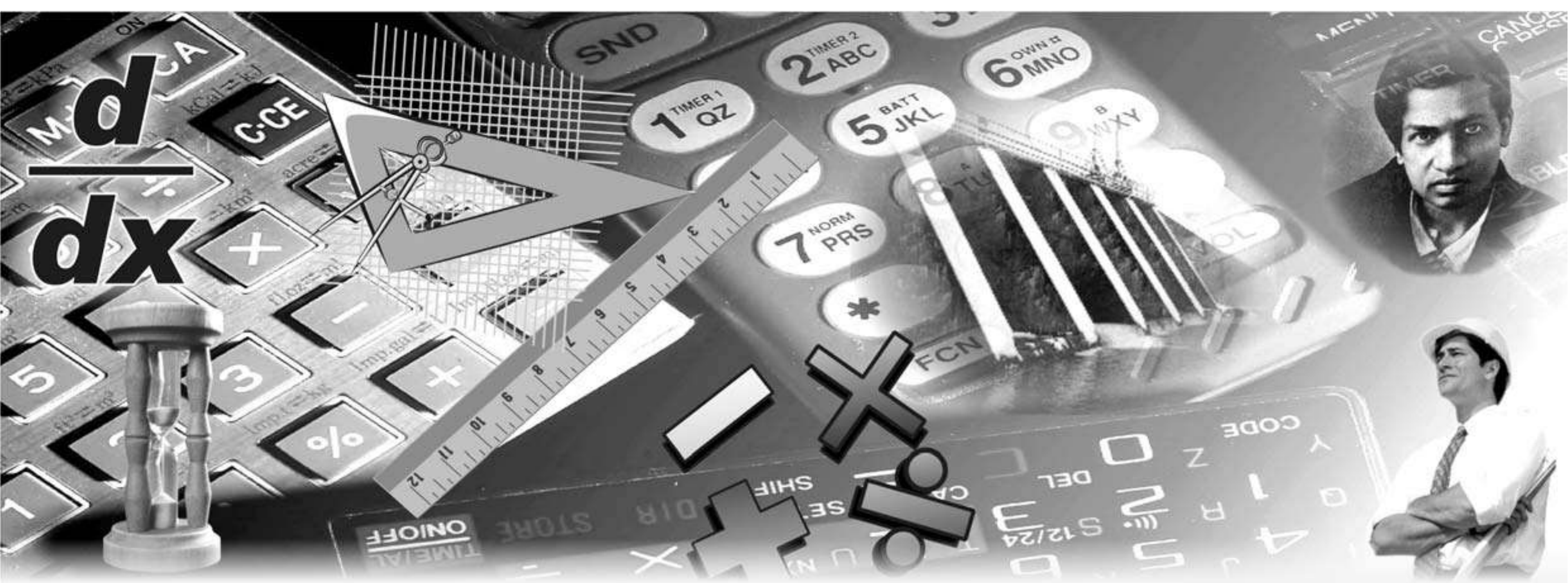


Chapter
29
केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

प्रस्तावना (Introduction)

सांख्यिकी में चर श्रेणी के वितरण गुण एवं केन्द्रीय मान को बताने वाली श्रेणी को सांख्यिकी श्रेणी का केन्द्रीय माप कहते हैं।

निम्नलिखित पाँच मापों को केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप कहते हैं।

(1) समान्तर माध्य (2) गुणोत्तर माध्य (3) हरात्मक माध्य
(4) माध्यिका (5) बहुलक

समान्तर माध्य (Arithmetic mean)

समान्तर माध्य सबसे महत्वपूर्ण गणितीय माध्य है।

"होरेस सेरिस्ट" (Horase secrist) के अनुसार, "समान्तर माध्य चर का वह मान है जो दिये हुये पदों के योगफल में पदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।"

(1) **जब आँकड़े अवर्गीकृत हैं**

(i) **प्रत्यक्ष विधि :** यदि चर x के n मान $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ हैं, तब समान्तर माध्य $\bar{x}$ निम्न प्रकार प्राप्त होता है।

$$\bar{x} = \frac{\text{श्रेणी का योग}}{\text{पदों की संख्या}},$$

अर्थात् $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

(ii) **लघु विधि :** समान्तर माध्य $(\bar{x}) = A + \dfrac{\sum d}{n}$,

जहाँ, A = कल्पित माध्य,

d = कल्पित माध्य से विचलन = $x - A$, जहाँ x प्रत्येक पद का मान है।

Σd = विचलनों का योग तथा n = पदों की संख्या है।

(2) **जब आँकड़े वर्गीकृत हों**

(i) **प्रत्यक्ष विधि :** यदि दी गई श्रेणी के पद $x_1, x_2, ..., x_n$ तथा संगत बारम्बारता $f_1, f_2, ... f_n$ है, तब

समान्तर माध्य $\bar{x} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_nx_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$.

(ii) **लघु विधि :** समान्तर माध्य $(\bar{x}) = A + \dfrac{\sum f(x - A)}{\sum f}$

जहाँ A = कल्पित माध्य, f = बारम्बारता तथा $x - A$ = प्रत्येक पद का कल्पित माध्य से विचलन

(3) **समान्तर माध्य के गुण**

(i) समान्तर माध्य से किसी समूह के मानों के विचलनों का बीजगणितीय योग शून्य होता है। यदि x_i / f_i जहाँ i = 1, 2, ...,n बारम्बारता बंटन है, तब $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x}) = 0$ जहाँ $\bar{x}$ बंटन का माध्य है।

(ii) समान्तर माध्य के परितः समूह के मानों के विचलनों के वर्गों का योग न्यूनतम होता है।

(iii) **संयोजित श्रेणी का माध्य :** यदि $n_i, (i = 1, 2, ..., k)$ आकार की k-अवयवों की श्रेणी के माध्य क्रमशः $\bar{x}_i, (i = 1, 2, ..., k)$ हों, तो घटक श्रेणी के अवयवों को मिलाने पर संयोजित श्रेणी का माध्य $\bar{x}$ निम्न सूत्र से प्राप्त होता है।

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + ... + n_k\bar{x}_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k} = \sum_{i=1}^{n} n_i\bar{x}_i \bigg/ \sum_{i=1}^{n} n_i .$$

गुणोत्तर माध्य (Geometric mean)

यदि किसी चर x के n मान $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ हैं, जिनमें कोई भी शून्य नहीं है, तब गुणोत्तर माध्य निम्न प्रकार प्राप्त होता है $\text{G.M.} = (x_1.x_2.x_3......x_n)^{1/n}$

$$\Rightarrow \log(\text{G.M.}) = \frac{1}{n}(\log x_1 + \log x_2 + ... + \log x_n).$$

बारम्बारता बंटन की स्थिति में, यदि किसी चर x के n मानों $x_1, x_2, ..., x_n$ की बारम्बारतायें क्रमशः $f_1, f_2, ..., f_n$ हैं, तब गुणोत्तर माध्य $(\text{G.M.}) = (x_1^{f_1}.x_2^{f_2}.....x_n^{f_n})^{1/N}$, जहाँ $N = f_1 + f_2 + ... + f_n$.

हरात्मक माध्य (Harmonic mean)

n पदों $x_1, x_2, ..., x_n$ का हरात्मक माध्य

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+.....+\frac{1}{x_n}}.$$

यदि बारम्बारता बंटन क्रमशः $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ हैं, तब

$$\text{H.M.} = \frac{f_1+f_2+f_3+.....+f_n}{\left(\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+.....+\frac{f_n}{x_n}\right)}$$

माध्यिका (Median)

किसी समूह या श्रेणी के सभी पदों को उनके मान के अनुसार आरोही या अवरोही क्रमों में रखने पर प्राप्त मध्य पद का मान माध्यिका कहलाता है।

माध्यिका श्रेणी को इस प्रकार दो भागों में विभाजित करती है कि इनमें से एक भाग के पदों का मान मध्य पद के मान से कम तथा दूसरे भाग के पदों का मान मध्य पद के मान से अधिक होता है।

(1) **माध्यिका की गणना** (Calculation of median) :

(i) **अवर्गीकृत आँकड़ों या श्रेणी से माध्यिका ज्ञात करना** : सर्वप्रथम आँकड़ो को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। माना प्रेक्षणों की संख्या n है।

यदि n विषम है, तब माध्यिका $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ पद का मान

यदि n सम है, तब माध्यिका

$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{2}\right)\text{वाँ पद का मान} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद का मान}\right]$

(ii) **असतत् या भिन्न श्रेणी** : सर्वप्रथम आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित चरों की संचयी बारम्बारता ज्ञात करते हैं, तत्पश्चात् निम्न प्रकार से माध्यिका ज्ञात करते हैं।

माध्यिका $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ प्रेक्षण, जहाँ n संचयी बारम्बारता है।

(iii) **वर्गीकृत आँकड़ों या श्रेणी से माध्यिका ज्ञात करना**

(a) **आरोही क्रम में श्रेणी के लिये** :

माध्यिका $= l + \frac{\left(\frac{N}{2}-C\right)}{f} \times i$

जहाँ l = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा

f = माध्यिका वर्ग की बारम्बारता

N = समस्त बारम्बारताओं का योग

i = माध्यिका वर्ग की चौड़ाई (width)

C = माध्यिका वर्ग से पूर्व तक की सभी बारम्बारताओं का योग

(b) **अवरोही क्रम में श्रेणी के लिये** : माध्यिका $= u - \left(\frac{\frac{N}{2}-C}{f}\right) \times i$,

जहाँ u = माध्यिका वर्ग की उच्च सीमा, $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

माध्यिका किसी बंटन को दो बराबर भागों में विभाजित करती है, इसी प्रकार चतुर्थक (quartiles), पंचमक (quantiles), दशमक (deciles) तथा शतमक (percentiles) किसी बंटन को क्रमशः 4, 5, 10 तथा 100 भागों में विभाजित करते हैं। jवाँ चतुर्थक निम्न प्रकार से ज्ञात करते हैं।

$$Q_j = l + \left(\frac{j\frac{N}{4}-C}{f}\right) i; j = 1, 2, 3.$$

Q_1 निम्न चतुर्थक, Q_2 माध्यिका तथा Q_3 उच्च चतुर्थक कहलाता है।

(2) **निम्न चतुर्थक** (Lower quartile) :

(i) **असतत् श्रेणी के लिये** : $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ वाँ पद का आकार

(ii) **सतत् श्रेणी के लिये** : $Q_1 = l + \frac{\left(\frac{N}{4}-C\right)}{f} \times i$

(3) **उच्च चतुर्थक** (Upper quartile) :

(i) **असतत् श्रेणी के लिये** : $Q_3 = \left[\frac{3(n+1)}{4}\right]$ वें पद का आकार

(ii) **सतत् श्रेणी** : $Q_3 = l + \frac{\left(\frac{3N}{4}-C\right)}{f} \times i$

(4) **दशमक** (Decile) : दशमक, कुल बारम्बारता N को 10 बराबर भागों में विभाजित करता है।

$D_j = l + \frac{\frac{N \times j}{10} - C}{f} \times i \quad [j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$

यदि $j = 5$, तब $D_5 = l + \frac{\frac{N}{2}-C}{f} \times i$. अतः D_5 को माध्यिका भी कहते हैं।

(5) **शतमक** (Percentile) : शतमक, कुल बारम्बारता N को 100 बराबर भागों में विभाजित करता है।

$P_k = l + \frac{\frac{N \times k}{100} - C}{f} \times i$; जहाँ $k = 1, 2, 3, 4, 5, ..., 99$.

