*

परिभाषा 8 दीर्घवृत्त की तरह ही अनुपात $e = \frac{c}{a}$ को अतिपरवलय की उत्केंद्रता कहते हैं। चूँकि $c \geq a$, इसलिए उत्केंद्रता कभी भी एक से कम नहीं होती है। उत्केंद्रता के संबंध में, नाभियाँ केंद्र से ae की दूरी पर होती है।

11.6.2 ***अतिपरवलय का मानक समीकरण (Standard equation of Hyperbola)*** यदि अतिपरवलय का केंद्र मूल बिंदु पर और नाभियाँ x-अक्ष और y-अक्ष पर स्थित हों तो अतिपरवलय का समीकरण सरलतम होता है ऐसे दो संभव दिक्विन्यास आकृति 11.31 में दर्शाए गए हैं।



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(a)

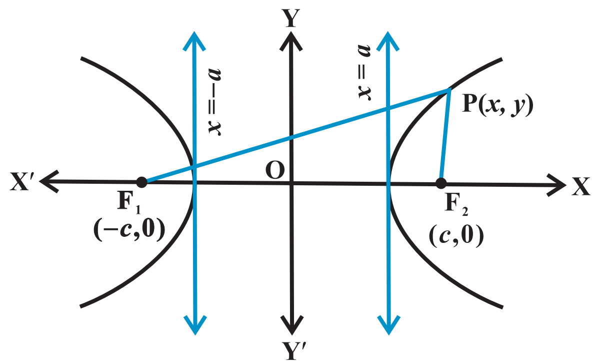
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

(b)

आकृति 11.31

अब हम आकृति 11.31(a) में दर्शाए गए अतिपरिवलय, जिसकी नाभियाँ x-अक्ष पर स्थित हैं का समीकरण व्युत्पन्न करेंगे।

मान लीजिए F_1 और F_2 नाभियाँ हैं और रेखाखंड F_1F_2 का मध्य बिंदु O है। मान लीजिए O मूल बिंदु है और O से F_2 की ओर धनात्मक x-अक्ष व O से F_1 की ओर ऋणात्मक x-अक्ष है। माना O से x-अक्ष पर लंब y-अक्ष है। F_1 के निर्देशांक $(-c,0)$ और F_2 के निर्देशांक $(c,0)$ मान लेते हैं (आकृति 11.32)।



आकृति 11.32

मान लीजिए अतिपरवलय पर कोई बिंदु $P(x, y)$ इस प्रकार है कि P की दूरस्थ बिंदु से व निकटस्थ बिंदु से दूरीयों का अंतर $2a$ है इसलिए, $PF_1 - PF_2 = 2a$

दूरी सूत्र से हम पाते हैं

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

या $$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, हम प्राप्त करते हैं,

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

जिसे सरल करने पर मिलता है,

$$\frac{cx}{a} - a = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

पुन: वर्ग करने व सरल करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$

या $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (\text{क्योंकि } c^2 - a^2 = b^2)$$

अत: अप्रतिपरवलय पर स्थित कोई बिंदु

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

को संतुष्ट करता है।

विलोमत: माना $P(x, y)$, समीकरण (3) को संतुष्ट करता है, $0 < a < c$. तब,

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2-a^2}{a^2}\right)$$

इस प्रकार $$PF_1 = +\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$= +\sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{x^2-a^2}{a^2}\right)} = a + \frac{c}{a}x$$

इसी प्रकार $$PF_2 = a - \frac{a}{c}x$$

अतिपरवलय में $c > a$ और चूँकि P रेखा $x = a$, के दाहिनी ओर है, $x > a$, और इसलिए $\frac{c}{a}x > a$. या $a - \frac{c}{a}x$ ऋणात्मक हो जाता है। अत: $PF_2 = \frac{c}{a}x - a$.

इसलिए $PF_1 - PF_2 = a + \frac{c}{a}x - \frac{cx}{a} + a = 2a$

ध्यान दीजिए, यदि P रेखा $x = -a$, के बाईं ओर होता तब $PF_1 = -\left(a + \frac{c}{a}x\right)$, $PF_2 = a - \frac{c}{a}x$.

उस स्थिति में $PF_2 - PF_1 = 2a$. इसलिए कोई बिंदु जो $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, को संतुष्ट करता है तो अतिपरवलय पर स्थित होता है।

इस प्रकार हमने सिद्ध किया कि एक अतिपरवलय, जिसका केंद्र (0,0) व अनुप्रस्थ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है, का समीकरण है $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

टिप्पणी एक अतिपरवलय जिसमें $a = b$ हो, **समकोणीय अतिपरवलय** (rectangular hyperbola) कहलाता है।

विवेचना अतिपरवलय के समीकरण से हम यह निष्कर्ष पाते हैं कि अतिपरवलय पर प्रत्येक बिंदु (x, y) के लिए,

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1.$$

अर्थात् $\left|\frac{x}{a}\right| \geq 1$, अर्थात् $x \leq -a$ या $x \geq a$. इसलिए, वक्र का भाग रेखाओं $x = +a$ और $x = -a$,के बीच में स्थित नहीं है (अथवा संयुग्मी अक्ष पर वास्तविक अंत:खंड नहीं होते हैं)।

इसी प्रकार, आकृति 11.31 (b) में, हम अतिपरवलय का समीकरण $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ व्युत्पन्न कर सकते हैं।

इन दो समीकरणों को **अतिपरवलय का मानक समीकरण** कहते हैं।

टिप्पणी अतिपरवलय के मानक समीकरण में, अतिपरवलय का केंद्र, मूल बिंदु पर और अनुप्रस्थ अक्ष व संयुग्मी अक्ष निर्देशांक्षो पर स्थित हैं। तथापि यहाँ ऐसे भी अतिपरवलय होते हैं जिनमें कोई दो लंबवत् रेखाएँ अनुप्रस्थ अक्ष व संयुग्मी अक्ष होते हैं परंतु ऐसी स्थितियों का अध्ययन उच्च कक्षाओं में हैं।

आकृति 11.29, से प्राप्त अतिपरवलयों के मानक समीकरण के निरीक्षण से हमें निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं:

1. अतिपरवलय, दोनों निर्देशांक्षों के सापेक्ष सममित हैं क्योंकि यदि अतिपरवलय पर एक बिंदु (x, y) है तो बिंदु $(-x, y)$, $(x, -y)$ और $(-x, -y)$ भी अतिपरवलय पर स्थित हैं।
2. अतिपरवलय की नाभियाँ सदैव अनुप्रस्थ अक्ष पर स्थित होती हैं। यह सदैव एक धनात्मक पद है जिसका हर अनुप्रस्थ अक्ष देता है। उदाहरणत: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ का अनुप्रस्थ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है और इसकी लंबाई 6 है जबकि $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$ का अनुप्रस्थ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है और इसकी लंबाई 10 है।

11.6.3 नाभिलंब जीवा (Latus rectum)

परिभाषा 9 अतिपरवलय की नाभियों से जाने वाली और अनुप्रस्थ अक्ष पर लंबवत् रेखाखंड जिसके अंत्य बिंदु अतिपरवलय पर हों, को अतिपरवलय की **नाभिलंब जीवा** कहते हैं।

दीर्घवृत्तों की भाँति, यह दर्शाना सरल है कि अतिपरवलय की नाभिलंब जीवा की लंबाई $\frac{2b^2}{a}$ है।

उदाहरण 14 निम्नलिखित अतिपरवलयों के शीर्षों और नाभियों के निर्देशांकों, उत्केंद्रता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ (ii) $y^2 - 16x^2 = 16$

हल (i) दिए गए समीकरण $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ का मानक समीकरण

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ से तुलना करने पर, हम पाते हैं कि

$a = 3, b = 4$ और $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+16} = 5$

अतः नाभियों के निर्देशांक $(\pm 5, 0)$ हैं और शीर्षों के निर्देशांक $(\pm 3, 0)$ हैं।

उत्केंद्रता $e = = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{32}{3}$

(ii) दिये गए समीकरण के दोनों पक्षों को 16 से भाग करने पर $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{1}=1$ हमें प्राप्त होता है,

मानक समीकरण $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, से तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$a = 4,\ b = 1$ और $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

अतः नाभियों के निर्देशांक $(0, \pm\sqrt{17})$ हैं और शीर्षों के निर्देशांक $(0, \pm 4)$ हैं।

उत्केंद्रता $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{17}}{4}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{1}{2}$.

उदाहरण 15 नाभियाँ $(0, \pm 3)$ और शीर्षों $(0, \pm\frac{\sqrt{11}}{2})$ वाले अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि नाभियाँ y-अक्ष पर हैं, इसलिए अतिपरवलय का समीकरण $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ के रूप में है।

क्योंकि शीर्ष $\left(0, \pm \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$, इसलिए $a = \frac{\sqrt{11}}{2}$

और नाभियाँ $(0, \pm 3)$; $c = 3$ और $b^2 = c^2 - a^2 = \frac{25}{4}$.

इसलिए, अतिपरवलय का समीकरण है

$$\frac{y^2}{\left(\frac{11}{4}\right)} - \frac{x^2}{\left(\frac{25}{4}\right)} = 1, \text{ अर्थात् } 100\, y^2 - 44\, x^2 = 275.$$

उदाहरण 16 उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ $(0, \pm 12)$ और नाभिलंब जीवा की लंबाई 36 है।

हल क्योंकि नाभियाँ $(0, \pm 12)$, है इसलिए $c = 12$.

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a} = 36$, $b^2 = 18a$

इसलिए $c^2 = a^2 + b^2$; से

$144 = a^2 + 18a$

अर्थात् $a^2 + 18a - 144 = 0$,

$a = -24, 6$.

क्योंकि a ऋणात्मक नहीं हो सकता है, इसलिए हम $a = 6$ लेते हैं और $b^2 = 108$.

अत: अभीष्ट अतिपरवलय का समीकरण

$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{108} = 1$ है, अर्थात् $3y^2 - x^2 = 108$

प्रश्नावली 11.4

निम्नलिखित प्रश्न 1 से 6 तक प्रत्येक में, अतिपरवलयों के शीर्षों, नाभियों के निर्देशांक, उत्केंद्रता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए:

1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ **2.** $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$ **3.** $9y^2 - 4x^2 = 36$

4. $16x^2 - 9y^2 = 576$ **5.** $5y^2 - 9x^2 = 36$ **6.** $49y^2 - 16x^2 = 784$.

निम्नलिखित प्रश्न 7 से 15 तक प्रत्येक में, दिए गए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए:

7. शीर्ष $(\pm 2, 0)$, नाभियाँ $(\pm 3, 0)$ **8.** शीर्ष $(0, \pm 5)$, नाभियाँ $(0, \pm 8)$

9. शीर्ष $(0, \pm 3)$, नाभियाँ $(0, \pm 5)$

10. नाभियाँ $(\pm 5, 0)$, अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई 8 है।

11. नाभियाँ $(0, \pm 13)$, संयुग्मी अक्ष की लंबाई 24 है।

12. नाभियाँ $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$, नाभिलंब जीवा की लंबाई 8 है।

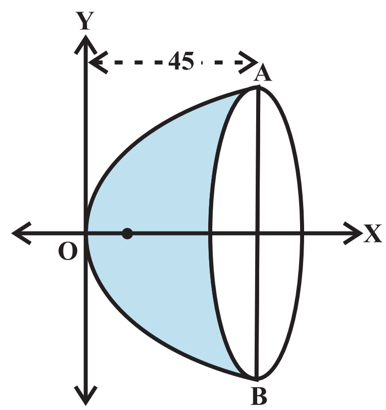
13. नाभियाँ $(\pm 4, 0)$, नाभिलंब जीवा की लंबाई 12 है।

14. शीर्ष $(\pm 7, 0)$, $e = \frac{4}{3}$.

15. नाभियाँ $(0, \pm \sqrt{10})$, हैं तथा $(2,3)$ से होकर जाता है।

विविध उदाहरण

उदाहरण 17 एक परवलयाकार परावर्तक की नाभि, इसके शीर्ष केंद्र से 5 सेमी की दूरी पर है जैसा कि आकृति 11.33 में दर्शाया गया है। यदि परावर्तक 45 सेमी गहरा है, तो आकृति 11.33 में दूरी AB ज्ञात कीजिए (आकृति 11.33)।



आकृति 11.33

हल क्योंकि नाभि की केंद्र शीर्ष से दूरी 5 सेमी है, हम $a = 5$ सेमी पाते हैं। यदि शीर्ष मूल बिंदु और दर्पण की अक्ष, x–अक्ष के धन भाग के अनुदिश हो तो परवलयाकार परिच्छेद का समीकरण

$y^2 = 4\,(5)\,x = 20\,x$ है।

यदि $x = 45$ तो हम पाते हैं

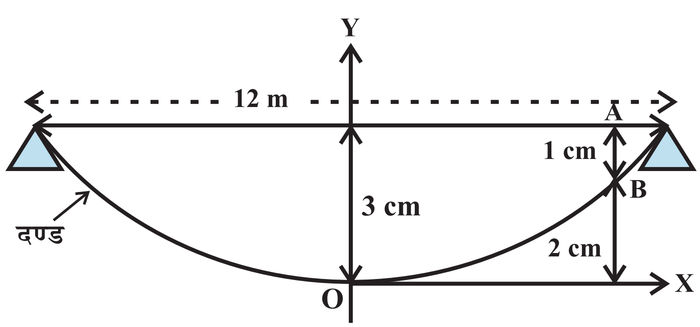
$y^2 = 900$

इसलिए $y = \pm 30$

अत: $AB = 2y = 2 \times 30 = 60$ सेमी

उदाहरण 18 एक दंड के सिरे, 12 मीटर दूर रखे आधारों पर टिके हैं। चूँकि दंड का भार केंद्र पर केंद्रित होने से दंड में केंद्र पर 3 सेमी का झुकाव आ जाता है और झुका हुआ दंड एक परवलयाकार है। केंद्र से कितनी दूरी पर झुकाव 1 सेमी है?

हल मान लीजिए शीर्ष निम्नतम बिंदु पर और अक्ष उर्ध्वाधर है। माना निर्देशांक्ष, आकृति 11.34 के अनुसार दर्शाए गए हैं।



आकृति 11.34

परवलय का समीकरण $x^2 = 4ay$ जैसा है। चूँकि यह $\left(6, \frac{3}{100}\right)$, से गुज़रता है इसलिए हमें

$$(6)^2 = 4a\left(\frac{3}{100}\right), \text{ अर्थात् } a = \frac{36\times100}{12} = 300 \text{ मी प्राप्त है।}$$

अब दंड में झुकाव AB, $\frac{1}{100}$ मी है। B के निर्देशांक $(x, \frac{2}{100})$ हैं।

इसलिए
$$x^2 = 4\times300\times\frac{2}{100} = 24$$
$$x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ मी}$$

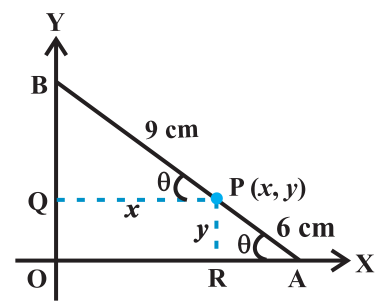
उदाहरण 19 15 सेमी लंबी एक छड़ AB दोनों निर्देशांक्षों के बीच में इस प्रकार रखी गई है कि उसका एक सिरा A, x-अक्ष पर और दूसरा सिरा B, y-अक्ष पर रहता है छड़ पर एक बिंदु $P(x, y)$ इस प्रकार लिया गया है कि AP = 6 सेमी हैं दिखाइए कि P का बिंदुपथ एक दीर्घवृत्त है।

हल मान लीजिए छड़ AB, OX के साथ θ कोण बनाती है जैसा कि आकृति 11.35 में दिखाया गया है। AB पर बिंदु $P(x, y)$ इस प्रकार है कि AP = 6 सेमी है।

क्योंकि AB = 15 सेमी, इसलिए

PB = 9 सेमी

P से PQ और PR क्रमशः y-अक्ष और x-अक्ष पर लंब डालिए।



आकृति 11.35

$$\Delta \text{ PBR से, } \cos\theta = \frac{x}{9}$$

$$\Delta \text{ PRA से, } \sin\theta = \frac{y}{6}$$

क्योंकि $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

अत:
$$\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$$

या
$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$$

अत: P का बिंदुपथ एक दीर्घवृत्त है।

अध्याय 11 पर आधारित विविध प्रश्नावली

1. यदि एक परवलयाकार परावर्तक का व्यास 20 सेमी और गहराई 5 सेमी है। नाभि ज्ञात कीजिए।
2. एक मेहराब परवलय के आकार का है और इसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है। मेहराव 10 मीटर ऊँचा है और आधार में 5 मीटर चौड़ा है यह, परवलय के दो मीटर की दूरी पर शीर्ष से कितना चौड़ा होगा?

