علم ریاضی میں ثبوت

15

Proofs in Mathematics

15.1 تعارف

روزمرہ زندگی میں ہمیں کئی بیانات سے سابقہ پڑتا ہے' ہم بیان کی تصدیق کرنا چاہتے ہیں۔ کچھ بیانات کو ہم موزوں اور صحیح سمجھتے ہیں' جب کہ کچھ اور کو رد کر دیتے ہیں' اور بعض بیانات ایسے بھی ہوتے ہیں جن کے بارے میں یقین سے کچھ نہیں کہا جا سکتا۔ پھر ہم یہ فیصلہ کس طرح کرتے ہیں؟ فرض کیجیے کہ قرض اور بقایا جات سے متعلق ایک متضاد بیان ہے۔ اگر آپ یہ دعویٰ کرتے ہیں کہ بینک آپ کی رقم دینی باقی ہے تب آپ کو بطور ثبوت رقمی دستاویزات پیش کرنے ہوں گے۔ ورنہ لوگ آپ پر یقین نہیں کریں گے۔ اگر ہم غور کریں تو معلوم ہوگا کہ ہماری روزمرہ زندگی میں بھی ہمیں یہ ثابت کرنا پڑتا ہے کہ کوئی بیان صادق ہے یا کاذب؟

بعض دفعہ ہم جملوں کے صداقت کی جانچ کو ضروری نہیں سمجھتے اور بغیر جانچ کے ہی قبول کر لیتے ہیں۔ ریاضی میں ایسا نہیں کیا جا سکتا۔

ذیل پر غور کیجیے:

1. سورج مشرق سے طلوع ہوتا ہے۔	2. $3 + 2 = 5$
3. امریکہ کا صدر مقام نیویارک ہے۔	4. $4 > 8$
5. آپ کتنے بھائی' بہن ہیں؟	6. گوا کی فٹبال ٹیم بنگال کی ٹیم سے بہتر ہے۔
7. مستطیل میں چار متشاکل خطوط ہوتے ہیں۔	8. $x + 2 = 7$
9. اندر آیئے۔	10. ایک پانسہ کو دو مرتبہ پھینکنے پر دو مسلسل 6 آنے کا امکان کیا ہوگا؟
11. آپ کیسے ہیں؟	12. سورج ساکت نہیں بلکہ ہمیشہ تیز رفتاری سے حرکت کرتا ہے۔
13. $x < y$	14. آپ کہاں رہتے ہیں؟

ہم جانتے ہیں ان میں سے چند جملے کاذب ہیں' مثال کے طور پر $8 < 4$۔ اس طرح ہم جانتے ہیں کہ امریکہ کا صدر مقام نیویارک نہیں ہے۔ ہماری موجودہ معلومات سے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ چند صحیح ہیں۔ ان میں ''سورج مشرق سے طلوع ہوتا ہے'' اور ''ایک پانسہ کو .... ''سورج ساکت نہیں .... شامل ہیں۔

ان کے علاوہ چند دوسرے جملے ایسے ہوتے ہیں جو چند معلوم قدروں کے لیے صادق ہوتے ہیں' اور دوسری قدروں کے لیے صادق نہیں ہوتے۔ مثلاً $x + 2 = 7$ صرف $x = 5$ کے لیے صادق ہے' اور $x < y$ ان ہی قدروں کے لیے صادق ہوگا جب کہ x' y سے چھوٹا ہو۔

دیگر جملوں پر بھی غور کیجیے جو یا تو واضح طور پر کاذب یا پھر صادق ہوتے ہیں۔ اس طرح کے جملے بیانات کہلاتے ہیں۔ یہ نہیں دیکھا جاتا ہے کہ بیانات صحیح کیوں ہیں یا غلط کیوں؟

ان جملوں پر غور کیجیے

1. آپ اس نوٹس کو نظر انداز کیجیے............
2. میں جو بیان دے رہا ہوں وہ کاذب ہے۔
3. اس جملہ میں چند الفاظ ہیں۔
4. چاند پر پانی ہوسکتا ہے۔

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ یہ بیانات صادق ہیں یا کاذب؟ کیا ان کے صحیح یا غلط ہونے کی جانچ کا کوئی طریقہ ہے؟

پہلے جملے پر غور کیجیے، کیا آپ اس نوٹس کو نظر انداز کرتے ہیں؟ آپ ایسا ہی کریں گے کیونکہ آپ کو ایسا ہی کرنے کے لیے کہا گیا ہے۔ اگر آپ نوٹس کو نظر انداز نہیں کرتے ہیں تو آپ کو اس پر توجہ دینی ہوگی۔ لہٰذا آپ اس نوٹس پر عمل نہیں کریں گے اس لیے اس کے صحیح یا غلط ہونے کے پیمانہ کو جانچا نہیں جاسکتا ہے۔ دوسرے اور تیسرے جملے خود سے متعلق ہیں اور چوتھے جملے میں صرف امکان ظاہر ہو رہا ہے اور اس کا صحیح یا غلط ہونا مشکوک ہے۔

ایسے جملے جو خود سے متعلق ہوں، ایسے جملے جن سے امکانات ظاہر ہوں، بیانات نہیں کہلاتے۔

یہ کیجیے

مزید 5 جملے بنائیے اور جانچ کیجیے کہ وہ بیانات ہیں یا نہیں۔ وجوہات بتلائیے۔

15.2 ریاضیاتی بیانات

ہم لاتعداد جملے لکھ سکتے ہیں، آپ غور کیجیے کہ آپ کو کس قسم کے جملے استعمال کرنا ہے۔ کیا آپ ان کی تعداد کی گنتی کر سکتے ہیں؟ ان تمام کا شمار نہیں کیا جاسکتا، لیکن ان کو معیار کے تحت جانچا جاسکتا ہے کہ یہ صادق ہیں یا کاذب؟ مثال کے طور پر غور کیجیے "اندر آئیے"، "آپ کہاں رہتے ہیں"، ایسے جملے اکثر استعمال ہوتے ہیں۔

ایسے تمام جملے، بیانات نہیں کہلاتے، صرف وہی جملے بیانات کہلاتے ہیں جن کا صادق ہونا یا کاذب ہونا جانچا جاسکتا ہو۔ ایک بیان بیک وقت صادق اور کاذب نہیں ہوسکتا۔ ریاضیاتی بیانات کے لیے بھی یہی اصول ہوتا ہے کہ ایک ریاضیاتی بیان غیر واضح نہیں ہوسکتا۔ ریاضی میں ایک بیان اس وقت قابل قبول ہوگا جب یا تو وہ صادق ہو یا پھر کاذب، لیکن دونوں نہیں۔ ذیل کے جملوں پر غور کیجیے۔

1. 3 ایک مفرد عدد ہے۔
2. دو طاق صحیح اعداد کا حاصل ضرب جفت ہوتا ہے۔
3. کوئی حقیقی عدد x کے لیے $4x + x = 5x$
4. زمین کا ایک چاند ہے۔
5. رامو ایک اچھا ڈرائیور ہے۔
6. بھاسکر نے ایک کتاب "لیلاوتی" لکھی۔
7. تمام جفت اعداد غیر مفرد ہوتے ہیں۔
8. معین ایک مربع ہوتا ہے۔
9. $x > 7$
10. 4 اور 5 اضافی مفرد اعداد ہیں۔

11. سلورفش چاندی سے بنی ہوتی ہے۔

12. انسان، زمین پر حکمرانی کے لیے بنایا گیا ہے۔

13. کسی حقیقی عدد x کے لیے $2x > x$

14. کیوبا کا صدر مقام ہوانا ہے۔

ان میں کونسے ریاضیاتی جملے ہیں اور کونسے غیر ریاضیاتی جملے۔

15.3 بیانات کی جانچ

اب ہم اوپر دیے گئے چند جملوں پر غور کرتے ہوئے ان پر بحث کریں گے۔

مثال (1) : ہم بتلا سکتے ہیں کہ ان میں پہلا جملہ مفرد عدد کی تعریف کے لحاظ سے صادق ہے۔

اوپر دیے گئے جملوں میں اس قسم کے بیانات کون سے ہیں جن کو ہم حسابی طور پر ثابت کر سکتے ہیں؟ (ثابت کرنے کی کوشش کیجیے)

مثال (2) : ''دو طاق صحیح اعداد کا حاصل ضرب جفت ہوتا ہے''۔

طاق اعداد 3 اور 5 پر غور کیجیے ان کا حاصل ضرب 15 ہوتا ہے جو کہ جفت نہیں ہے۔

لہٰذا یہ ایک کاذب بیان ہے۔ ہم اس کو مثال کے ذریعہ بتلا چکے۔ ہم یہاں پر اس بیان کو جانچنے کے لیے اس کے مخالف بیان کی مدد لیں گے۔ ایسی مثال جس میں دیے گئے بیان کی مخالفت ہوتی ہو وہ اس بیان کی مخالف مثال کہلاتی ہے۔

کوشش کیجیے

اوپر کے کون سے بیانات کو ایک مخالف مثال دیتے ہوئے جانچا جا سکتا ہے؟

مثال (3) : جملے جیسے ''انسان زمین پر حکمرانی کے لیے بنایا گیا ہے'' یا ''راما ایک اچھا ڈرائیور ہے''۔ غیر واضح جملے ہیں کیونکہ زمین پر حکمرانی کرنا غیر واضح ہے۔ اسی طرح ایک اچھا ڈرائیور بھی غیر واضح ہے۔ لہٰذا ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ایسا بیان جس کو سب ایک ہی طریقہ سے سمجھ سکیں۔ حسابی بیان ہوتا ہے۔

مثال (4) : دوسرے جملوں پر غور کیجیے جیسے:

زمین کا ایک چاند، بھاسکرا نے کتاب ''لیلاوتی'' لکھی۔

ان جملوں کے بیانات ہونے کی جانچ آپ کیسے کریں گے؟

یہ بیانات غیر واضح تو نہیں ہیں، لیکن ان کو جانچنے کی ضرورت ہے، اس کے لیے کچھ وضاحت درکار ہے۔ علاوہ ازیں پچھلے نتائج کی بنیاد پر ان بیانات کی جانچ نہیں کی جا سکتی ہے۔ پہلے جملے کو جانچنے کے لیے شمسی نظام بالخصوص زمین سے متعلق معلومات ضروری ہیں۔ جب کہ دوسرے جملے کی ضرورت ہوتی ہے۔

حسابی بیانات امتیازی خصوصیات رکھتے ہیں۔ کسی ثبوت کے ذریعہ انہیں ثابت کرنا مشکل ہے لیکن کسی مخالف بیان کے ذریعہ انہیں غلط ضرور ثابت کیا جا سکتا ہے۔

کسی حقیقی عدد x کے لیے $2x > x$ بیان میں $x = -1$ یا $\frac{1}{2}$ لے سکتے ہیں اور مخالف مثال دیتے ہوئے اس بیان کو غلط ثابت کر سکتے

ہیں۔آپ نے غور کیا ہوگا کہ $2x > x$ ’’x طبعی اعداد کے سٹ N سے تعلق رکھتا ہے‘‘ کی شرط کے ساتھ صحیح ہے۔

مثال (5) : موزوں شرائط کے ساتھ ذیل کے بیانات کو دوبارہ لکھیئے تا کہ وہ صادق بیانات بن جائیں۔

(i) ہر حقیقی عدد x کے لیے $3x > x$

(ii) ہر حقیقی عدد x کے لیے $x^2 \geq x$

(iii) اگر آپ ایک عدد کو دو سے تقسیم کریں تو آپ کو ہمیشہ اس کا نصف حاصل ہوگا۔

(iv) دائرے کے کسی بھی نقطہ سے وتر بنانے پر وتر اور دائرہ کے درمیان بننے والا زاویہ 90^0 ہوتا ہے۔

(v) اگر ایک چار ضلعی کے تمام ضلعے مساوی ہیں تب یہ ایک مربع ہے۔

حل : (i) اگر $x > 0$ ‘ تب $3x > x$

(ii) اگر $x < 0$ یا $x > 1$ ‘ تب $x^2 > x$

(iii) اگر آپ 0 کے سوا ایک عدد کو 2 سے تقسیم کریں تب آپ کو ہمیشہ اس عدد کا نصف حاصل ہوگا۔

(iv) دائرہ کے کسی بھی نقطہ سے وتر بنانے پر وتر اور دائرہ کے درمیان بننے والا زاویہ 90^0 ہوتا ہے۔

(v) اگر ایک چار ضلعی کے تمام اضلاع اور داخلی زاویے مساوی ہوں تب یہ ایک مربع ہوگا۔

مشق 15.1

1. بتلایئے کہ ذیل کے بیانات ہمیشہ صادق‘ ہمیشہ کاذب یا غیر واضح ہیں۔اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

(i) ایک مہینہ میں 27 دن ہوتے ہیں۔
(ii) مکر سنکرانتی جمعہ کو واقع ہوتی ہے۔
(iii) حیدرآباد میں درجہ حرارت 2^0C ہے۔
(iv) صرف زمین ہی وہ سیارہ ہے جہاں زندگی کا وجود ہے۔
(v) کتے اڑ سکتے ہیں۔
(vi) فبروری میں صرف 28 دن ہوتے ہیں۔

2. بتلایئے کہ ذیل کے بیانات صادق ہیں یا کاذب اپنے جوابات کی وجوہات دیجیے۔

(i) ایک چار ضلعی کے داخلی زاویوں کا مجموعہ 350^0 ہوتا ہے۔
(ii) کوئی حقیقی عدد x کے لیے $x^2 \geq 0$
(iii) معین ایک متوازی الاضلاع ہے۔
(iv) دو جفت اعداد کا مجموعہ جفت ہوتا ہے۔
(v) مربع اعداد کو دو طاق اعداد کے مجموعہ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

3. موزوں شرائط کے ساتھ ذیل کے جملوں کو دوبارہ لکھیے۔تا کہ وہ صادق بیانات بن جائیں۔

(i) تمام اعداد کو مفرد اجزائے ضربی میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔
(ii) ایک حقیقی عدد کا دوگنا ہمیشہ جفت ہوتا ہے۔
(iii) کسی x کے لیے $3x + 1 > 4$
(iv) کسی x کے لیے $x^3 \geq 0$
(v) ہر مثلث میں وسطانیہ زاوی ناصف بھی ہوتا ہے۔