बहुलक (Mode)

किसी सतत् श्रेणी के लिये, सांख्यिकीय आँकड़ों में जिस पद की बारम्बारता अधिकतम हो, वह पद बहुलक कहलाता है।

बहुलक $= l_1 + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times i$

जहाँ, l_1 = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

f_1 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता

f_0 = बहुलक वर्ग के पूर्व वर्ग की बारम्बारता

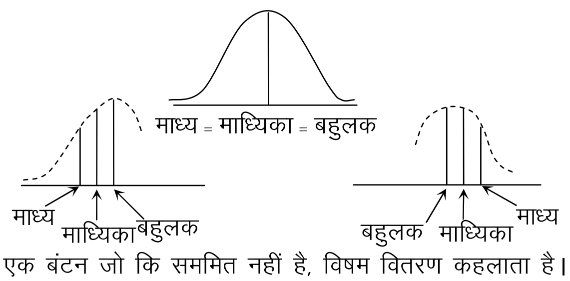
f_2 = बहुलक वर्ग से अगले वर्ग की बारम्बारता

i = बहुलक वर्ग का आकार

सममित बंटन (Symmetric distribution)

यदि माध्य, बहुलक तथा माध्यिका के मान सम्पाती हों, तब यह सममिति, सममित बंटन कहलाती है।

सममित बंटन में बारम्बारता वक्र के केन्द्रीय बिन्दु के दोनों ओर बारम्बारतायें सममित रुप से वितरित होती है।



एक बंटन जो कि सममित नहीं है, विषम वितरण कहलाता है।

किसी दुर्बल असममित बंटन के लिये माध्य, माध्यिका तथा बहुलक में प्रायः निम्न सम्बन्ध प्राप्त होता है।

माध्य − बहुलक = 3(माध्य − माध्यिका) $\Rightarrow$ बहुलक = 3 माध्यिका − 2 माध्य

पाई तालिका या पाई चित्रा (Pie chart or Pie diagram)

पाई चित्र में एक वृत्त को संगत तालिका में अवयवों की संख्या के बराबर खण्डों में विभाजित किया जाता है। सम्पूर्ण चित्र पाई (pie) के समान प्रतीत होता है तथा इसके घटक, पाई (Pie) से काटे गये खण्ड के रूप में प्रतीत होते हैं।

पाई चित्र में प्रत्येक पद का एक क्षेत्र होता है, जिसका क्षेत्रफल, पद के मान के अनुसार कुल क्षेत्रफल का एक निश्चित प्रतिशत होता है। यदि कुल पदों का मान N तथा किसी विशेष पद से सम्बन्धित पद का मान n_1 है, तब इस पद के लिये खण्ड का क्षेत्रफल $=\left(\frac{n_1}{N}\right)\times 360^\circ$, (चूँकि पूर्ण वृत्तीय चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण 360° होता है।)

विक्षेपण की माप (Measure of dispersion)

विक्षेपण वह गुण है, जो किसी श्रेणी के पदों का माध्य के परितः बिखराव या प्रर्कीणन (scatter) बताता है।

मुख्यतः चार प्रकार के विक्षेपण हैं

(1) परिसर (Range)

(2) माध्य विचलन (Mean deviation)

(3) मानक विचलन (Standard deviation)

(4) वर्ग विचलन (Square deviation)

(1) **परिसर** (Range) **:** किसी चर के अधिकतम तथा न्यूनतम मानों के अन्तर को परिसर कहते हैं। परिसर = $x_{max} - x_{min}$

परिसर गुणांक $=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{x_{\max}+x_{\min}}$.

जहाँ x_{max} तथा x_{min} क्रमशः चर के अधिकतम तथा न्यूनतम मान है।

परिसर, केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप नहीं है। परिसर का उपयोग मुख्यतः उत्पादन की गुणवत्ता से सम्बन्धित सांख्यिकीय श्रेणी में होता है।

(i) **अन्तःचतुर्थक परिसर** (Inter-quartile range) **:** चतुर्थक वह परिमाण है, जो बंटन को चार बराबर भागों में विभाजित करता है। अन्तः चतुर्थक परिसर, तृतीय तथा प्रथम चतुर्थकों का अन्तर होता है।

अन्तःचतुर्थक परिसर $=Q_3-Q_1$

जहाँ Q_1= प्रथम चतुर्थक या निम्न चतुर्थक तथा Q_3 = तृतीय चतुर्थक या उच्च चतुर्थक

(ii) **शतमक परिसर :** यह निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है

शतमक परिसर $=P_{90}-P_{10}$

जहाँ P_{90} = 90 वाँ प्रतिशक तथा P_{10} = 10 वाँ प्रतिशक

शतमक परिसर, परिसर तथा अन्तः चतुर्थक परिसर की तुलना में अधिक श्रेष्ठ परिणाम देता है।

(iii) **चतुर्थक विचलन या अर्द्ध अन्तःचतुर्थक परिसर** (Quartile deviation or Semi inter-quartile range) **:** यह तृतीय तथा प्रथम चतुर्थकों के अंतर का आधा होता है, अर्थात् $\text{Q.D.}=\frac{Q_3-Q_1}{2}$ तथा चतुर्थक विचलन गुणांक $=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$.

जहाँ, Q_3= तृतीय या उच्च चतुर्थक तथा Q_1 = प्रथम या निम्न चतुर्थक

(2) **माध्य विचलन** (Mean deviation) **:** माध्य, माध्यिका या बहुलक से विचलनों (सभी को धनात्मक लेने पर) का आंकिक औसत माध्य विचलन कहलाता है।

(i) **जब आँकड़े अवर्गीकृत हो :** माध्य विचलन $=\frac{\Sigma|x-M|}{n}$

जहाँ, $|x-M|$ = चर का माध्य (माध्य, माध्यिका या बहुलक) से विचलन का मापांक तथा n = पदों की संख्या।

(ii) **सतत् श्रेणी के लिये माध्य विचलन :** सर्वप्रथम उस माध्य को ज्ञात करते हैं, जिससे विचलन ज्ञात करना है। तत्पश्चात् प्रत्येक चर का इस माध्य M से विचलन $dM=|x-M|$ ज्ञात करते हैं।

अब इन विचलनों को संगत बारम्बारताओं से गुणा करते है, तथा गुणनफल $f.dM$ ज्ञात करने के पश्चात् इन गुणनफलों का योग $\sum f dM$ ज्ञात करते हैं। अंत में निम्न सूत्र का उपयोग करते हैं, माध्य विचलन $=\frac{\sum f|x-M|}{n}=\frac{\sum f\,dM}{n}$, जहाँ, $n=\Sigma f$.

(3) **मानक विचलन** (Standard deviation) **:** चर के विभिन्न मानों के अपने समान्तर माध्य से विचलनों के वर्गों के समान्तर माध्य का वर्गमूल मानक विचलन कहलाता है। इसे साधारणतया ग्रीक अक्षर σ (सिगमा) से प्रदर्शित करते हैं।

(i) **मानक विचलन गुणांक :** किन्हीं दो बारम्बारता बंटनों के विक्षेपणों की तुलना करने के लिये मानक विचलन के सापेक्षिक माप की गणना की जाती है, जो कि मानक विचलन गुणांक कहलाती है। मानक विचलन गुणांक $=\frac{\sigma}{\bar{x}}$, जहाँ $\bar{x}$ समान्तर माध्य है।

(ii) **अवर्गीकृत आँकड़ों से मानक विचलन ज्ञात करना**

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{N}}$$

जहाँ, $\bar{x}$ =श्रेणी का समान्तर माध्य, N = कुल बारम्बारता (आवृत्ति)

(iii) **अवर्गीकृत किन्तु सारणीबद्ध आँकड़ो से विचलन ज्ञात करना**

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}}$$

जहाँ, $\bar{x}$ = श्रेणी का आंकिक माध्य

x_i = वर्ग अंतराल का मध्य मान

f_i = x_i के संगत बारम्बारता

$N=\Sigma f$ = कुल बारम्बारता

लघु विधि :

(a) $\sigma=\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}-\left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$ (b) $\sigma=\sqrt{\frac{\sum d^2}{N}-\left(\frac{\sum d}{N}\right)^2}$

जहाँ, $d=x-A$ = कल्पित माध्य A से विचलन

f = पद की बारम्बारता, $N=\Sigma f$ = बारम्बारताओं का योग

(4) **वर्ग विचलन** (Square deviation)

(i) **वर्ग माध्य मूल विचलन** (Root mean square deviation)

$S=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-A)^2}$ जहाँ, A स्वेच्छ चर तथा S वर्ग माध्य विचलन है।

(ii) **मानक विचलन तथा वर्ग माध्य मूल विचलन के मध्य सम्बन्ध :** यदि σ मानक विचलन तथा S वर्ग माध्य मूल विचलन है, तब $S^2=\sigma^2+d^2$. स्पष्टतः, S^2 न्यूनतम होगा जब $d=0$ अर्थात् $\bar{x}=A$