हल क्योंकि नाभि की केंद्र शीर्ष से दूरी 5 सेमी है, हम $a = 5$ सेमी पाते हैं। यदि शीर्ष मूल बिंदु और दर्पण की अक्ष, x–अक्ष के धन भाग के अनुदिश हो तो परवलयाकार परिच्छेद का समीकरण

$$y^2 = 4\,(5)\,x = 20\,x \text{ है।}$$

यदि $x = 45$ तो हम पाते हैं

$y^2 = 900$

इसलिए $y = \pm 30$

अत: $AB = 2y = 2 \times 30 = 60$ सेमी

अध्याय 11 पर आधारित विविध प्रश्नावली

1. यदि एक परवलयाकार परावर्तक का व्यास 20 सेमी और गहराई 5 सेमी है। नाभि ज्ञात कीजिए।
2. एक मेहराब परवलय के आकार का है और इसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है। मेहराव 10 मीटर ऊँचा है और आधार में 5 मीटर चौड़ा है यह, परवलय के दो मीटर की दूरी पर शीर्ष से कितना चौड़ा होगा?
3. एक र्वसम भारी झूलते पुल की केबिल (cable)परवलय के रूप में लटकी हुई है। सड़क पथ जो क्षैतिज है 100 मीटर लंबा है तथा केबिल से जुड़े ऊर्ध्वाधर तारों पर टिका हुआ है, जिसमें सबसे लंबा तार 30 मीटर और सबसे छोटा तार 6 मीटर है। मध्य से 18 मीटर दूर सड़क पथ से जुड़े समर्थक (supporting) तार की लंबाई ज्ञात कीजिए।
4. एक मेहराव अर्ध-दीर्घवृत्ताकार रूप का है। यह 8 मीटर चौड़ा और केंद्र से 2 मीटर ऊँचा है। एक सिरे से 1.5 मीटर दूर बिंदु पर मेहराव की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
5. एक 12 सेमी लंबी छड़ इस प्रकार चलती है कि इसके सिरे निर्देशांक्षो को स्पर्श करते हैं। छड़ के बिंदु P का बिंदुपथ ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष के संपर्क वाले सिरे से 3 सेमी दूर है।
6. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो परवलय $x^2 = 12y$ के शीर्ष को इसकी नाभिलंब जीवा के सिरों को मिलाने वाली रेखाओं से बना है।
7. एक व्यक्ति दौड़पथ पर दौड़ते हुऐ अंकित करता है कि उससे दो झंडा चौकियों की दूरियों का योग सदैव 10 मीटर रहता है। और झंडा चौकियों के बीच की दूरी 8 मीटर है। व्यक्ति द्वारा बनाए पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।
8. परवलय $y^2 = 4\,ax$, के अंतर्गत एक समबाहु त्रिभुज है जिसका एक शीर्ष परवलय का शीर्ष है। त्रिभुज की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

सारांश

इस अध्याय में निम्नलिखित संकल्पनाओं एवं व्यापकताओं का अध्ययन किया है।

- एक वृत्त, तल के उन बिंदुओं का समुच्चय है जो तल के एक स्थिर बिंदु से समान दूरी पर होते हैं।
- केंद्र (h, k) तथा त्रिज्या r के वृत्त का समीकरण $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ है।
- एक परवलय तल के उन सभी बिंदुओं का समुच्चय है जो एक निश्चित सरल रेखा और तल के एक निश्चित बिंदु से समान दूरी पर हैं।
- नाभि $(a, 0)$, $a > 0$ और नियता $x = -a$ वाले परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ है।
- परवलय की नाभि से जाने वाली और परवलय के अक्ष के लंबवत रेखाखंड जिसके अंत्य बिंदु परवलय पर हों, को **परवलय की नाभिलंब** जीवा कहते हैं।
- परवलय $y^2 = 4ax$ के नाभिलंब जीवा की लंबाई $4a$ है।
- एक दीर्घवृत्त तल के उन बिंदुओं का समुच्चय है जिनकी तल में दो स्थिर बिंदुओं से दूरी का योग अचर होता है।
- x-अक्ष पर नाभि वाले दीर्घवृत्त का समीकरण $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ है।
- दीर्घवृत्त की किसी भी नाभि से जाने वाली और दीर्घ अक्ष पर लंबवत रेखाखंड, जिसके अंत्य बिंदु दीर्घवृत्त पर हों,

को **दीर्घवृत्त की नाभिलंब जीवा** कहते हैं।

- दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के नाभिलंब जीवा की लंबाई $\frac{2b^2}{a}$ है।
- दीर्घवृत्त की उत्केंद्रता, दीघर्वृत्त के केंद्र से नाभि और केंद्र से शीर्ष की दूरियों का अनुपात है।
- एक अतिपरवलय तल के उन सभी बिंदुओं का समुच्चय है जिनकी तल में दो स्थिर बिंदुओं से दूरी का अंतर अचर होता है।
- x-अक्ष पर नाभि वाले अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ है।
- अतिपरिवलय की किसी भी नाभि से जाने वाली और अनुप्रस्थ पर लंबवत रेखाखंड जिसके अंत्य बिंदु अतिपरवलय पर हों, को **अतिपरवलय की नाभिलंब** जीवा कहते हैं।
- अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ के नाभिलंब जीवा की लंबाई $\frac{2b^2}{a}$ है।
- अतिपरवलय की उत्केंद्रता, अतिपरवलय के केंद्र से नाभि और केंद्र से शीर्ष की दूरियों का अनुपात है।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

ज्यामिति गणित की सबसे प्राचीन शाखाअें में से एक है। यूनान के ज्यामितिविदों ने अनेक वक्रों के गुणधर्मों का अन्वेषण किया जिनकी सैद्धांतिक और व्यावहारिक महत्ता है। Euclid ने लगभग 300 ई.पू. ज्यामिति पर अपना भाष्य लिखा। वह सर्वप्रथम व्यक्ति थे जिन्होनें भौतिक चिंतन द्वारा सुझाए गए निश्चित अभिग्रहीतियों के आधार पर ज्यामितीय चित्रों को संगठित किया। ज्यामिति, जिसका प्रारंभ भारतियों और यूनानियों ने किया, उसके अध्ययन में उन्होंने बीजगणित की विधियों के अनुप्रयोग को आवश्यक नहीं बताया। ज्यामिति विषय की एकीकरण पहुँच जो Euclid, ने दिया तथा जो सुल्वसूत्रों से प्राप्त थी इत्यादि ने दी, लगभग 1300 वर्षों तक चलती रहीं 200 ई. पू. में Apollonius ने एक पुस्तक, '*The Conic*' लिखी जो अनेक महत्वपूर्ण अन्वेषणों के साथ शंकु परिच्छेदों के बारे में थी और 18 शताब्दियों तक बेजोड़ रही।

Rene Descartes (1596-1650 A.D.) के नाम पर आधुनिक वेश्लेषिक ज्यामिति को कार्तीय (Cartesian) कहा जाता है जिसकी सार्थकता La Geometry नाम से 1637 ई. में प्रकाशित हुई। परंतु वैश्लेषिक ज्यामिति के मूलभूत सिद्धांत और विधियों को पहले ही Peirre de Farmat (1601-1665 ई.) ने अन्वेषित कर लिया था। दुर्भाग्यवश, Fermates का विषय पर भाष्य, *Ad Locus Planos et So LIDOS Isagoge* – 'Introduction to Plane and Solid Loci' केवल उनकी मृत्यु के बाद 1679 ई. में प्रकाशित हुआ था। इसलिए Descartes की वैश्लेषिक ज्यामिति को अद्वितीय अन्वेषक का श्रेय मिला।

Isaac Barrow ने कार्तीय विधियों के प्रयोग को तिरस्कृत किया। न्यूटन ने वक्रों के समीकरण ज्ञात करने के लिए अज्ञात गुणांको की विधि का प्रयोग किया। उन्होंने अनेक प्रकार के निर्देशांकों, ध्रुवीय (Polar) और द्विध्रुवीय (bipolar) का प्रयोग किया।

Leibnitz ने 'भुज' (abcissa), 'कोटि' (ordinate) और निर्देशांक पदों (Coordinate), का प्रयोग किया। L.Hospital (लगभग 1700 ई.) ने वैश्लेषिक ज्यामिति पर एक महत्वपूर्ण पाठ्य पुस्तक लिखी।

Clairaut (1729 ई.) ने सर्वप्रथम दूरी सूत्र को दिया। यद्यपि यह शुद्ध रूप में था उन्होंने रैखिक समीकरण का अंत:खंड रूप भी दिया। **Cramer** (1750 ई.) ने औपचारिक रूप से दो निर्देशाक्षों को प्रयोग करके वृत्त का समीकरण $(y - a)^2 + (b - x)^2 = r$ दिया। उन्होंने उस समय में वैश्लेषिक ज्यामिति का सर्वोत्तम प्रस्तुतीकरण दिया। Monge (1781ई.) ने आधुनिक बिंदु प्रवणता के रूप में रेखा का समीकरण निम्न प्रकार से दिया।

$$y - y' = a\,(x - x')$$

तथा दो रेखाओं के लंबवत होने का प्रतिबंध $aa' + 1 = 0$ दिया।

S.F. Lacroix (1765-1843 ई.) प्रसिद्ध पाठ्य पुस्तक लेखक थे, लेकिन उनका वैश्लेषिक ज्यामिति में योगदान कहीं कहीं मिलता है। उन्होंने रेखा के समीकरण का दो बिंदु रूप

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$$

और (α, β) से $y = ax + b$ पर लंब की लंबाई $\dfrac{(\beta - a\alpha - b)}{\sqrt{1 + a^2}}$ बताया। उन्होनें दो रेखाओं के मध्यस्थ कोण का सूत्र $\tan\theta = \left(\dfrac{a' - a}{1 + aa'}\right)$ भी दिया। यह वास्तव में आश्चर्यजनक है कि वैश्लेषिक ज्यामिति के अन्वेषण के बाद इन मूलभूत आवश्यक सूत्रों को ज्ञात करने के लिए 150 वर्षों से अधिक इंतज़ार करना पड़ा। 1818 ई. में C. Lame, एक सिविल इंजीनियर, ने दो बिंदुपथों $E = 0$ और $E' = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से जाने वाले वक्र $mE + m'E' = 0$ को बताया।

विज्ञान एवं गणित दोनों में अनेक महत्वपूर्ण अन्वेषण शंकु परिच्छेदों से संबंधित हैं। यूनानियों विशेषकर Archimedes (287–212 ई.पू.) और Apollonius (200 ई.पू.) ने शंकु परिच्छेदों का अध्ययन किया। आजकल ये वक्र महत्वपूर्ण उपक्रम हैं, जिससे बाह्य अंतरिक्ष और परमाणु कणों के व्यवहार से संबंधित अन्वेषणों के द्वारा अनेक रहस्यों का उद्घाटन हुआ है।

अध्याय 12

त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय
(Introduction to Three Dimensional Geometry)

❖ *Mathematics is both the queen and the hand-maiden of all sciences – E.T. BELL* ❖

12.1 भूमिका (Introduction)

Leonhard Euler
(1707-1783 A.D.)

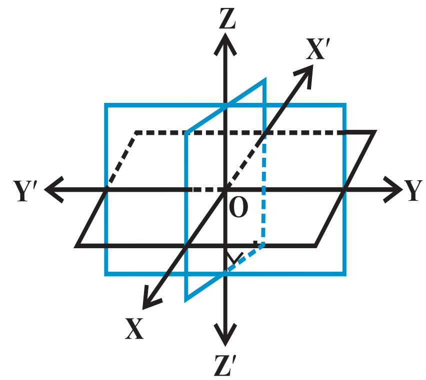
हम जानते हैं, कि किसी तल में स्थित एक बिंदु की स्थिति निर्धारण के लिए हमें उस तल में दो परस्पर लंब एवं प्रतिच्छेदित रेखाओं से लांबिक दूरियों की आवश्यकता होती है। इन रेखाओं को निर्देशांक्ष और उन दो लांबिक दूरियों को अक्षों के सापेक्ष उस बिंदु के निर्देशांक (coordinate) कहते हैं। वास्तविक जीवन में हमारा केवल एक तल में स्थित बिंदुओं से ही संबंध नहीं रह जाता है। उदाहरणत: अंतरिक्ष में फेंके गए एक गेंद की विभिन्न समय में स्थिति अथवा एक स्थान से दूसरे स्थान तक जाने के दौरान वायुयान की एक विशिष्ट समय में स्थिति आदि, को भी जानने की आवश्यकता पड़ती है।

इसी प्रकार एक कमरे की छत से लटकते हुए एक विद्युत बल्ब की निचली नोक अथवा छत के पंखे की नोक की स्थिति का निर्धारण करने के लिए हमें उन बिंदुओं की दो परस्पर लंब दीवारों से दूरियाँ मात्र ही पर्याप्त नहीं है बल्कि उस बिंदु की, कमरे के फर्श से ऊँचाई, की भी आवश्यकता पड़ती है। अत: हमें केवल दो नहीं बल्कि तीन परस्पर लांबिक तलों से लंबवत् दूरियों को निरूपित करने के लिए तीन संख्याओं की आवश्यकता होती है, जो बिंदु की दो परस्पर लंब दीवारों से दूरियाँ, तथा उस कमरे के फर्श से ऊँचाई को व्यक्त करती हैं। कमरे की परस्पर लंब दीवारों तथा उस क्षैतिज का फर्श तीन परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाले तल हैं। इन परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाले तलों से लंब दूरियों को व्यक्त करने वाली तीन संख्याएँ उस बिंदु के तीन निर्देशांक तलों के सापेक्ष **निर्देशांक** कहलाते हैं। इस प्रकार अंतरिक्ष (space) में स्थित एक बिंदु के तीन निर्देशांक होते हैं। इस अध्याय में हम त्रिविमीय अंतरिक्ष में ज्यामिति की मूलभूत संकल्पनाओं का अध्ययन करेंगे।

12.2 त्रिविमीय अंतरिक्ष में निर्देशांक्ष और निर्देशांक-तल (Coordinate Axes and Coordinate Planes in Three Dimensional Space)

बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करने वाले तीन परस्पर लंब तलों की कल्पना कीजिए (आकृति 12.1)। ये तीनों तल रेखाओं X'OX, Y'OY और Z'OZ पर प्रतिच्छेदित करते हैं जिन्हें क्रमश: x-अक्ष, y-अक्ष और z-अक्ष कहते हैं। हम स्पष्टत: देखते हैं कि ये तीनों रेखाएँ परस्पर लंब हैं। इन्हें हम **समकोणिक निर्देशांक** निकाय कहते हैं। XOY, YOZ और ZOX, तलों को क्रमश: XY-तल, YZ-तल, तथा ZX-तल, कहते हैं। ये तीनों तल निर्देशांक तल कहलाते हैं।

हम कागज के तल को XOY तल लेते हैं। और Z'OZ रेखा को तल XOY पर लंबवत लेते हैं। यदि कागज के तल को क्षैतिजतः रखें तो Z'OZ रेखा ऊर्ध्वारतः होती है। XY-तल से OZ की दिशा में ऊपर की ओर नापी गई दूरियाँ धनात्मक और OZ' की दिशा में नीचे की ओर नापी गई दूरियाँ ऋणात्मक होती हैं। ठीक उसी प्रकार ZX-तल के दाहिने OY दिशा में नापी गई दूरियाँ धनात्मक और ZX तल के बाएँ OY' की दिशा में नापी गई दूरियाँ ऋणात्मक होती हैं। YZ-तल के सम्मुख OX दिशा में नापी गई दूरियाँ धनात्मक तथा इसके पीछे OX' की दिशा में नापी गई दूरियाँ ऋणात्मक होती हैं। बिंदु O को निर्देशांक निकाय का **मूल बिंदु** कहते हैं। तीन निर्देशांक तल अंतरिक्ष को आठ भागों में बांटते हैं, इन अष्टाशों के नाम XOYZ, X'OYZ, X'OY'Z, XOY'Z, XOYZ', X'OY'Z', X'OY'Z' और XOY'Z' हैं। और जिन्हें क्रमशः I, II, III, ..., VIII द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

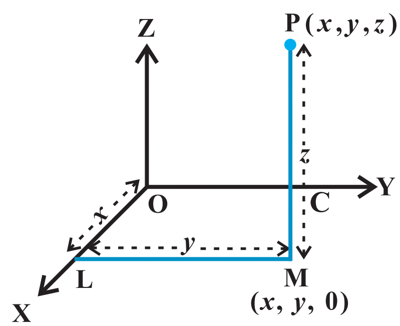


आकृति 12.1

12.3 अंतरिक्ष में एक बिंदु के निर्देशांक (Coordinates of a Point in Space)

अंतरिक्ष में निश्चित निर्देशांक्षों, निर्देशांक तलों और मूल बिंदु सहित निर्देशांक्ष निकाय के चयन के पश्चात् दिए बिंदु के तीन निर्देशांक (x, y, z) को ज्ञात करने की विधि तथा विलोमतः तीन संख्याओं के त्रिदिक (Triplet) दिए जाने पर अंतरिक्ष में संगत बिंदु (x, y, z) के निर्धारण करने की विधि की अब हम विस्तार से व्याख्या करते हैं।

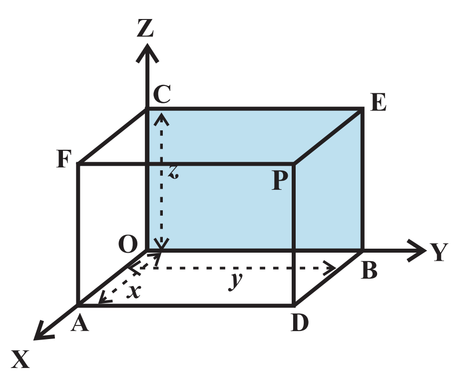
अंतरिक्ष में दिए गए बिंदु P से XY–तल पर PM लंब खींचते हैं जिसका पाद M है (आकृति 12.2)। तब M से x–अक्ष पर ML लंब खींचिए, जो उससे L पर मिलता है। मान लीजिए OL=x, LM = y और PM = z तब (x, y, z) बिंदु P के निर्देशांक कहलाते हैं। इसमें x, y, z को क्रमशः बिंदु P के x–निर्देशांक, y–निर्देशांक, तथा z–निर्देशांक कहते हैं। आकृति 12.2 में हम देखते हैं कि बिंदु P(x, y, z) अष्टांश XOYZ में स्थित है, अतः x, y और z सभी धनात्मक हैं।



आकृति 12.2

यदि P किसी अन्य अष्टांश में हो तो x, y और z के चिह्न तदनुसार परिवर्तित हो जाते हैं। इस प्रकार अंतरिक्ष में स्थित किसी बिंदु P की संगतता वास्तविक संख्याओं के क्रमित त्रिदिक (x, y, z) से किया जाता है।

विलोमतः, किसी त्रिदिक (x, y, z) के दिए जाने पर हम x के संगत x–अक्ष पर बिंदु L निर्धारित करते हैं। पुनः XY–तल में बिंदु M निर्धारित करते हैं, जहाँ इसके निर्देशांक (x, y) हैं। ध्यान दीजिए कि LM या तो x–अक्ष पर लंब है अथवा y–अक्ष के समांतर है। बिंदु M पर पहुँचने के पश्चात् हम XY–तल पर MP लंब खींचते हैं, इसपर बिंदु P को z के संगत निर्धारण करते हैं। इस प्रकार निर्धारित बिंदु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं। अतः अंतरिक्ष में स्थित बिंदुओं की वास्तविक संख्याओं के क्रमित त्रिदिक (x, y, z) से सदैव एकेक-संगतता रखते हैं।