4. موزوں مخالف مثال کے ذریعہ بیان $x > y$ کے لیے $x^2 > y^2$ کو غلط ثابت کیجیے۔

15.4 ریاضی میں استدلال

انسانوں میں فطرتاً تجسس پایا جاتا ہے، یہ تجسس ہم کو دنیا کے کام کاج میں مدد دیتا ہے۔ اگر ہم اس کو ڈھکیلیں تو کیا ہوگا؟ اگر اس میں اپنا ہاتھ ڈالیں تو کیا ہوگا؟ مختلف حرکات وسکنات کا دوسروں پر کیا اثر ہوگا؟ ان تجربات کی بناء پر ہم سماج کا ایک قابل اعتبار خاکہ بنا لیتے ہیں۔ گزرتے ہوئے حالات کے ساتھ ہمارے سوچنے کا انداز بھی بدلتا ہے۔ ہمارے خیالات اگر ایسا ہو تو کیا ہوگا؟ سے 'اگر ایسا ہو تو ایسا ہوگا' کی طرف مائل ہوں گے۔

تجربات نئے خیالات کو جنم دیتے ہیں اور گزشتہ کے واقعات ہمارے احساسات کو نئی جہت دیتے ہیں۔

- چند مشاہدات کیجیے، ان مشاہدات پر اعداد و شمار اکٹھا کیجیے۔
- نتیجہ اخذ کیجیے (پہلے مفروضہ بنائیے) جو مشاہدات کی ترتیب کو واضح کرتا ہے۔
- بعض مخصوص مشاہدات سے مفروضہ کی جانچ کیجیے۔
- مفروضہ ایک بیان یا خیال ہوتا ہے جو مشاہدات کی سلسلہ وار ترتیب کو ظاہر کرتا ہے۔

لہٰذا

- مشاہدات کے بعد بعض مرتبہ مفروضہ میں ردوبدل یا پھر اسے رد کرنے کی بھی ضرورت پڑتی ہے۔ یہ اس وقت ہوتا ہے جب ایک واحد متضاد تجربہ سامنے آتا ہے۔
- عام طور پر ریاضی میں لفظ مفروضہ کے بجائے لفظ اقتباس کا استعمال ہوتا ہے۔ ان کے درمیان فرق اور یکسانیت آپ اپنی اگلی جماعتوں میں سیکھیں گے۔

15.4.1 مفروضہ کی جانچ میں استخراجی دلیل

ثبوت سے متعلق مفروضات اکثر و بیشتر الجھن پیدا کرتے ہیں اور شاید یہی حساب ہے۔ جب کہ مفروضہ اور تجربات کی بناء پر جسے ثابت کیا جاسکتا ہے وہ سائنس ہے۔ لیکن دونوں کا فرق معمولی ہے۔

- ریاضی استخراجی استدلال پر مبنی ہوتی ہے، ثبوت ایک منطقی تخفیف ہے جس کو توضیحات سے ثابت کیا جاتا ہے۔
- سائنس استخراجی استدلال پر مبنی ہوتی ہے۔ تجربات کو یکجا کرتے ہوئے مفروضات کو یا تو ثابت کیا جاتا ہے یا انہیں مسترد کیا جاسکتا ہے۔

سائنس میں بہتر کارکردگی کے لیے آپ کو استخراجی دلائل پیش کرنے کی اہلیت رکھنا ہوگا۔ اگرچہ ایسے افراد ضروری نہیں کہ ریاضی کے ماہر ہوں۔

شرلاک ہومس اور ہرکیول پیاروٹ جیسے جاسوسی کردار، ایسے ہی ماہرین میں شمار کیے جاتے تھے، ایسے ہی لوگ جائے واردات سے ثبوت اکٹھا کرتے ہوئے نتائج پر پہنچتے تھے۔ مثال کے طور پر بعضوں نے اس طرح مفروضہ گھڑا کہ ایک شخص 'M' نے جرم کیا ہے اس کی بنیاد پر وہ اس طرح کے نتائج اخذ کرتے ہیں کہ ان کے مفروضات صحیح ثابت ہونے میں کوئی شک باقی نہ رہے۔ اصل الفاظ جن پر ہمیں غور کرنا ہے وہ ''حجت قائم کرنا'' ہیں۔

15.4.2 استخراجی دلیل

کسی واضح بیان کی صداقت جانچنے میں استخراجی دلیل ہی ایک حجت ہوتی ہے۔

استخراجی استدلال کیا ہے سمجھنے سے پہلے ہم آپ کو ایک معمہ حل کرنے کے لیے دیتے ہیں۔

آپ کو چار کارڈس دیے جائیں گے ہر کارڈ کے ایک رخ پر ایک عدد لکھا ہوگا اور دوسرے رخ پر ایک حرف۔

A	V	8	5

فرض کر لیجیے کہ یہ کارڈس بعض اصول کے تابع ہیں۔

''اگر کارڈ کے ایک رخ پر ایک طاق عدد ہو تب اس کے دوسرے رخ پر ایک حرف علت ہے''۔

اگر اصول صحیح ہو تو آپ کو جانچنے کے لیے کم از کم کتنے بار کو کارڈ کو پلٹانا ہوگا؟

آپ کو تمام کارڈس کو پلٹاتے ہوئے جانچنے کا موقع ضرور دیا جائے گا لیکن اب کیا آپ چند کارڈوں کو پلٹاتے ہوئے جانچ کر سکتے ہیں؟

کارڈ کے ایک رخ پر ایک طاق عدد ہے جب کہ دوسرے رخ پر ایک حرف علت ہے۔ یہاں یہ نہیں بتلایا گیا ہے کہ کارڈ کے ایک رخ پر حرف علت ہو تو دوسرے رخ پر طاق عدد کا ہونا ضروری ہے۔ ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی ہوسکتا ہے۔ اصول سے یہ بھی واضح نہیں کہ کارڈ کے ایک رخ پر ایک جفت عدد ہے تو اس کے دوسرے رخ پر ایک حرف صحیح کا ہونا ضروری ہے۔ یہ ہو بھی سکتا ہے، اور نہیں بھی۔

کیا ہمیں $\boxed{A}$ کو پلٹانا ہوگا؟ نہیں! چاہے دوسرے رخ پر ایک جفت عدد ہو یا ایک طاق عدد ہو۔ اصول اپنی جگہ قائم رہے گا۔

$\boxed{8}$ کے بارے میں آپ کا کیا خیال ہے؟ ہم کو اسے دوبارہ پلٹانے کی ضرورت نہیں۔ کیونکہ چاہے دوسرے رخ پر ایک حرف علت ہو یا ایک حرف صحیح ہو، اصول اپنی جگہ قائم رہے گا۔

لیکن آپ کو $\boxed{V}$ اور $\boxed{5}$ کو پلٹانے کی ضرورت پڑے گی۔ اگر $\boxed{V}$ کے دوسرے رخ پر ایک طاق عدد ہے تب اصول قائم نہیں رہے گا۔ اسی طرح اگر $\boxed{5}$ کے دوسرے رخ پر ایک حرف صحیح ہو تب بھی اصول قائم نہیں رہے گا۔

استدلال کی یہ قسم جسے ہم نے معمہ کو حل کرنے کی بنیاد بنائی ہے استخراجی استدلال کہلاتی ہے۔ یہ استخراجی اس لیے کہلاتی ہے کہ ہم یہاں سابقہ اخذ کردہ بیان کے ذریعہ نتیجہ پر پہنچتے ہیں۔ مثال کے طور پر اوپر کے معمہ میں ہم نے یہ نتیجہ اخذ کیا کہ ہمیں صرف $\boxed{V}$ اور $\boxed{5}$ کو پلٹانے کی ضرورت ہے۔

استخراجی استدلال ہم کو یہ نتیجہ اخذ کرنے میں بھی مدد دیتا ہے کہ ایک مخصوص بیان صادق ہے۔

مثال کے طور پر ہم ایک دفعہ ثابت کر چکے ہیں کہ دو جفت اعداد کا حاصل ضرب ہمیشہ جفت عدد ہوتا ہے، ہم فوری طور پر نتیجہ اخذ کر لیتے ہیں کہ (بغیر تخمینہ کے) 56702×19992 کا حاصل جفت ہے کیونکہ 56702 اور 19992 جفت ہیں۔

استخراجی استدلال کی چند دوسری مثالوں پر غور کیجیے۔

(i) اگر ایک عدد '0' پر ختم ہوتا ہے تو وہ 5 سے قابل تقسیم ہے۔ 30 '0' پر ختم ہوتا ہے۔

اوپر کے دو بیانات کا استخراج ہم اس طرح کر سکتے ہیں 30، 5 سے قابل تقسیم ہے کیونکہ دیا گیا ہے کہ '0' پر ختم ہونے والا عدد 5 سے قابل تقسیم ہوتا ہے۔

(ii) چند گلوکار شاعر ہیں، تمام گیت کار شاعر ہیں۔

یہاں دو بیانات پر مبنی استخراج غلط ہے۔ (کیوں؟)

تمام گیت کار شاعر ہیں (غلط) کیونکہ ہم کو اس کا کامل یقین نہیں ہے۔ یہاں تین ممکنات ہیں۔ (i) تمام گیت کار شاعر ہو سکتے ہیں۔ (ii) چند شاعر ہو سکتے ہیں۔ (iii) گیت کاروں میں سے کوئی بھی شاعر نہیں ہے۔

آپ اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ اگر...... تب بیان استخراجی استدلال پر مبنی ہوتا ہے۔ ریاضی میں ہم یہ استدلال زیادہ استعمال کرتے ہیں۔ جیسا کہ، اگر خطی زاویوں کا جوڑ 180^0 ہو تب ہی مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوگا۔ اسی طرح ہم عدد 5 لکھنے کے لیے عشری نظام کا استعمال کرتے رہے ہیں۔ اگر دو عنصری نظام کو استعمال کریں گے تو ہمیں 5 کو 101 سے ظاہر کرنا پڑے گا۔

بدقسمتی سے ہماری روزمرہ زندگی میں ہم دلائل پر گفتگو نہیں کرتے۔ ہم اکثر غلط استدلال پر مبنی کئی نتائج اخذ کر لیتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر آپ کی سہیلی ایک دن آپ سے بات نہیں کرتی ہے تو آپ یہ نتیجہ اخذ کر لیتے ہیں کہ وہ آپ پر غصّہ ہے۔ جب کہ یہ بھی صحیح ہو سکتا ہے کہ ''اگر وہ مجھ پر غصّہ میں ہو تو وہ مجھ سے بات نہیں کرے گی'' یہ بھی ہو سکتا ہے کہ ''اگر وہ مصروف ہو تو مجھ سے بات نہیں کرے گی''۔

آپ روزمرہ حالات کے بعض نتائج کی جانچ کیوں نہیں کرتے؟ اور کیوں نہیں دیکھتے کہ وہ واجبی غیر واجبی دلائل پر مبنی تو نہیں؟

مشق 15.2

1. استخراجی استدلال کے ذریعہ ذیل کے جواب دیجیے۔

(i) انسان فانی ہے، جاوید ایک انسان ہے، ان دو بیانات کی بنیاد پر جاوید کے متعلق آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

(ii) تمام تلگو عوام ہندوستانی ہیں۔ 'x' ایک ہندوستانی ہے۔ کیا آپ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ 'x' تلگو عوام سے تعلق رکھتا ہے۔

(iii) مراقش کے لوگوں کی زبان سرخ ہوتی ہے۔ رحیم مراقش کا شہری ہے، ان دو بیانات کی بنیاد پر رحیم کے متعلق آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

(iv) نیچے کے کارٹون میں احمد کے استدلال میں کیا غلطی ہے؟

2. ایک بار پھر آپ کو چار کارڈ دیے گئے ہیں' ہر کارڈ کے ایک رخ پر ایک عدد لکھا ہے' اور دوسرے رخ پر ایک حرف۔ یہ دیکھنے کے لیے کہ اصول قائم رہتا ہے وہ دو کارڈس کونسے ہیں جس کو پلٹانے کی ضرورت پڑے گی؟

''اگر ایک کارڈ کے ایک رخ پر ایک حرف صحیح ہو' تب اس کے دوسرے رخ پر ایک طاق عدد ہوگا''

B	3	U	8

3. اس معمہ پر غور کیجیے' اس مربع سے ایک منتخبہ عدد معلوم کرنے کے لیے آپ کو کس کی ضرورت ہے؟

ذیل میں دیے گئے اشاروں میں سے 4 اشارے صحیح ہیں' لیکن عدد معلوم کرنے کے لیے وہ کارآمد نہیں۔ اس کو معلوم کرنے کے لیے چار اشارے ضروری ہیں۔

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

یہاں آٹھ اشارے دیے گئے ہیں۔

(a) عدد 9 سے بڑا ہے۔

(b) عدد 10 کا ضعف نہیں ہے۔

(c) عدد 7 کا ضعف ہے۔

(d) عدد طاق ہے۔

(e) عدد 11 کا ضعف نہیں ہے۔

(f) عدد 200 سے چھوٹا ہے۔

(g) اس کے اکائی کا ہندسہ دہائی کے ہندسہ سے بڑا ہے۔

(h) اس کے دہائی کا ہندسہ طاق ہے۔

عدد کیا ہے؟

کیا آپ مدد دینے والے چار اشارے اور مدد نہ دینے والے چار اشاروں کو الگ الگ کر سکتے ہیں؟

پہلے اشاروں کو سمجھئے اور اس سے باہر آنے والے عدد کو حذف کر دیجیے۔

جیسے: پہلے اشارہ سے ہم کو پتہ چلتا ہے کہ 1 سے 9 تک اعداد میں وہ عدد نہیں ہے۔(1 سے 9 تک اعداد کو حذف کر دیجیے)