अतः, यदि माध्य से विचलन लिये गये हैं तब वर्ग माध्य विचलन तथा परिणामतः वर्ग माध्य मूल विचलन न्यूनतम होगा।

प्रसरण (Variance)

मानक विचलन के वर्ग को प्रसरण कहते हैं।

(1) **मानक विचलन गुणांक एवं प्रसरण :** मानक विचलन गुणांक मानक विचलन एवं माध्य का अनुपात है। अतः मानक विचलन गुणांक $=\sigma/\bar{x}$

प्रसरण गुणांक = मानक विचलन गुणांक × 100 $=\frac{\sigma}{\bar{x}}\times 100$

(2) **संयुक्त श्रेणी का प्रसरण**

$$\sigma^2=\frac{1}{n_1+n_2}[n_1(\sigma_1^2+d_1^2)+n_2(\sigma_2^2+d_2^2)]$$

जहाँ, $d_1=\bar{x}_1-\bar{x}, d_2=\bar{x}_2-\bar{x}$, एवं $\bar{x}=\frac{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_1}{n_1+n_2}$

विषमता (Skewness)

विषमता, सममिति में कमी की माप है। इसे γ_1 से प्रदर्शित करते हैं

$$\gamma_1 = \frac{\sum(x_i - \mu)^3}{\{\sum(x_i - \mu^2)\}^{3/2}}$$

यदि बंटन विषमीय है, तो

(i) माध्य $\neq$ माध्यिका $\neq$ बहुलक

(ii) चतुर्थक माध्यिका से बराबर दूरी पर नहीं होते हैं।

(iii) बारंबारता वक्र में एक ओर, दूसरे ओर की अपेक्षा अधिक खिंचाव (Stretch) होता है।

(1) **बंटन** (Distribution):

बंटन तीन प्रकार के होते हैं

(i) **सामान्य बंटन** (Normal distribution) : जब $\gamma_1 = 0$, तब बंटन, सामान्य बंटन कहलाता है।

इस स्थिति में, माध्य = माध्यिका = बहुलक

(ii) **धनात्मक विषमीय बंटन** (Positively skewed distribution) : जब $\gamma_1 > 0$, तब बंटन धनात्मक विषमीय बंटन कहलाता है।

इस स्थिति में, माध्य > माध्यिका > बहुलक

(iii) **ऋणात्मक विषमीय बंटन** (Negative skewed distribution) : जब $\gamma_1 < 0$, तब बंटन ऋणात्मक विषमीय बंटन कहलाता है।

इस स्थिति में, माध्य < माध्यिका < बहुलक

(2) **विषमता का अनुमापन** (Measures of skewness) :

(i) **विषमता का निरक्षेप अनुमापन**

(a) $S_k = M - M_d$

(b) $S_k = M - M_o$

(c) $S_k = Q_3 + Q_1 - 2M_d$

जहाँ, M_d = माध्यिका, M_o = बहुलक, M = माध्य है।

दो श्रेणियों की तुलना के लिये विषमता का निरपेक्ष अनुमापन उपयोगी नहीं है, अतः विषमता का परिक्षेप अनुमापन प्रयुक्त करते हैं, क्योंकि ये शुद्ध संख्यायें होती हैं।

(ii) **विषमता का परिक्षेप अनुमापन**

(a) **विषमता का कार्ल पियर्सन गुणांक** (The karl pearson's coefficient of skewness) : $S_k = \frac{M - M_o}{\sigma} = 3\frac{(M - M_d)}{\sigma}, -3 \le S_k \le 3$

(b) **विषमता का बॉलेज गुणांक** (Bowley's coefficient of skewness) : $S_k = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1}$

(c) **विषमता का कैले गुणांक** (Kelly's coefficient of skewness) : $S_k = \frac{P_{10} + P_{90} - 2M_d}{P_{90} - P_{10}} = \frac{D_1 + D_9 - 2M_d}{D_9 - D_1}$

Tips & Tricks

✍ **समान्तर माध्य से सम्बन्धित बिन्दु**

- समान्तर माध्य, अन्य माध्यों की तुलना में अधिक उपयोगी हे।
- समान्तर माध्य सभी प्रेक्षणों पर आधारित है।
- यदि प्रेक्षणों के मान बड़े है, तब वह तुलनात्मक रूप से अधिक सही तथा विश्वसनीय परिणाम देता है।

✍ **गुणोत्तर माध्य से सम्बन्धित बिन्दु**

- यह श्रेणी के सभी पदों पर आधारित है।
- यह घातांकों, औसत अनुपातों तथा प्रतिशत इत्यादि के लिए अधिक उपयोगी है।
- यदि किसी पद का आकार (मान) शून्य या ऋणात्मक हों, तब गुणोत्तर माध्य की गणना नहीं की जा सकती है।

✍ **हरात्मक माध्य से सम्बन्धित बिन्दु**

- यह श्रेणी के सभी पदों पर आधारित है।
- यह दर, अनुपातों तथा समय इत्यादि से सम्बन्धित समस्याओं के लिए अधिक उपयोगी है।
- समान्तर माध्य $\ge$ गुणोत्तर माध्य $\ge$ हरात्मक माध्य तथा (गुणोत्तर माध्य)^2 = (समान्तर माध्य) (हरात्मक माध्य)

✍ **माध्यिका से सम्बन्धित बिन्दु**

- यह एक निर्दिष्ट औसत है, जिसका उपयोग गुणात्मक आँकड़ो जैसे बुद्धिमानी, समृद्धि, ईमानदारी आदि में आसानी से किया जा सकता है।
- बीजगणितीय चिन्हों को छोड़ने पर, माध्यिका से पदों के विचलनों का योग, किसी अन्य बिन्दु से विचलनों के योग से कम होता है।

✍ समान्तर माध्य बड़े मानों के लिए उपयोगी होता है, जब कि गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य छोटे मानों के लिए उपयोगी होते हैं।

✍ **बहुलक से सम्बन्धित बिन्दु**

- यह सभी प्रेक्षणों पर आधारित नहीं है।
- यह आवश्यक नहीं है कि किसी वितरण का बहुलक अद्वितीय है।
- अन्य औसतों की तुलना में बहुलक, प्रेक्षणों में परिवर्तन से सर्वाधिक परिवर्तित होता है।
- यह उस स्थिति में उपयोगी नहीं हैं, जब पदों की सापेक्षिक महत्ता पर विचार किया जाता है।

✍ विक्षेपण का माध्य गुणांक $= \frac{\text{माध्य से माध्य विचलन}}{\text{माध्य}}$

✍ विक्षेपण का माध्यिका गुणांक $= \frac{\text{माध्यिका से माध्य विचलन}}{\text{माध्यिका}}$

✍ विक्षेपण का बहुलक गुणांक $= \frac{\text{बहुलक से माध्य विचलन}}{\text{बहुलक}}$

✍ चतुर्थक विचलन श्रेणी के चरम मानों द्वारा न्यूनतम प्रभावित होता है।

✍ माध्य विचलन श्रेणी के सभी पदों पर आधारित होता है। यह परिसर (range) और चतुर्थक विचलन (quartile deviation) की तुलना में अधिक सही परिणाम देता है।

✍ मध्यिका से माध्य विचलन, किसी अन्य माध्य से माध्य विचलन की तुलना में कम होता है।

✍ मानक विचलन □ परिसर अर्थात् प्रसरण □ (परिसर)^2.

✍ विक्षेपण की मापों के मध्य प्रेक्षणात्मक सम्बन्ध

- माध्य विचलन $= 4/5$ (मानक विचलन)
- अर्द्ध अंतः चतुर्थक परिसर $= 2/3$ (मानक विचलन)

✍ अर्द्ध अन्तः चतुर्थक परिसर $= \frac{5}{6}$ (माध्य विचलन).

✍ सममित वितरण के लिए निम्नलिखित क्षेत्रीय सम्बन्ध होते हैं

$\overline{X} \pm \sigma$, 68.27% वस्तुएँ जो इस परास (range) में हैं।

$\overline{X} \pm 2\sigma$, 95.45% वस्तुएँ जो इस परास (range) में हैं।

$\overline{X} \pm 3\sigma$, 99.74% वस्तुएँ जो इस परास (range) में हैं।

✍ प्रथम n प्राकृत संख्याओं का मानक विचलन $= \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$.

Ordinary Thinking

Objective Questions

माध्य

1. यदि 3, 4, x, 7, 10 का माध्य 6 हो, तब x का मान है
(a) 4 (b) 5
(c) 6 (d) 7

2. किसी समूह की संख्याओं का माध्य $\bar{x}$ है। यदि प्रत्येक संख्या को λ से गुणा किया जाये, तब नये समूह का माध्य होगा
(a) $\bar{x}$ (b) $\lambda + \bar{x}$
(c) $\lambda\bar{x}$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. असतत् प्रेक्षणों $y_1, y_2, ..., y_n$ का माध्य है [DCE 1999]
(a) $\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ (b) $\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} i}$
(c) $\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i f_i}{n}$ (d) $\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

4. कल्पित माध्य 'a' से वर्गांक y_i का विचलन d_i है तथा f_i बारम्बारता है। यदि $M_g = x + \frac{1}{\sum f_i}(\sum f_i d_i)$, तब x है
(a) निम्न सीमा (b) कल्पित माध्य
(c) प्रेक्षणों की संख्या (d) वर्ग का आकार

5. किसी समूह के प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x}$ है। यदि प्रत्येक प्रेक्षण को α से विभाजित किया जाए, $\alpha \neq 0$ तथा इसके बाद 10 से बढ़ाया जाए, तब नये समूह का माध्य है
(a) $\frac{\bar{x}}{\alpha}$ (b) $\frac{\bar{x}+10}{\alpha}$
(c) $\frac{\bar{x}+10\alpha}{\alpha}$ (d) $\alpha\bar{x}+10$

6. यदि संख्याओं $27+x$, $31+x$, $89+x$, $107+x, 156+x$ का माध्य 82 है, तब $130+x, 126+x, 68+x, 50+x, 1+x$ का माध्य है [Kerala PET 2001]
(a) 75 (b) 157
(c) 82 (d) 80