आकृति 12.3

विकल्पत:, अंतरिक्ष में स्थित बिंदु P से हम निर्देशांक तलों के समांतर तीन तल खींचते हैं, जो x–अक्ष, y–अक्ष और z–अक्ष को क्रमश: A, B तथा C बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करते हैं (आकृति 12.3)। यदि $OA=x$, $OB=y$ तथा $OC=z$ हो तो बिंदु P के निर्देशांक x, y और z होते हैं और इसे हम $P(x, y, z)$ के रूप में लिखते हैं। विलोमत: x, y और z के दिए जाने पर हम निर्देशांक्षों पर बिंदु A, B तथा C निर्धारित करते हैं। बिंदु A, B तथा C से हम क्रमश: YZ–तल, ZX–तल तथा XY–तल के समांतर तीन तल खींचते हैं। इन तीनों तलों को ADPF, BDPE तथा CEPF का प्रतिच्छेदन बिंदु स्पष्टत: P है, जो क्रमित-त्रिदिक (x, y, z) के संगत है।

हम देखते हैं कि यदि अंतरिक्ष में कोई बिंदु $P(x, y, z)$ है, तो YZ, ZX तथा XY तलों से लंबवत् दूरियाँ क्रमश: x, y तथा z हैं।

टिप्पणी बिंदु O के निर्देशांक $(0, 0, 0)$ हैं। x–अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक $(x, 0, 0)$ और YZ तल में स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक $(0, y, z)$ होते हैं।

टिप्पणी एक बिंदु के निर्देशांकों के चिह्न उस अष्टांश को निर्धारित करते हैं जिसमें बिंदु स्थित होता है। निम्नलिखित सारणी आठों अष्टांशों में निर्देशांकों के चिह्न दर्शाती है।

सारणी 12.1

अष्टांश / निर्देशांक	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

उदाहरण 1 आकृति 12.3 में, यदि P के निर्देशांक (2, 4, 5) हैं तो F के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल बिंदु F के लिए OY के अनुदिश नापी गयी दूरी शून्य है। अत: F के निर्देशांक (2, 0, 5) हैं।

उदाहरण 2 वे अष्टांश ज्ञात कीजिए जिसमें बिंदु (–3, 1, 2) और (–3, 1, –2) स्थित हैं।

हल सारणी 12.1 से, बिंदु (–3, 1, 2) दूसरे अष्टांश में तथा बिंदु (–3, 1, –2) छठे अष्टांश में स्थित हैं।

प्रश्नावली 12.1

1. एक बिंदु x–अक्ष पर स्थित है। इसके y–निर्देशांक तथा z–निर्देशांक क्या हैं?
2. एक बिंदु XZ–तल में है। इसके y–निर्देशांक के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

3. उन अष्टांशों के नाम बताइए, जिनमें निम्नलिखित बिंदु स्थित हैं।

(1, 2, 3), (4, –2, 3), (4, –2, –5), (4, 2, –5), (– 4, 2, –5), (– 4, 2, 5), (–3, –1, 6) (2, – 4, –7)

4. रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए:

(i) x-अक्ष और y-अक्ष दोनों एक साथ मिल कर एक तल बनाते हैं, उस तल को ________ कहते हैं।

(ii) XY-तल में एक बिंदु के निर्देशांक ________ रूप के होते हैं।

(iii) निर्देशांक तल अंतरिक्ष को ________ अष्टांश में विभाजित करते हैं।

12.4 दो बिंदुओं के बीच की दूरी (Distance between Two Points)

द्विविमीय निर्देशांक निकाय में हमने दो बिंदुओं के बीच की दूरी का अध्ययन कर चुके हैं। आइए अब हम अपने अध्ययन का विस्तार त्रिविमीय निकाय के लिए करते हैं।

मान लीजिए, समकोणिक अक्ष OX, OY तथा OZ के सापेक्ष दो बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ हैं।

P तथा Q बिंदुओं से निर्देशांक तलों के समांतर तल खींचिए, जिससे हमें ऐसा घनाभ मिलता है जिसका विकर्ण PQ है (देखिए आकृति 12.4)

क्योंकि $\angle PAQ$ एक समकोण है अत: Δ PAQ में,

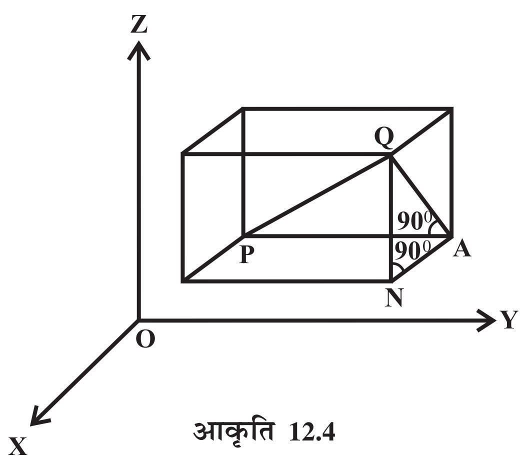
$$PQ^2 = PA^2 + AQ^2 \qquad \dots (1)$$

पुन: क्योंकि $\angle ANQ$ = एक समकोण, इसलिए Δ ANQ में,

$$AQ^2 = AN^2 + NQ^2 \qquad \dots (2)$$

(1) और (2) से हमें प्राप्त होता है, कि

$$PQ^2 = PA^2 + AN^2 + NQ^2$$



आकृति 12.4

अब, $PA = y_2 - y_1$, $AN = x_2 - x_1$ और $NQ = z_2 - z_1$

इस प्रकार, $PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

अत: $$PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

यह दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ के बीच की दूरी PQ के लिए सूत्र है।

विशेषत: यदि $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, अर्थात् बिंदु P, मूल बिंदु O हो तो

$$OQ = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2},$$

जिससे हमें मूल बिंदु O और किसी बिंदु $Q(x_2, y_2, z_2)$ के बीच की दूरी प्राप्त होती है।

उदाहरण 3 बिंदुओं P (1, -3, 4) और Q (-4, 1, 2) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल PQ बिंदुओं P (1,–3, 4) और Q (– 4, 1, 2) के बीच की दूरी है।

$$PQ = \sqrt{(-4-1)^2+(1+3)^2+(2-4)^2}$$

$$= \sqrt{25+16+4}$$

$$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ इकाई}$$

उदाहरण 4 दर्शाइए कि P (–2, 3, 5), Q (1, 2, 3) और R (7, 0, –1) संरेख हैं।

हल हम जानते हैं कि संरेख बिंदु, एक ही रेखा पर स्थित होते हैं।

यहाँ $PQ = \sqrt{(1+2)^2 + (2-3)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$QR = \sqrt{(7-1)^2 + (0-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

और $PR = \sqrt{(7+2)^2 + (0-3)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{81+9+36} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$

इस प्रकार PQ + QR = PR

अत: बिंदु P, Q और R संरेख हैं।

उदाहरण 5 क्या बिंदु A (3, 6, 9), B (10, 20, 30) और C (25, – 41, 5) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं?

हल दूरी-सूत्र से हमें प्राप्त होता है कि

$$AB^2 = (10-3)^2 + (20-6)^2 + (30-9)^2$$
$$= 49 + 196 + 441 = 686$$
$$BC^2 = (25-10)^2 + (-41-20)^2 + (5-30)^2$$
$$= 225 + 3721 + 625 = 4571$$
$$CA^2 = (3-25)^2 + (6+41)^2 + (9-5)^2$$
$$= 484 + 2209 + 16 = 2709$$

हम पाते हैं कि $CA^2 + AB^2 \neq BC^2$

अत: ΔABC एक समकोण त्रिभुज नहीं है।

उदाहरण 6 दो बिंदुओं A तथा B के निर्देशांक क्रमश: (3, 4, 5) और (–1, 3, –7) हैं। गतिशील बिंदु P के पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए, जबकि $PA^2 + PB^2 = 2k^2$.

हल माना गतिशील बिंदु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

अब $PA^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2$

$PB^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2$

दिए गए प्रतिबन्ध के अनुसार, $PA^2 + PB^2 = 2k^2$, हमें प्राप्त होता है:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 + (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2 = 2k^2$$

या $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 14y + 4z = 2k^2 - 109.$

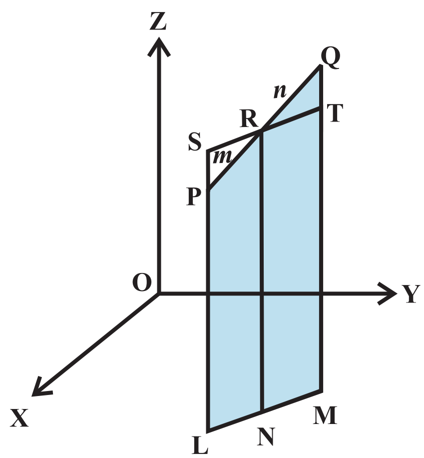
प्रश्नावली 12.2

1. निम्नलिखित बिंदु-युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए:
   (i) (2, 3, 5) और (4, 3, 1) (ii) (–3, 7, 2) और (2, 4, –1)
   (iii) (–1, 3, – 4) और (1, –3, 4) (iv) (2, –1, 3) और (–2, 1, 3)
2. दर्शाइए कि बिंदु (–2, 3, 5) (1, 2, 3) और (7, 0, –1) संरेख हैं।
3. निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए:
   (i) (0, 7, –10), (1, 6, – 6) और (4, 9, – 6) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।
   (ii) (0, 7, 10), (–1, 6, 6) और (– 4, 9, 6) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।
   (iii) (–1, 2, 1), (1, –2, 5), (4, –7, 8) और (2, –3, 4) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।
4. ऐसे बिंदुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु (1, 2, 3) और (3, 2, –1) से समदूरस्थ हैं।
5. बिंदुओं P से बने समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी बिंदुओं A (4, 0, 0) और B (–4, 0, 0) से दूरियों का योगफल 10 है।

12.5 विभाजन सूत्र (Section Formula)

स्मरण कीजिए द्विविमीय ज्यामिति में हमने सीखा है कि किस प्रकार समकोणिक कार्तीय निकाय में एक रेखा खंड को दिए अनुपात में अंत: विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात करते हैं। अब हम इस संकल्पना का विस्तार त्रिविमीय ज्यामिति के लिए करते हैं।

मान लीजिए अंतरिक्ष में दो बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ व $Q(x_2, y_2, z_2)$ हैं। माना $R(x, y, z)$ रेखा खंड PQ को $m : n$ अनुपात में अंत: विभाजित करता है। XY-तल पर PL, QM और RN लंब खींचिए। स्पष्टत: PL || QM || RN हैं तथा इन तीन लंबों के पाद XY–तल में स्थित हैं बिंदु L, M और N उस रेखा पर स्थित हैं जो उस तल और XY–तल के प्रतिच्छेदन से बनती है। बिंदु R से रेखा LM के समांतर रेखा ST खींचिए। ST रेखा खींचे गए लंब के तल में स्थित है तथा रेखा LP (विस्तारित) को S और MQ को T पर प्रतिच्छेदित करती है। जैसा आकृति 12.5 में प्रदर्शित है।



आकृति 12.5

स्पष्टत: चर्तुभुज LNRS और NMTR समांतर चर्तुभुज हैं। त्रिभुजों PSR और QTR स्पष्टत: समरूप हैं। इसलिए

$$\frac{m}{n} = \frac{PR}{QR} = \frac{SP}{QT} = \frac{SL - PL}{QM - TM} = \frac{NR - PL}{QM - NR} = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$$

इस प्रकार $$z = \frac{mz_2 + nz_1}{m + n}$$

ठीक इसी प्रकार XZ-तल और YZ-तल पर लंब खींचने पर हमें प्राप्त होता है,

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \text{ और } x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

अत: बिंदु R जो बिंदु P (x_1, y_1, z_1) और Q (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाले रेखा खंड को $m : n$ के अनुपात में अंत: विभाजित करता है, के निर्देशांक हैं,

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$$

यदि बिंदु R, रेखा खंड PQ को $m : n$ अनुपात में बाह्य विभाजित करता हो तो इसके निर्देशांक उपर्युक्त सूत्र में n को $-n$ से विस्थापित करके प्राप्त किए जाते हैं। इस प्रकार R के निर्देशांक होंगें,

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}\right)$$

स्थिति 1 मध्य-बिंदु के निर्देशांक यदि R, रेखाखंड PQ का मध्य-बिंदु है तो $m : n = 1:1$ रखने पर

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ और } z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

ये P (x_1, y_1, z_1) और Q (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाली रेखा खंड के मध्य-बिंदु के निर्देशांक हैं।

स्थिति 2 रेखा खंड PQ को $k : 1$ के अनुपात में अंत: विभाजित करने वाले बिंदु R के निर्देशांक $k = \frac{m}{n}$ रखने पर प्राप्त किए जा सकते हैं:

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{1+k}, \frac{ky_2 + y_1}{1+k}, \frac{kz_2 + z_1}{1+k}\right)$$

यह परिणाम प्राय: दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा पर व्यापक बिंदु संबंधी प्रश्नों के हल करने में प्रयुक्त होता है।

उदाहरण 7 बिंदुओं (1, -2, 3) और (3, 4, -5) को मिलाने से बने रेखा खंड को अनुपात 2:3 में (i) अंत: (ii) बाह्य विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल (i) मान लीजिए P (x, y, z), A (1, –2, 3) और B(3, 4, –5) को मिलाने वाले रेखा खंड को अंत: 2:3 में विभक्त करता है।

इसलिए, $x = \dfrac{2(3)+3(1)}{2+3} = \dfrac{9}{5}$, $y = \dfrac{2(4)+3(-2)}{2+3} = \dfrac{2}{5}$, और $z = \dfrac{2(-5)+3(3)}{2+3} = \dfrac{-1}{5}$

अतः अभीष्ट बिंदु $\left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{-1}{5}\right)$ है।

(ii) मान लीजिए P (x, y, z), A (1, –2, 3) और B(3, 4, –5) को मिलाने वाले रेखा खंड को बाह्य अनुपात 2 : 3 में बाह्य विभक्त करता है।

इसलिए, $x = \dfrac{2(3)+(-3)(1)}{2+(-3)} = -3$, $y = \dfrac{2(4)+(-3)(-2)}{2+(-3)} = -14$

और $$z = \frac{2(-5)+(-3)(3)}{2+(-3)} = 19$$

अतः अभीष्ट बिंदु (–3, –14, 19). है।

उदाहरण 8 विभाजन सूत्र का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि बिंदु (-4, 6, 10), (2, 4, 6) और (14, 0, –2) संरेख हैं।

हल मान लीजिए A (– 4, 6, 10), B (2, 4, 6) और C(14, 0, – 2) दिए गए बिंदु हैं। मान लीजिए बिंदु P, AB को $k : 1$ में विभाजित करता है। तो P के निर्देशांक हैं:

$$\frac{2k-4}{k+1}, \frac{4k+6}{k+1}, \frac{6k+10}{k+1}$$

आइये अब हम जाँच करें कि k के किसी मान के लिए बिंदु P, बिंदु C के संपाती हैं।

$\dfrac{2k-4}{k+1} = 14$ रखने पर प्राप्त होता है $k = -\dfrac{3}{2}$

जब $k = -\dfrac{3}{2}$ हो तो $\dfrac{4k+6}{k+1} = \dfrac{4(-\frac{3}{2})+6}{-\frac{3}{2}+1} = 0$

और $$\frac{6k+10}{k+1} = \frac{6(-\frac{3}{2})+10}{-\frac{3}{2}+1} = -2$$

इसलिए C (14, 0, –2) वह बिंदु है जो AB को 3 : 2 अनुपात में बाह्य विभक्त करता है और वही P है। अतः A, B व C संरेख है।

उदाहरण 9 त्रिभुज जिसके शीर्ष (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) तथा (x_3, y_3, z_3) हैं। इसके केंद्रक (Centroid) के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है जिसके शीर्ष A, B, C के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) तथा (x_3, y_3, z_3), हैं।

मान लीजिए BC का मध्य-बिंदु D है। इसलिए D के निदेशांक हैं:

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$$

माना त्रिभुज का केंद्रक G है जो मध्यिका AD को अंत 2 : 1 में विभाजन करता है। इसलिए G के निर्देशांक हैं:

$$\left(\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+x_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+y_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)+z_1}{2+1}\right)$$

या
$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

उदाहरण 10 बिंदुओं (4, 8, 10) और (6, 10, –8) को मिलाने वाले रेखा खंड, YZ-तल द्वारा जिस अनुपात में विभक्त होता है, उसे ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए YZ-तल बिंदु P(x, y, z) पर, A (4, 8, 10) और B (6, 10, –8) को मिलाने वाला रेखा खंड को k :1 में विभक्त करता है। तो बिंदु P के निर्देशांक हैं;

$$\left(\frac{4+6k}{k+1}, \frac{8+10k}{k+1}, \frac{10-8k}{k+1}\right)$$

क्योंकि P, YZ-तल पर स्थित है इसलिए इसका x-निर्देशांक शून्य है।

अतः $\quad \dfrac{4+6k}{k+1}=0$

या $\quad k=-\dfrac{2}{3}$

इसलिए YZ-तल AB को 2 : 3 के अनुपात में बाह्य विभाजित करता है।

प्रश्नावली 12.3

1. बिंदुओं $(-2, 3, 5)$ और $(1, -4, 6)$ को मिलाने से बने रेखा खंड को अनुपात (i) 2:3 में अंतः (ii) 2:3 में बाह्यतः विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

2. दिया गया है कि बिंदु $P(3, 2, -4), Q(5, 4, -6)$ और $R(9, 8, -10)$ संरेख हैं। वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें Q, PR को विभाजित करता है।

3. बिंदुओं $(-2, 4, 7)$ और $(3, -5, 8)$ को मिलाने वाली रेखा खंड, YZ-तल द्वारा जिस अनुपात में विभक्त होता है, उसे ज्ञात कीजिए।