معمہ کے ختم پر دیکھیئے کہ کونسا اشارہ اہم ہے اور کونسا نہیں؟

15.5 مسئلے' مفروضے اور موضوعے

اب تک ہم نے بیانات اور ان کی صداقت کی جانچ کے بارے میں سیکھا ہے' اس حصہ میں آپ پڑھیں گے کہ تین مختلف اقسام کے بیانات کو کس طرح تقسیم کیا جاتا ہے۔ ریاضی' ایک مسئلہ' ایک مفروضہ اور ایک موضوعہ پر مبنی ہوتی ہے۔

ہم نے پہلے ہی کئی مسئلوں پر غور کیا ہے۔ مسئلہ کیا ہے؟ ایک ریاضیاتی بیان جس کی صداقت کو ثابت کیا جا سکتا ہے' مسئلہ کہلاتا ہے۔ مثلاً ذیل کے بیانات مسئلے ہیں۔

مسئلہ 15.1 : ایک مثلث کے داخلی زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔

مسئلہ 15.2 : دو طاق طبعی اعداد کا حاصل ضرب طاق ہوتا ہے۔

مسئلہ 15.3 : دو متصلہ جفت طبعی اعداد کا حاصل ضرب 4 سے قابل تقسیم ہے۔

مفروضہ ایک بیان ہے جس کی صداقت پر ہم یقین رکھتے ہیں جو ہمارے ریاضیاتی فہم اور تجربہ پر مبنی ہوتا ہے اور یہی ریاضیاتی جبلت ہے۔ مفروضہ صادق یا کاذب ہوتا ہے جس کو ثابت کرنے پر وہ ایک ''مسئلہ'' میں تبدیل ہو جاتا ہے۔ اکثر ماہرین ریاضی نے حسابی نمونوں اور معموں کو حل کرنے کے لئے مفروضات سے مدد لی اور ریاضیاتی تخمینوں سے مسئلے حل کرتے ہوئے شہرت پائی۔ ہم ایسے ہی چند نمونوں پر غور کرتے ہیں' دیکھیں تو بھلا آپ اس سلسلہ میں اپنی ذہانت کو کس طرح استعمال کریں گے؟

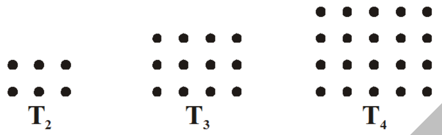
اعداد کے مکعب کا مطالعہ کرتے وقت اسلم نے غور کیا کہ اگر آپ تین متصلہ اعداد کو ضرب دیں اور اس میں درمیانی عدد کو جمع کریں تب آپ درمیانی عدد کا مکعب حاصل کریں گے۔

مزید متصلہ اعداد لے کر جانچ کیجیے

شکیل نے 8'7'6 لے کر اس مفروضہ کی جانچ کی۔ یہاں 7 درمیانی عدد ہے' اصول کے مطابق $6 \times 7 \times 8 + 7 = 343$ جو کہ ایک کامل مکعب ہے۔

مفروضہ n'n + 1 اور n + 2 لیتے ہوئے ایک عام نتیجہ پر پہنچیے۔ دوسری مثال بھی دیکھیے ۔

مثال (6) : ذیل کی جیومتریائی صف بندی اعداد کے تسلسل کو ظاہر کرتی ہے۔



(a) اگلے تین ارکان معلوم کیجیے۔

(b) 100 واں رکن معلوم کیجیے۔

(c) n واں رکن معلوم کیجیے۔

یہاں نقاط اس طرح سے ترتیب دیے گئے ہیں کہ وہ ایک مستطیل کی شکل اختیار کرتے ہیں۔

یہاں T1 = 2, T2 = 6, T3 = 12, T4 = 20,.......

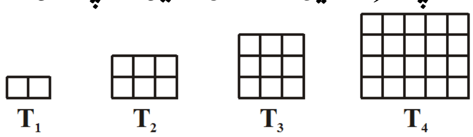
کیا آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ T_5 کیا ہوگا؟

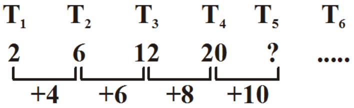
T_6 کے بارے میں آپ کا کیا خیال ہے؟ T_n کیا ہوگا؟

T_n کے لیے ایک مفروضہ بنائیے۔

اگر آپ مفروضہ ذیل کے مطابق بنائیں تو آپ کو اس سے مدد مل سکتی ہے۔

حل :





اس طرح $T_5 = T_4 + 10 = 20 + 10 = 30 = 5 \times 6$

T_7 کے لیے کوشش کیجیے ..... $T_6 = T_5 + 12 = 30 + 12 = 42 = 6 \times 7$

$T_{100} = 100 \times 101 = 10, 100$

$\therefore T_n = n \times (n + 1) = n^2 + n$

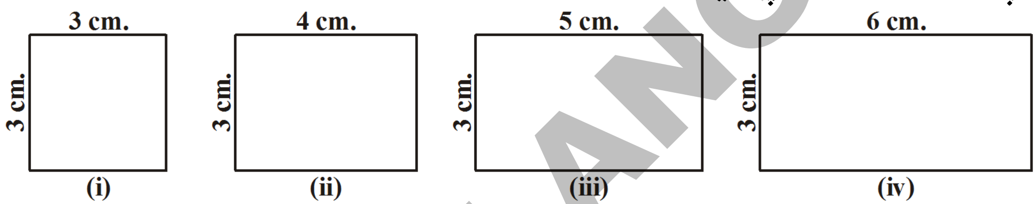
استدلال کی وہ قسم جو مختلف حالتوں یا معطیات کے سٹس کی جانچ نمونوں کے انکشاف اور نتائج قائم کرنے پر مبنی ہو' استخراجی استدلال کہلاتی ہے۔استخراجی استدلال مفروضہ بنانے کا ایک کارآمد طریقہ کار ہے۔

گولڈ بیاچ نے جو کہ ایک معروف ریاض داں تھا اعداد کے بعض نمونوں پر غور کرتے ہوئے دلچسپ دلائل پیش کئے۔

$6 = 3 + 3$	$8 = 3 + 5$	$10 = 3 + 7$
$12 = 5 + 7$	$14 = 11 + 3$	$16 = 13 + 3 = 11 + 5$

1743 میں گولڈ بیاچ نے ان نمونوں سے یہ نتیجہ نکالا کہ ہر جفت عدد جو 4 سے بڑا ہو دو مفرد اعداد کے حاصل جمع کے طور پر لکھا جاسکتا ہے۔(ضروری نہیں کہ یہ مفرد اعداد متفرق مفرد اعداد ہوں) اب تک یہ ثابت نہیں کیا جاسکا کہ گولڈ بیاچ کے یہ مفروضات صحیح ہیں یا غلط۔ ہوسکتا ہے کہ آپ ان نتائج کو ثابت کریں اور شہرت حاصل کرلیں!

لیکن بعض دفعہ چند ہی نمونوں کا دیکھنا ہمیں غلط نتائج کی طرف لیجاتا ہے۔جیسا کہ: جماعت ہشتم میں رحیم اور کریم نے باب ''رقبہ اور احاطہ'' پڑھتے وقت......ان نمونوں پر غور کیا۔

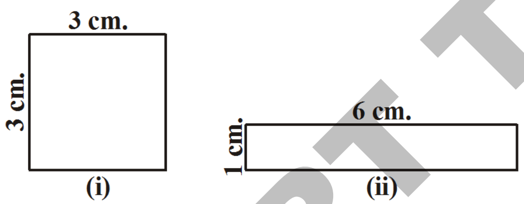


	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
احاطہ:	12سمر	14 سمر	16 سمر	18 سمر
رقبہ:	9مربع سمر	12مربع سمر	15مربع سمر	18مربع سمر

اور انہوں نے ایک مفروضہ قائم کرلیا کہ جب مستطیل کا احاطہ بڑھتا ہے تو اس کا رقبہ بھی بڑھتا ہے۔آپ کا کیا خیال ہے؟ کیا وہ صحیح ہیں؟

اس نمونہ کی جانچ کے دوران خلیل نے کچھ مستطیل اتارے اور رحیم اور کریم کے بیان کردہ مفروضہ کو غلط ثابت کیا۔

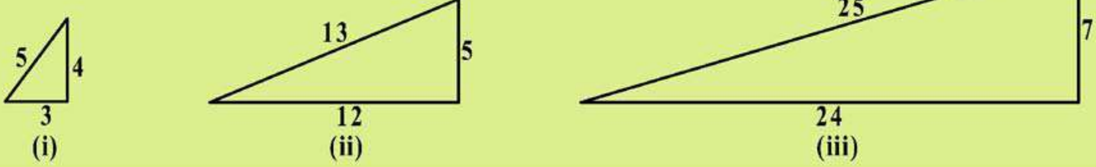
اس لیے آپ کو مفروضہ قائم کرتے وقت تمام پہلوؤں پر غور کرنا ہوگا۔



(i)	(ii)
احاطہ=12سمر	احاطہ=14سمر
رقبہ=9مربع سمر	رقبہ=6مربع سمر

کوشش کیجیے

فیثاغورث کی شہرت سے حسد کرتے ہوئے اس کے چھوٹے بھائی نے یہ دعویٰ کیا کہ قائمۃ الزاویہ مثلثات کے اضلاع کے درمیان ایک مختلف رشتہ ہے۔



لیتھا غورث مسئلہ: کسی بھی قائمۃ الزاویہ مثلث میں سب سے چھوٹے ضلع کا مربع دوسرے دو ضلعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

اس مفروضہ کی جانچ کیجیے آیا یہ صحیح ہے یا غلط۔

سوچیں تو بھلا! کیا ہم کو ریاضی میں ہر چیز کو ثابت کرنا ضروری ہے۔ اگر نہیں ہے تو کیوں نہیں؟

ریاضی میں بعض بیانات کو سچ تو مانا جاتا ہے لیکن انہیں ثابت نہیں کیا جاسکتا۔ ان کو (از خود دلائلی صداقتیں) کہا جاتا ہے۔ جس کو ہم بغیر ثابت کیے ہی سچ مان لیتے ہیں۔ یہ موضوعے کہلاتے ہیں۔ باب 3 میں ہم یوکلڈ کے نظریات اور موضوعوں کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ (آج کے دور میں ہم اقتباسات اور موضوعوں کے درمیان فرق نہیں کرتے اور یوں جیومٹری میں لفظ 'اقتباس' کا ہی استعمال کیا جارہا ہے)۔

مثلاً یوکلڈ کا پہلا نظریہ بیان کرتا ہے:

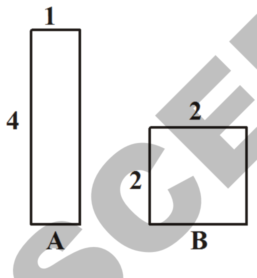
ایک خط مستقیم، ایک نقطہ سے کوئی بھی دوسرے نقطہ تک کھینچی جاسکتی ہے۔

اور تیسرا موضوعہ بیان کرتا ہے :

ایک دائرہ کوئی بھی مرکز اور کوئی بھی نصف قطر سے کھینچا جاسکتا ہے۔

یہ بیانات چونکہ بالکل صحیح نظر آتے ہیں یوکلڈ نے انہیں صحیح متصور کرلیا۔ کیوں؟ یہ اس وجہہ سے کہ ہم ہر چیز کو ثابت نہیں کرسکتے ہم کو کہیں نہ کہیں مفروضات کا سہارا لینا پڑتا ہے۔ ان موضوعوں کی بناء پر چند بیانات کو سچ قبول کرتے ہوئے منطقی اصول کو استعمال کرنا پڑتا ہے، تب ہی ہمارا علم وسیع ہوگا۔

آپ سوچتے ہوں گے کہ جب بیانات از خود سچ ظاہر ہوتے ہیں تو کیوں نہ ہم تمام بیانات کو سچ ہی قبول کرلیں؟ اس کی کئی وجوہات ہیں۔ اکثر ہمارے تخیّلات غلط ہوسکتے ہیں، تصویروں اور مثالوں سے دھوکہ ہوسکتا ہے، ایسے میں کسی بات کے صحیح ہونے کے لیے اسے ثابت کرنا ہی ایک یقینی امر ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر ہم میں سے کئی اس بات پر یقین کرلیتے ہیں کہ اگر ایک عدد کو دوسرے عدد میں جمع کیا جاتا ہے تو حاصل ہونے والا عدد ان اعداد سے بڑا ہوگا لیکن ہم جانتے ہیں کہ یہ ہمیشہ صحیح نہیں ہوتا



مثلاً $5 + (-5) = 0$ جو کہ 5 سے چھوٹا ہے۔

ان اشکال کو دیکھیے کس شکل کا رقبہ زیادہ ہے۔

دونوں یکساں رقبہ رکھتے ہیں حالانکہ B بڑا ظاہر ہورہا ہے۔

موضوعوں کے کارآمد ہونے کے بارے میں آپ کو حیرت ہوگی کہ ہمارے تخیلات اور ان اقدامات کی بنیاد پر جواز خود ظاہر ہوتے ہیں اور یوں ہم موضوعوں کا انتخاب کرتے ہیں۔ لیکن یہ ممکن ہے کہ مابعد ہمیں یہ پتہ چلے کہ کوئی موضوعہ صحیح نہیں ہے۔ اس امکان پر ہم ذیل کے نکات پیش نظر رکھیں گے۔

(i) کم سے کم موضوعوں کو لیجیے۔ خصوصیت سے یوکلڈ کے پانچ مفروضات اور موضوعوں سے ہم سیکڑوں مسئلے اخذ کرسکتے ہیں۔

(ii) خیال رہے کہ موضوعات کی وجود پر قائم رہیں

ہم کہتے ہیں کہ موضوعے وجود نہیں رکھتے، اگر ہم ایک موضوعے کو استعمال کرتے ہوئے دوسرے موضوعے کو غلط بتانا چاہتے ہیں تو ہم ذیل کے دو بیانات پر غور کریں گے۔ ہم یہ بتائیں گے کہ یہ نا قابل اعتبار ہیں۔

بیان (1) : کوئی مکمل عدد اپنے اگلے عدد کے مساوی نہیں ہوتا۔

بیان (2) : ایک مکمل عدد کو صفر سے تقسیم کریں تو صفر حاصل ہوتا ہے۔

(یاد کیجیے کہ صفر سے تقسیم غیر تعریف شدہ ہے۔ مگر فرض کر لیجیے کہ یہ ممکن ہے اور دیکھئیے کیا ہوتا ہے)