7. दी गई संख्याओं का बारम्बारता बंटन निम्न है

मान :	1	2	3	4
बारम्बारता :	5	4	6	f

यदि माध्य 3 है, तब f का मान है
(a) 3 (b) 7
(c) 10 (d) 14

8. यदि संख्याओं $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ का समान्तर माध्य $\bar{x}$ है, तब संख्याओं $ax_1+b, ax_2+b, ax_3+b, ... ax_n+b$ का समान्तर माध्य, जहाँ a, b दो अचर हैं, है
(a) $\bar{x}$ (b) $n\,a\bar{x}+nb$
(c) $a\bar{x}$ (d) $a\bar{x}+b$

9. संख्याओं $3, 3^2, 3^3, ..., 3^n$ का गुणोत्तर माध्य है [Pb. CET 1997]
(a) $3^{2/n}$ (b) $3^{(n-1)/2}$
(c) $3^{n/2}$ (d) $3^{(n+1)/2}$

10. n प्रेक्षणों के व्युत्क्रमों के माध्य का व्युत्क्रम, n प्रेक्षणों का है [AMU 1985]
(a) समान्तर माध्य (b) गुणोत्तर माध्य
(c) हरात्मक माध्य (d) इनमें से कोई नहीं

11. 3, 7, 8, 10, 14 का हरात्मक माध्य है
(a) $\frac{3+7+8+10+14}{5}$ (b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}$
(c) $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}}{4}$ (d) $\frac{5}{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}}$

12. यदि 20 प्रेक्षणों का 30 से विचलनों का बीजगणितीय योग 20 है, तब प्रेक्षणों का माध्य है
(a) 30 (b) 30.1
(c) 29 (d) 31

13. प्रथम n प्राकृत संख्याओं का भारित माध्य (Weighted mean) जिनके मान संगत संख्याओं के वर्गों के बराबर हैं [Pb. CET 1989]
(a) $\frac{n+1}{2}$ (b) $\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$
(c) $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ (d) $\frac{n(n+1)}{2}$

14. किसी बंटन के मानों $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ... \frac{1}{n}$ की बारम्बारतायें क्रमशः 1, 2, 3, 4, 5, ... n हैं, तब माध्य है
(a) 1 (b) n
(c) $\frac{1}{n}$ (d) $\frac{2}{n+1}$

15. किसी समूह के प्रेक्षणों की संख्या 40 है। यदि प्रथम 10 प्रेक्षणों का औसत 4.5 तथा शेष 30 का औसत 3.5 है, तब सम्पूर्ण समूह का औसत है [AMU 1992; DCE 1996]
(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{15}{4}$
(c) 4 (d) 8

16. एक छात्र तीन विषयों में 75%, 80% तथा 85% अंक प्राप्त करता है। यदि दूसरे विषय के अंक जोड़े जाये, तब इसका औसत निम्न से कम नहीं हो सकता है
(a) 60% (b) 65%
(c) 80% (d) 90%

17. आदमियों तथा औरतों के संयुक्त समूह की माध्य आयु 30 वर्ष है यदि आदमियों तथा औरतों की आयु के माध्य क्रमशः 32 तथा 27 हैं, तब समूह में औरतों का प्रतिशत है
(a) 30 (b) 40
(c) 50 (d) 60

18. किसी समूह की 50 सँख्याओं का समान्तर माध्य 38 है। यदि समूह की दो संख्यायें 55 तथा 45 हटा दी जायें, तब शेष संख्याओं के समूह का समान्तर माध्य है [Kurukshetra CEE 1993]
(a) 38.5 (b) 37.5
(c) 36.5 (d) 36

19. एक गाड़ी चालक धरातल से हिल स्टेशन तक 120 किमी की दूरी 30 किमी / घंटा की औसत चाल से तय करता है तथा वापसी यात्रा 25 किमी / घंटा की दर से तय करता है। वह धरातल पर अन्य 120

किमी की दूरी 50 किमी / घंटा के वेग से तय करता है। तब 360 किमी की सम्पूर्ण यात्रा की औसत चाल है

(a) $\frac{30+25+50}{3}$ किमी / घंटा

(b) $(30 . 25 . 50)^{\frac{1}{3}}$

(c) $\frac{3}{\frac{1}{30}+\frac{1}{25}+\frac{1}{50}}$ किमी / घंटा

(d) इनमें से कोई नहीं

20. किसी कक्षा के 35 छात्रों का औसत भार 40 किग्रा है। यदि इसमें शिक्षक का भार शामिल किया जाये, तब औसत $\frac{1}{2}$ किग्रा बढ़ जाता है, शिक्षक का भार है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) 40.5 किग्रा (b) 50 किग्रा
(c) 41 किग्रा (d) 58 किग्रा

21. यदि दो प्रेक्षणों के माध्य $\bar{x}_1$ तथा $\bar{x}_2$ इस प्रकार हैं कि $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ तथा संयुक्त बंटन का माध्य $\bar{x}$ है, तब

(a) $\bar{x} < \bar{x}_1$ (b) $\bar{x} > \bar{x}_2$
(c) $\bar{x} = \frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{2}$ (d) $\bar{x}_1 < \bar{x} < \bar{x}_2$

22. n प्रेक्षणों का समान्तर माध्य M है। यदि $n-4$ प्रेक्षणों का योग a है, तब शेष 4 प्रेक्षणों का माध्य है

(a) $\frac{nM-a}{4}$ (b) $\frac{nM+a}{2}$
(c) $\frac{nM-A}{2}$ (d) $nM+a$

23. यदि बंटन का माध्य 2.6 है, तब y का मान है [Kurukshetra CEE 2001]

चर x	1	2	3	4	5
x की बारम्बारता f	4	5	y	1	2

(a) 24 (b) 13
(c) 8 (d) 3

24. 100 छात्रों की एक कक्षा में 70 लड़के है, जिनके किसी विषय में औसत अंक 75 है। यदि सम्पूर्ण कक्षा के औसत अंक 72 है, तब लड़कियों के औसत अंक हैं [AIEEE 2002]

(a) 73 (b) 65
(c) 68 (d) 74

25. यदि समूह की संख्याओं $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ का माध्य $\bar{x}$ है, तब संख्याओं x_i+2i, $1 \le i \le n$ का माध्य है [Pb. CET 1988]

(a) $\bar{x}+2n$ (b) $\bar{x}+n+1$
(c) $\bar{x}+2$ (d) $\bar{x}+n$

26. संख्याओं 4, 8, 16 का हरात्मक माध्य है [AMU 1995]

(a) 6.4 (b) 6.7
(c) 6.85 (d) 7.8

27. 100 पदों का माध्य 49 है। बाद में यह पाया गया, कि तीन पद जो कि 60, 70, 80 होना चाहियें, गलती से क्रमशः 40, 20, 50 पढ़े गये थे। सही माध्य है [Kurukshetra CEE 1994]

(a) 48 (b) $82\frac{1}{2}$
(c) 50 (d) 80

28. एक विद्यालय की कक्षा XII में रसायन के 4 विभाग हैं जिनमें 40, 35, 45 तथा 42 छात्र हैं। इन चार विभागों द्वारा रसायन के प्रश्न–पत्र में प्राप्त माध्य अंक क्रमशः 50, 60, 55 तथा 45 हैं, तब सभी विभागों का प्रति विद्यार्थी अंको का औसत है [Pb. CET 2000]

(a) 53 (b) 45
(c) 55.3 (d) 52. 25

29. 5 संख्याओं का माध्य 18 है। यदि एक संख्या को निकाल दिया जाए तब माध्य 16 रह जाता है तब निकाली गई संख्या है [Pb. CET 2001]

(a) 18 (b) 25
(c) 26 (d) 30

30. 7 छात्रों के किसी समूह में प्रति छात्र माध्य भार 55 किग्रा है। यदि 6 छात्रों के भार क्रमशः 52, 58, 55, 53, 56 तथा 54 है तब 7 वें छात्र का भार होगा [Pb. CET 2002]

(a) 55 किग्रा (b) 60 किग्रा
(c) 57 किग्रा (d) 50 किग्रा

31. किसी वितरण के वर्ग अंक 6,10, 14, 18, 22, 26, 30 हैं, तब वर्ग आकार है [Pb. CET 2004]

(a) 4 (b) 2
(c) 5 (d) 8

32. माना $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n प्रेक्षण इस प्रकार हैं कि, $\sum x_i^2 = 400$ तथा $\sum x_i = 80$ तब निम्न में से n का सम्भावित मान है [AIEEE 2005]

(a) 9 (b) 12
(c) 15 (d) 18

माध्यिका तथा बहुलक

1. निम्न में से कौनसी केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप छात्रों की गणनात्मक बुद्धिमत्ता ज्ञात करने के लिये सार्वाधिक उपयोगी है [Kurukshetra CEE 1995]

(a) बहुलक (b) समान्तर माध्य
(c) गुणोत्तर माध्य (d) माध्यिका

2. किसी समूह के प्रेक्षणों का केन्द्रीय मान कहलाता है

(a) माध्य (b) माध्यिका
(c) बहुलक (d) गुणोत्तर माध्य

3. किसी बारम्बारता बंटन के लिये, 7 वॉ दशमक (decile) निम्न में से किस सूत्र द्वारा ज्ञात करते हैं

(a) $D_7 = l + \frac{\left(\frac{N}{7}-C\right)}{f} \times i$ (b) $D_7 = l + \frac{\left(\frac{N}{10}-C\right)}{f} \times i$

(c) $D_7 = l + \frac{\left(\frac{7N}{10}-C\right)}{f} \times i$ (d) $D_7 = l + \frac{\left(\frac{10N}{7}-C\right)}{f} \times i$

4. असतत् ऑकड़ों के लिये निम्न में से कौन सा माध्यिका के बराबर नहीं है

(a) 50 वाँ शतमक (b) 5वाँ दशमक
(c) द्वितीय चतुर्थक (d) निम्न चतुर्थक

5. सँख्याओं 10, 14, 11, 9, 8, 12, 6 की माध्यिका है [Kurukshetra CEE 1997]

(a) 10 (b) 12
(c) 14 (d) 11

6. किसी समूह के प्रेक्षणों के लिये माध्यिका M, द्वितीय चतुर्थक Q_2, 5वें दशमक D_5 तथा 50 वें शतमक P_{50} के मध्य सम्बन्ध है [AMU 1990]