4. विभाजन सूत्र का प्रयोग करके दिखाइए कि बिंदु $A(2, -3, 4), B(-1, 2, 1)$ तथा $C\left(0, \frac{1}{3}, 2\right)$ संरेख हैं।

5. $P(4, 2, -6)$ और $Q(10, -16, 6)$ के मिलाने वाली रेखा खंड PQ को सम त्रि-भाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

विविध उदाहरण

उदाहरण 11 दर्शाइए कि बिंदु $A(1, 2, 3), B(-1, -2, -1), C(2, 3, 2)$ और $D(4, 7, 6)$ एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं परंतु यह एक आयत नहीं है।

हल यह दर्शाने के लिए कि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, हमें सम्मुख भुजाओं को समान दिखाने की आवश्यकता है।

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$BC = \sqrt{(2+1)^2+(3+2)^2+(2+1)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

$$CD = \sqrt{(4-2)^2+(7-3)^2+(6-2)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$DA = \sqrt{(1-4)^2+(2-7)^2+(3-6)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

क्योंकि $AB = CD$ और $BC = AD$, इसलिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

अब यह सिद्ध करने के लिए कि ABCD आयत नहीं है, हमें दिखाना है कि इसके विकर्ण AC और BD समान नहीं हैं, हम पाते हैं :

$$AC = \sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$BD = \sqrt{(4+1)^2+(7+2)^2+(6+1)^2}=\sqrt{25+81+49}=\sqrt{155}\,.$$

क्योंकि $AC \neq BD$ । अतः ABCD एक आयत नहीं है।

टिप्पणी विकर्ण AC तथा BD परस्पर समद्विभाजित करते हैं, के गुण का प्रयोग करके भी ABCD को समांतर चतुर्भुज सिद्ध किया जा सकता है।

उदाहरण 12 बिंदु P से बने समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार चलता है कि उसकी बिंदुओं A(3, 4, –5) व B(–2, 1, 4) से दूरी समान है।

हल कोई बिंदु P (x, y, z) इस प्रकार है कि PA = PB

अतः $$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2}$$

या $$(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2 = (x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2$$

या $$10x+6y-18z-29=0.$$

उदाहरण 13 एक त्रिभुज ABC का केंद्रक (1, 1, 1) है। यदि A और B के निर्देशांक क्रमशः (3, –5, 7) व (–1, 7, –6) हैं। बिंदु C के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल माना C के निर्देशांक (x, y, z) है और केंद्रक G के निर्देशांक (1, 1, 1) दिए हैं।

इसलिए $$\frac{x+3-1}{3}=1, \text{ या } x=1$$

$$\frac{y-5+7}{3}=1, \text{ या } y=1$$

$$\frac{z+7-6}{3}=1, \text{ या } z=2.$$

अतः C के निर्देशांक (1, 1, 2) हैं।

अध्याय 12 पर विविध प्रश्नावली

1. समांतर चतुर्भुज के तीन शीर्ष $A(3, -1, 2)$ $B(1, 2, -4)$ व $C(-1, 1, 2)$ है। चौथे शीर्ष D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

2. एक त्रिभुज ABC के शीर्षों के निर्देशांक क्रमशः $A(0, 0, 6)$ $B(0, 4, 0)$ तथा $C(6, 0, 0)$ हैं। त्रिभुज की माध्यिकाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।

3. यदि त्रिभुज PQR का केंद्रक मूल बिंदु है और शीर्ष $P(2a, 2, 6)$, $Q(-4, 3b-10)$ और $R(8, 14, 2c)$ हैं तो a, b और c का मान ज्ञात कीजिए।

4. y-अक्ष पर उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसकी बिंदु $P(3, -2, 5)$ से दूरी $5\sqrt{2}$ है।

5. $P(2, -3, 4)$ और $Q(8, 0, 10)$ को मिलाने वाली रेखाखंड पर स्थित एक बिंदु R का x-निर्देशांक 4 है। बिंदु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(**संकेत** मान लीजिए R, PQ को $k : 1$ में विभाजित करता है। बिंदु R के निर्देशांक $\left(\frac{8k+2}{k+1}, \frac{-3}{k+1}, \frac{10k+4}{k+1}\right)$ हैं।)

6. यदि बिंदु A और B क्रमशः $(3, 4, 5)$ तथा $(-1, 3, -7)$ हैं। चर बिंदु P द्वारा निर्मित समुच्चय से संबधित समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ $PA^2 + PB^2 = k^2$ जहाँ k अचर है।

सारांश

- त्रिविमीय ज्यामिति के समकोणिक कार्तीय निर्देशांक निकाय में निर्देशांक्ष तीन परस्पर लंबवत् रेखाएँ होती हैं।
- निर्देशांक्षों के युग्म, तीन तल निर्धारित करते हैं जिन्हें निर्देशांक्ष तल XY-तल, YZ-तल व **ZX-तल** कहते हैं।
- तीन निर्देशांक्ष तल अंतरिक्ष को आठ भागों में बाँटते हैं जिन्हें **अष्टांश** कहते हैं।
- त्रिविमीय ज्यामिति में किसी बिंदु P के निर्देशांकों को सदैव एक त्रिदिक (x, y, z) के रूप में लिखा जाता है। यहाँ x, YZ-तल से, y, ZX तल से व z, XY तल से दूरी है।
- (i) x-अक्ष पर किसी बिंदु के निर्देशांक $(x, 0, 0)$ हैं।

  (ii) y-अक्ष पर किसी बिंदु के निर्देशांक $(0, y, 0)$ हैं।

  (iii) z-अक्ष पर किसी बिंदु के निर्देशांक $(0, 0, z)$ हैं।

- दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ के बीच का दूरी सूत्र है:

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाले रेखा खंड को $m : n$ अनुपात में अंत: और बाह्य: विभाजित करने वाले बिंदु R के निर्देशांक क्रमश:

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right) \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}\right)$$ हैं।

- दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाले रेखा खंड PQ के मध्य-बिंदु के निर्देशांक हैं:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

- एक त्रिभुज जिसके शीर्षों के निर्देशांक (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) और (x_3, y_3, z_3) हैं, के केंद्रक के निर्देशांक है:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + x_3}{3}\right).$$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

1637 ई॰ में वैश्लेषिक ज्यामिति के जनक Rene' Descartes (1596—1650 A.D.) ने तलीय ज्यामिति के क्षेत्र में उल्लेखनीय कार्य किया, इनके सहआविष्कारक Piarre Fermat (1601—1665 A.D.) और La Hire (1640—1718 A.D.) ने भी इस क्षेत्र में कार्य किया। यद्यपि इन लोगों के कार्यों में त्रिविमीय ज्यामिति के संबंध में सुझाव है, परंतु विशद विवेचन नहीं है। Descartes को त्रिविमीय अंतरिक्ष में बिंदु के निर्देशांको के विषय में जानकारी थी परंतु उन्होंने इसे विकसित नहीं किया।

1715 ई॰ में J. Bernoulli (1667—1748 A.D.) ने Leibnitz को लिखे पत्र में तीन निर्देशांक तलों का परिचय उल्लेखित है जिसे हम आज प्रयोग कर रहे हैं।

सर्वप्रथम सन 1700 ई॰ में फ्रेंच ऐकेडमी को प्रस्तुत किए गए Antoinne Parent (1666—1716 A.D.) के लेख में वैश्लेषिक ठोस ज्यामिति के विषय में विस्तृत विवेचन है।

L. Euler, (1707—1783 A.D.) ने सन् 1748 में प्रकाशित अपनी पुस्तक 'ज्यामिति का परिचय' के दूसरे खंड के परिशिष्ट के 5वें अध्याय में त्रिविमीय निर्देशांक ज्यामिति का सुव्यवस्थित एंव क्रमबद्ध वर्णन प्रस्तुत किया।

उन्नीसवीं शताब्दी के मध्य के बाद ही ज्यामिति का तीन से अधिक आयामों में विस्तार किया गया, जिसका सर्वोत्तम प्रयोग Einstein के सापेक्षवाद के सिद्धांत में स्थान-समय अनुक्रमण (Space-Time Continuum) में द्रष्टव्य है।

— ❖ —

अध्याय 13

सीमा और अवकलज (Limits and Derivatives)

❖ With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature – WHITEHEAD ❖

13.1 भूमिका (Introduction)

Sir Issac Newton (1642-1727 A.D.)

यह अध्याय कलन की एक भूमिका है। कलन गणित की वह शाखा है जिसमें मुख्यत: प्रांत में बिंदुओं के परिवर्तन से फलन के मान में होने वाले परिवर्तन का अध्ययन किया जाता है। पहले हम अवकलज का (वास्तविक रूप से परिभाषित किए बिना) सहजानुभूत बोध (Intuitive idea) कराते हैं। तद्पोरांत हम सीमा की सहज परिभाषा देंगे और सीमा के बीजगणित का कुछ अध्ययन करेंगे। इसके बाद हम अवकलज की परिभाषा करने के लिए वापस आएँगे और अवकलज के बीजगणित का कुछ अध्ययन करेंगे। हम कुछ विशेष मानक फलनों के अवकलज भी प्राप्त करेंगे।

13.2 अवकलजों का सहजानुभूत बोध (Intuitive Idea of Derivatives)

भौतिक प्रयोगों ने अनुमोदित किया है कि पिंड एक खड़ी/ऊँची चट्टान से गिरकर t सेकंडों में $4.9t^2$ मीटर दूरी तय करता है अर्थात् पिंड द्वारा मीटर में तय की गई दूरी (s) सेकंडों में मापे गए समय (t) के एक फलन के रूप में $s = 4.9t^2$ से दी गई है।

संलग्न सारणी 13.1 में एक खड़ी/ऊँची चट्टान से गिराए गए एक पिंड के सेकंडों में विभिन्न समय (t) पर मीटर में तय की दूरी (s) दी गई है।

सारणी 13.1

t	s
0	0
1	4.9
1.5	11.025
1.8	15.876
1.9	17.689
1.95	18.63225
2	19.6
2.05	20.59225
2.1	21.609
2.2	23.716
2.5	30.625
3	44.1
4	78.4

इन आँकड़ों से समय $t = 2$ सेकंड पर पिंड का वेग ज्ञात करना ही उद्देश्य है। इस समस्या तक पहुँचने के लिए $t = 2$ सेकंड पर समाप्त होने बाले विविध समयांतरालों पर माध्य वेग ज्ञात करना एक ढंग है और आशा करते हैं कि इससे $t = 2$ सेकंड पर वेग के बारे में कुछ प्रकाश पड़ेगा।

$t = t_1$ और $t = t_2$ के बीच माध्य वेग $t = t_1$ और $t = t_2$ सेकंडों के बीच तय की गई दूरी को $(t_2 - t_1)$ से भाग देने पर प्राप्त होता है। अत: प्रथम 2 सेकंडों में माध्य वेग

$$= \frac{t_1 = 0 \text{ और } t_2 = 2 \text{ के बीच तय की गई दूरी}}{\text{समयांतराल } (t_2 - t_1)}$$

$$= \frac{(19.6 - 0) \text{ मी}}{(2 - 0) \text{ से}} = 9.8 \text{ मी / से}$$

इसी प्रकार, $t = 1$ और $t = 2$ के बीच माध्य वेग

$$= \frac{(19.6 - 4.9)\text{ मी}}{(2-1)\text{ से}} = 14.7 \text{ मी / से}$$

इसी प्रकार विविध के लिए $t = t_1$ और $t = 2$ के बीच हम माध्य वेग का परिकलन करते हैं। निम्नलिखित सारणी 13.2, $t = t_1$ सेकंडों और $t = 2$ सेकंडों के बीच मीटर प्रति सेकंड में माध्य वेग (v) देती है।

सारणी 13.2

t_1	0	1	1.5	1.8	1.9	1.95	1.99
v	9.8	14.7	17.15	18.62	19.11	19.355	19.551

इस सारणी से हम अवलोकन करते हैं कि माध्य वेग धीरे-धीरे बढ़ रहा है। जैसे-जैसे $t = 2$ पर समाप्त होने वाले समयांतरालोंको लघुत्तर बनाते जाते हैं हम देखते हैं कि $t = 2$ पर हम वेग का एक बहुत अच्छा बोध कर पाते हैं। आशा करते हैं कि 1.99 सेकंड और 2 सेकंड के बीच कुछ अप्रत्याशित घटना न घटे तो हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $t = 2$ सेकंड पर माध्य वेग 19.55 मी/से से थोड़ा अधिक है।

इस निष्कर्ष को निम्नलिखित अभिकलनों के समुच्चय से किंचित बल मिलता है। $t = 2$ सेकंड से प्रारंभ करते हुए विविध समयांतरालों पर माध्य वेग का परिकलन कीजिए। पूर्व की भाँति $t = 2$ सेकंड और $t = t_2$ सेकंड के बीच माध्य वेग (v)

$$= \frac{2 \text{ सेकंड और } t_2 \text{ सेकंड के बीच तय की दूरी}}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{t_2 \text{ सेकंड में तय की दूरी} - 2 \text{ सेकंड में तय की दूरी}}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{t_2 \text{ सेकंडों में तय की दूरी} - 19.6}{t_2 - 2}$$

निम्नलिखित सारणी 13.3, $t = 2$ सेकंडों और t_2 सेकंड के बीच मीटर प्रति सेकंड में माध्य वेग v देती है:

सारणी 13.3

t_2	4	3	2.5	2.2	2.1	2.05	2.01
v	29.4	24.5	22.05	20.58	20.09	19.845	19.649

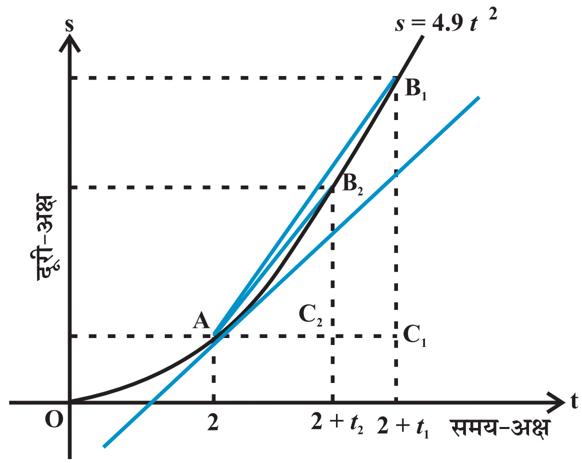
यहाँ पुन: हम ध्यान देते हैं कि यदि हम $t = 2$, से प्रारंभ करते हुए लघुत्तर समयान्तरालों को लेते जाते हैं तो हमें $t = 2$ पर वेग का अधिक अच्छा बोध होता है।

अभिकलनों के प्रथम समुच्चय में हमने $t = 2$ पर समाप्त होने वाले बढ़ते समयान्तरालों में माध्य वेग ज्ञात किया है और तब आशा की है कि $t = 2$ से किंचित पूर्व कुछ अप्रत्याशित घटना न घटे। अभिकलनों के द्वितीय समुच्चय में $t = 2$ पर अंत होने वाले घटते समयांतरालों में माध्य वेग ज्ञात किया है और तब आशा की है कि $t = 2$ के किंचित बाद कुछ अप्रत्याशित घटना न घटे। विशुद्ध रूप से भौतिकीय आधार पर माध्य वेग के ये दोनों अनुक्रम एक समान सीमा पर पहुँचने चाहिए हम निश्चित रूप से निष्कर्ष निकालते हैं कि $t = 2$ पर पिंड का वेग 19.551 मी/से और 19.649 मी/से के बीच है। तकनीकी रूप से हम कह सकते हैं कि $t = 2$ पर तात्कालिक वेग 19.551 मी/से. और 19.649 मी/से. के बीच है। जैसा कि भली प्रकार ज्ञात है कि वेग

दूरी के परिवर्तन की दर है। अत: हमने जो निष्पादित किया, वह निम्नलिखित है। "विविध क्षण पर दूरी में परिवर्तन की दर का अनुमान लगाया है। हम कहते हैं कि दूरी फलन $s = 4.9t^2$ का $t = 2$ पर अवकलज 19.551 और 19.649 के बीच में है।"

इस सीमा की प्रक्रिया की एक विकल्प विधि आकृति 13.1 में दर्शाई गई है। यह बीते समय (t) और चट्टान के शिखर से पिंड की दूरी (s) का आलेख है। जैसे-जैसे समयांतरालों के अनुक्रम $h_1, h_2, ...,$ की सीमा शून्य की ओर अग्रसर होती है वैसे ही माध्य वेगों के अग्रसर होने की वही सीमा होती है जो

$$\frac{C_1B_1}{AC_1}, \frac{C_2B_2}{AC_2}, \frac{C_3B_3}{AC_3}, ...$$



आकृति 13.1

के अनुपातों के अनुक्रम की होती है, जहाँ $C_1B_1 = s_1 - s_0$ वह दूरी है जो पिंड समयांतरालों $h_1 = AC_1$ में तय करता है, इत्यादि। आकृति 13.1 से यह निष्कर्ष निकलना सुनिश्चित है कि यह बाद की अनुक्रम वक्र के बिंदु A पर स्पर्शरेखा के ढाल की ओर अग्रसर होती है। दूसरे शब्दों में, $t = 2$ समय पर पिंड का तात्कालिक वेग वक्र $s = 4.9t^2$ के $t = 2$ पर स्पर्शी के ढाल के समान है।

13.3 सीमाएँ (Limits)

उपर्युक्त विवेचन इस तथ्य की ओर स्पष्टतया निर्दिष्ट करता है कि हमें सीमा की प्रक्रिया और अधिक स्पष्ट रूप से समझने की आवश्यकता है। हम सीमा की संकल्पना से परिचित होने के लिए कुछ दृष्टांतों (illustrations) का अध्ययन करते हैं।

फलन $f(x) = x^2$ पर विचार कीजिए। अवलोकन कीजिए कि जैसे-जैसे x को शून्य के अधिक निकट मान देते हैं, $f(x)$ का मान भी 0 की ओर अग्रसर होता जाता है। (देखें आकृति 2.10 अध्याय 2) हम कहते है $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (इसे $f(x)$ की सीमा शून्य है, जब x शून्य की ओर अग्रसर होता है, पढ़ा जाता है) $f(x)$ की सीमा, जब x शून्य की ओर अग्रसर होता है, को ऐसे समझा जाए जैसे $x = 0$ पर $f(x)$ का मान होना चाहिए।