بیان (2) سے $\frac{1}{0} = a$ ہم حاصل کرتے ہیں، جہاں a کوئی مکمل عدد ہے۔ یہ دلالت کرتا ہے کہ $0 = 1$ لیکن یہ بیان (1) کو غلط ثابت کرتا ہے۔ جو یہ بیان کرتا ہے کہ کوئی مکمل عدد اپنے اگلے عدد کے مساوی نہیں ہوتا۔

(iii) ایک غلط موضوعہ آخرکار تضاد بیانی ہو جاتا ہے۔ جب ہم اس بیان کو اس طرح پاتے ہیں کہ بیان اور اس کا نفی دونوں صادق ہیں تب ہم کہتے ہیں کہ یہ ایک تضاد ہے۔ مثال کے طور پر بیان (1) اور بیان (2) پر دوبارہ غور کریں گے۔

بیان (1) سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $2 \neq 1$

مان لیجیے $x = y$

$$x \times x = xy$$

$$x^2 = xy$$

$$x^2 - y^2 = xy - y^2$$

$(x+y)(x-y) = y(x-y)$ بیان (2) سے ہم دونوں جانب $(x-y)$ کو تقسیم کر سکتے ہیں

تب $x + y = y$

لیکن $x = y$

اس لیے $x + x = x$

یا $2x = x$

ہمارے $2 = 1$

اس طرح ہمارے ہاں دو بیانات $1 \neq 2$ اور اس کا نفی $1 = 2$ صادق ہیں۔ یہ ایک تضاد ہے۔

یہ تضاد اس غلط موضوعہ کی وجہ سے ظاہر ہوتا کہ ایک مکمل عدد کو صفر سے تقسیم کرنے پر صفر حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح موضوعوں کے انتخاب کے لیے سوجھ بوجھ اور فراست درکار ہے۔ ہم کو یہ یقینی طور پر بتانا چاہیے کہ وہ نا قابل اعتبار نہ ہوں اور تضاد کا سبب نہ بنیں۔ موضوعوں کا انتخاب خود بعض اوقات نئی دریافتوں کی طرف رہنمائی کرتا ہے۔

ایک موضوعہ، ایک مسئلہ اور ایک مفروضہ کے مابین فرق کا اعادہ کرتے ہوئے ہم اس بحث کو ختم کرتے ہیں۔ ایک موضوعہ وہ ریاضیاتی بیان ہے جو بغیر ثابت کیے ہی صادق مانا جاتا ہے۔ ایک مفروضہ وہ ریاضیاتی بیان ہے جس کا صادق یا کاذب ہونا طے شدہ نہیں ہے جب کہ مسئلہ وہ ریاضیاتی بیان ہے جس کی صداقت منطقی طور پر ثابت کی جا چکی ہے۔

مشق 15.3

1. (i) کوئی تین متصلہ طاق اعداد لیجیے اور ان کا حاصلِ ضرب معلوم کیجیے مثال کے طور پر

$1 \times 3 \times 5 = 15, 3 \times 5 \times 7 = 105, 5 \times 7 \times 9$ - .....

(ii) کوئی تین متصلہ جفت اعداد لیجیے اور انہیں جمع کیجیے مثلاً

$2 + 4 + 6 = 12, 4 + 6 + 8 = 18, 6 + 8 + 10 = 24, 8 + 10 + 12 = 30$ وغیرہ وغیرہ

کیا ان مجموعوں میں آپ کو کوئی ترتیب نظر آتی ہے؟ ان کے بارے میں آپ کا استدلال کیا ہو سکتا ہے؟

2. پاسکل کے مثلث کا اعادہ کیجیے

سطر (1) : $1 = 11^0$

سطر (2) : $11 = 11^1$

سطر (3) : $121 = 11^2$

سطر (4) اور سطر (5) کے لیے ایک مفروضہ بنائیے۔

کیا آپ کا مفروضہ اس کی متابعت میں ہے؟ کیا آپ کا مفروضہ سطر (6) کی مطابقت میں ہے؟

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

3. ذیل کے نمونے کو دیکھیے

(i) $28 = 2^2 \times 7^1$، اجزاء کی جملہ تعداد $(2+1)(1+1) = 3 \times 2 = 6$

28، 6 اجزاء سے قابل تقسیم ہے جو کہ 1, 2, 4, 7, 14, 28 ہیں۔

(ii) $30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$، اجزاء کی جملہ تعداد $(1+1)(1+1)(1+1) = 2 \times 2 \times 2 = 8$

30، 8 اجزاء سے قابل تقسیم ہے جو کہ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 ہیں۔ نمونہ معلوم کیجیے۔

(اشارہ: ہر مفرد اساس کی قوت نما کا حاصل ضرب 1 + ہے)

4. ذیل کے نمونہ کو دیکھیے

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

$11111^2 = 123454321$

ذیل میں ہر ایک کے لیے ایک مفروضہ لکھیئے

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

آپ کے مفروضہ کی صداقت کی جانچ کیجیے۔

5. اس کتاب میں درج پانچ موضوعوں کی فہرست بنائیے۔

6. کثیر رکنی $p(x) = x^2 + x + 41$ میں x کی مختلف قدروں کو رکھتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ $P(x)$ مفرد ہے؟ کیا x 'N کا رکن ہے؟ مساوات میں $x = 41$ درج کیجیے تب آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟

15.6 ریاضیاتی ثبوت کیا ہے؟

ریاضی میں ثبوتوں کو پڑھنے سے پہلے آپ کو بیانات کی تصدیق کے لیے کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر: آپ سے پوچھا گیا ہوگا کہ اس مثال کی تصدیق کریں کہ ''دو طاق اعداد کا حاصل ضرب طاق ہوتا ہے''۔ آپ بلا منصوبہ کوئی دو طاق اعداد 15 اور 2005 لیجیے اور جانچیے کہ $15 \times 2005 = 30075$ طاق ہے اور ایسی مزید مثالیں آپ حل کر سکتے ہیں۔

آپ کو کمرہ جماعت میں متعدد مثلثات اتارنے اور ان کے داخلی زاویوں کے مجموعوں کی پیمائش کرنے کے لیے کہا گیا ہوگا۔ زاویوں کی پیمائش میں غلطی کے باوجود جب آپ تینوں زاویوں کو جمع کرتے ہیں تو 180^0 حاصل ہوتا ہے۔

اس طریقہ میں کیا خامی ہے؟ ایسے متعدد مسئلے ہیں جو جانچ کے ذریعہ ثابت ہوتے ہیں۔ تاہم آپ جو بیان بنا رہے ہیں اس کے صادق ہونے کا یقین کرتے ہیں، لیکن ہم ہر صورت میں اس کے صحیح ہونے کا یقین نہیں کر سکتے۔ مثال کے طور پر ہم متعدد جفت اعداد کی جوڑیوں کو ضرب دے کر اندازہ لگاتے ہیں کہ دو جفت اعداد کا حاصل ضرب جفت ہوتا ہے۔ ہم تمام ممکنہ جفت اعداد کی جوڑیوں کو ضرب دے کر جانچ نہیں کر سکتے۔ کیونکہ جفت اعداد کے جوڑ غیر مختتم ہیں۔ اس طرح چند ایسے مثلثات بھی ہو سکتے ہیں جن کو آپ نے نہیں بنایا ہوگا اور جن کے داخلی زاویوں کا مجموعہ 180^0 سے کم ہوگا۔

بعض دفعہ جانچ بھی ہمیں گمراہ کرتی ہے، مثال کے طور پر ہم نے کبھی پاسکل کے مثلث سے (مشق سابقہ کی تصدیق کے مطابق سوال نمبر 2) کا نتیجہ اخذ کرنے کی کوشش کی ہوگی۔ $11^5 = 15101051$ لیکن اس کی صحیح قدر $11^5 = 161051$ ہے۔

اس لیے آپ کو ایک ایسے طریقہ کار کی ضرورت ہوگی جو صرف مخصوص صورتوں کی تصدیق پر منحصر نہ ہو۔ اس کے علاوہ ایک اور طریقہ ہے جسے ایک بیان کو ثابت کرنے کا نام دیا گیا ہے۔ طریقہ جس کے ذریعہ صرف منطقی دلائل پر مبنی ریاضیاتی بیانات کی صداقت کو پیش کیا جاتا ہے 'ریاضیاتی ثبوت' کہلاتا ہے۔

ایک ریاضیاتی بیان کو غلط ثابت کرنے کے لیے ہم کو ایک واحد مخالف مثال پیش کرنی ہوتی ہے۔ لہٰذا ہزاروں صورتوں کے لیے جانچ کرتے ہوئے ایک ریاضیاتی بیان کی صداقت قائم کرنا جہاں ناکافی ہے' وہاں ایک بیان کو غلط ثابت کرنے کے لئے ایک مخالف مثال دینا کافی ہے۔

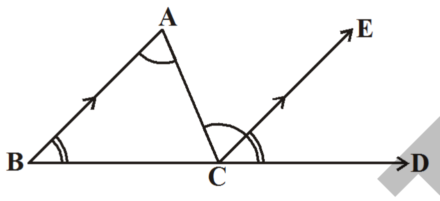
آیئے دیکھتے ہیں کہ ثابت کرنے کا ہمارا طریقہ کیا ہونا چاہیے۔

(i) پہلے ہم کو واضح طور پر سمجھ لینا چاہیے کہ ہم کو کیا ثابت کرنے کی ضرورت ہے' تب اس کو آگے کیسے بڑھانا چاہیے۔

(ii) ریاضیاتی بیانات کی سلسلہ وار ترتیب سے ایک 'ثبوت' بنتا ہے۔ ہر بیان ایک ثبوت ہوتا ہے جس کو سابقہ دلیل سے یا مسئلہ کے ثبوت سے یا کسی موضوعہ سے یا دی گئی معلومات سے منطقی طور پر اخذ کیا گیا ہو۔

(iii) ریاضیاتی صادق بیانات کے سلسلہ کا نتیجہ' جو کہ ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں منطقی طور پر صحیح ترتیب میں ہونا چاہیے جو کہ مسئلہ کے حل کرنے کے لیے مطلوب ہے۔

اس کو سمجھنے کے لیے ہمیں مسئلہ کا تجزیہ کرنا ضروری ہے تاکہ ثبوت فراہم کیا جا سکے۔ آپ یہ مسئلہ پہلے ہی باب 4 میں پڑھ چکے ہیں۔ ہم مسئلوں کو ثابت کرنے کے لیے اکثر اشکال سے مدد لیتے ہیں جو کہ بہت اہم ہے لیکن ثبوت میں ہر مرحلہ کو صرف ترکیبی انداز میں پیش کیا جائے۔ اکثر ہم حسابی بیانات دیتے ہیں جیسے دو خطوط ایک دوسرے پر عمود وار نظر آتے ہیں تو ان کے درمیان کا زاویہ 90^0 ہوتا ہے۔ صرف اندازے پر نتائج نہ نکالیں اس قسم کے بیانات پر ہمیں چوکس رہنے کی ضرورت ہے۔



مسئلہ 15.4 : ایک مثلث کے داخلی زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔

ثبوت : مثلث ABC پر غور کیجیے

ہم کو ثابت کرنا ہے کہ

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$$

ایک خط CE کھینچیے جو C سے BA کے متوازی ہو اور خط BC کو D تک بڑھایئے۔

BA' CE کے متوازی ہے اور AC قاطع خط ہے۔

اس لیے $\angle CAB = \angle ACE$ ' متبادل زاویئے ہیں .... (1)

اس طرح $\angle ABC = \angle DCE$ ' متناظر زاویئے ہیں .... (2)

مساوات (1) اور (2) کو جمع کرنے پر

$$\angle CAB + \angle ABC = \angle ACE + \angle DCE \quad \text{............ (3)}$$

دونوں جانب $\angle BCA$ جمع کیجیے۔

$$\therefore \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE \quad \text{............ (4)}$$

لیکن $\angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180^0$ لہٰذا یہ زاویئے ایک خط مستقیم بنائیں گے۔............ (5)

اس لیے $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^0$

اب ہم دیکھتے ہیں کہ ثبوت کا ہر مرحلہ کس طرح ترکیبی طور پر جڑا ہوا ہے۔

مرحلہ (1) : ہمارا مسئلہ مثلثات کی خاصیت سے تعلق رکھتا ہے۔اس لیے ہم مثلث ABC سے شروع کرتے ہیں۔

مرحلہ (2) : ایک خط BA‘CE کے متوازی کھینچئے اور BC کو D تک توسیع دیجیے۔

مرحلہ (3) : BA‘CE کے متوازی ہے (عمل) اور دو متوازی خطوط کے قاطع خط سے بننے والے متبادل زاویئے اور نظیری زاویئے مساوی ہوتے ہیں۔(گزشتہ مسئلہ کی رو سے) ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ $\angle CAB = \angle ACE$ اور $\angle ABC = \angle DCE$

مرحلہ (4) : یہاں ہم $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE$ کو اخذ کرنے کے لیے ہم یوکلڈ کا موضوعہ استعمال کرتے ہیں جو بتاتا ہے کہ ”اگر مساوی حسابی اجزاء‘ مساوی حسابی اجزاء میں جمع کیے جاتے ہیں تو وہ کل اجزاء کے مجموعے بھی مساوی ہوتے ہیں“۔

یعنی ایک مثلث کے تینوں داخلی زاویوں کا مجموعہ ایک خط مستقیم کے زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

مرحلہ (5) : یہاں اختتامی مرحلہ کے طور پر ہم یوکلڈ کا موضوعہ استعمال کرتے ہیں کہ ”اجزاء جو یکساں اجزاء کے مساوی ہوتے ہیں وہ ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں“۔

لہٰذا $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180°$

اب ہمیں یہی ثابت کرنا تھا‘ مسئلہ 15.2 اور مسئلہ 15.3 کو بغیر تجزیہ کیے ثابت کیجیے۔