(a) $M = Q_2 = D_5 = P_{50}$ (b) $M < Q_2 < D_5 < P_{50}$
(c) $M > Q_2 > D_5 > P_{50}$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. सममित बंटन के लिये $Q_1 = 25$ तथा $Q_3 = 45$, तब माध्यिका है
(a) 20 (b) 25
(c) 35 (d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि एक चर, असतत् मान $\alpha - 4, \alpha - \frac{7}{2}, \alpha - \frac{5}{2}, \alpha - 3, \alpha - 2,$ $\alpha + \frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2}, \alpha + 5 \, (\alpha > 0)$ ग्रहण करता है, तब माध्यिका है [DCE 1997; Pb. CET 1988]
(a) $\alpha - \frac{5}{4}$ (b) $\alpha - \frac{1}{2}$
(c) $\alpha - 2$ (d) $\alpha + \frac{5}{4}$

9. निम्नलिखित बंटन के लिये उच्च चतुर्थक किस पद द्वारा प्राप्त होता है

पद का आकार	1	2	3	4	5	6	7
बारम्बारता	2	4	5	8	7	3	2

(a) $\left(\frac{31+1}{4}\right)$ वाँ पद (b) $\left[2\left(\frac{31+1}{4}\right)\right]$ वाँ पद
(c) $\left[3\left(\frac{31+1}{4}\right)\right]$ वाँ पद (d) $\left[4\left(\frac{31+1}{4}\right)\right]$ वाँ पद

10. किसी समूह के 9 विभिन्न प्रेक्षणों की माध्यिका 20.5 है। यदि समूह के 4 बड़े प्रेक्षणों का मान 2 बढ़ाया जाये, तब नये समूह की माध्यिका का मान [AIEEE 2003]
(a) 2 बढ़ जायेगा
(b) 2 कम हो जायेगा
(c) मूल माध्यिका का दो गुना हो जायेगा
(d) मूल माध्यिका के समान ही रहेगा

11. एक बहुलक की सतत् श्रेणी के लिए सूत्र है
(a) $l + \frac{f_{m-1}}{f_m - f_{m-1} - f_{m+1}} \times C$ या $l + \left(\frac{f_1}{f_m - f_1 - f_2}\right) \times i$
(b) $l = \frac{f_m - f_{m-1}}{f_m - f_{m-1} - f_{m+1}} \times C$ या $l + \frac{f_m - f_1}{f_m - f_1 - f_2} \times i$
(c) $l + \frac{f_m - f_{m-1}}{2f_m - f_{m-1} - f_{m+1}} \times C$ या $l + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times i$
(d) $l + \frac{2f_m - f_{m-1}}{f_m - f_{m-1} - f_{m+1}} \times C$ या $l + \frac{2f_m - f_1}{f_m - f_1 - f_2} \times i$

12. संख्याओं का एक समूह तीन बार 4, पाँच बार 5, छः बार 6, आठ बार 8 तथा सात बार 10 रखता है, तब संख्याओं के समूह का बहुलक है [AMU 1989]
(a) 6 (b) 7
(c) 8 (d) 10

13. निम्नलिखित पदों 0, 1, 6, 7, 2, 3, 7, 6, 6, 2, 6, 0, 5, 6, 0 का बहुलक है [AMU 1995]
(a) 0 (b) 5
(c) 6 (d) 2

14. निम्नलिखित बंटन का बहुलक है [AMU 1988]

प्राप्तांक	4	5	6	7	8
छात्रों की संख्या	6	7	10	8	3

(a) 5 (b) 6
(c) 8 (d) 10

15. निम्नलिखित कथनों पर विचार करें [AIEEE 2004]
(1) बहुलक लेखाचित्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है
(2) माध्यिका पैमाने के परिवर्तन से स्वतंत्र नहीं होती है
(3) प्रसरण मूलबिन्दु तथा पैमाने के परिवर्तन से स्वतंत्र होता है
इनमें से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है
(a) (1), (2) तथा (3) (b) केवल (2)
(c) केवल (1) तथा (2) (d) केवल (1)

माध्य, माध्यिका तथा बहुलक में सम्बन्ध, पाई चित्र

1. यदि माध्य = (3 माध्यिका– बहुलक) k, तब k का मान है
(a) 1 (b) 2
(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{3}{2}$

2. यदि किसी दुर्बल असममित बंटन के बहुलक तथा माध्य क्रमशः 7 तथा 4 हैं, तब माध्यिका है [AIEEE 2005]
(a) 4 (b) 5
(c) 6 (d) 7

3. यदि किसी दुर्बल असममित बंटन के बहुलक तथा माध्य क्रमशः 6λ तथा 9λ हैं, तब माध्यिका है [Pb. CET 1988]
(a) 8λ (b) 7λ
(c) 6λ (d) 5λ

4. निम्न में से कौनसा केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप नहीं है [Pb. CET 1989]
(a) माध्य (b) माध्यिका
(c) बहुलक (d) परास

5. निम्न में से सर्वाधिक स्थिर केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप है [AMU 1994]
(a) माध्य (b) माध्यिका
(c) बहुलक (d) इनमें से कोई नहीं

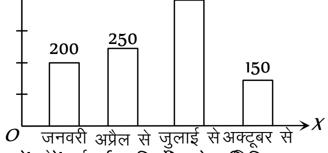
6. निम्न में से कौनसा औसत, चरम प्रेक्षणों से सर्वाधिक प्रभावित होता है [DCE 1995]
(a) बहुलक (b) माध्यिका
(c) समान्तर माध्य (d) गुणोत्तर माध्य

7. समाचार पत्र से निम्नलिखित आँकड़े संकलित किये गये हैं (प्रतिशत बंटन)

देश	कृषि	उद्योग	नौकरी	अन्य
भारत	45	19	28	8
यू.के.	3	40	44	13
जापान	6	48	43	3
यू.एस.ए.	3	35	61	1

यह निम्न में से किसका उदाहरण है
(a) मूल रुप से दिये गये आँकड़ों का
(b) आकृति रुप में दिये गये आँकड़ों का
(c) प्राथमिक आँकड़ों का
(d) द्वितीयक आँकड़ों का

8. किसी शहर की एक वर्ष के चार माहों में विभिन्न कारणों से मृत्यु नीचे दी गयी हैं। इन आँकड़ों के आधार पर, तीसरे चर्तुमाह (third quarter) में मृत्यु में प्रतिशत वृद्धि है
(a) 40
(b) 50
(c) 60
(d) 75



9. एक बाजार के 3900 प्रतिष्ठानों में कर्मचारियों के विभिन्न आय समूहों का बंटन निम्नलिखित है

आय समूह	प्रतिष्ठानों की संख्या
150-300	300
300-500	500
500-800	900
800-1200	1000

1200-1800	1200

यदि उपरोक्त बंटन के लिये आलेख चित्र की रचना की जायें, तब आलेख चित्र का उच्चतम दण्ड (bar) किस वर्ग के संगत होगा

(a) 500-800 (b) 1200-1800

(c) 800-1200 (d) 150-300

10. किसी उद्योग के विभिन्न मदों में किये गये खर्च निम्न में से किसके द्वारा सर्वश्रेष्ठ तरीके से प्रदर्शित किये जा सकते हैं

(a) दण्ड चित्र (Bar diagram)

(b) पाई चित्र (Pie diagram)

(c) आलेख चित्र (Histogram)

(d) बारम्बारता बहुभुज (Frequency polygon)

11. किसी माह में एक परिवार के खर्च निम्न हैं :

भोजन – 560 रुपये, किराया – 420 रुपये, कपड़े – 180रुपये,

शिक्षा – 160 रुपये, अन्य मद – 120 रुपये

इन आँकड़ों को प्रदर्शित करने वाला पाई ग्राफ (Pie graph), कपड़ो पर खर्च एक वृत्त खण्ड द्वारा प्रदर्शित करता हैं, जिसका कोण है

(a) 180° (b) 90°

(c) 45° (d) 64°

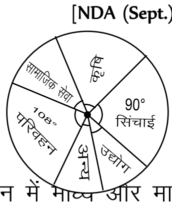
12. किसी राज्य सरकार के विभागतः खर्च निम्न चित्र में प्रदर्शित हैं, तब परिवहन पर किया गया खर्च है [NDA (Sept.) 2000]

(a) 25%

(b) 30%

(c) 32%

(d) 35%



13. यदि किसी दुर्बल असममित वारम्बारता बंटन में माध्य और माध्यिका 21 और 22 हैं, तब बहुलक लगभग है [AIEEE 2005]

(a) 25.5 (b) 24.0

(c) 22.0 (d) 20.5

विक्षेपण की माप

1. विक्षेपण की माप है [DCE 1998]

(a) माध्य विचलन (b) मानक विचलन

(c) चतुर्थक विचलन (d) सभी विकल्प सही हैं

2. माध्यिका से माध्य विचलन है [Kurukshetra CEE 1995, 98]

(a) किसी अन्य मान से मापे गये विचलन से अधिक

(b) किसी अन्य मान से मापे गये विचलन से कम

(c) किसी अन्य मान से मापे गये विचलन के बराबर

(d) अधिकतम, यदि समस्त प्रेक्षण धनात्मक हैं

3. पाँच गणनाओं 1, 2, 3, 4, 5 का मानक विचलन है [AMU 1991; DCE 2000]

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$

(c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{3}$

4. आँकड़ों 2, 4, 6, 8, 10 का प्रसरण है [AMU 1992]

(a) 6 (b) 7

(c) 8 (d) इनमें से कोई नहीं

5. संख्याओं 3, 4, 5, 6, 7 का माध्य विचलन है [AMU 1993; DCE 1998]

(a) 0 (b) 1.2

(c) 5 (d) 25

6. यदि 0, 1, 2, 3, ...,9 का मानक विचलन K है, तब 10, 11, 12, 13,.....,19 का मानक विचलन है

(a) K (b) $K+10$

(c) $K+\sqrt{10}$ (d) $10K$

7. किसी सामान्य बंटन के लिये, यदि माध्य M, बहुलक M_0 तथा माध्यिका M_d, तब

(a) $M > M_d > M_0$ (b) $M < M_d < M_0$

(c) $M = M_d M_0$ (d) $M = M_d = M_0$

8. किसी बारम्बारता बंटन के लिये माध्य से मानक विचलन की गणना निम्न में से किस सूत्र द्वारा करते हैं [DCE 1994]