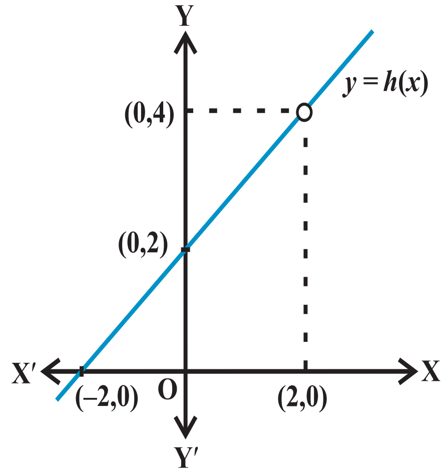
व्यापक रूप से जब $x \to a, f(x) \to l$, तब l को फलन $f(x)$ की सीमा कहा जाता है और इसे इस प्रकार लिखा जाता है $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

फलन $g(x) = |x|, x \neq 0$ पर विचार कीजिए। ध्यान दीजिए कि $g(0)$ परिभाषित नहीं है। x के 0 के अत्यधिक निकट मानों के लिए $g(x)$ के मान का परिकलन करने के लिए हम देखते हैं कि $g(x)$ का मान 0 की ओर अग्रसर करता है। इसलिए $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. $x \neq 0$ के लिए $y = |x|$ के आलेख से यह सहजता से स्पष्ट होता है। (देखें आकृति 2.13 अध्याय 2)

निम्नलिखित फलन पर विचार कीजिए: $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2$.

x के 2 के अत्यधिक निकट मानों (लेकिन 2 नहीं) के लिए $h(x)$ के मान का परिकलन कीजिए। आप स्वयं को स्वीकार कराइए कि सभी मान 4 के निकट हैं। यहाँ (आकृति 13.2) में दिए फलन $y = h(x)$ के आलेख पर विचार करने से इसको किंचित बल मिलता है।

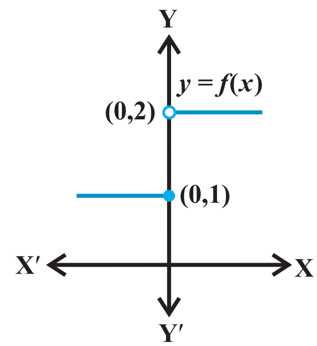
इन सभी दृष्टांतों से एक दिए मान $x = a$ पर फलन के जो मान ग्रहण करने चाहिए वे वास्तव में इस पर आधारित नहीं हैं कि x कैसे a की ओर अग्रसर होता है। ध्यान दीजिए कि x के संख्या a की ओर अग्रसर होने के लिए या तो बाईं ओर या दाईं ओर है, अर्थात् x के निकट सभी मान या तो a से कम हो सकते हैं या a से अधिक हो सकते हैं। इससे स्वाभाविक रूप से दो सीमाएँ – बाएँ पक्ष की सीमा और दाएँ पक्ष की सीमा प्रेरित होती है। फलन f के दाएँ पक्ष की सीमा $f(x)$ का वह मान है जो $f(x)$ के मान से आदेशित होता है जब x, a के दाईं ओर अग्रसर होता है। इसी प्रकार बाएँ पक्ष की सीमा। इसके दृष्टांत के लिए, फलन पर विचार कीजिए



आकृति 13.2

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$

आकृति 13.3 में इस फलन का आलेख दर्शाया गया है यह स्पष्ट है कि 0 पर f का मान $x \le 0$ के लिए $f(x)$ के मान से पर निर्भर करता है जो कि 1 के समान है अर्थात् शून्य पर $f(x)$ के बाएँ पक्ष की सीमा $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ है। इसी प्रकार 0 पर f का मान $x > 0$ के लिए $f(x)$ के मान पर निर्भर करता है, 2 है अर्थात् 0 के दाएँ पक्ष की सीमा $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$ है। इस स्थिति में बाएँ और दाएँ पक्ष की सीमाएँ भिन्न-भिन्न हैं और अत: हम कह सकते हैं कि जब x शून्य की ओर अग्रसर होता है तब $f(x)$ की सीमा अस्तित्वहीन है। (भले ही फलन 0 पर परिभाषित है।)



आकृति 13.3

सारांश

हम कहते हैं कि $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, $x = a$ पर $f(x)$ का अपेक्षित (expected) मान हैं, जिसने x के बाईं ओर निकट मानों के लिए $f(x)$ को मान दिए हैं। इस मान को a पर $f(x)$ की बाएँ **पक्ष की सीमा** कहते हैं।

हम कहते हैं कि $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $x = a$ पर $f(x)$ का अपेक्षित मान है जिसमें x के a के दाईं ओर के निकट मानों के लिए $f(x)$ के मान दिए हैं। इस मान को a पर $f(x)$ की दाएँ पक्ष की सीमा कहते हैं।

यदि दाएँ और बाएँ पक्ष की सीमाएँ संपाती हों तो हम इस उभयनिष्ठ मान को $x = a$ पर $f(x)$ की **सीमा** कहते हैं और इसे $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ से निरूपित करते हैं।

यदि दाएँ और बाएँ पक्ष की सीमाएँ संपाती नहीं हों तो यह कहा जाता है कि $x = a$ पर $f(x)$ की सीमा अस्तित्वहीन है।

दृष्टांत 1 (Illustration 1) फलन $f(x) = x + 10$ पर विचार कीजिए। हम $x = 5$ पर फलन की सीमा ज्ञात करना चाहेंगे। आइए, हम 5 के अत्यंत निकट x के मानों के लिए f के मान का परिकलन करें। 5 के अत्यंत निकट बाईं ओर कुछ बिंदु 4.9, 4.95, 4.994, 4.995... इत्यादि हैं। इन बिंदुओं पर $f(x)$ के मान नीचे सारणीबद्ध हैं। इसी प्रकार, 5 के अत्यंत निकट और दाईं ओर वास्तविक संख्याएँ 5.001, 5.01, 5.1 भी हैं। इन बिंदुओं पर भी फलन के मान सारणी 13.4 में दिए हैं।

सारणी 13.4

x	4.9	4.95	4.99	4.995	5.001	5.01	5.1
$f(x)$	14.9	14.95	14.99	14.995	15.001	15.01	15.1

सारणी 13.4 से हम निगमित करते हैं कि $f(x)$ का मान 14.995 से बड़ा और 15.001 से छोटा है, यह कल्पना करते हुए कि $x = 4.995$ और 5.001 के बीच कुछ अप्रत्याशित घटना घटित न हो। यह कल्पना करना तर्कसंगत है कि 5 के बाईं ओर की संख्याओं के लिए $x = 5$ पर $f(x)$ का मान 15 है अर्थात् $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 15$

इसी प्रकार, जब x, 5 के दाईं ओर अग्रसर होता है, f का मान 15 होना चाहिए अर्थात्

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = 15$$

अत: यह संभाव्य है कि f के बाएँ पक्ष की सीमा और दाएँ पक्ष की सीमा, दोनों 15 के बराबर हैं। इस प्रकार

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5} f(x) = 15$$

सीमा 15 के बराबर होने के बारे में यह निष्कर्ष फलन के आलेख जो आकृति 2.9(ii) अध्याय 2 में दिया है, को देखकर किंचित बल देता है। इस आकृति में हम ध्यान देते हैं कि जैसे-जैसे x, 5 के या तो दाईं ओर या बाईं ओर अग्रसर हो, फलन $f(x) = x + 10$ का आलेख बिंदु (5, 15) की ओर अग्रसर होता जाता हैं। हम देखते हैं कि $x = 5$ पर भी फलन का मान 15 के बराबर होता है।

दृष्टांत 2 फलन $f(x) = x^3$ पर विचार कीजिए। आइए हम $x = 1$ पर इस फलन की सीमा ज्ञात करने का प्रयास करें। पूर्ववर्ती स्थिति की तरह बढ़ते हुए हम x के 1 के निकट मानों के लिए $f(x)$ के मानों को सारणीबद्ध करते हैं। इसे सारणी 13.5 में दिया गया है:

सारणी 13.5

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	0.729	0.970299	0.997002999	1.003003001	1.030301	1.331

इस सारणी से हम निगमन करते हैं कि $x = 1$ पर f का मान 0.997002999 से अधिक और 1.003003001 से कम है, यह कल्पना करते हुए कि $x = 0.999$ और 1.001. के बीच कुछ अप्रत्याशित घटना घटित न हो। यह मानना तर्कसंगत है कि $x = 1$ का मान 1 के बाईं ओर की संख्याओं पर निर्भर करता है अर्थात्

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1.$$

इसी प्रकार, जब x, 1 के दाईं ओर अग्रसर होता है, तो f का मान 1 होना चाहिए अर्थात्

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1.$$

अत:, यह संभाव्य है कि बाएँ पक्ष की सीमा और दाएँ पक्ष की सीमा दोनों 1 के बराबर हों। इस प्रकार

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 1.$$

सीमा 1 के बराबर होने का यह निष्कर्ष फलन के आलेख जो आकृति 2.11, अध्याय 2 में दिया है, को देखकर किंचित बल देता है। इस आकृति में हम ध्यान देते हैं कि जैसे-जैसे x, 1 के या तो दाईं ओर या बाईं ओर अग्रसर हो, फलन $f(x) = x^3$ का आलेख बिंदु (1, 1) की ओर अग्रसर होता जाता है।

हम पुनः अवलोकन करते हैं कि $x = 1$ पर फलन का मान भी 1 के बराबर है।

दृष्टांत 3 फलन $f(x) = 3x$ पर विचार कीजिए। आइए, $x = 2$ पर इस फलन की सीमा ज्ञात करने का प्रयास करें। निम्नलिखित सारणी 13.6 स्वतः स्पष्ट करती है।

सारणी 13.6

x	1.9	1.95	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	5.7	5.85	5.97	5.997	6.003	6.03	6.3

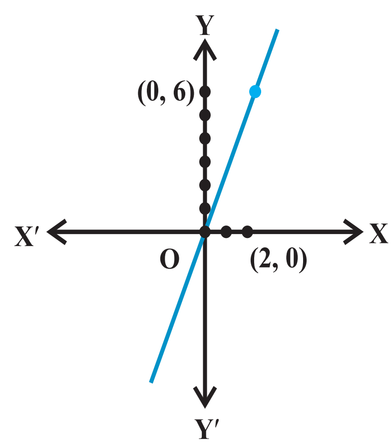
पूर्ववत हम अवलोकन करते हैं कि x या तो बाएँ या दाएँ 2 की ओर अग्रसर होता है, $f(x)$ का मान 6 की ओर अग्रसर होता हुआ प्रतीत होता है। हम इसे, इस प्रकार अभिलेखित कर सकते हैं कि

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2} f(x) = 6$$

आकृति 13.4 में प्रदर्शित इसका आलेख इस तथ्य को बल देता है।

यहाँ पुनः हम ध्यान देते हैं कि $x = 2$ पर फलन का मान $x = 2$ पर सीमा के संपाती है।

दृष्टांत 4 अचर फलन $f(x) = 3$ पर विचार कीजिए। आइए हम $x = 2$ पर इसकी सीमा ज्ञात करने का प्रयास करें। यह फलन अचर फलन होने के कारण सर्वत्र एक ही मान (इस स्थिति में 3) प्राप्त करता है अर्थात् 2 के अत्यंत निकट बिंदुओं के लिए इसका मान 3 है। अतः $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2} f(x) = 3$



आकृति 13.4

$f(x) = 3$ का आलेख हर हालत में (0, 3) से जाने वाली x-अक्ष के समांतर रेखा है और आकृति 2.9, अध्याय 2 में दर्शाया गया है। इससे यह भी स्पष्ट है कि अभीष्ट सीमा 3 है तथ्यतः यह सरलता से अवलोकित होता है कि किसी वास्तविक संख्या a के लिए

$$\lim_{x\to a} f(x) = 3$$

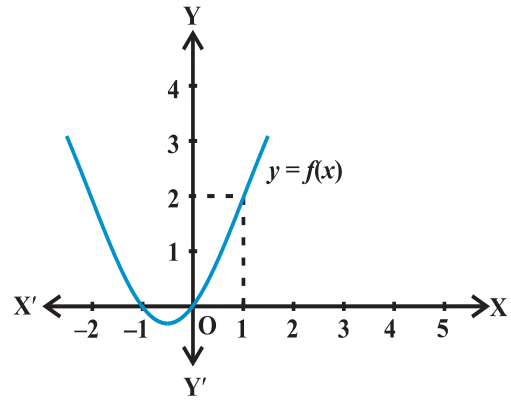
दृष्टांत 5 फलन $f(x) = x^2 + x$ पर विचार कीजिए। हम $\lim_{x\to1} f(x)$ ज्ञात करना चाहते हैं। हम $x = 1$ के निकट $f(x)$ के मान सारणी 13.7 में सारणीबद्ध करते हैं:

सारणी 13.7

x	0.9	0.99	0.999	1.01	1.1	1.2
$f(x)$	1.71	1.9701	1.997001	2.0301	2.31	2.64

इससे यह तर्कसंगत निगमित होता है कि

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 2$.



आकृति 13.5

आकृति 13.5 में दर्शाए $f(x) = x^2 + x$ के आलेख से यह स्पष्ट है कि जैसे-जैसे x, 1 की ओर अग्रसर होता है, आलेख (1, 2) की ओर अग्रसर होता जाता है।

अत: हम पुन: प्रेक्षण करते हैं कि

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

अब, निम्नलिखित तीन तथ्यों को आप स्वयं को स्वीकार कराएँ

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1, \quad \lim_{x \to 1} x = 1 \text{ और } \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

तब $\qquad \lim_{x \to 1} x^2 + \lim_{x \to 1} x = 1 + 1 = 2 = \lim_{x \to 1} \left[x^2 + x\right].$

तथा $\qquad \lim_{x \to 1} x . \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1.2 = 2 = \lim_{x \to 1} \left[x(x+1)\right] = \lim_{x \to 1} \left[x^2 + x\right].$

दृष्टांत 6 फलन $f(x) = \sin x$ पर विचार कीजिए। हमारी $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x$ में रुचि है जहाँ कोण रेडियन में मापा गया है। यहाँ, हमने $\frac{\pi}{2}$ के निकट $f(x)$ के मानों (निकटतम) को सारणीबद्ध किया है।

सारणी 13.8

x	$\frac{\pi}{2} - 0.1$	$\frac{\pi}{2} - 0.01$	$\frac{\pi}{2} + 0.01$	$\frac{\pi}{2} + 0.1$
$f(x)$	0.9950	0.9999	0.9999	0.9950

इससे हम निगमन कर सकते हैं कि $\quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$

इसके अतिरिक्त, यह $f(x) = \sin x$ के आलेख से पुष्ट होता है जो आकृति 3.8 अध्याय 3 में दिया है। इस स्थिति में भी हम देखते हैं कि $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$.

दृष्टांत 7 फलन $f(x) = x + \cos x$ पर विचार कीजिए। हम $\lim_{x \to 0} f(x)$ ज्ञात करना चाहते हैं।

यहाँ हमने 0 के निकट $f(x)$ के मान (निकटतम) सारणीबद्ध किए हैं: (सारणी 13.9).

सारणी 13.9

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.9850	0.98995	0.9989995	1.0009995	1.00995	1.0950

सारणी 13.9, से हम निगमन कर सकते हैं कि

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

इस स्थिति में भी हम प्रेक्षण करते हैं कि $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$.

अब, क्या आप स्वयं को स्वीकार करा सकते हैं कि

$\lim_{x\to 0}[x + \cos x] = \lim_{x\to 0} x + \lim_{x\to 0} \cos x$ वास्तव में सत्य है?