مسئلہ 15.5 : دو طاق طبعی اعداد کا حاصل ضرب طاق ہوتا ہے۔

ثبوت : فرض کیجیے کہ x اور y کوئی دو طاق طبعی اعداد ہیں۔

ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ xy طاق ہے۔

یہاں x اور y طاق ہیں‘ ان کو $x = (2m - 1)$ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ کوئی طبعی عدد 'm' اور $y = 2n - 1$ کے لیے کوئی طبعی عدد 'n' کے لیے

تب $xy = (2m - 1)(2n - 1)$

$$= 4mn - 2m - 2n + 1$$

$$= 4mn - 2m - 2n + 2 - 1$$

$$= 2(2mn - m - n + 1) - 1$$

اوپر کی مساوات میں $2mn - m - n + 1 = l$ رکھیے۔ جہاں 'l' کوئی طبعی عدد ہے۔

$$= 2l - 1, l \in \mathrm{N}$$

جو کہ ایک طاق عدد ہے۔

مسئلہ 15.6 : کسی بھی دو متصلہ جفت طبعی اعداد کا حاصل ضرب 4 سے قابل تقسیم ہے۔

کوئی دو متصلہ جفت اعداد، چند طبعی اعداد n کے لیے، $2m$، $2m + 2$ کی شکل میں ہوں گے۔ ہم کو ثابت کرنا ہے کہ 4، $2m(2m+2)$ سے قابل تقسیم ہے۔ (آپ از خود ثابت کرنے کی کوشش کیجیے)

ہم اس باب کو چند نکات پر یہ بتاتے ہوئے ختم کرتے ہیں کہ کس طرح ریاضی دانوں نے نتائج اخذ کیے اور کیسے غیر منظّم شدہ ثبوت کو با قاعدہ بنایا، جیسا کہ اوپر بتایا گیا ہے کہ ہر ثبوت کے لیے ایک کلیدی نظریہ ہوتا ہے۔ ایک ریاضی داں کشف اور اظہار کے وصف کا فطری رجحان رکھتا ہے اور اسی بنیاد پر وہ اپنی فکر، سوچ اور دلائل کے ذریعہ تجربات کرتا ہے، انہی کوششوں کے نتائج اسے بالآخر مسئلہ کے کل تک پہنچاتے ہیں۔ تخلیقی پہلوؤں کے دلائل کو یکجا کرنے کے بعد ہی ثبوت فراہم ہوتا ہے۔

ہم نے مثالوں کے ساتھ استخرائی استدلال اور استخراجی استدلال دونوں پر بحث کی۔

یہاں یہ بتانا بیجا نہ ہوگا کہ عظیم ہندوستانی ریاضی داں سرینواس رامانجن نے اپنے وجدانی وصف کا بہتر استعمال کرتے ہوئے اعداد سے متعلق مسئلے دنیا کو پیش کیے رامانجن کے متعدد نظریات صحیح ثابت ہوئے۔

مشق 15.4

1. بتلائیے کہ ذیل میں کون سے ریاضیاتی بیانات ہیں اور کون سے نہیں؟ وجہ بتلائیے۔
   - (i) اس کی آنکھیں نیلی ہیں۔
   - (ii) $x + 7 = 18$
   - (iii) آج اتوار نہیں ہے۔
   - (iv) ہر گنتی کے عدد x کے لیے $x + 0 = x$
   - (v) اب کیا وقت ہو رہا ہے؟
2. ذیل کے بیانات کو غلط ثابت کرنے کے لیے مخالف مثالیں دیجیے۔
   - (i) ہر مستطیل ایک مربع ہے۔
   - (ii) کوئی صحیح اعداد x اور y کے لیے $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$
   - (iii) اگر n ایک مکمل عدد ہے تب $2n^2 + 11$ ایک مفرد ہے۔
   - (iv) دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں اگر ان کے تمام متناظر زاویے مساوی ہوں۔
   - (v) ایک چار ضلعی جس کے تمام ضلعے مساوی ہوں ایک مربع ہوتا ہے۔
3. ثابت کیجیے کہ دو طاق اعداد کا مجموعہ جفت ہوتا ہے۔
4. ثابت کیجئے کہ دو جفت اعداد کا حاصل ضرب ایک جفت عدد ہوتا ہے۔

5. ثابت کیجیے کہ اگر x طاق ہے تب x^2 بھی طاق ہے۔

6. جانچ کیجیے کہ وہ کس طرح کام کرتا ہے؟

(i) ایک عدد منتخب کیجیے' اس کو دوگنا کیجیے اس میں اپنا مفروضہ عدد کو جمع کیجیے۔ تین سے تقسیم کیجیے۔ 4 جمع کیجیے۔ اپنے عدد کو تفریق کیجیے۔ آپ کا نتیجہ 7 ہے۔

(ii) کوئی تین ہندسی عدد لکھیئے (مثلاً 425) ان ہندسوں کو ایسی ہی ترتیب میں دہراتے ہوئے ایک چھ ہندسی عدد بنائیے۔ (425425) آپ کا نیا عدد 7' 11 اور 13 سے قابل تقسیم ہے۔

ہم نے کیا سیکھا؟

1. جملے جن کو کسی اصول پر جانچا جا سکتا ہو' بیانات کہلاتے ہیں۔ ان کے صحیح یا غلط ہونے کے معیار کچھ بھی ہو سکتے ہیں۔
2. ریاضیاتی بیانات' تمام بیانات سے مختلف ہوتے ہیں' انہیں ثبوت کے ذریعہ غلط ثابت کیا جا سکتا ہے۔
3. بعض نمونوں کے مشاہدہ اور اصولوں کے لحاظ سے ریاضیاتی بیانات تشکیل دیے جاتے ہیں۔ مفروضہ وہ خیال ہے جو مشاہداتی حس کو بیان کرتا ہے۔
4. وہ طریقہ جس کے ذریعہ استدلال کی بنیاد پر بیانات کی صداقت کو پیش کیا جاتا ہے 'ریاضیاتی ثبوت' کہلاتا ہے۔
5. موضوعے وہ بیانات ہیں جو بغیر ثبوت کے بھی صحیح مانے جاتے ہیں۔
6. مفروضہ وہ بیان ہے جسے ہم ریاضیاتی قیاس کی اساس پر صحیح سمجھتے ہیں لیکن ہم نے اسے ہنوز ثابت نہیں کیا ہے۔
7. ''مسئلہ'' وہ ریاضیاتی بیان ہے جس کی صداقت ثابت کی جا چکی ہے۔
8. ایک ریاضیاتی بیان کو مفرد منطقی طریقہ سے ثابت کرنا استخراجی دلیل کہلاتی ہے۔
9. ایک ثبوت ریاضیاتی بیانات کی سلسلہ وار ترتیب ہے۔
10. مسئلہ کو ثابت کرنے کا طریقہ یہ ہے کہ کسی مسئلہ کے دیے ہوئے مفروضات سے شروع کرتے ہوئے مرحلہ بہ مرحلہ منطقی انداز میں ثبوت فراہم کیا جائے۔
11. ثبوت ایسے بھی فراہم کیا جاتا ہے کہ جس میں مفروضات سے شروع کرتے ہوئے مطلوبہ نتیجہ کا تضادی نتیجہ اخذ کیا جاتا ہے۔ یہ طریقہ بھی استخراجی دلیل کا ایک اور انداز ہے۔ (یہ وہ طریقہ عمل ہے جس کے ذریعہ ہم مطلوبہ نتیجہ پر پہنچتے ہیں)۔
12. استخراجی استدلال واضح بیانات کی صداقت کو جانچنے کا ایک طریقہ ہے۔
13. استخرائی دلیل مواد کی مختلف صورتوں یا سٹس کی جانچ کرنے' نمونوں کی ترتیب معلوم کرنے اور نتائج اخذ کرنے کے لیے کیا جانے والا طریقہ ہے۔

جوابات
Answers

مشق 1.1

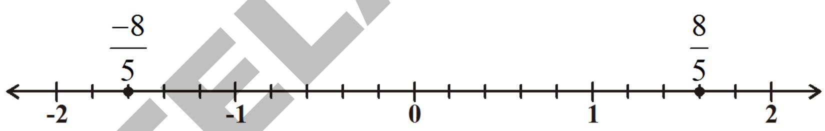

.1 .a -5 ، $\frac{22}{7}$ ، $\frac{-2013}{2014}$

.b ایک عدد جس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جہاں $q \neq 0$ ؛ p ‘ q حقیقی اعداد ہیں۔ایک ناطق عدد کہلاتا ہے۔

.2 (i) $\frac{3}{7}$ (ii) 0 (iii) -5

(iv) 7 (v) -3

.3 $\frac{33}{32}, \frac{17}{16}, \frac{11}{8}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$ .4 $\frac{79}{120}, \frac{13}{20}, \frac{19}{30}$

.5


.6 .I (i) 0.242 (ii) 0.708 (iii) 0.4 (iv) 28.75

.II (i) $0.\overline{6}$ (ii) $-0.\overline{694}$ (iii) $3.\overline{142857}$ (vi) $1.\overline{2}$

.7 (i) $\frac{9}{25}$ (ii) $\frac{77}{5}$ (iii) $\frac{41}{4}$ (iv) $\frac{13}{4}$

.8 (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{35}{9}$ (iii) $\frac{12}{33}$ (iv) $\frac{563}{180}$

.9 (i) ہاں (ii) نہیں (iii) نہیں (iv) نہیں

مشق 1.2


.1 (i) غیر ناطق (ii) ناطق (iii) غیر ناطق

(iv) ناطق (v) ناطق (vi) غیر ناطق

2. ناطق اعداد: -1، $\frac{13}{7}$، 1.25، $21.\bar{8}$، 0

غیر ناطق اعداد: $\sqrt{2}$، $\sqrt{7}$، π، $2.131415.....$، $1.1010010001.....$

3. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

4. $0.71727374.....$، $0.761661666.....$ 5. $\sqrt{5} = 2.236$

6. $2.645768.....$ 8. $\sqrt{5}$، $\sqrt{6}$

9. (i) صادق (ii) صادق (iii) صادق $\sqrt{3}$ (iv) صادق $\sqrt{6}$

(v) صادق ($\sqrt{8}$) (vi) کاذب $\frac{3}{7}$

مشق 1.4

1. (i) $10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$ (ii) 20 (iii) $10+2\sqrt{21}$

2. (i) غیرناطق (ii) غیرناطق (iii) غیرناطق (iv) غیرناطق (v) غیرناطق (vi) غیرناطق (vii) ناطق

3. (i) غیرناطق (ii) ناطق (iii) غیرناطق (iv) غیرناطق (v) غیرناطق (vi) ناطق

4. π ایک غیرناطق عدد ہے لیکن اصم نہیں

5. (i) $\frac{3-\sqrt{2}}{7}$ (ii) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (iv) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

6. (i) $17-12\sqrt{2}$ (ii) $6-\sqrt{35}$ (iii) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$ (iv) $\frac{9\sqrt{15}-3\sqrt{10}-3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{25}$

7. 0.25

8. (i) 2 (ii) 2 (iii) 5 (iv) 64 (v) 9 (vi) $\frac{1}{6}$

9. -8

10. (i) $a = 5$، $b = 2$ (ii) $a = \frac{-19}{7}$، $b = \frac{5}{7}$

11. $\sqrt{6}+\sqrt{5}$

مشق 2.1

I. 1. (i) 5 (ii) 2 (iii) 0 (iv) 6 (v) 2 (vi) 1

2. (i) کثیر رکنی (ii) کثیر رکنی (iii) نہیں، کیونکہ یہ دو متغیرات رکھتا ہے۔

(iv) یہ کثیر رکنی نہیں ہے کیونکہ اس کا قوت نما منفی ہے۔

(v) یہ کثیر رکنی نہیں ہے کیونکہ x کا قوت نما ایک غیر منفی صحیح عدد نہیں ہے۔

(vi) ایک متغیر میں کثیر رکنی نہیں ہے کیونکہ یہ دو متغیرات رکھتا ہے۔

3. (i) 1 (ii) -1 (iii) $\sqrt{2}$ (iv) 2

(v) $\frac{\pi}{2}$ (vi) $\frac{-2}{3}$ (vii) 0 (viii) 0

4. (i) دودرجی (ii) مکعبی (iii) دودرجی (iv) خطی

(v) خطی (vi) دودرجی

5. (i) صادق (ii) کاذب (iii) کاذب (iv) کاذب

(v) صادق (vi) صادق

مشق 2.2

1. (i) 3 (ii) 12 (iii) 9 (iv) $\frac{3}{2}$

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2,4,4 (iii) 0,1,8 (iv) -1,0,3

(v) 2,0,0

3. (i) ہاں (ii) نہیں (iii) ہاں (iv) نہیں، ہاں

(v) ہاں (vi) ہاں (vii) ہاں، نہیں (viii) ہاں، نہیں

4. (i) -2 (ii) 2 (iii) $\frac{-3}{2}$ (iv) $\frac{3}{2}$

(v) 0 (vi) 0 (vii) $\frac{-q}{p}$

5. $a = \frac{-2}{7}$ 6. $a = 1$ ، $b = 0$

مشق 2.3

1. (i) 0 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) 1

(iv) $-\pi^3+3\pi^2-3\pi+1$ (v) $\frac{-27}{8}$

2. $5p$ 3. جزو ضربی نہیں ہے 5 بطور باقی 4. -3 5. $\frac{-13}{3}$

6. $\frac{-13}{3}$ 7. 8 8. $\frac{21}{8}$ 9. $a = 7$ ، $b = -12$

مشق 2.4

1. (i) ہاں (ii) نہیں (iii) نہیں (iv) نہیں

2. (i) ہاں (ii) ہاں (iii) ہاں (iv) ہاں (v) ہاں

7. (i) $(x-1)(x+1)(x-2)$ (ii) $(x+1)(x+1)(x-5)$ (iii) $(x+1)(x+2)(x+10)$ (iv) $(y+1)(y+1)(y-1)$

9. $a = 3$

10. $(y-2)(y+3)$

مشق 2.5

1. (i) $x^2 + 7x + 10$ (ii) $x^2 - 10x + 25$ (iii) $9x^2 - 4$ (iv) $x^4 - \frac{1}{x^4}$ (v) $1 + 2x + x^2$