(a) $\text{M.D.} = \frac{\sum d}{\sum f}$ (b) $\text{M.D.} = \frac{\sum fd}{\sum f}$

(c) $\text{M.D.} = \frac{\sum f|d|}{\sum f}$ (d) $\text{M.D.} = \frac{\sum f}{\sum f|d|}$

9. किसी बारम्बारता बंटन के लिये चतुर्थक विचलन है [DCE 1998]

(a) $Q = Q_3 - Q_1$ (b) $Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$

(c) $Q = \frac{1}{3}(Q_3 - Q_1)$ (d) $Q = \frac{1}{4}(Q_2 - Q_1)$

10. प्रथम n प्राकृत संख्याओं का प्रसरण है [AMU 1994; SCRA 2001]

(a) $\frac{n^2-1}{12}$ (b) $\frac{n^2-1}{6}$

(c) $\frac{n^2+1}{6}$ (d) $\frac{n^2+1}{12}$

11. किसी दुर्बल विषमीय बंटन के लिये, चतुर्थक विचलन तथा मानक विचलन के मध्य सम्बन्ध है [AMU 1996]

(a) $\text{S.D.} = \frac{2}{3}\text{Q.D.}$ (b) $\text{S.D.} = \frac{3}{2}\text{Q.D.}$

(c) $\text{S.D.} = \frac{3}{4}\text{Q.D.}$ (d) $\text{S.D.} = \frac{4}{3}\text{Q.D.}$

12. किसी बारम्बारता बंटन के लिये मानक विचलन की गणना निम्न में से किस सूत्र द्वारा करते हैं [Kurukshetra CEE 1999]

(a) $\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right) - \frac{\sum fd^2}{\sum f}}$ (b) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd^2}{\sum f}\right)^2}$

(c) $\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2 - \frac{\sum fd^2}{\sum f}}$ (d) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$

13. किसी बारम्बारता बंटन के लिये मानक विचलन की गणना निम्न में से किस सूत्र द्वारा करते हैं

(a) $\sigma = \frac{\sum f(x-\bar{x})}{\sum f}$ (b) $\sigma = \frac{\sqrt{\sum f(x-\bar{x})^2}}{\sum f}$

(c) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{\sum f}}$ (d) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})}{\sum f}}$

14. यदि चतुर्थक विचलन (Q.D.) 16 है, तब मानक विचलन है

(a) 24 (b) 42

(c) 10 (d) इनमें से कोई नहीं

15. यदि माध्य विचलन (M.D.) 12 है, तब मानक विचलन है

(a) 15 (b) 12

(c) 24 (d) इनमें से कोई नहीं

16. किसी समूह के प्रेक्षणों 2, 3, 5, 9, 8, 7, 6, 5, 7, 4, 3 का परिसर (range) है

(a) 11 (b) 7
(c) 5.5 (d) 6

17. यदि प्रसरण v तथा मानक विचलन σ है, तब [Kurukshetra CEE 1995]

(a) $v^2 = \sigma$ (b) $v = \sigma^2$
(c) $v = \frac{1}{\sigma}$ (d) $v = \frac{1}{\sigma^2}$

18. यदि आँकड़ों का प्रत्येक प्रेक्षण, जिसका प्रसरण σ^2 है, λ से बढ़ाया जाता है, तब नये समूह का प्रसरण है

(a) σ^2 (b) $\lambda^2\sigma^2$
(c) $\lambda + \sigma^2$ (d) $\lambda^2 + \sigma^2$

19. प्राप्तांकों के दिये गये बंटन का माध्य 35.16 तथा मानक विचलन 19.76 है, तब प्रसरण गुणांक है

(a) $\frac{35.16}{19.76}$
(b) $\frac{19.76}{35.16}$
(c) $\frac{35.16}{19.76} \times 100$
(d) $\frac{19.76}{35.16} \times 100$

20. यदि 25% पद, 20 से कम तथा 25% पद, 40 से अधिक है, तब चतुर्थक विचलन है

(a) 20 (b) 30
(c) 40 (d) 10

21. किसी सामान्य वक्र (Normal curve) के लिये महत्तम कोटि है

(a) $2\pi\sigma$ (b) $\sigma\sqrt{2\pi}$
(c) $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ (d) $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

22. यदि प्रेक्षणों $x_1, x_2, ... x_n$ का प्रसरण σ^2 है, तब $ax_1, ax_2, ..., ax_n$, $\alpha \neq 0$ का प्रसरण है

(a) σ^2 (b) $a\sigma^2$
(c) $a^2\sigma^2$ (d) $\frac{\sigma^2}{a^2}$

23. किसी समूह के प्रेक्षणों – 1, 0, 4 के लिये माध्य से माध्य विचलन है

(a) $\sqrt{\frac{14}{3}}$ (b) 2
(c) $\frac{2}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6 का माध्य तथा मानक विचलन है

(a) $\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{35}{12}}$ (b) 3, 3
(c) $\frac{7}{2}, \sqrt{3}$ (d) $3, \frac{35}{12}$

25. 25 संख्याओं का मानक विचलन 40 है। यदि प्रत्येक संख्या को 5 बढ़ाया गया है, तब नया मानक विचलन होगा [DCE 1995]

(a) 40 (b) 45
(c) $40 + \frac{21}{25}$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. 15 पदों का मानक विचलन 6 है। यदि प्रत्येक पद से 1 घटा दिया जाये, तब मानक विचलन होगा [Pb. CET 1998]

(a) 5 (b) 7
(c) $\frac{91}{15}$ (d) 6

27. निम्न ऑकड़ों के लिये चतुर्थक विचलन है

x:	2	3	4	5	6
f:	3	4	8	4	1

[AMU 1988; Kurukshetra CEE 1999]

(a) 0 (b) $\frac{1}{4}$
(c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

28. 10 प्रेक्षणों का माध्य 50 है, इस माध्य से विचलनों के वर्गों का योग 250 है। प्रसरण गुणांक का मान है [DCE 1996]

(a) 50% (b) 10%
(c) 40% (d) इनमें से कोई नहीं

29. पाँच प्रेक्षणों का माध्य 4 है तथा इनका प्रसरण 5.2 है। यदि इन प्रेक्षणों में से तीन 1, 2 तथा 6 है, तब अन्य दो प्रेक्षण हैं [AMU 1994]

(a) 2 तथा 9 (b) 3 तथा 8
(c) 4 तथा 7 (d) 5 तथा 6

30. किसी समूह के प्रेक्षणों $x_1, x_2, .x_3, ..., x_{101}$ पर विचार करते हैं। यह दिया गया है, कि $x_1 < x_2 < x_3 < .... < x_{100} < x_{101}$; तब इस समूह के प्रेक्षणों का एक बिन्दु k के परितः माध्य विचलन न्यूनतम होगा जबकि k का मान है [DCE 1997]

(a) x_1 (b) x_{51}
(c) $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{101}}{101}$ (d) x_{50}

31. $(2n+1)$ प्रेक्षणों $x_1, -x_1, x_2, -x_2, ... x_n, -x_n$ तथा 0 (शून्य) के लिये (जहाँ x के सभी मान भिन्न है)। माना *S.D* तथा *M.D.* क्रमशः मानक विचलन तथा माध्यिका प्रदर्शित करते हैं, तब निम्न में से कौनसा सदैव सत्य है [Orissa JEE 2002]

(a) S.D. < M.D.
(b) S.D. > M.D.
(c) S.D. = M.D.
(d) S.D. तथा M.D. के सम्बन्ध के बारे में सामान्यतः कुछ नहीं कहा जा सकता है।

32. माना एक चर x द्वारा लिये गये मान इस प्रकार हैं, कि $a \le x_i \le b$ जहाँ x_i, i = 1,2, ... n के लिये iवीं स्थिति में x का मान प्रदर्शित करता है [Kurukshetra CEE 1995, 2000]

(a) $a \le Var(x) \le b$ (b) $a^2 \le Var(x) \le b^2$

(c) $\frac{a^2}{4} \le Var(x)$ (d) $(b-a)^2 \ge Var(x)$

33. α, β तथा γ का प्रसरण 9 है, तब $5\alpha, 5\beta$ तथा 5γ का प्रसरण है [AMU 1998]

(a) 45 (b) $\frac{9}{5}$

(c) $\frac{5}{9}$ (d) 225

34. एक बल्लेबाज 10 पारियों में 38, 70, 48, 34, 42, 55, 63, 46, 54, 44 रन बनाता है, तब माध्य विचलन है [Kerala Engg. 2002]

(a) 8.6 (b) 6.4

(c) 10.6 (d) 9.6

35. निम्नलिखित श्रेणी का मानक विचलन है [DCE 1996]

मापें	0-10	10-20	20-30	30-40
बारम्बारता	1	3	4	2

(a) 81 (b) 7.6

(c) 9 (d) 2.26

36. किसी प्रयोग में x पर 15 प्रेक्षणों के निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं, $\sum x^2 = 2830$, $\sum x = 170$. प्रेक्षण करने पर एक मान 20 गलत पाया गया तथा उसे सही मान 30 से प्रतिस्थापित किया गया। तब सही प्रसरण है [AIEEE 2003]

(a) 78.00 (b) 188.66

(c) 177.33 (d) 8.33

37. 7 व्यक्तियों के दैनिक वेतन (रुपयों में) निम्न है 12, 7, 15, 10, 17, 19, 25 तब दैनिक वेतन का चतुर्थक विचलन है [Pb. CET 1991, 96; Kurukshetra CEE 1997]

(a) 14.5 (b) 5

(c) 9 (d) 4.5

38. किसी बंटन में विषमता का कार्ल-पियर्सन का गुणांक 0.32 है। इसका मानक विचलन 6.5 तथा माध्य 39.6 है, तब बंटन की माध्यिका होगी [Kurukshetra CEE 1991]

(a) 28.61 (b) 38.81

(c) 29.13 (d) 28.31

Critical Thinking

Objective Questions

1. n पदों का माध्य $\bar{x}$ है। यदि प्रथम पद को 1, द्वितीय पद को 2 तथा इसी प्रकार आगे के पदों को बढ़ाया जाये तब नया माध्य होगा [DCE 1998]