दृष्टांत 8 $x > 0$ के लिए, फलन $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ पर विचार कीजिए। हम $\lim_{x\to 0} f(x)$ ज्ञात करना चाहते हैं।

यहाँ, हम अवलोकन करते हैं कि फलन का प्रांत सभी धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं। अतः जब हम $f(x)$ के मान सारणीबद्ध करते हैं, x शून्य के बाईं ओर अग्रसर होता है, का कोई अर्थ नहीं है। नीचे हम 0 के निकट x के धनात्मक मानों के लिए फलन के मानों को सारणीबद्ध करते हैं (इस सारणी में n किसी धन पूर्णांक को निरूपित करता है।

नीचे दी गई सारणी 13.10 से, हम देखते हैं कि जब x, 0 की ओर अग्रसर होता है, $f(x)$ बड़ा और बड़ा होता जाता है। यहाँ इसका अर्थ है कि, $f(x)$ का मान किसी दी संख्या से भी बड़ा किया जा सकता है।

सारणी 13.10

x	1	0.1	0.01	10^{-n}
$f(x)$	1	100	10000	10^{2n}

गणितीय रूप से, हम कह सकते हैं $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

हम टिप्पणी भी करते हैं कि इस पाठ्यक्रम में हम इस प्रकार की सीमाओं की चर्चा नहीं करेंगे।

दृष्टांत 9 हम $\lim_{x\to 0} f(x)$, ज्ञात करना चाहते हैं, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x<0 \\ 0\quad, & x=0 \\ x+2, & x>0 \end{cases}$$

पहले की तरह हम 0 के निकट x के लिए $f(x)$ की सारणी बनाते हैं। प्रेक्षण करते हैं कि x के ऋणात्मक मानों के लिए हमें $x-2$ का मान निकालने की आवश्यकता है और x के धनात्मक मानों के लिए $x+2$ का मान निकालने की आवश्यकता होती है।

सारणी 13.11

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	– 2.1	– 2.01	– 2.001	2.001	2.01	2.1

सारणी 13.11 की प्रथम तीन प्रविष्टियों से, हम निगमन करते हैं कि फलन का मान –2 तक घट रहा है और

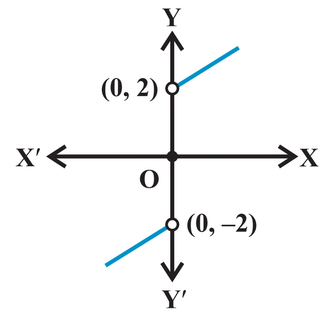
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2$$

सारणी की अंतिम तीन प्रविष्टियों से, हम निगमन करते हैं कि फलन का मान 2 तक बढ़ रहा है और अतः

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$$

क्योंकि 0 पर बाएँ और दाएँ पक्षों की सीमाएँ संपाती नहीं हैं, हम कहते हैं कि 0 पर फलन की सीमा अस्तित्वहीन है।

इस फलन का आलेख आकृति 13.6 में दिया है यहाँ, हम टिप्पणी करते हैं कि $x = 0$ पर फलन का मान पूर्णतः परिभाषित है और, वास्तव में, 0 के बराबर है, परंतु $x = 0$ पर फलन की सीमा परिभाषित भी नहीं है।



आकृति 13.6

दृष्टांत 10 एक अंतिम दृष्टांत के रूप में, हम $\lim_{x\to 1} f(x)$, ज्ञात करते हैं जबकि

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

सारणी 13.12

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1

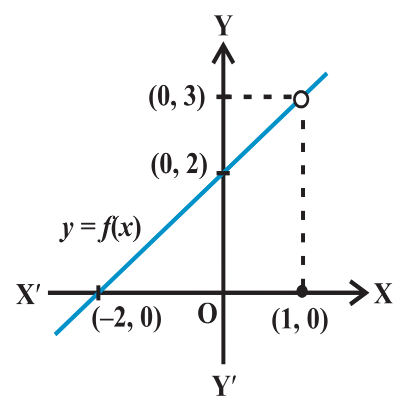
पहले की तरह, 1 के निकट x के लिए हम $f(x)$ के मानों को सारणीबद्ध करते हैं। 1 से कम x के लिए $f(x)$ में मानों से, यह प्रतीत होता है कि $x = 1$ पर फलन का मान 3 होना चाहिए अर्थात्

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$$

इसी प्रकार, 1 से बड़े x के लिए $f(x)$ के मानों से आदेशित $f(x)$ का मान 3 होना चाहिए, अर्थात्

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3.$$

परंतु तब बाएँ और दाएँ पक्षों की सीमाएँ संपाती हैं और अतः



आकृति 13.7

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 3.$$

आकृति 13.7 में फलन का आलेख सीमा के बारे में हमारे निगमन को बल देता है। यहाँ, हम ध्यान देते हैं कि व्यापक रूप से, एक दिए बिंदु पर फलन का मान और इसकी सीमा भिन्न-भिन्न हो सकते हैं (भले ही दोनों परिभाषित हों।)

13.3.1 ***सीमाओं का बीजगणित (Algebra of limits)*** उपर्युक्त दृष्टांतों से, हम अवलोकन कर चुके हैं कि सीमा प्रक्रिया योग, व्यवकलन, गुणा और भाग का पालन करती है जब तक कि विचाराधीन फलन और सीमाएँ सुपरिभाषित हैं। यह संयोग नहीं है। वास्तव में, हम इनको बिना उपपत्ति के प्रमेय के रूप में औपचारिक रूप देते हैं।

प्रमेय 1 मान लीजिए कि f और g दो फलन ऐसे हैं कि $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ और $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ दोनों का अस्तित्व है। तब

(i) दो फलनों के योग की सीमा फलनों की सीमाओं का योग होता है, अर्थात्

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

(ii) दो फलनों के अंतर की सीमा फलनों की सीमाओं का अंतर होता है, अर्थात्

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x).$$

(iii) दो फलनों के गुणन की सीमा फलनों की सीमाओं का गुणन होता है, अर्थात्

$$\lim_{x\to a}[f(x)\,.\,g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\ \lim_{x\to a} g(x).$$

(iv) दो फलनों के भागफल की सीमा फलनों की सीमाओं का भागफल होता है, (जबकि हर शून्येतर होता है), अर्थात्

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

टिप्पणी विशेष रूप से स्थिति (iii) की एक विशिष्ट स्थिति में जब $g(x)$ एक ऐसा अचर फलन है कि किसी वास्तविक संख्या λ के लिए $g(x) = \lambda$ हम पाते हैं

$$\lim_{x\to a}\left[(\lambda.f)(x)\right] = \lambda.\lim_{x\to a} f(x).$$

अगले दो अनुच्छेदों में, हम दृष्टांत देंगे कि इस प्रमेय को विशिष्ट प्रकार के फलनों की सीमाओं के मान प्राप्त करने में कैसे प्रयोग किया जाता है।

13.3.2 *बहुपदों और परिमेय फलनों की सीमाएँ (Limits of polynomials and rational functions)* एक फलन $f(x)$ बहुपदीय फलन कहलाता है, यदि $f(x)$ शून्य फलन है या यदि $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + . . . + a_nx^n$, जहाँ a_i ऐसी वास्तविक संख्याएँ हैं कि किसी प्राकृत संख्या n के लिए $a_n \neq 0$

हम जानते हैं कि $\lim\limits_{x\to a} x = a.$ अत:

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a}(x.x) = \lim_{x\to a} x.\lim_{x\to a} x = a.\,a = a^2$$

n पर आगमन का सरल अभ्यास हमको बताता है कि

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

अब, मान लीजिए $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ एक बहुपदीय फलन है। $a_0, a_1x, a_2x^2, ..., a_nx^n$ प्रत्येक को एक फलन जैसा विचारते हुए, हम पाते हैं कि

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n\right]$$

$$= \lim_{x\to a} a_0 + \lim_{x\to a} a_1x + \lim_{x\to a} a_2x^2 + ... + \lim_{x\to a} a_nx^n$$

$$= a_0 + a_1\lim_{x\to a} x + a_2\lim_{x\to a} x^2 + ... + a_n\lim_{x\to a} x^n$$

$$= a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + ... + a_n a^n$$

$$= f(a)$$

(सुनिश्चित करें कि आपने उपर्युक्त में प्रत्येक चरण का औचित्य समझ लिया है।)

एक फलन f एक परिमेय फलन कहलाता है यदि $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, जहाँ $g(x)$ और $h(x)$ ऐसे बहुपद हैं कि $h(x) \neq 0$. तो

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{g(a)}{h(a)}$$

यद्यपि, यदि $h(a) = 0$, दो स्थितियाँ हैं – (i) जब $g(a) \neq 0$ और (ii) जब $g(a) = 0$. पूर्व की स्थिति में हम कहते हैं कि सीमा का अस्तित्व नहीं है। बाद की स्थिति में हम

$g(x) = (x - a)^k g_1(x)$, जहाँ k, $g(x)$ में $(x - a)$ की महत्तम घात है। इसी प्रकार

$h(x) = (x - a)^l h_1(x)$ क्योंकि $h(a) = 0$. अब, यदि $k > l$, हम पाते हैं

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{\lim_{x \to a} (x-a)^k g_1(x)}{\lim_{x \to a} (x-a)^l h_1(x)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to a} (x-a)^{(k-l)} g_1(x)}{\lim_{x \to a} h_1(x)} = \frac{0.g_1(a)}{h_1(a)} = 0$$

यदि $k < l$, तो सीमा परिभाषित नहीं है।

उदाहरण 1 सीमाएँ ज्ञात कीजिए:

(i) $\lim_{x \to 1} \left[x^3 - x^2 + 1\right]$ (ii) $\lim_{x \to 3} \left[x(x+1)\right]$

(iii) $\lim_{x \to -1} \left[1 + x + x^2 + ... + x^{10}\right]$.

हल अभीष्ट सभी सीमाएँ कुछ बहुपदीय फलनों की सीमाएँ हैं। अतः सीमाएँ प्रदत्त बिंदुओं पर फलनों के मान हैं। हम पाते हैं

(i) $\lim_{x \to 1} [x^3 - x^2 + 1] = 1^3 - 1^2 + 1 = 1$

(ii) $\lim_{x \to 3} \left[x(x+1)\right] = 3(3+1) = 3(4) = 12$

(iii) $\lim_{x \to -1} \left[1 + x + x^2 + ... + x^{10}\right] = 1 + (-1) + (-1)^2 + ... + (-1)^{10}$

$$= 1 - 1 + 1 + ... + 1 = 1.$$

उदाहरण 2 सीमाएँ ज्ञात कीजिए:

(i) $\lim_{x \to 1} \left[\dfrac{x^2+1}{x+100} \right]$ (ii) $\lim_{x \to 2} \left[\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4} \right]$

(iii) $\lim_{x \to 2} \left[\dfrac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x} \right]$ (iv) $\lim_{x \to 2} \left[\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6} \right]$

(v) $\lim_{x \to 1} \left[\dfrac{x-2}{x^2-x} - \dfrac{1}{x^3-3x^2+2x} \right]$.

हल सभी विचाराधीन फलन परिमेय फलन हैं। अत:, हम पहले प्रदत्त बिंदुओं पर इन फलनों के मान प्राप्त करते हैं। यदि यह $\dfrac{0}{0}$, के रूप का है, हम गुणनखंडों, जो सीमा के $\dfrac{0}{0}$ का रूप होने का कारण है, को निरस्त करते हुए फलनों को पुन: लिखते हैं।

(i) हम पाते हैं $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2+1}{x+100} = \dfrac{1^2+1}{1+100} = \dfrac{2}{101}$

(ii) 2 पर फलन का मान प्राप्त करने पर हम इसे $\dfrac{0}{0}$ का रूप में पाते हैं। अत:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)}{(x+2)} \qquad \text{क्योंकि } x \neq 2$$

$$= \frac{2(2-2)}{2+2} = \frac{0}{4} = 0.$$

(iii) 2 पर फलन का मान प्राप्त करने पर, हम इसे $\dfrac{0}{0}$ के रूप में पाते हैं, अत:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)}{x(x-2)} = \frac{2+2}{2(2-2)} = \frac{4}{0}$$

जोकि परिभाषित नहीं है।

(iv) 2 पर फलन का मान प्राप्त करने पर, हम इसे $\dfrac{0}{0}$ के रूप में पाते है। अत:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2}{(x-3)} = \frac{(2)^2}{2-3} = \frac{4}{-1} = -4.$$

(v) पहले हम फलन को परिमेय फलन जैसा पुनः लिखते हैं।

$$\left[\frac{x-2}{x^2-x} - \frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right] = \left[\frac{x-2}{x(x-1)} - \frac{1}{x\left(x^2-3x+2\right)}\right]$$

$$= \left[\frac{x-2}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$= \left[\frac{x^2-4x+4-1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$= \frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

1 पर फलन का मान प्राप्त करने पर हम $\frac{0}{0}$ का रूप पाते हैं। अतः

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-2}{x^2-x} - \frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-3)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x(x-2)} = \frac{1-3}{1(1-2)} = 2.$$

हम टिप्पणी करते हैं कि उपर्युक्त मान प्राप्त करने में हमने पद $(x-1)$ को निरस्त किया क्योंकि $x \neq 1$.

एक महत्वपूर्ण सीमा का मान प्राप्त करना, जो कि आगे परिणामों में प्रयुक्त होगी, नीचे एक प्रमेय के रूप में प्रस्तुत है।

प्रमेय 2 किसी धन पूर्णांक n के लिए,

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}.$$

टिप्पणी उपर्युक्त प्रमेय में सीमा हेतु व्यंजक सत्य है जबकि n कोई परिमेय संख्या है और a धनात्मक है।

उपपत्ति $(x^n - a^n)$ को $(x - a)$, से भाग देने पर, हम देखते हैं कि

$$x^n - a^n = (x-a)\,(x^{n-1} + x^{n-2}\,a + x^{n-3}\,a^2 + \ldots + x\,a^{n-2} + a^{n-1})$$

इस प्रकार $$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim_{x\to a}(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + ... + x\, a^{n-2} + a^{n-1})$$

$$= a^{n-1} + a\, a^{n-2} +. . . + a^{n-2}\,(a)\, + a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} +...+ a^{n-1} + a^{n-1}\ (n \text{ पद})$$

$$= na^{n-1}$$

उदाहरण 3 मान ज्ञात कीजिए

(i) $\lim_{x\to 1}\frac{x^{15}-1}{x^{10}-1}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

हल (i) हमारे पास है

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{15}-1}{x^{10}-1} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^{15}-1}{x-1}\div\frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^{15}-1}{x-1}\right]\div\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= 15\,(1)^{14} \div 10(1)^9 \text{ (उपर्युक्त प्रमेय से)}$$

$$= 15 \div 10 = \frac{3}{2}$$

(ii) $y = 1 + x$, जिससे $y \to 1$ जैसे $x \to 0$. तब

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{y\to 1}\frac{\sqrt{y}-1}{y-1}$$

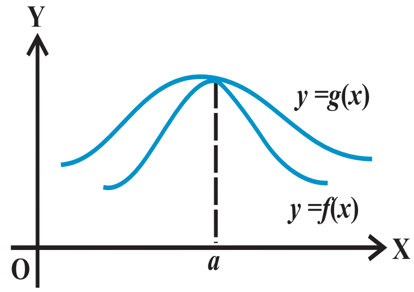
$$= \lim_{y\to 1}\frac{y^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}}{y-1}$$

$$= \frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2}-1} \text{ (उपर्युक्त टिप्पणी से) } = \frac{1}{2}$$

13.4. त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाएँ (Limits of Trigonometric Functions)

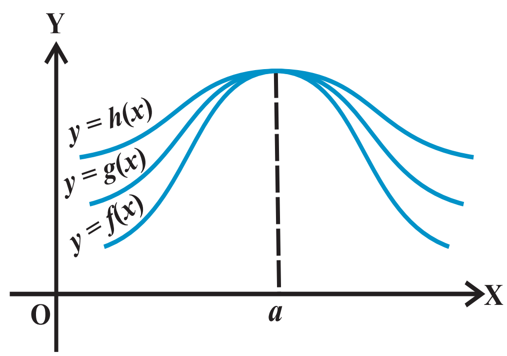
व्यापक रूप से, फलनों के बारे में निम्नलिखित तथ्य (प्रमेयों के रूप में कहे गए) कुछ त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाओं का परिकलन करने में सुलभ हो जाते हैं।

प्रमेय 3 मान लीजिए समान प्रांत वाले दो वास्तविक मानीय फलन f और g ऐसे हैं कि परिभाषा के प्रांत में सभी x के लिए $f(x) \le g(x)$ किसी a के लिए यदि $\lim_{x\to a} f(x)$ और $\lim_{x\to a} g(x)$ दोनों का अस्तित्व है तो $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$ इसे आकृति 13.8 में चित्र से स्पष्ट किया गया है।



आकृति 13.8

प्रमेय 4 सैंडविच प्रमेय (Sandwich Theorem) मान लीजिए f, g और h वास्तविक मानीय फलन ऐसे हैं कि परिभाषा के सर्वनिष्ठ प्रांतों के सभी x के लिए $f(x) \le g(x) \le h(x)$. किसी वास्तविक संख्या a के लिए यदि $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l = \lim\limits_{x \to a} h(x)$, तो $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$. इसे आकृति 13.9 में चित्र से स्पष्ट किया गया है।



आकृति 13.9

त्रिकोणमितीय फलनों से संबंधित निम्नलिखित महत्वपूर्ण असमिका की एक सुंदर ज्यामितीय उपपत्ति नीचे प्रस्तुत है:

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2} \text{ के लिए } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad (*)$$

उपपत्ति हम जानते हैं कि $\sin(-x) = -\sin x$ और $\cos(-x) = \cos x$. अत: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ के लिए असमिका को सिद्ध करने के लिए यह पर्याप्त है।

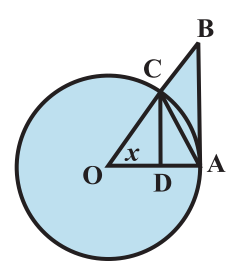
आकृति 13.10, में ऐसे इकाई वृत्त का केंद्र O है। कोण AOC, x रेडियन का है और $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ।

रेखाखंड BA और CD, OA के लंबवत हैं। इसके अतिरिक्त AC को मिलाया गया है। तब

ΔOAC का क्षेत्रफल < वृत्तखंड OAC क्षेत्रफल < ΔOAB का क्षेत्रफल

अर्थात् $\quad \frac{1}{2}\text{OA.CD} < \frac{x}{2\pi}.\pi.(\text{OA})^2 < \frac{1}{2}\text{OA.AB}$.