2. (i) 9999 (ii) 998001 (iii) $\frac{9999}{4} = 2499\frac{3}{4}$ (iv) 251001 (v) 899.75

3. (i) $(4x+3y)^2$ (ii) $(2y-1)^2$ (iii) $\left(2x+\frac{y}{5}\right)\left(2x-\frac{y}{5}\right)$ (iv) $2(3a+5)(3a-5)$ (v) $(x+3)(x+2)$ (vi) $3(P-6)(P-2)$

4. (i) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz$
(ii) $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$
(iii) $4a^2 + 25b^2 + 9c^2 - 20ab - 30bc + 12ab$
(iv) $\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} + 1 - \frac{ab}{4} - b + \frac{a}{2}$
(v) $p^3 + 3p^2 + 3p + 1$
(vi) $x^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2 - \frac{8}{27}y^3$

5. (i) $(-5x + 4y + 2z)^2$ (ii) $(3a + 2b - 4c)^2$

6. 29

7. (i) 970299 (ii) 1,0,61,208 (iii) 99,40,11992 (iv) 100,30,03,001

8. (i) $(2a+b)^3$ (ii) $(2a-b)^3$ (iii) $(1-4a)^3$ (iv) $\left(2p-\frac{1}{5}\right)^3$

10. (i) $(3a+4b)(9a^2 - 12ab + 16b^2)$ (ii) $(7y-10)(49y^2 + 70y + 100)$

11. $(3x + y + z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3xz)$

14. (i) -630 (ii) 16380 (iii) $\frac{-5}{12}$ (iv) -0.018

15. (i) $(2a+3)(2a-1)$ (ii) $(2a+3)(2a-1)$

16. (i) $3x(x-2)(x+2)$ (ii) $4(3y+5)(y-1)$

مشق 3.1

1. (i) 3 (ii) 13 (iii) 6 (iv) $180°$

2. (a) نقطہ،مستوی،خط (b) صادق (c) صادق (d) صادق (e) صادق

7. لامتناہی
8. $180°$ سے کم زاویہ پر قاطع خط قطع کرتے ہیں۔

9. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$

مشق 4.1

2. (i) زاویہ انعکاس (ii) قائم زاویہ (iii) حادہ زاویہ

3. (i) کاذب (ii) صادق (iii) کاذب (iv) کاذب
(v) صادق (vi) صادق (vii) کاذب (viii) کاذب

4. (i) $90°$ (ii) $180°$ (iii) $210°$

مشق 4.2

1. $x = 36°$ $y = 54°$ $z = 90°$

2. (i) $x = 23°$ (ii) $x = 59°$ (iii) $x = 20°$ (iv) $x = 8°$

3. $\angle BOE = 30°$، $\angle COE$ کا زاویہ انعکاس $= 250°$

4. $\angle C = 126°$

8. $\angle XYQ = 122°$ $\angle QYP = 302°$

مشق 4.3

2. $x = 126°$ $y = 54°$ $z = 90°$

3. $\angle AGE = 126°$ $\angle GEF = 36°$ $\angle FGE = 54°$

4. $\angle QRS = 60°$
5. $\angle ACB = \angle z = \angle x + \angle y$

6. $a = 40°$، $b = 100°$

7. (i) $\angle 3, \angle 5, \angle 7, \angle 9, \angle 11, \angle 13, \angle 15$
(ii) $\angle 4, \angle 6, \angle 8, \angle 10, \angle 12, \angle 14, \angle 16$

8. $x = 60°$ $y = 59°$

9. $x = 40°$ $y = 40°$

10. $x = 63°$ $y = 18°$

11. $x = 68°$ $y = 11°$

13. $x = 50°$ $y = 77°$

15. (i) $x = 36°$؛ $y = 108°$ (ii) $x = 35°$ (iii) $x = 29°$

16. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 80°$؛ $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 100°$

17. $x = 20°$ $y = 60°$ $z = 120°$

18. $x = 55°$ $y = 35°$ $z = 125°$

19. (i) $x = 140°$ (ii) $x = 100°$ (iii) $x = 250°$

مشق 4.4

1. (i) $x = 110°$ (ii) $z = 130°$ (iii) $y = 80°$

2. $\angle 1 = 60°$ 3. $x = 35°, y = 51°$ 5. $x = 50°$ $y = 20°$

6. $x = 70°$ $y = 40°$ 7. $x = 30°$ $y = 75°$

8. $\angle PRQ = 65°$ 9. $\angle OZY = 32°$؛ $\angle YOZ = 121°$

10. $\angle DCE = 92°$ 11. $\angle SQT = 60°$ 12. $z = 60°$

13. $x = 37°$ $y = 53°$ 14. $\angle A = 50°$ $\angle B = 75°$

15. (i) $78°$ (ii) $\angle ADE = 67°$ (iii) $\angle CED = 78°$

16. (i) $\angle ABC = 72°$ (ii) $\angle ACB = 72°$

(iii) $\angle DAB = 27°$ (iv) $\angle EAC = 32°$

17. $x = 96°$ $y = 120°$

مشق 5.1

1. (i) پانی کی ٹانکی (ii) جناب 'J' کا مکان

(iii) اسٹریٹ (گلی) ـ 2' مشرقی سمت میں جاتے وقت سیدھی جانب کا آخری مکان۔

(iv) اسٹریٹ (گلی) ـ 4' مشرقی سمت میں جاتے وقت سیدھی جانب کی پہلی عمارت۔

(v) اسٹریٹ (گلی) ـ 4' مشرقی سمت میں جاتے وقت دائیں جانب کی آخری عمارت۔

مشق 5.2

1. (i) Q_2 (ii) Q_4 (iii) Q_1 (iv) Q_3

(v) Y ـ محور (vi) X ـ محور (vii) X ـ محور (viii) Y ـ محور

1. (i) پہلا مختص یا فصلہ : 4
دوسرا مختص یا معین: 8–
(ii) پہلا مختص یا فصلہ : 5–
دوسرا مختص یا معین : 3
(iii) پہلا مختص یا فصلہ: 0
پہلا مختص یا معین: 0
(iv) پہلا مختص یا فصلہ : 5
دوسرا مختص یا معین: 0
(v) پہلا مختص یا فصلہ: 0
دوسرا مختص یا معین: 8–

3. (ii) Y-محور : (0, 13)
(iv) X-محور : (−2, 0)
(v) Y-محور : (0, −8)
(vi) X-محور : (7, 0)
(vii) مبداء : (0, 0)

4. (i) −7 (ii) 7 (iii) R (iv) P
(v) 4 (vi) −3

5. (i) کاذب (ii) صادق (iii) صادق (iv) کاذب
(v) کاذب (vi) صادق

مشق 5.3

2. نہیں‘ (5, -8) ربع Q_4 میں اور (-8, 5) ربع Q_2 میں واقع ہے۔
3. دیئے گئے تمام نقاط Y-محور کے متوازی خط پر واقع ہیں جو ایک اکائی کے فاصلے پر ہے۔
4. دیئے گئے تمام نقاط X-محور کے متوازی خط پر واقع ہیں جو 4 اکائیوں کے فاصلے پر ہے۔

مشق 6.1

1. نہیں‘ (5, -8) ربع Q_4 میں اور (-8, 5) ربع Q_2 میں واقع ہے۔

	(i)	$a = 8$	$b = 5$	$c = -3$
	(ii)	$a = 28$	$b = -35$	$c = 7$
	(iii)	$a = 93$	$b = 15$	$c = -12$
	(iv)	$a = 2$	$b = 5$	$c = 0$
	(v)	$a = \frac{1}{3}$	$b = \frac{1}{4}$	$c = -7$
	(vi)	$a = \frac{3}{2}$	$b = 1$	$c = 0$
	(vii)	$a = 3$	$b = 5$	$c = -12$
2.	(i)	$a = 2$	$b = 0$	$c = -5$
	(ii)	$a = 0$	$b = 1$	$c = -2$
	(iii)	$a = 0$	$b = \frac{1}{7}$	$c = -3$
	(iv)	$a = 1$	$b = 0$	$c = \frac{14}{13}$

3. (i) $x + y = 34$ (ii) $2x - y + 10 = 0$

(iii) $x - 2y - 10 = 0$ (iv) $2x + 15y - 100 = 0$

(v) $x + y - 200 = 0$ (vi) $x + y - 11 = 0$

مشق 6.2

.2 (i) $(0, -34); (\frac{17}{4}, 0)$ (ii) $(0, 3); (-7, 0)$

(iii) $(0, \frac{3}{2}); (\frac{-3}{5}, 0)$

.3 (i) اس کا حل نہیں ہے (ii) حل ہے (iii) حل ہے

(iv) حل نہیں ہے (v) حل نہیں ہے

.4 $k = 7$ $\alpha = \frac{8}{5}$ .6 3

مشق 6.3

.2 (i) ہاں (ii) ہاں

.3 3

.4 (i) 6 (ii) -5

.5 (i) $(\frac{3}{2}, 3)$ (ii) (-3, 6)

.6 (i) (2, 0) : (0, -4) (ii) (-8, 0) ; (0, 2)

(iii) (-2, 0) ; (0, -3)

.7 $x + y = 1000$ .8 $x + y = 5000$ .9 $f = 6a$ .10 39.2 اکائیاں

مشق 6.4

.1 $5x = 3y$; 2000 ; 480 (ووٹروں کی تعداد جنھوں نے ووٹ کا استعمال کیا = x، جملہ ووٹروں کی تعداد = y)

.2 $x - y = 25$; 50; 15 (باپ کی عمر = x، روپا کی عمر = y)

.3 $y = 8x + 7$ .4 $x + 4y = 27$; 5, 11

.5 (گھنٹوں کی تعداد = x، پارکنگ چارجس = y) $y = 10x + 30$; 60; 90; 5 گھنٹے

.6 d = 60 t (فاصلہ = d ، وقت = t) 90 کیلومیٹر، 120 کیلومیٹر، 210 کیلومیٹر

.7 $y = 8x$؛ 12; $1\frac{1}{2}$ یا $\frac{3}{2}$ .8 $y \frac{5}{7} x$ (مکسچر کی مقدار = x ، دودھ کی مقدار = y) 20,

.9 (ii) 86° F (iii) 35° C (iv) -40

مشق 6.5

4. (i) y = -3 (ii) y = 4 (iii) y = -5 (iv) y = 4

5. (i) x = -4 (ii) x = 2 (iii) x = 3 (iv) x = -4

مشق 7.4

6. 7

7. نہیں

مشق 8.1

1. (i) صادق (ii) صادق (iii) کاذب (iv) صادق
(v) کاذب (vi) کاذب

2. (a) ہاں، نہیں، نہیں، نہیں، نہیں (b) نہیں، ہاں، ہاں، ہاں، ہاں
(b) نہیں، ہاں، ہاں، ہاں، ہاں (d) نہیں، ہاں، ہاں، ہاں، ہاں
(e) نہیں، ہاں، ہاں، ہاں، ہاں (f) نہیں، ہاں، ہاں، ہاں، ہاں
(g) نہیں، نہیں، نہیں، ہاں، ہاں (h) نہیں، نہیں، ہاں، نہیں، ہاں

4. چارزاویے = 36°، 72°، 108°، 144°

مشق 8.3

1. متوازی الاضلاع کے زاویے = 73°، 107°، 73°، 107°
2. متوازی الاضلاع کے زاویے = 68°، 112°، 68°، 112°

مشق 8.4

1. BC = 8 سینٹی میٹر

مشق 9.1

1.

نشانات	5	6	7	8	9	10
تعدد f	5	6	8	12	9	5

2.

بلڈ گروپ	A	B	AB	O
تعدد f	5	12	9	5

بہت زیادہ عام بلڈ گروپ = O

بہت نایاب بلڈ گروپ = AB

.3

ہیڈ کی تعداد	0	1	2	3
تعدد f	3	10	10	7

.4

اختیارات	A	B	C
تعدد f	19	36	10

جملہ مناسب جوابات = 65

اکثریتی عوام کی رائے = B (صرف عوامی مقامات پر ممنوع ہے)

.5

گاڑیوں کی اقسام	کاریں	بائیسکلس	آٹوس	سائیکلس
گاڑیوں کی تعداد f	25	45	30	40

پیمانہ X۔محور پر ایک سینٹی میٹر = ایک جماعتی وقفہ

X۔محور پر ایک سمر = 10 طلبا کی تعداد

.6

نشانات	VI	V	IV	III	II	I
طلبا کی تعداد f	40	55	65	50	30	15

.7

نشانات (جماعتی وقفہ)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
طلبا کی تعداد f	1	4	3	7	7	7	1	0

.8

الکٹریسٹی بلس (` میں جماعتی وقفہ)	مکانات کی تعداد (f)
150 - 225	4
225 - 300	3
300 - 375	7
375 - 450	7
450 - 525	0
525 - 600	1
600 - 675	1
675 - 750	2

9.

نشانات	2-2.5	2.5-3.0	3.0-3.5	3.5-4.0	4.0-4.5	4.5-5.7
طلبا کی تعداد f	2	6	14	11	4	3

مشق 9.2

1. $\bar{x} = 85$ 2. $\bar{x} = 1.71$ 3. K = 10

4. $\bar{x} = 17.7$

5. (i) ` 359, ` 413, ` 195, ` 228, ` 200, ` 837

(ii) فی مدرسہ کی بچت 444`

6. لڑکے کا قد = 147 سم لڑکی کا قد = 152 سم

7. بہتاتیہ 5، $\bar{x}$ = 11.18 وسطانیہ = 10

8. $\bar{x}$ = 80 وسطانیہ = 75 بہتاتیہ = 50

9. 37 کیلوگرامس 10. `11.25 وسطانیہ = `10 بہتاتیہ = `10

11. $1^{st} = 2$; $2^{nd} = 6$; $3^{rd} = 19$; $4^{th} = 33$

مشق 10.1

1. (i) 64cm^2 96 مربع سم (ii) 140cm^2 236 مربع سم

2. 3375 مربع میٹر 3. 330 مربع میٹر 4. 8 میٹر

5. (i) اصلی رقبے کا چار گنا (ii) اصلی رقبے کا 9 گنا (iii) x^2 مرتبہ

6. 60 مکعب سم 7. 16 مربع میٹر 8. 3750000 لیٹر

مشق 10.2

1. 6.90 m^2 2. 176 cm^2; 253 cm^2

3. r = 7.5 cm. 4. h = 2.5 m

5. (i) 968 cm^2 (ii) 1064.8 cm^2 (iii) 2038.8 cm^2

6. ` 5420.80 7. 1584 m^2

8. (i) 110 m^2 (ii) ` 4400

9. (i) 87.12 m^2 (ii) 95.04 m^2 10. 517.44 liters 11. h = 20 cm.