(a) $\bar{x} + n$ (b) $\bar{x} + \frac{n}{2}$

(c) $\bar{x} + \frac{n+1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. संख्याओं 0, 1, 2,.......,n जिनके संगत भार क्रमशः $^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, ..., {}^nC_n$ हैं, का माध्य है [AMU 1990; CET 1998]

(a) $\frac{2^n}{n+1}$ (b) $\frac{2^{n+1}}{n(n+1)}$

(c) $\frac{n+1}{2}$ (d) $\frac{n}{2}$

3. 100 प्रेक्षणों का माध्य 45 है। बाद में यह पाया गया कि दो प्रेक्षण 19 तथा 31 गलती से 91 तथा 13 लिये गये थे। सही माध्य है

(a) 44.0 (b) 44.46

(c) 45.00 (d) 45.54

4. n संख्याओं $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ का औसत M है। यदि x_n को x' से बदल दिया जाये तब नया औसत होगा [DCE 2000]

(a) $M - x_n + x'$

(b) $\frac{nM - x_n + x'}{n}$

(c) $\frac{(n-1)M + x'}{n}$

(d) $\frac{M - x_n + x'}{n}$

5. छात्रों की ऊँचाईयों के बंटन के आँकड़े निम्नानुसार है

ऊँचाईयाँ (सेमी में)	160	150	152	161	156	154	155
छात्रों की संख्या	12	8	4	4	3	3	7

बंटन की माध्यिका हैं [AMU 1994]

(a) 154 (b) 155

(c) 160 (d) 161

6. एक पाई तालिका निम्नलिखित आँकड़ों को प्रदर्शित करती है

खर्च किये जाने वाले मद	परिवारों की संख्या
शिक्षा	150
भोजन तथा कपड़ा	400
मकान का किराया	40
बिजली	250
अन्य	160

तब भोजन तथा कपड़ों के लिए केन्द्रीय कोण का मान होगा

(a) 90° (b) 2.8°

(c) 150° (d) 144°

7. 200 उम्मीदवारों के अंकों का माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 40 तथा 15 है। बाद में, यह पाया गया कि किसी संख्या 40 को गलती से 50 पढ़ा गया है। सही माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः हैं

(a) 14.98, 39.95

(b) 39.95, 14.98

(c) 39.95, 224.5

(d) इनमें से कोई नहीं

8. किसी समूह के प्रेक्षणों $x_1, x_2, ..., x_n$ के लिये परिसर r तथा मानक विचलन $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ हैं, तब

(a) $S \le r\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ (b) $S = r\sqrt{\frac{n}{n-1}}$

(c) $S \ge r\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. $2n$ प्रेक्षणों की एक श्रेणी में, आधे a के बराबर तथा शेष आधे $-a$ के बराबर हैं। यदि प्रेक्षणों का मानक विचलन 2 है, तब $|a| =$ [AIEEE 2004]

(a) $\frac{\sqrt{2}}{n}$ (b) $\sqrt{2}$

(c) 2 (d) $\frac{1}{n}$

10. किसी चर x का मानक विचलन σ है। तब चर $\frac{ax+b}{c}$ का मानक विचलन है, (जहाँ a, b, c अचर है) [Pb. CET 1996]

(a) $\left(\frac{a}{c}\right)\sigma$ (b) $\left|\frac{a}{c}\right|\sigma$

(c) $\left(\frac{a^2}{c^2}\right)\sigma$ (d) इनमें से कोई नहीं

Answers

माध्य

1	c	2	c	3	a	4	b	5	c
6	a	7	d	8	d	9	d	10	c
11	d	12	d	13	b	14	d	15	b
16	a	17	b	18	b	19	c	20	d
21	d	22	a	23	c	24	b	25	b
26	c	27	c	28	d	29	c	30	c
31	a	32	d						

माध्यिका तथा बहुलक

1	d	2	b	3	c	4	d	5	a
6	a	7	c	8	a	9	c	10	d
11	c	12	c	13	c	14	b	15	d

माध्य, माध्यिका तथा बहुलक में सम्बन्ध, पाई चित्र

1	c	2	b	3	a	4	d	5	a
6	c	7	c	8	c	9	b	10	b
11	c	12	b	13	b				

विक्षेपण की माप

1	d	2	b	3	c	4	c	5	b
6	a	7	d	8	c	9	b	10	a
11	b	12	d	13	c	14	a	15	a
16	b	17	b	18	b	19	d	20	d
21	d	22	c	23	b	24	a	25	a
26	d	27	d	28	b	29	c	30	b
31	b	32	d	33	d	34	a	35	c
36	a	37	d	38	b				

Critical Thinking Questions

1	c	2	d	3	b	4	b	5	b
6	d	7	b	8	a	9	c	10	b

Answers and Solutions

माध्य

1. (c) $6 = \frac{3+4+x+7+10}{5} \Rightarrow 30 = 24 + x \Rightarrow x = 6$.

2. (c) $\overline{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$, $\Sigma x_i = n\overline{x}$

नया माध्य = $\frac{\Sigma \lambda x_i}{n} = \lambda \frac{\Sigma x_i}{n} = \lambda \overline{x}$.

3. (a) यह स्पष्ट है।

4. (b) $M_g = a + \frac{1}{\Sigma f_i}(\Sigma f_i d_i)$; $\therefore x = a$ अर्थात्, x = कल्पित माध्य

5. (c) माना $x_1, x_2, ..., x_n$, n प्रेक्षण हैं।

तब, $\overline{x} = \frac{1}{n}\Sigma x_i$. माना $y_i = \frac{x_i}{\alpha} + 10$

तब, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{n}\Sigma x_i\right) + \frac{1}{n}(10n)$

$\Rightarrow \overline{y} = \frac{1}{\alpha}\overline{x} + 10 = \frac{\overline{x} + 10\alpha}{\alpha}$.

6. (a) दिया गया है,

$82 = \frac{(27+x)+(31+x)+(89+x)+(107+x)+(156+x)}{5}$

$\Rightarrow 82 \times 5 = 410 + 5x \Rightarrow 410 - 410 = 5x \Rightarrow x = 0$

$\therefore$अभीष्ट माध्य

$\overline{x} = \frac{130 + x + 126 + x + 68 + x + 50 + x + 1 + x}{5}$

$\overline{x} = \frac{375 + 5x}{5} = \frac{375 + 0}{5} = \frac{375}{5} = 75$.

7. (d) माध्य = $\frac{1 \times 5 + 2 \times 4 + 3 \times 6 + 4 \times f}{5 + 4 + 6 + f}$

अर्थात्, $3 = \frac{5 + 8 + 18 + 4f}{15 + f} \Rightarrow 45 + 3f = 31 + 4f$

$\Rightarrow 45 - 31 = f \Rightarrow f = 14$.

8. (d) अभीष्ट माध्य $= \frac{(ax_1 + b) + (ax_2 + b) + ... + (ax_n + b)}{n}$

$= \frac{a(x_1 + x_2 + ... + x_n) + nb}{n} = a\overline{x} + b$,

$\left(\because \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \overline{x}\right)$.

9. (d) गुणोत्तर माध्य $= (3.3^2.3^3.......3^n)^{1/n}$

$= (3^{1+2+.......n})^{1/n} = \left(3^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^{1/n} = 3^{\frac{n+1}{2}}$.

10. (c) यह मूलभूत गुणधर्म है।

11. (d) हरात्मक माध्य $= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} = \frac{5}{\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14}}$.

12. (d) $\sum_{i=1}^{20}(x_i - 30) = 20 \Rightarrow \sum_{i=1}^{20} x_i - 20 \times 30 = 20$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{20} x_i = 620$. माध्य = $\frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = \frac{620}{20} = 31$.

13. (b) भारित माध्य = $\frac{1.1^2 + 2.2^2 + ... + n.n^2}{1^2 + 2^2 + ... + n^2}$

$= \frac{\Sigma n^3}{\Sigma n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$.

14. (d) माध्य $= \frac{1.1 + \frac{1}{2}.2 + \frac{1}{3}.3 + \frac{1}{4}.4 + \frac{1}{5}.5 + ... + \frac{1}{n}.n}{1 + 2 + 3 + ... + n}$

$= \frac{1 + 1 + 1 + 1 + ... + 1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n+1}$.

15. (b) $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{10}}{10} = 4.5$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 45$

एवं $\frac{x_{11} + x_{12} + ... + x_{40}}{30} = 3.5$

$\Rightarrow x_{11} + x_{12} + ... + x_{40} = 105$

$\therefore x_1 + x_2 + ... + x_{40} = 150$

$\therefore \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{40}}{40} = \frac{150}{40} = \frac{15}{4}$.

16. (a) 3 विषयों में 300 में से प्राप्त किए गए अंक

$= 75 + 80 + 85 = 240$

यदि अन्य विषयों के अंक जोड़ दिये जाए तब अंक होंगे ≥ 240, (400 में से)

$\therefore$ न्यूनतम औसत अंक $= \frac{240}{4} = 60\%$,

[जबकि चौथे विषय के अंक = 0].

17. (b) संयुक्त माध्य का सूत्र है, $\overline{x} = \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2}{n_1 + n_2}$

दिया गया है, $\overline{x} = 30$, $\overline{x}_1 = 32$, $\overline{x}_2 = 27$

माना $n_1 + n_2 = 100$ एवं n_1 पुरुषों को, n_2 महिलाओं को दर्शाता है, इसलिए $n_2 = 100 - n_1$

$30 = \frac{32n_1 + (100 - n_1)27}{100} \Rightarrow 30 = \frac{32n_1 + 2700 - 27n_1}{100}$

$\Rightarrow 3000 - 2700 = 32n_1 - 27n_1 \Rightarrow 300 = 5n_1 \Rightarrow n_1 = 60$

अतः $n_2 = 40$

अतः समूह में महिलाओं का प्रतिशत 40 है।

18. (b) दिया है, $\frac{\Sigma x_i}{50} = 38$, $\therefore \Sigma x_i = 1900$

Σx_i का नया मान $= 1900 - 55 - 45 = 1800$, $n = 48$

$\therefore$ नया माध्य $= \frac{1800}{48} = 37.5$.

19. (c) औसत चाल $= \dfrac{120+120+120}{\dfrac{120}{30}+\dfrac{120}{25}+\dfrac{120}{50}}$

$= \dfrac{3}{\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{50}}$ किमी/घंटा.