अर्थात् $\quad \text{CD} < x \,.\, \text{OA} < \text{AB}.$ Δ OCD में



आकृति 13.10

$\sin x = \frac{CD}{OA}$ (चूँकि OC = OA) और अत: CD = OA sin x. इसके अतिरिक्त

$\tan x = \frac{AB}{OA}$ और अत: AB = OA tan x. इस प्रकार

$$OA \sin x < OA\, x < OA. \tan x.$$

क्योंकि लंबाई OA धनात्मक है, हम पाते हैं

$$\sin x < x < \tan x.$$

क्योंकि $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x$ धनात्मक है और इस प्रकार $\sin x$, से सभी को भाग देने पर, हम पाते हैं

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ सभी का व्युत्क्रम करने पर, हम पाते हैं

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ उपपत्ति पूर्ण हुई।

प्रमेय 5 निम्नलिखित दो महत्वपूर्ण सीमाएँ हैं:

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (ii) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

उपपत्ति (i) (*) में असमिका (Inequality) के अनुसार फलन $\frac{\sin x}{x}$, फलन $\cos x$ और अचर फलन जिसका मान 1 हो जाता है, के बीच में स्थित है।

इसके अतिरिक्त क्योंकि $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$, हम देखते हैं कि प्रमेय के (i) की उपपत्ति सैंडविच प्रमेय से पूर्ण है।

(ii) को सिद्ध करने के लिए, हम त्रिकोणमिति सर्वसमिका $1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ का प्रयोग करते हैं, तब

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1.0 = 0$$

अवलोकन कीजिए कि हमने अस्पष्ट रूप से इस तथ्य का प्रयोग किया है कि $x \to 0$, $\frac{x}{2} \to 0$ के तुल्य है। इसको $y = \frac{x}{2}$ रखकर प्रमाणित किया जा सकता है।

उदाहरण 4 मान ज्ञात कीजिए: (i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x}$ (ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

हल (i) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin 4x}{4x} . \frac{2x}{\sin 2x} .2 \right]$$

$$= 2.\lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin 4x}{4x} \right] \div \left[\frac{\sin 2x}{2x} \right]$$

$$= 2. \lim_{4x \to 0} \left[\frac{\sin 4x}{4x} \right] \div \lim_{2x \to 0} \left[\frac{\sin 2x}{2x} \right]$$

$= 2.1.1 = 2$ (जब $x \to 0$, $4x \to 0$ तथा $2x \to 0$)

हमारे पास है (ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} . \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$

एक सामान्य नियम, जिसको सीमाओं का मान निकालते समय ध्यान में रखने की आवश्यकता है, निम्नलिखित है:

माना कि सीमा $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ का अस्तित्व है और हम इसका मान ज्ञात करना चाहते हैं। पहले हम $f(a)$ और $g(a)$ के मानों को जाँचें। यदि दोनों शून्य हैं, तो हम देखते हैं कि यदि हम उस गुणनखंड को प्राप्त कर सकते हैं जो पद समाप्त होने का कारण है, अर्थात् देखें यदि हम $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ लिख सकें जिससे $f_1(a) = 0$ और $f_2(a) \neq 0$। इसी प्रकार $g(x) = g_1(x) g_2(x)$, लिखते हैं जहाँ $g_1(a) = 0$ और $g_2(a) \neq 0$. $f(x)$ और $g(x)$ में से उभयनिष्ठ गुणनखंड (यदि संभव है) तो निरस्त कर देते हैं और

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$$, जहाँ $q(x) \neq 0$ लिखते हैं,

तब $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$$

प्रश्नावली 13.1

प्रश्न 1 से 22 तक निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए:

1. $\lim_{x \to 3} x + 3$ **2.** $\lim_{x \to \pi} \left(x - \frac{22}{7} \right)$ **3.** $\lim_{r \to 1} \pi r^2$

4. $\lim_{x \to 4} \frac{4x + 3}{x - 2}$ **5.** $\lim_{x \to -1} \frac{x^{10} + x^5 + 1}{x - 1}$ **6.** $\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^5 - 1}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$ **8.** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3}$ **9.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax + b}{cx + 1}$

10. $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{z^{\frac{1}{3}} - 1}{z^{\frac{1}{6}} - 1}$ **11.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a}, a + b + c \neq 0$

12. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x + 2}$ **13.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{bx}$ **14.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}, a, b \neq 0$

15. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$ **16.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{\pi - x}$ **17.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1}$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax + x\cos x}{b\sin x}$ **19.** $\lim\limits_{x\to 0} x\sec x$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx}, a, b, a + b \neq 0,$

21. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x)$ **22.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$

23. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ और $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 3(x+1), & x > 0 \end{cases}$

24. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ -x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$

25. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, का मान प्राप्त कीजिए, जहाँ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

26. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

27. $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$, ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = |x| - 5$

28. मान लीजिए $f(x) = \begin{cases} a + bx, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ b - ax, & x > 1 \end{cases}$

और यदि $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$ तो a और b के संभव मान क्या हैं?

29. मान लीजिए $a_1, a_2, \ldots, a_n$ अचर वास्तविक संख्याएँ है और एक फलन $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$ से परिभाषित है। $\lim_{x \to a_1} f(x)$ क्या है?

किसी $a \neq a_1, a_2, \ldots, a_n$, के लिए $\lim_{x \to a} f(x)$ का परिकलन कीजिए।

30. यदि
$$f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ |x| - 1, & x > 0 \end{cases}.$$

तो a के किन मानों के लिए $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व है?

31. यदि फलन $f(x)$, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = \pi$, को संतुष्ट करता है, तो $\lim_{x \to 1} f(x)$ का मान प्राप्त कीजिए।

32. किन पूर्णांकों m और n के लिए $\lim_{x \to 0} f(x)$ और $\lim_{x \to 1} f(x)$ दोनों का अस्तित्व है, यदि $f(x) = \begin{cases} mx^2 + n, & x < 0 \\ nx + m, & 0 \le x \le 1 \\ nx^3 + m, & x > 1 \end{cases}$

13.5 अवकलज (Derivatives)

हम अनुच्छेद 13.2, में देख चुके हैं कि विविध समयांतरालों पर पिंड की स्थिति को जानकर उस दर को ज्ञात करना संभव है जिससे पिंड की स्थिति परिवर्तित हो रही है। समय के विविध क्षणों पर एक निश्चित प्राचल (parameter) का जानना और उस दर को ज्ञात करने का प्रयास करना जिससे इसमें परिवर्तन हो रहा है, अत्यंत व्यापक रुचि का विषय है। वास्तविक जीवन की अनेक स्थितियाँ होती हैं जिनमें ऐसी प्रक्रिया कार्यान्वित करने की आवश्यकता होती है। उदाहरणत: एक टंकी के रख-रखाव करने वाले व्यक्ति के लिए समय के अनेक क्षणों पर पानी की गहराई जानकर यह जानना आवश्यक होता है कि टंकी कब छलकने लगेगी, विविध समयों पर राकेट की ऊँचाई जानकर राकेट वैज्ञानिकों को उस यथार्थ वेग के परिकलन की आवश्यकता होती है जिससे उपग्रह का राकेट से प्रक्षेपण आवश्यक हो। वित्तीय संस्थानों को किसी विशेष स्टाक के वर्तमान मूल्य जानकर इसके मूल्यों में परिवर्तन की भविष्यवाणी करनी आवश्यक होती है। इनमें और ऐसी अनेक अन्य स्थितियों में यह जानना अभीष्ट होता है कि एक प्राचल में दूसरे किसी प्राचल के सापेक्ष परिवर्तन किस प्रकार होता है? परिभाषा के प्रांत के प्रदत्त बिंदु पर फलन का अवकलज इस विषय का मुख्य उद्देश्य है।

परिभाषा 1 मान लीजिए f *एक वास्तविक मानीय फलन है और इसकी परिभाषा के प्रांत में एक बिंदु* a है। a पर f का अवकलज

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

से परिभाषित है बशर्ते कि इस सीमा का अस्तित्व हो। a पर $f(x)$ का अवकलज $f'(a)$ से निरूपित होता है। अवलोकन कीजिए कि $f'(a)$, a पर x के सापेक्ष परिवर्तन का परिमाण बताता है।

उदाहरण 5 $x = 2$ पर फलन $f(x) = 3x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं $f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)-3(2)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6+3h-6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3.$$

अत: $x = 2$ पर फलन $3x$ का अवकलज 3 है।

उदाहरण 6 $x = -1$ पर फलन $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ का अवकलज ज्ञात कीजिए। यह भी सिद्ध कीजिए कि $f'(0) + 3f'(-1) = 0$.

हल हम पहले $x = 0$ और $x = -1$ पर $f(x)$ का अवकलज ज्ञात करते हैं। हम पाते हैं कि

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[2(-1+h)^2+3(-1+h)-5\right]-\left[2(-1)^2+3(-1)-5\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h^2-h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h-1) = 2(0)-1 = -1$$

और $$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[2(0+h)^2+3(0+h)-5\right]-\left[2(0)^2+3(0)-5\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h^2+3h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h+3) = 2(0)+3 = 3$$

स्पष्टत: $f'(0)+3f'(-1) = 0$

टिप्पणी इस स्थिति में ध्यान दीजिए कि एक बिंदु पर अवकलज का मान प्राप्त करने में सीमा ज्ञात करने के विविध नियमों का प्रभावकारी प्रयोग सम्मिलित है। निम्नलिखित इसको स्पष्ट करता है:

उदाहरण 7 $x = 0$ पर $\sin x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $f(x) = \sin x$. तब

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

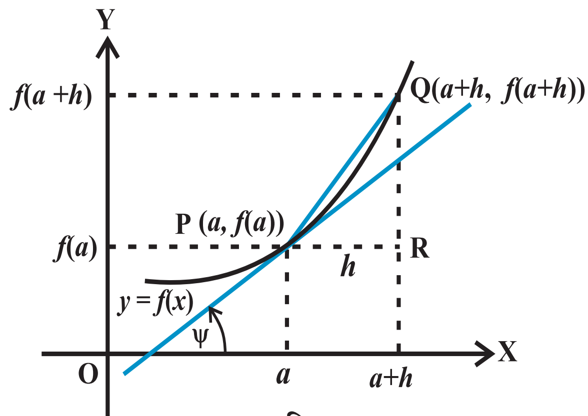
उदाहरण 8 $x = 0$ और $x = 3$ पर फलन $f(x) = 3$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि अवकलज फलन में परिवर्तन को मापता है, सहजरूप से यह स्पष्ट है कि अचर फलन का प्रत्येक बिंदु पर अवकलन शून्य होना चाहिए। इसे, वास्तव में, निम्नलिखित परिकलन से बल मिलता है।

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3-3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

इसी प्रकार $f'(3) =$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3-3}{h} = 0.$$



आकृति 13.11

अब हम एक बिंदु पर फलन के अवकलज की ज्यामितीय व्याख्या प्रस्तुत करते हैं।

मान लीजिए $y = f(x)$ एक फलन है और मान लीजिए इस फलन के आलेख पर $P = (a, f(a))$ और $Q = (a + h, f(a + h)$ दो परस्पर निकट बिंदु हैं। आकृति 13.11 अब स्वयं व्याख्यात्मक है।

हम जानते हैं कि $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

त्रिभुज PQR, से यह स्पष्ट है कि वह अनुपात जिसकी सीमा हम ले रहे हैं, यथार्थता से tan (QPR) के बराबर है जो कि जीवा PQ का ढाल है। सीमा लेने की प्रक्रिया में, जब h, 0 की ओर अग्रसर होता है, बिंदु Q, P की ओर अग्रसर होता है और हम पाते हैं अर्थात्

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{Q \to P} \frac{QR}{PR}$$

यह इस तथ्य के तुल्य है कि जीवा PQ, वक्र $y = f(x)$ के बिंदु P पर स्पर्शी की ओर अग्रसर होती है। अत:

$f'(a) = \tan \psi$.

एक दिए फलन f के लिए हम प्रत्येक बिंदु पर अवकलज ज्ञात कर सकते हैं। यदि प्रत्येक बिंदु पर अवकलज का अस्तित्व है तो यह एक नये फलन को परिभाषित करता है जिसे फलन f का अवकलज कहा जाता है औपचारिक रूप से हम एक फलन के अवकलज को निम्नलिखित प्रकार परिभाषित करते हैं।

परिभाषा 2 मान लीजिए कि f एक वास्तविक मानीय फलन है, तो

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

से परिभाषित फलन, जहाँ कहीं सीमा का अस्तित्व है, को x पर f का अवकलज परिभाषित किया जाता है और $f'(x)$ से निरूपित किया जाता है। अवकलज की इस परिभाषा को **अवकलज का प्रथम सिद्धांत** भी कहा जाता है।

इस प्रकार $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

स्पष्टत: $f'(x)$ की परिभाषा का प्रांत वही है जहाँ कहीं उपर्युक्त सीमा का अस्तित्व है। एक फलन के अवकलज के विभिन्न

संकेतन हैं। कभी-कभी $f'(x)$ को $\frac{d}{dx}\left(f\left(x\right)\right)$ से निरूपित किया जाता है यदि $y = f(x)$, तो यह $\frac{dy}{dx}$ से निरूपित किया जाता है। इसे y या $f(x)$ के सापेक्ष अवकलज के रूप में उल्लेखित किया जाता है इसे $D\left(f\left(x\right)\right)$ से भी निरूपित किया जाता है।

इसके अतिरिक्त $x = a$ पर f के अवकलज को $\left.\frac{d}{dx}f\left(x\right)\right|_a$ या $\left.\frac{df}{dx}\right|_a$ या $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$ से भी निरूपित किया जाता है।

उदाहरण 9 $f(x) = 10\,x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं $\quad f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{10\left(x+h\right)-10\left(x\right)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{10h}{h} = \lim_{h\to 0}\left(10\right) = 10$$

उदाहरण 10 $f(x) = x^2$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं $\quad f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(x+h\right)^2-\left(x\right)^2}{h} = \lim_{h\to 0}\left(h+2x\right) = 2x$$

उदाहरण 11 एक अचर वास्तविक संख्या a के लिए, अचर फलन $f(x) = a$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं $\quad f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a-a}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0 \text{ क्योंकि } h \neq 0$$

उदाहरण 12 $f(x) = \frac{1}{x}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं $\quad f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{x-\left(x+h\right)}{x\left(x+h\right)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x\left(x+h\right)}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x\left(x+h\right)} = -\frac{1}{x^2}$$

13.5.1 *फलनों के अवकलज का बीजगणित (Algebra of derivative of functions)* क्योंकि अवकलज की यथार्थ परिभाषा में सीमा निश्चय ही सीधे रूप में सम्मिलित है, हम अवकलज के नियमों के निकटता से सीमा के नियमों के अनुगमन की आशा करते हैं। हम इनको निम्नलिखित प्रमेयों में पाते हैं:

प्रमेय 5 मान लीजिए f और g दो ऐसे फलन हैं कि उनके उभयनिष्ठ प्रांत में उनके अवकलन परिभाषित हैं, तब

(i) दो फलनों के योग का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का योग है।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

(ii) दो फलनों के अंतर का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का अंतर है।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

(iii) दो फलनों के गुणन का अवकलज निम्नलिखित गुणन नियम (product rule) से दिया गया है:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\,.\,g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)\,.\,g(x)+f(x)\,.\frac{d}{dx}g(x)$$

(iv) दो फलनों के भागफल का अवकलज निम्नलिखित भागफल नियम (quotient rule) से दिया गया है (जहाँ कहीं हर शून्येतर है)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\frac{d}{dx}f(x)\,.\,g(x)-\ f(x)\ \frac{d}{dx}g(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

इनकी उपपत्ति सीमाओं की तुल्य रूप प्रमेयों से आवश्यकीय रूप से अनुसरण करती हैं। हम इन्हें यहाँ सिद्ध नहीं करेंगे। सीमाओं की स्थिति की तरह यह प्रमेय बतलाता है कि विशेष प्रकार के फलनों के अवकलज कैसे परिकलित किए जाते हैं। प्रमेय के अंतिम दो कथनों को निम्नलिखित ढंग से पुन: कहा जा सकता है जिससे उनके पुनर्स्मरण करने में आसानी से सहायता मिलती है।

मान लीजिए $u=f(x)$ और $v=g(x)$ तब

$$(uv)' = u'v+uv'$$

यह फलनों के गुणन के अवकलन के लिए Leibnitz नियम या गुणन नियम उल्लेखित होता है। इसी प्रकार, भागफल नियम है

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

अब, आइए हम कुछ मानक फलनों के अवकलनों को लें। यह देखना सरल है कि फलन $f(x)=x$ का अवकलज अचर फलन 1 है। यह है क्योंकि

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}1=1$$

हम इसका और उपर्युक्त प्रमेय का प्रयोग $f(x) = 10x = x + x + ... + x$ (10 पद) (उपर्युक्त प्रमेय के (i) से) के अवकलज के परिकलन में करते हैं

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x + ... + x) \text{ (10 पद)}$$

$$= \frac{d}{dx}x + \ldots + \frac{d}{dx}x \text{ (10 पद)}$$

$$= 1 + ... + 1 \text{ (10 पद)} = 10.$$

हम ध्यान देते हैं कि इस सीमा का मान गुणन सूत्र के प्रयोग से भी प्राप्त किया जा सकता है। हम लिखते हैं, $f(x) = 10x = uv$, जहाँ u लिखते हैं जहाँ u प्रत्येक जगह मान 10 लेकर अचर फलन है और $v(x) = x$. यहाँ हम जानते हैं कि u का अवकलज 0 के बराबर है साथ ही $v(x) = x$ का अवकलज 1 के बराबर है। इस प्रकार गुणन नियम से, हम पाते हैं

$$f'(x) = (10x)' = (uv)' = u'v + uv' = 0.x + 10.1 = 10$$

इसी आधार पर $f(x) = x^2$ के अवकलज का मान प्राप्त किया जा सकता है। हम पाते हैं $f(x) = x^2 = x.x$ और

अत:
$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x.x) = \frac{d}{dx}(x).x + x.\frac{d}{dx}(x)$$

$$= 1.x + x.1 = 2x$$

अधिक व्यापक रूप से हम निम्नलिखित प्रमेय पाते हैं:

प्रमेय 6 किसी धन पूर्णांक n के लिए $f(x) = x^n$ का अवकलज nx^{n-1} है।

उपपत्ति अवकलज फलन की परिभाषा से, हम पाते हैं

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

द्विपद प्रमेय कहता है कि $(x + h)^n = ({}^nC_0)x^n + ({}^nC_1)x^{n-1}h + ... + ({}^nC_n)h^n$ और

$(x + h)^n - x^n = h(nx^{n-1} + ... + h^{n-1})$ इस प्रकार

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(nx^{n-1} + ... + h^{n-1})}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (nx^{n-1} + ... + h^{n-1}), = nx^{n-1}$$

विकल्पत: हम इसको n पर आगमन और गुणन सूत्र से भी निम्न प्रकार सिद्ध कर सकते हैं: $n = 1$ के लिए यह सत्य है जैसा कि पहले दिखाया जा चुका है

$$\frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}(x.x^{n-1})$$

$$= \frac{d}{dx}(x).\left(x^{n-1}\right)+x.\frac{d}{dx}\left(x^{n-1}\right) \text{ (गुणन सूत्र से)}$$

$$= 1.x^{n-1}+x.\left((n-1)x^{n-2}\right) \text{ (आगमन परिकल्पना से)}$$

$$= x^{n-1}+(n-1)x^{n-1}=nx^{n-1}$$

टिप्पणी उपर्युक्त प्रमेय x,की सभी घातों के लिए सत्य है अर्थात् n कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है। (लेकिन हम इसको यहाँ सिद्ध नहीं करेंगे)

13.5.2 बहुपदों और त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज *(Derivative of polynomials and trigonometric functions)*

हम निम्नलिखित प्रमेय से प्रारंभ करेंगे जो हमको बहुपदीय फलनों के अवकलज बतलाती है।

प्रमेय 7 मान लीजिए $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ एक बहुपदीय फलन है जहाँ $a_i s$ सभी वास्तविक संख्याएँ हैं और $a_n \neq 0$ तब अवकलज फलन इस प्रकार दिया जाता है:

$$\frac{df(x)}{dx} = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{x-2} + ... + \ 2a_2 x + a_1$$

इस प्रमेय की उपपत्ति प्रमेय 5 और प्रमेय 6 के भाग (i) को मात्र साथ रखने से प्राप्त की जा सकती है।

उदाहरण 13 $6x^{100} - x^{55} + x$ के अवकलज का परिकलन कीजिए।

हल उपर्युक्त प्रमेय का सीधा अनुप्रयोग बतलाता है कि उपर्युक्त फलन का अवकलज $600x^{99} - 55x^{54} + 1$ है।

उदाहरण 14 $x = 1$ पर $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{50}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए। .