مشق 10.3

1. h = 6cm 2. h = 9 cm

3. (i) 7 cm (ii) 462 cm^2 4. 1232 cm^3

5. 1018.3 cm^3 6. `7920,15m 7. $3394\frac{2}{7}$ cm^3

8. 241.84 m^2 تقریباً 9. 63 میٹر 10. 6135.8 مربع سم

11. 24.7 min 12. 60 π مربع اکائیاں

مشق 10.4

1. 154 cm2 ; 179.67 cm^3 2. 3054.86 cm^3

3. 616 cm^2 4. 6930 cm^2 5. 4 : 9 ; 8 : 27

6. 942 cm^2 7. 1 : 4   8. 441 : 400   9.5.9 گرام یا 0.055 کلوگرام

10. 5 cm.   11. 0.303 لیٹر   12. باٹلس کی تعداد = 9

مشق 11.1

1. 19.5 cm^2 2. 114 cm^2 3. 36 cm^2

مشق 11.2

1. 8.57 cm   2. 6.67 cm

مشق 12.1

1. (i) نصف قطر   (ii) قطر   (iii) قوس اصغر
(iv) وتر   (v) قوس اکبر   (vi) نصف دائرہ
(vii) وتر   (viii) قطعہ اصغر

2. (i) صادق   (ii) صادق   (iii) صادق   (iv) کاذب
(v) کاذب   (vi) صادق   (vii) صادق

مشق 12.2

1. 90°   2. 48°, 84°   3. ہاں

مشق 12.4

1. 130°   2. 40°   3. 60°, 120°   4. 5 cm.
5. 6 cm.   6. 4 cm.   8. 70°, 55°, 55°

مشق 12.5

1. (i) x° = 75° ; y° = 75°   (ii) x° = 70° ; y° = 95°
(iii) x° = 90° ; y° = 40°

5. ممکن ہے = (a), (b), (c), (e), (f) ; ممکن نہیں = (d)

مشق 14.1

1. (a) 1, 2, 3, 4, 5 and 6 (b) Yes (c) $\frac{1}{3}$

2. (a) $\frac{45}{100}; \frac{55}{100}$ (b) 1

3. (a) Red (b) Yellow (c) Blue,Green and Red (d) No chance
(e) No (It is random experiment)

4. (a) نہیں
(b) $P(\text{gree}) = \frac{5}{12}$؛ $P(\text{blue}) = \frac{1}{4}$ ؛ $P(\text{red}) = \frac{1}{6}$ ؛ $P(\text{yellow}) = \frac{1}{6}$
(c) 1

5. (a) $P(E) = \frac{5}{26}$ (b) $P(E) = \frac{5}{13}$ (c) 1 (d) $\frac{21}{26}$

6. $P(E) = \frac{7}{11}$

7. (i) $P = \frac{61}{2000}$ (ii) $P = \frac{9}{80}$ (iii) $P = \frac{261}{400}$ (iv) 21.5%

مشق 15.1

1. (i) ہمیشہ کاذب ہوتا ہے۔ ایک مہینے میں 27 دن ہوتے ہیں، عام طور پر ہمارے پاس 30 اور 31 دنوں کے مہینے ہیں۔
(ii) مبہم۔ دیئے گئے سال میں مکرسنکرانتی جمعہ کو بھی ہوسکتی ہے نہیں بھی۔
(iii) مبہم۔ موسم سرما میں بعض وقت یہ ممکن ہوسکتا ہے کہ شہر حیدرآباد کا درجہ حرارت $2^{o}C$ تک پہنچ جائے۔
(iv) صادق۔ حقیقت کی روشنی میں، بعد میں یہ کہہ سکتے ہیں مگر یہ بدل بھی سکتا ہے۔ اگر سائنسداں دوسرے سیاروں پر حیات (زندگی) کے ثبوت تلاش کریں۔
(v) ہمیشہ کاذب ہوتا ہے۔ کتے اُڑ نہیں سکتے۔
(vi) مبہم۔ سال کبیسہ میں ماہ فروری کے 29 دن ہوتے ہیں۔

2. (i) صادق۔ چار ضلعی کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ 360^{o} ہوتا ہے۔
(ii) کاذب۔ مثال کے طور پر تمام منفی اعداد۔
(iii) صادق۔ معین جس کے مقابل کے ضلعے متوازی ہیں۔ لہٰذا یہ معین متوازی الاضلاع ہے۔
(iv) صادق
(v) نہیں۔ تمام مربعوں کو دو طاق اعداد کے مجموعے کی شکل میں نہیں لکھا جاسکتا جیسے 9 = 4 + 5
(مگر ہم تمام مربعوں کو طاق اعداد کے مجموعے کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جیسے 9 = 1 + 3 + 5)

3. (i) صرف طبعی عدد

(ii) کسی بھی طبعی عدد کا دگنا ہمیشہ جفت ہوتا ہے۔ جیسے (جفت عدد) $2 \times 5 = 10$

(iii) کسی کے لیے بھی $x > 1, 3x + 1 > 4$

(iv) کسی کے لیے بھی $x \geq 0, \ x^3 \geq 0$

(v) مثلث کے مساوی الاضلاع کا وسطانیہ اس کے زاویہ کا بھی ناصف ہوتا ہے۔

4. کوئی چار ضلعی اعداد لیجیے۔ $y \quad x$

$-2 > -3$

یہاں $x^2 < y^2$ $\quad x^2 = -2 \times -2 = 4$

$y2 = -3 \times -3 = 9$

مشق 15.2

1. (i) جاوید فانی ہے۔

(ii) نہیں، X کسی بھی دوسری ریاست جیسے مراٹھی، گجراتی، پنجابی وغیرہ کا ہوسکتا ہے۔

(iii) رحیم کی زبان لال ہے۔

(iv) تمام ذہین لوگ صدر بننا ضروری نہیں ہے۔ ہم نے یہاں یہ بتلایا کہ صدر ذہین ہوتے ہیں۔ مگر یہاں دوسرے اور بھی لوگ ہوتے ہیں جیسے اساتذہ، طلبا جوان سے بھی زیادہ ذہین ہوتے ہیں۔

2. یہاں B اور 8 کو الٹا کرنے کی ضرورت ہے۔ دوسری جانب اگر 8 ایک جفت عدد ہے تب اصول ٹوٹ جاتا ہے۔ اسی طرح اگر 8 دوسری جانب حروف سہی ہے تب بھی اصول ٹوٹ جاتا ہے۔

3. جواب 35 ہے۔

- یہاں 'a' مدد نہیں کرسکتا کیونکہ دوسرے اشارات کو ملحوظ رکھا جائے تو آپ یہ کہہ سکتے ہیں آپ کو ایک سے زائد ہندسے کی ضرورت ہے۔
- بیان 'b' مدد نہیں کرسکتا کیوں کہ اکائی کا ہندسہ، دہائی کے ہندسے سے بڑا ہونا چاہیے۔
  7 اور 10 کا ضعف 70 ہے اور 0، 7 سے چھوٹا ہے۔
- بیان 'c' مدد کرتا ہے کیونکہ 7 کے اضعاف ہونے کی صورت میں زیادہ سے زیادہ اعداد کا امکان ہے۔
- بیان 'd' مدد کرتا ہے کیونکہ طاق عدد کی صورت میں دوسرے ممکنات کو بڑھاوا دے سکتے ہیں۔
- بیان 'e' مدد نہیں کرتا کیونکہ 7 اور 11 کا ضعف 77 ہے۔ اکائی کے ہندسہ کو دہائی کے ہندسے سے بڑا ہونا چاہیے۔
- بیان 'f' مدد نہیں کرسکتا۔
- بیان 'g' مدد کرتا ہے اگر اس کو استعمال کیا جائے تو چند اعداد بچ جاتے ہیں۔
- بیان 'h' مدد کرتا ہے اگر اس کو استعمال کیا جائے تو 35 بچتا ہے۔ اس طرح 3، 4، 7 اور 8 عدد کو حاصل کرنے کے لیے یہ کافی ہیں۔

مشق 15.3

1. (i) تین ممکنہ اتفاقات (قیاس)

(a) کوئی تین متوازی طاق اعداد کا حاصل ضرب طاق ہوتا ہے۔

(b) کوئی تین متوازی طاق اعداد کا حاصل ضرب 3 سے تقسیم پذیر ہے۔

(c) تین متواتر طاق اعداد کے حاصل ضرب میں موجود تمام ہندسوں کا مجموعہ جفت ہوتا ہے۔

(ii) تین ممکنہ اتفاقات (قیاس)

(a) کوئی تین متواتر اعداد کا مجموعہ ہمیشہ جفت ہوتا ہے۔

(b) کوئی تین متواتر اعداد کا مجموعہ ہمیشہ 3 سے قابل تقسیم ہوتا ہے۔

(c) کوئی تین متواتر اعداد کا مجموعہ ہمیشہ 6 سے بھی قابل تقسیم ہوتا ہے۔

4. $111111^2 = 12345654321$ $\qquad$ $1111111^2 = 1234567654321$

تخمینہ صادق ہے۔

6. اندازہ (تخمینہ) کاذب ہے کیونکہ $x = 41$ کے لیے ہم مرکب عدد معلوم نہیں کر سکتے۔

مشق 15.4

1. (i) نہیں $\qquad$ (ii) ہاں $\qquad$ (iii) نہیں

(iv) ہاں $\qquad$ (v) نہیں

2. (i) اگر ایک مستطیل کے زاویئے مساوی ہیں تب وہ مربع نہیں ہوسکتا۔

(ii) $x = 2$، $y = 3$ کے لیے بیان صادق نہیں ہے۔

(یہ صرف $x = 0$، $y = 1$ یا $x = 0$ ، $y = 0$ کے لیے صادق ہے)

(iii) $n = 11$ کے لیے $2n2 + 11 = 53$ جو مفرد عدد نہیں ہے۔

(iv) آپ کوئی دو مثلثات بنا سکتے ہیں جن کے زاویئے مساوی ہیں مگر اضلاع مختلف ہیں۔

(v) اگر ایک معین کے اضلاع مساوی ہیں مگر وہ ایک مربع نہیں ہوسکتا۔

3. مان لیجیے کہ X اور Y دو طاق اعداد ہیں تب چند طبعی اعداد m کے لیے $X = 2m + 1$ ، چند طبعی اعداد n کے لیے $Y = 2n + 1$

$$x + y = 2(m + n + 1)$$

لہٰذا $x + y$، 2 سے تقسیم پذیر ہے اور جفت ہے۔

4. مان لیجیے کہ $X = 2m$ اور $Y = 2m$

حاصل ضرب $xy = (2m)(2m)$

$= 4mn$

6. (i) مان لیجیے کہ آپ کا اصلی عدد n ہے۔ ذیل میں ہم چند اعمال انجام دے رہے ہیں۔

$$n \to 2n \to 2n+9 \to +n = 3n+9 \to \frac{3n+9}{3} = n+3 \to n+3+4 = n+7 \to n+7-n = 7$$

(ii) نوٹ کیجیے کہ $7 \times 11 \times 13 = 1001$ کوئی تین ہندسی عدد لیجیے۔

جیسے abc تب $abc \times 1001 = abcabc$

لہٰذا چھ ہندسی عدد abc abc، 7 ، 11 اور 3 قابل تقسیم ہے۔

نصاب

اعداد کا نظام (50 گھنٹے) (i) **حقیقی اعداد**	(i) **حقیقی اعداد** • عددی خط پر طبعی اعداد، صحیح اعداد اور ناطق اعداد کے اظہار کا اعادہ۔ • مسلسل کلاں نما کے ذریعہ عددی خط پر مختتم/غیر مختتم اعشاریہ کا اظہار۔ • حقیقی اعداد بطور متوالی/مختتم اعشاریہ۔ • تقسیمی طریقے کے ذریعہ $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$ کا 6 صحیح اعشاریائی مقام تک جذر المربع معلوم کرنا • غیر متوالی/غیر مختتم اعشاریہ کی مثالیں جیسے۔ 1.01011011101111....... 1.12112111211112....... اور $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$ وغیرہ۔ • غیر ناطق اعداد کا وجود جیسے $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ اور ان کا عددی خط پر اظہار۔ • فیثا غورث نتیجہ کی مدد سے عددی خط پر ہر ایک حقیقی عدد کے وجود کو بتلانا۔ • اصم کا تصور۔ • اصم کو نطقانا۔
الجبراء (20 گھنٹے) (i) کثیر رکنیاں (ii) دو متغیرات میں خطی مساوات	(i) **کثیر رکنیاں** • ایک متغیر میں کثیر رکنی کی تعریف اس کا عددی ضریب مثالوں اور متضاد مثالوں کے ذریعہ سے اس کے ارکان اور کثیر رکنی کا صفر۔ • مستقل، خطی، دو درجی، مکعبی کثیر رکنیاں، یک رکنی، دو رکنی، سہ رکنی، کثیر رکنیوں کے صفر/ریشے/مساوات۔ • مثبت صحیح اعداد کے مثالوں کے ذریعہ مسئلہ باقی کو بیان کیجیے اور محرک بنائیے۔ • جز وضربی کے مسائل کو بیان کیجیے اور اس کی تصدیق کیجیے۔ $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ کے اجزائے ضربی معلوم کرنا جہاں a، b، c حقیقی اعداد ہیں۔ جز وضربی کے مسئلہ کی مدد سے کثیر رکنیوں کا مکعب معلوم کرنا۔

- الجبرائی عبارتوں اور اکائیوں کو دہرانا۔
- اکائیوں کے اقسام۔

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$(x\pm y)^3 = x^3 \pm y^3 \pm 3xy\,(x \pm y)$$

$$x^3+y^3+z^3 - 3xyz = (x + y + z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)\,(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)\,(x^2+xy+y^2)$$