हल उपर्युक्त प्रमेय 6 का सीधा अनुप्रयोग बतलाता है कि उपर्युक्त फलन का अवकलज $1 + 2x + 3x^2 + . . . + 50x^{49}$ है।

$x = 1$ पर इस फलन का मान $1 + 2(1) + 3(1)^2 + .. . + 50(1)^{49} = 1 + 2 + 3 + . . . + 50 = \frac{(50)(51)}{2} = 1275$ है।

उदाहरण 15 $f(x) = \frac{x+1}{x}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल यह फलन $x = 0$ के अतिरिक्त प्रत्येक के लिए परिभाषित है। हम यहाँ $u = x + 1$ और $v = x$ लेकर भागफल नियम का प्रयोग करते हैं। अत: $u' = 1$ और $v' = 1$ इसलिए

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{1(x)-(x+1)1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

उदाहरण 16 $\sin x$ के अवकलज का परिकलन कीजिए।

हल मान लीजिए $f(x) = \sin x$, तब

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$ (sin A – sin B के सूत्र का प्रयोग करके)

$$= \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) . \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x . 1 = \cos x .$$

उदाहरण 17 $\tan x$ के अवकलज का परिकलन कीजिए।

हल मान लीजिए $f(x) = \tan x$, तब

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{h\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h-x)}{h\cos(x+h)\cos x}$$ (sin (A + B) के सूत्र का प्रयोग करके)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} . \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1 . \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

उदाहरण 18 $f(x) = \sin^2 x$ के अवकलज का परिकलन कीजिए।

हल हम इसका मान प्राप्त करने के लिए Leibnitz गुणन सूत्र का प्रयोग करते हैं।

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \sin x)$$

$$= (\sin x)' \sin x + \sin x (\sin x)'$$

$$= (\cos x) \sin x + \sin x (\cos x)$$

$$= 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

प्रश्नावली 13.2

1. $x = 10$ पर $x^2 - 2$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

2. $x = 100$ पर $99x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

3. $x = 1$ पर x का अवकलज ज्ञात कीजिए।

4. प्रथम सिद्धांत से निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए:

(i) $x^3 - 27$ (ii) $(x-1)(x-2)$

(iii) $\dfrac{1}{x^2}$ (iv) $\dfrac{x+1}{x-1}$

5. फलन $f(x) = \dfrac{x^{100}}{100} + \dfrac{x^{99}}{99} + \ldots + \dfrac{x^2}{2} + x + 1$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $f'(1) = 100 f'(0)$.

6. किसी अचर वास्तविक संख्या a के लिए $x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n$ का अवकलज ज्ञात कीजिए

7. किन्हीं अचरों a और b, के लिए,

(i) $(x-a)(x-b)$ (ii) $\left(ax^2 + b\right)^2$ (iii) $\dfrac{x-a}{x-b}$

अवकलज ज्ञात कीजिए।

8. किसी अचर a के लिए $\dfrac{x^n - a^n}{x-a}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

9. निम्नलिखित के अवकलज ज्ञात कीजिए:

(i) $2x - \dfrac{3}{4}$ (ii) $\left(5x^3 + 3x - 1\right)(x-1)$

(iii) $x^{-3}(5+3x)$ (iv) $x^5\left(3 - 6x^{-9}\right)$

(v) $x^{-4}\left(3 - 4x^{-5}\right)$ (vi) $\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{x^2}{3x-1}$

10. प्रथम सिद्धांत से $\cos x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

11. निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $\sin x \cos x$ (ii) $\sec x$ (iii) $5\sec x + 4\cos x$

(iv) $\operatorname{cosec} x$ (v) $3\cot x + 5\operatorname{cosec} x$

(vi) $5\sin x - 6\cos x + 7$ (vii) $2\tan x - 7\sec x$

विविध उदाहरण

उदाहरण 19 प्रथम सिद्धांत से f का अवकलज ज्ञात कीजिए जहाँ f इस प्रकार प्रदत्त है:

(i) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$ (ii) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

हल (i) ध्यान दीजिए कि फलन $x = 2$ पर परिभाषित नहीं है। लेकिन, हम पाते हैं

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2(x+h)+3}{x+h-2} - \dfrac{2x+3}{x-2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2x+2h+3)(x-2)-(2x+3)(x+h-2)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2x+3)(x-2)+2h(x-2)-(2x+3)(x-2)-h(2x+3)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-7}{(x-2)\,(x+h-2)} = -\frac{7}{(x-2)^2}$$

पुनः ध्यान दीजिए कि $x = 2$ पर फलन f' भी परिभाषित नहीं है।

(ii) $x = 0$ पर फलन परिभाषित नहीं है। लेकिन, हम पाते हैं

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(x+h+\frac{1}{x+h}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[h+\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[h+\frac{x-x-h}{x(x+h)}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[h\left(1-\frac{1}{x(x+h)}\right)\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[1-\frac{1}{x(x+h)}\right] = 1-\frac{1}{x^2}$$

पुनः ध्यान दीजिए कि $x = 0$ पर फलन f' परिभाषित नहीं है।

उदाहरण 20 प्रथम सिद्धांत से फलन $f(x)$ का अवकलज ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x)$

(i) $\sin x + \cos x$ (ii) $x \sin x$

हल (i) हम पाते हैं, $f'(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h)+\cos(x+h)-\sin x-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h+\cos x \sin h+\cos x \cos h-\sin x \sin h-\sin x-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h(\cos x-\sin x)+\sin x(\cos h-1)+\cos x(\cos h-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}(\cos x - \sin x) + \lim_{h\to 0}\sin x\frac{(\cos h - 1)}{h} \quad + \lim_{h\to 0}\cos x\frac{(\cos h - 1)}{h}$$

$= \cos x - \sin x$

(ii) $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\sin(x+h) - x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)(\sin x\cos h + \sin h\cos x) - x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h - 1) + x\cos x\sin h + h(\sin x\cos h + \sin h\cos x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} x\cos x\frac{\sin h}{h} \quad + \lim_{h\to 0}(\sin x\cos h + \sin h\cos x)$$

$= x\cos x + \sin x$

उदाहरण 21 (i) $f(x) = \sin 2x$ (ii) $g(x) = \cot x$

के अवकलज का परिकलन कीजिए।

हल (i) त्रिकोणमिति सूत्र $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ का पुनर्स्मरण कीजिए। इस प्रकार

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sin x\cos x) = 2\frac{d}{dx}(\sin x\cos x)$$

$$= 2\left[(\sin x)'\cos x + \sin x(\cos x)'\right]$$

$$= 2\left[(\cos x)\cos x + \sin x(-\sin x)\right] = 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$$

(ii) परिभाषा से, $g(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ हम भागफल सूत्र का प्रयोग इस फलन पर करेंगे, जहाँ कहीं यह परिभाषित है।

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{(\cos x)'(\sin x) - (\cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{(-\sin x)(\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{(\sin x)^2}$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

विकल्पत: इसको ध्यान देकर कि $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$, परिकलित किया जा सकता है। यहाँ हम इस तथ्य का प्रयोग करते हैं कि $\tan x$ का अवकलज $\sec^2 x$ है जो हमने उदाहरण 17 में देखा है और साथ ही अचर फलन का अवकलज 0 होता है।

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right)$$

$$= \frac{(1)'(\tan x)-(1)(\tan x)'}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{(0)(\tan x)-(\sec x)^2}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

उदाहरण 22 (i) $\dfrac{x^5 - \cos x}{\sin x}$ (ii) $\dfrac{x+\cos x}{\tan x}$

का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल (i) मान लीजिए $h(x) = \dfrac{x^5 - \cos x}{\sin x}$. जहाँ कहीं भी यह परिभाषित है, हम इस फलन पर भागफल नियम का प्रयोग करेंगे।

$$h'(x) = \frac{(x^5 - \cos x)'\sin x - (x^5 - \cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{(5x^4 + \sin x)\sin x - (x^5 - \cos x)\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-x^5 \cos x + 5x^4 \sin x + 1}{(\sin x)^2}$$

(ii) हम फलन $\dfrac{x+\cos x}{\tan x}$ पर भागफल नियम का प्रयोग करेंगे जहाँ कहीं भी यह परिभाषित है।

$$h'(x) = \frac{(x+\cos x)'\tan x - (x+\cos x)(\tan x)'}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1-\sin x)\tan x - (x+\cos x)\sec^2 x}{(\tan x)^2}$$

अध्याय 13 पर विविध प्रश्नावली

1. प्रथम सिद्धांत से निम्नलिखित फलनों का अवकलज ज्ञात कीजिए:

(i) $-x$ (ii) $(-x)^{-1}$ (iii) $\sin(x+1)$ (iv) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right)$

निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाय कि a, b, c, d, p, q, r और s निश्चित शून्येतर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।):

2. $(x + a)$ **3.** $(px + q)\left(\frac{r}{x}+s\right)$ **4.** $(ax+b)(cx+d)^2$

5. $\frac{ax+b}{cx+d}$ **6.** $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ **7.** $\frac{1}{ax^2+bx+c}$

8. $\frac{ax+b}{px^2+qx+r}$ **9.** $\frac{px^2+qx+r}{ax+b}$ **10.** $\frac{a}{x^4}-\frac{b}{x^2}+\cos x$

11. $4\sqrt{x}-2$ **12.** $(ax+b)^n$ **13.** $(ax+b)^n(cx+d)^m$

14. $\sin(x + a)$ **15.** $\operatorname{cosec} x \cot x$ **16.** $\frac{\cos x}{1+\sin x}$

17. $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ **18.** $\frac{\sec x-1}{\sec x+1}$ **19.** $\sin^n x$

20. $\frac{a+b\sin x}{c+d\cos x}$ **21.** $\frac{\sin(x+a)}{\cos x}$ **22.** $x^4(5\sin x-3\cos x)$

23. $(x^2+1)\cos x$ **24.** $(ax^2+\sin x)(p+q\cos x)$

25. $(x+\cos x)(x-\tan x)$ **26.** $\frac{4x+5\sin x}{3x+7\cos x}$ **27.** $\frac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$

28. $\frac{x}{1+\tan x}$ **29.** $(x+\sec x)(x-\tan x)$ **30.** $\frac{x}{\sin^n x}$

सारांश

- फलन का अपेक्षित मान जो एक बिंदु के बाईं ओर के बिंदुओं पर निर्भर करता है, बिंदु पर फलन के **बाएँ पक्ष की सीमा** (Left handed limit) को परिभाषित करता है। इसी प्रकार **दाएँ पक्ष की सीमा** (Right handed limit)।
- एक बिंदु पर फलन की सीमा बाएँ पक्ष और दाएँ पक्ष की सीमाओं से प्राप्त उभयनिष्ठ मान हैं यदि वे संपाती हों।
- यदि किसी बिंदु पर बाएँ पक्ष और दाएँ पक्ष की सीमाएँ संपाती न हों तो यह कहा जाता है कि उस बिंदु पर फलन की सीमा का अस्तित्व नहीं है।
- एक वास्तविक संख्या a और एक फलन f के लिए $\lim_{x\to a} f(x)$ और $f(a)$ समान नहीं भी हो सकते (वास्तव में, एक परिभाषित हो और दूसरा नहीं)

- फलनों f और g के लिए निम्नलिखित लागू होते हैं:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)]=\lim_{x\to a}f(x).\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$$

- निम्नलिखित कुछ मानक सीमाएँ हैं।

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

- a पर फलन f का अवकलज

$f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ से परिभाषित होता है।

- प्रत्येक बिंदु पर अवकलज, अवकलज फलन

$f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ से परिभाषित होता है।

- फलनों u और v के लिए निम्नलिखित लागू होता है:

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ बशर्ते सभी परिभाषित हैं।

- निम्नलिखित कुछ मानक अवकलज हैं:

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

गणित के इतिहास में कलन के अन्वेषण के श्रेय की भागीदारी हेतु दो नाम प्रमुख हैं Issac Newton (1642 – 1727) और G.W. Leibnitz (1646 – 1717). सत्रहवीं शताब्दी में दोनों ने स्वतंत्रता पूर्वक कलन का अन्वेषण किया। कलन के आगमन के बाद इसके आगामी विकास हेतु अनेक गणितज्ञों ने योगदान किया। परिशुद्ध संकल्पना का मुख्य श्रेय महान गणितज्ञों A.L.Cauchy, J.L.Lagrange और Karl Weier strass को प्राप्त है। Cauchy ने कलन को आधार दिया जिसको अब हम व्यापकत: पाठ्य पुस्तकों में स्वीकार कर चुके हैं। Cauchy ने D'Almbert की सीमा संकल्पना के प्रयोग के द्वारा अवकलज की परिभाषा दी। सीमा की परिभाषा से प्रारंभ करते हुए $\alpha = 0$ के लिए $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ की सीमा जैसे उदाहरण दिए। उन्होंने $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+i)-f(x)}{i}$, लिखा और $i \to 0$, के लिए सीमा को $'f''(x)$ के लिए y', "function derive'e" नाम दिया।

1900 से पूर्व यह सोचा जाता था कि कलन को पढ़ाना बहुत कठिन है, इसलिए कलन युवाओं की पहुँच से बाहर थी। लेकिन ठीक 1900 में इंगलैंड में John Perry एवं अन्य ने इस विचार का प्रचार करना प्रारंभ किया कि कलन की मुख्य विधियाँ और धारणाएँ सरल हैं और स्कूल स्तर पर भी पढ़ाया जा सकता है। F.L. Griffin ने कलन के अध्ययन को प्रथम वर्ष के छात्रों से प्रारंभ करके नेतृत्व प्रदान किया। उन दिनों यह बहुत चुनौतीपूर्ण कार्य था।

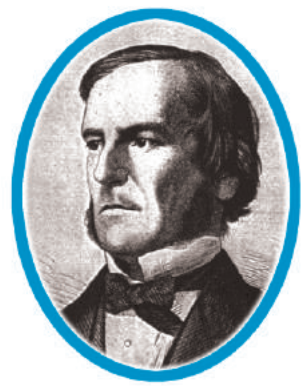
आज न केवल गणित अपितु अनेक अन्य विषयों जैसे भौतिकी, रसायन विज्ञान, अर्थशास्त्र, जीवविज्ञान में कलन की उपयोगिता महत्वपूर्ण है।

अध्याय 14

गणितीय विवेचन
(Mathematical Reasoning)

❖*There are few things which we know which are not capable of mathematical reasoning and when these can not, it is a sign that our knowledge of them is very small and confused and where a mathematical reasoning can be had, it is as great a folly to make use of another, as to grope for a thing in the dark when you have a candle stick standing by you. – ARTHENBOT* ❖

14.1 भूमिका (Introduction)



George Boole
(1815 - 1864 A.D.)

इस अध्याय में हम गणितीय विवेचन से संबंधित कुछ मौलिक धारणाओं पर चर्चा करेंगे। हमें ज्ञात है कि मनुष्य, अनेकों सहस्त्राब्दियों में, निम्न स्तर की प्रजातियों से, विकसित हुआ है। मनुष्य में विवेचन करने के गुण ने उसे अन्य प्रजातियों से श्रेष्ठ बनाया है। एक व्यक्ति इस गुण को कितनी अच्छी तरह प्रयोग कर सकता है, उसके विवेचन क्षमता पर निर्भर करता है। इस क्षमता को केसे विकसित किया जाए? यहाँ पर हम विवेचन की प्रक्रिया की चर्चा विशेष रूप से गणित के संदर्भ में करेंगे। गणितीय भाषा में विवेचन दो प्रकार के होते हैं– आगमनात्मक (आगमिक) **विवेचन** तथा **निगमनात्मक** (निगमनिक) **विवेचन**। गणितीय आगमन (Mathematical Induction) के संदर्भ में हम आगमनात्मक विवेचन की चर्चा पहले कर चुके हैं। इस अध्याय में हम कुछ मूलभूत निगमनात्मक विवेचन पर चर्चा करेंगे।

14.2 कथन (Statements)

गणितीय विवेचन की मौलिक इकाई गणितीय कथन की संकल्पना है।

हम निम्नलिखित दो वाक्यों में प्रारंभ करेंगे।

"सन् 2003 में भारत की राष्ट्रपति एक महिला थीं।"

"किसी हाथी का भार एक मनुष्य के भार से अधिक होता है।"

इन वाक्यों को पढ़ते ही हम तुरन्त निर्णय ले सकते हैं कि प्रथम वाक्य गलत (असत्य) तथा दूसरा वाक्य सही (सत्य) है। इस संबंध में कोई भ्रांति नहीं है। गणित में ऐसे वाक्यों को कथन कहते हैं।

इसके विपरीत निम्नलिखित वाक्य पर विचार कीजिए:

"महिलाएँ, पुरुषों से अधिक बुद्धिमान होती हैं।"

कुछ लोगों के विचार से यह वाक्य सत्य हो सकता है परंतु कुछ अन्य इससे असहमत हो सकते हैं। इस वाक्य के बारे में हम यह नहीं कह सकते कि यह सत्य या असत्य है। इसका तात्पर्य है कि यह वाक्य द्वयर्थक है।

इस प्रकार का वाक्य गणित में कथन के रूप में स्वीकार्य नहीं है।

'एक वाक्य गणितानुसार **कथन** कहलाता है। यदि वह या तो सत्य हो अथवा असत्य हो परंतु दोनों (सत्य और असत्य) न हो।' अब जब भी हम कथन का उल्लेख करेंगे हमारा तात्पर्य "गणितानुसार स्वीकार्य" कथन से होगा।