اور کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی میں ان کا استعمال کثیر رکنیوں کو سادہ اختصاری عبارتوں میں ڈھالنا۔

(ii) دو متغیرات میں خطی مساواتیں

- ایک متغیر میں خطی مساواتوں کو دہرانا۔
- دو متغیرات میں مساوات کا تعارف۔
- دو متغیرات میں ایک خطی مساوات کا حل۔
- دو متغیرات میں ایک خطی مساوات کی ترسیم۔
- x۔محور اور y۔محور کے متوازی خطوط کی مساوات
- x۔محور اور y۔محور کی مساواتیں۔

تحلیلی جیومیٹری (5 گھنٹے)

مختصات کی جیومیٹری (تحلیلی جیومیٹری)

- کارتیزی نظام (Cantesian system)
- اگر مختصات دیے جائیں تو مستوی میں نقطہ کو درج کرنا۔

جیومیٹری (40 گھنٹے)

(i) جیومیٹری کے عناصر

(ii) خطوط اور زاویے

(iii) مثلثات

(iv) چار ضلعی

(v) رقبہ

(vi) دائرے

(vii) جیومیٹری بناوٹیں

(i) جیومیٹری کے عناصر

- تاریخ ۔ اقلیدس اور ہندوستان میں جیومیٹری مسئلے، مفروضات / قوانین واضح تصورات / مشترک خیالات، تعریفات سے سخت ریاضی کے مشاہدات کی اقلیدس کے طریقے سے ضابطہ سازی کرنا اقلیدس کے پانچ مفروضات۔ معادل، پانچویں مفروضے سے الگ ہوتا ہے۔ مسئلے اور معروضات کے درمیان رشتہ کو بتلانا۔
- دیے گئے دو مختلف نقاط سے صرف ایک ہی خط کھینچا جاسکتا ہے۔
- (ثبوت) دو مختلف خطوط ایک سے زائد مشترک نقطہ نہیں رکھتے۔

(ii) خطوط اور زاویے

- (محرک) اگر ایک خط پر ایک شعاع واقع ہو جائے تو دو متصلہ زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے اور اس کا برعکس۔
- (ثبوت) دو مختلف خطوط ایک دوسرے کو عمود وار قطع کرتے ہیں تو مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- (محرک) جب دو متوازی خطوط کو ایک قاطع خط قطع کرے تب اس کے داخلی زاویے، متبادل زاویے نظیری زاویے کے نتائج۔
- (محرک) خطوط جو دیئے گئے خط کے متوازی ہیں وہ بھی متوازی ہیں۔
- (ثبوت) مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔
- (ثبوت) ایک مثلث کے ایک ضلع کو آگے بڑھایا جائے تو خارجی زاویہ بنتا ہے، جو مقابل کے داخلی زاویوں کے مجموعے کے مساوی ہوتا ہے۔

(iii) مثلثات

- (محرک) دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں، اگر ایک مثلث کے دو ضلعے اور ایک مشمولہ زاویہ دوسرے مثلث کے دو ضلعے اور اس کے مشمولہ زاویے کے مساوی ہیں۔ (SAS متماثلت)
- (ثبوت) دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کے دو زاویے اور مشمولہ ضلع دوسرے مثلث کے دو زاویے اور مشمولہ ضلع کے مساوی ہیں۔ (ASA متماثلت)
- (محرک) دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کے تینوں ضلع دوسرے مثلث کے تینوں ضلعوں کے مساوی ہیں۔ (SSS متماثلت)
- (محرک) دو قائم الزاویہ مثلث متماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کا وتر اور ضلع بالترتیب دوسرے مثلث کے وتر اور ضلع کے مساوی ہیں۔
- (ثبوت) ایک مثلث کے مساوی اضلاع کے مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- (محرک) ایک مثلث کے مساوی زاویوں کے مقابل کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔
- (محرک) غیر مساوی مثلث یا زاویہ اور سطحی ضلع کے درمیان رشتہ، غیر مساوی مثلثات۔

(iv) چارضلعی

- (ثبوت)ایک متوازی الاضلاع کا وتر اس کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔
- (محرک)ایک متوازی الاضلاع میں مقابل کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں اور اس کا برعکس۔
- (محرک)ایک متوازی الاضلاع میں مقابل کے زاویئے مساوی ہوتے ہیں اور اس کا برعکس۔
- (محرک)ایک چارضلعی' متوازی الاضلاع ہوتا ہے اگر اس کے مقابل کے اضلاع کا ایک جوڑ متوازی اور مساوی ہو۔
- (محرک) ایک متوازی الاضلاع میں اس کے وتر ایک دوسرے کی تصنیف کرتے ہیں اور برعکس۔
- (محرک)ایک مثلث میں' خطی قطعہ اس کے کوئی دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملاتا ہے' وہ تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے اور برعکس۔

(v) رقبہ

- مستوی علاقوں کا رقبہ' رقبہ کے تصور کا اعادہ۔
- مستطیل کا رقبہ۔
- اشکال جو ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان بنائے جاتے ہیں۔
- (ثبوت) متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان پائے جاتے ہیں رقبے میں مساوی ہوتے ہیں۔
- (محرک)مثلثات جو ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان بنائے جاتے ہیں رقبے میں مساوی ہوتے ہیں اور اس کا برعکس۔

(vi) دائرے

- مثالوں کے ذریعہ دائرے کی تعریف کرنا اور اس سے متعلقہ تصورات جیسے نصف قطر' محیط' قطر' وتر' قوس' زاویہ مقابلہ (قوس سے بننے والا زاویہ) کی بہتر تشریح۔
- (ثبوت)ایک دائرے کے مساوی وتر اس کے مرکز پر مساوی زاویہ بناتے ہیں اور (محرک)اس کے برعکس۔
- (محرک) ایک دائرے کے مرکز سے اس کے وتر پر گرایا گیا عمود اس کی تنصیف کرتا ہے۔اور اس کا برعکس اگر ایک خط وتر کی تنصیف کرتا ہے وہ وتر پر عمود وار بھی ہوتا ہے۔

	• (محرک) دیے گئے تین غیر ہم خط نقاط سے ایک اور صرف ایک دائرہ گزرتا ہے۔ • (محرک) ایک دائرے کے مساوی وتر (متماثل دائروں کے) مرکز سے مساوی فاصلے پر ہوتے ہیں اور اس کے برعکس۔ • (ثبوت) دائرے کے قوس سے مرکز پر بننے والا زاویہ، دائرے کے باقی حصّے کی کسی نقطے پر بننے والے زاویہ کا دگنا ہوتا ہے۔ • (محرک) دائرے کے ایک ہی قطعہ کے زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔ • (محرک) کوئی دو نقاط کو ملانے والا خطی قطعہ مساوی زاویئے بناتا ہے اس کے ایک ہی جانب واقع دو نقاط پر اس طرح اس کے چار نقاط ہم دائروی ہوتے ہیں۔ • (محرک) ایک دائری چار ضلعی کے مقابل کے زاویئوں کی جوڑی کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے اور اس کے برعکس۔
	(vii) بناوٹیں • مثلث بنانا جب کہ اس کا قاعدہ/اس کے دو اضلاع کا مجموعہ یا فرق اور قاعدے کا زاویہ دیا گیا ہو۔ • مثلث بنانا جب کہ اس کا احاطہ اور قاعدے کے زاویئے دیے گئے ہوں۔ • ایک دائری قطعہ بنانا جب کہ وتر اور زاویہ دیا گیا ہو۔
مساحت (15 گھنٹے) **(i) سطحی رقبہ اور حجم**	**(i) سطحی رقبہ اور حجم** • مکعب اور مکعب نما کا سطحی رقبہ اور حجم کا اعادہ۔ • استوانہ، مخروط، کرہ اور نیم کرہ کا سطحی رقبہ۔ • استوانہ، مخروط، کرہ، قائم دائری استوانے اور مخروط کا حجم۔
شماریات اور قیاسیت (15 گھنٹے) **(i) شماریات** **(ii) قیاسیات**	**(i) شماریات** • گروہی اور غیر گروہی تقسیمی تعددی کا اعادہ۔ • غیر گروہی تقسیمی تعددی کا اوسط، وسطانیہ اور بہتانیہ۔ **(ii) قیاسیات** • قیاسیات کو محسوس کرانا معطیات کو استعمال کرتے ہوئے تجربات کے ذریعہ۔ سکہ ڈائس (پانسہ) وغیرہ کو اچھالتے وقت واضح اندازہ لگانا۔ • پھینکنے کی تعداد میں 6 میں سے ایک وقوع پذیر ہونے والے واقعات کی گنتی اور جدول کی ترتیب۔

	• سکہ کے مشاہدات کا تقابل، اسی کو اچھالنے کا مشاہدہ، سرسری قیاس۔ • سکہ اور پانسہ وغیرہ کو اچھالتے وقت ممکنہ قیاس کو یکجا کرنا اور ان میں عمومیت پیدا کرنا۔ • ایک جیسے سکے یا پانسہ کو اچھالتے وقت متعدد مرتب آنے والے نتائج کا بصارتی اظہار۔ • زیادہ تعداد میں ایک جیسے سکوں اور پانسہ کو اچھالتے وقت اور پھینکے جانے والے نتائج کو اکٹھا کرنا تا کہ، زیادہ تعداد میں انفرادی واقعات حاصل ہوں۔ • دہرائے گئے واقعات کی زیادی تعداد پر اکھٹا کیے جانے والے اعداد کا مشاہدہ کرنا۔ ایک سکہ کے لیے معطیات سے تقابل اس کو اچھالنے کا مشاہدہ، سرسری قیاس۔
ذیلی مواد/ضمیمہ (5 گھنٹے) **(i) ریاضی میں ثبوت**	**(i) ریاضی میں ثبوت (استدلال)** • ریاضیاتی بیانات اور ان کی تصدیق • ریاضیاتی وجوہات، استخراجی وجوہات • مسئلے مفروضات اور کلیات • ریاضیاتی استدلال کیا ہے؟

تعلیمی معیارات

طلباء کیا جاننا چاہیے اوران پرعمل کرنے کے قابل ہوں ان کے بارے میں تعلیمی معیارات واضح بیانات ہوتے ہیں‘ ان کی بنیاد پر ذیل کے تعلیمی معیارات کی درجہ بندی کی گئی ہے۔

مسئلہ کا حل

طریقۂ عمل اور تصورات کو استعمال کرتے ہوئے ریاضیاتی مسائل کو حل کرنا۔

(a) مسائل کے اقسام

مسائل مختلف صورتوں میں ہوسکتے ہیں‘ جیسے معمہ‘ عبارتی سوالات‘ تصویری مسائل طریقوں پر مبنی سوالات‘ معطیات‘ جدول اور ترسیمات وغیرہ۔

(b) مسئلہ کو حل کرنا

- مسئلہ کو پڑھنا۔
- معلومات / ڈیٹا کے تمام حصوں کی شناخت کرنا۔
- کونسا خیال یا تصور شامل ہے اس کی تفہیم کرنا۔
- متعلقہ طریقہ اعمال (مفروضات) ضابطوں وغیرہ کو دہرانا۔
- طریقۂ عمل کا انتخاب۔
- مسئلہ کو حل کرنا۔
- مسئلہ پر مبنی عبارتی سوالات اور ان کے جوابات کی جانچ۔

(c) پیچیدگی

- ایک سوال کی پیچیدگی اس پر منحصر ہوتی ہے۔
- تعلق پیدا کرنا (ربط کے سیکشن میں اس کی تعریف کی گئی ہے)۔
- اقدامات کی تعداد۔
- مراحل کی تعداد۔
- عبارتی سوالات کو سلجھانا۔
- طریقۂ عمل کی نوعیت۔

استدلالی ثبوت

- مختلف مراحل کے درمیان وجوہات بتلانا (مختلف مفروضات سے)
- ریاضیاتی کلیات (ضابطے) اور مفروضات کو بتانا اور سمجھنا۔
- طریقۂ عمل کی جانچ اور تفہیم‘ منطقی بحث کی جانچ۔

اظہار

- ریاضی کے اعداد کے نظام کو لکھنا، پڑھنا اور ان کا اظہار کرنا۔ (عباری اور علامتی شکل میں)
  مثلاً 180^0 = زاویوں کا مجموعہ $3 + 4 = 7, 3 < 5, n_1 + n_2 = n_2 + n_1$
- ریاضیاتی عبارتوں کی تشکیل
- ریاضیاتی خیالات کو اپنے الفاظ میں بیان کرنا جیسے مربع ایک بند شکل ہوتی ہے جس کے چار ضلعے اور چار زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- ریاضیاتی طریقوں کی تشریح جیسے دو ہندسی اعداد کی جمع میں پہلے اکائی کے مقام کے ہندسوں کو جمع کرنا اس کے بعد دہائی کے مقام کے ہندسوں کو ہمیشہ حاصل کو مدنظر رکھتے ہوئے۔
- ریاضیاتی منطق کی تشریح

ربط

- ریاضیاتی علاقے کے تصورات میں ربط پیدا کرنا مثلاً جمع کو ضرب سے، کل کے حصوں کو نسبت سے تقسیم سے، نقش و نگار نمونے میں اور تشاکل، پیمائشات اور فاصلے۔
- روزمرہ زندگی سے تعلق پیدا کرنا۔
- ریاضی سے دوسرے مضامین میں ربط پیدا کرنا۔
- مختلف ریاضیاتی (domains) علاقوں کے تصورات میں ربط پیدا کرنا جیسے معطیات کا اظہار اور حساب یا حساب اور فضاء۔
- تصورات کو مختلف طریقوں سے جوڑنا / مربوط کرنا۔

نمائندگی

- جدول کے معطیات، عددی خط، تصویری ترسیم، بار گراف، 2D اشکال 3D اشکال، تصویروں اور خاکوں کو پڑھنا اور ان کی تشریح کرنا۔
- جدول، عددی خط، تصویری گراف، بار گراف اور تصویروں کو بتانا۔
- ریاضیاتی علامتیں اور اشکال۔