20. (d) माना कि शिक्षक का भार w किग्रा है, तब

$40+\dfrac{1}{2}=\dfrac{35\times 40+w}{35+1}$

$\Rightarrow 36\times 40+36\times\dfrac{1}{2}=35\times 40+w \Rightarrow w=58$

$\therefore$ शिक्षक का भार = 58 किग्रा.

21. (d) माना कि दो समूहों में प्रेक्षणों की संख्या n_1 एवं n_2 है, जिसका माध्य क्रमशः $\bar{x}_1$ एवं $\bar{x}_2$ है, तब $\bar{x}=\dfrac{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2}$

अब $\bar{x}-\bar{x}_1=\dfrac{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2}-\bar{x}_1$

$=\dfrac{n_2(\bar{x}_2-\bar{x}_1)}{n_1+n_2}>0, \quad [\because \bar{x}_2>\bar{x}_1]$

$\Rightarrow \bar{x} > \bar{x}_1$ .....(i)

एवं $\bar{x}-\bar{x}_2=\dfrac{n(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}{n_1+n_2}<0, \quad [\because \bar{x}_2>\bar{x}_1]$

$\Rightarrow \bar{x} < \bar{x}_2$ ......(ii)

(i) एवं (ii) से, $\bar{x}_1<\bar{x}<\bar{x}_2$.

22. (a) माना कि बचे हुए 4 प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x}_1$ है।

तब $M=\dfrac{a+4\bar{x}_1}{(n-4)+4} \Rightarrow \overline{x_1}=\dfrac{nM-a}{4}$.

23. (c) हम जानते हैं, माध्य $=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

अर्थात् $2.6=\dfrac{1\times 4+2\times 5+3\times y+4\times 1+5\times 2}{4+5+y+1+2}$

या $31.2+2.6y=28+3y$ या $0.4y=3.2 \Rightarrow y=8$.

24. (b) माना कि छात्राओं के औसत अंक x है, तब

$72=\dfrac{70\times 75+30\times x}{100}$

(छात्राओं की संख्या =100–70 = 30)

अर्थात्, $\dfrac{7200-5250}{30}=x$; $\therefore$ x = 65.

25. (b) हम जानते हैं कि, $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ अर्थात् $\sum_{i=1}^{n} x_i=n\bar{x}$

$\therefore \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i+2i)}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i+2\sum_{i=1}^{n} i}{n}=\dfrac{n\bar{x}+2(1+2+...n)}{n}$

$=\dfrac{n\bar{x}+2\dfrac{n(n+1)}{2}}{n}=\bar{x}+n+1$.

26. (c) 4, 8, 16 का हरात्मक माध्य $=\dfrac{3}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}}=\dfrac{48}{7}=6.85$.

27. (c) 100 वस्तुओं का योग $=49\times 100=4900$

जोड़ी गयी वस्तुओं का योग $=60+70+80=210$

प्रतिस्थापित वस्तुओं का योग $=40+20+50=110$

नया योग $=4900+210-110=5000$

$\therefore$ सही माध्य $=\dfrac{5000}{100}=50$.

28. (d) कुल छात्रों की संख्या = 40 + 35 + 45 + 42 = 162

कुल प्राप्त अंक

= (40 × 50) + (35 × 60) + (45 × 55) + (42 × 45)
= 8465

प्रत्येक विद्यार्थी के अंकों का सम्पूर्ण औसत $=\dfrac{8465}{162}=52.25$.

29. (c) कुल संख्याओं का योग = 18 × 5 = 90

एक संख्या निकालने के बाद कुल संख्याओं का योग = 16 × 4 = 64

तब निकाली हुई संख्या = 90 – 64 = 26.

30. (c) 7 छात्रों का कुल भार = 55× 7 = 385 किग्रा

6 छात्रों के भार का योग

= 52 + 58 + 55 + 53 + 56 + 54 = 328 किग्रा

$\therefore$ 7वें छात्र का भार = 385 – 328 = 57 किग्रा.

31. (a) यह स्पष्ट है।

32. (d) चूँकि वर्ग माध्य मूल $\geq$ समान्तर माध्य

$\therefore \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \geq \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \sqrt{\dfrac{400}{n}} \geq \dfrac{80}{n} \Rightarrow n\geq 16$

अतः n का संभावित मान = 18.

माध्यिका तथा बहुलक

1. (d) यह स्पष्ट है।

2. (b) यह स्पष्ट है।

3. (c) यह सूत्र है।

4. (d) यह मूलभूत सिद्धांत है।

5. (a) आरोही क्रम में वस्तुओं को व्यवस्थित करने पर अर्थात्, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14

यदि n विषम है, तब माध्यिका $=\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{\text{वाँ}}$ पद का मान

$\therefore$ माध्यिका $=\left(\dfrac{7+1}{2}\right)$ वाँ पद = चतुर्थ पद $=10$.

6. (a) यह स्पष्ट है।

7. (c) चूँकि बंटन सममित है, इसलिए

Q_2 (माध्यिका) $=\dfrac{Q_1+Q_3}{2}=\dfrac{25+45}{2}=35$.

8. (a) आंकड़ों को इस प्रकार व्यवस्थित करें

$\alpha-\dfrac{7}{2}, \alpha-3, \alpha-\dfrac{5}{2}, \alpha-2, \alpha-\dfrac{1}{2}, \alpha+\dfrac{1}{2}, \alpha+4, \alpha+5$

माध्यिका $=\dfrac{1}{2}$[चौथी वस्तु का मान + पाँचवी वस्तु का मान]

$\therefore$ माध्यिका $=\dfrac{\alpha-2+\alpha-\dfrac{1}{2}}{2}=\dfrac{2\alpha-\dfrac{5}{2}}{2}=\alpha-\dfrac{5}{4}$.

9. (c) उच्च चतुर्थक = $\left[3\frac{(n+1)}{4}\right]$ वाँ पद का आकार

$= \left[3\left(\frac{31+1}{4}\right)\right]$ वाँ पद का आकार, $[\because \Sigma f = 31]$.

10. (d) चूँकि $n = 9$, तब माध्यिका पद $= \left(\frac{9+1}{2}\right)$ वाँ = 5 वाँ पद

अब अंत के चार प्रेक्षणों में 2 से वृद्धि हुई है

$\because$ माध्यिका 5वाँ प्रेक्षण है जो कि पूर्ववत् है,

$\therefore$ माध्यिका में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

11. (c) यह स्पष्ट है।

12. (c) आंकड़ों का बहुलक 8 है क्योंकि इसकी अधिकतम पुनरावृत्ति हुई है।

13. (c) चूँकि 15 प्रेक्षणों में 6 सबसे अधिक बार आया है, (5 बार)

$\therefore$ बहुलक = 6

14. (b) चूँकि बारंबारता 6 के लिए अधिकतम है, $\therefore$ बहुलक = 6.

15. (d) यह स्पष्ट है।

माध्य, माध्यिका तथा बहुलक में सम्बन्ध, पाई चित्र

1. (c) दिये गये प्रतिबन्ध के अनुसार,

माध्य = (2 माध्य)$k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$,

[$\because$ बहुलक = 3 माध्यिका – 2 माध्य].

2. (b) सममित विषम बंटन के लिए,

बहुलक = 3 माध्यिका – 2 माध्य

$\Rightarrow 7$ = 3 माध्यिका – $2 \times 4 \Rightarrow 15$ = 3 माध्यिका

$\therefore$ माध्यिका = 5.

3. (a) सममित विषम बंटन के लिए,

बहुलक = 3 मध्यिका – 2 माध्य

$\Rightarrow 6\lambda$ = 3 मध्यिका – 18 $\lambda \Rightarrow$ मध्यिका = 8λ .

4. (d) यह मूलभूत सिद्धांत है।

5. (a) यह स्पष्ट है।

6. (c) यह मूलभूत सिद्धांत है।

7. (c) वास्तविक जमा किए गए आंकड़ों को प्राथमिक आंकड़ें कहा जाता है।

8. (c) अभीष्ट प्रतिशत $= \frac{400-250}{250} \times 100$

$= \frac{150}{250} \times 100 = 60\%$.

9. (b) समूह 1200-1800 में कार्यालयों की अधिकतम संख्या 1200 है इसलिए उच्चतम स्तम्भ (bar), वर्ग 1200-1800 के संगत होगा।

10. (b) यह स्पष्ट है।

11. (c) अभीष्ट कोण $= \left(\frac{180 \times 360}{1440}\right)^{o} = 45^{o}$.

12. (b) अभीष्ट खर्च $= \frac{100}{360} \times 108 = 30\%$.

13. (b) हम जानते हैं,

बहुलक = 3 मध्यिका – 2 माध्य = 3(22) – 2(21)

= 66 – 42 = 24.

विक्षेपण की माप

1. (d) यह स्पष्ट है।

2. (b) यह मूलभूत सिद्धांत है।

3. (c) माध्य $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$

S.D.= $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - (\bar{x})^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{5}(1+4+9+16+25) - 9} = \sqrt{11-9} = \sqrt{2}$.

4. (c) यहाँ, $\bar{x} = \frac{2+4+6+8+10}{5} = 6$

अतः प्रसरण = $\frac{1}{n}\Sigma(x_i - \bar{x})^2$

$= \frac{1}{5}\{(2-6)^2 + (4-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (10-6)^2\}$

$= \frac{1}{5}\{16+4+0+4+16\} = \frac{1}{5}\{40\} = 8$.

5. (b) समान्तर माध्य = $\frac{3+4+5+6+7}{5} = 5$

$\therefore$ माध्य विचलन $= \frac{\Sigma|x_i - \bar{x}|}{n}$

$= \frac{|3-5| + |4-5| + |5-5| + |6-5| + |7-5|}{5}$

$= \frac{2+1+0+1+2}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$.

6. (a) यह स्पष्ट है।

7. (d) यह स्पष्ट है।

8. (c) यह स्पष्ट है।

9. (b) यह स्पष्ट है।

10. (a) प्रसरण $= (\text{S.D.})^2 = \frac{1}{n}\Sigma x^2 - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2$, $\left(\because \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}\right)$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left(\frac{n(n+1)}{2n}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}$.

11. (b) यह स्पष्ट है।

12. (d) यह स्पष्ट है।

13. (c) यह स्पष्ट है।

14. (a) हम जानते हैं, $\text{S.D.} = \frac{3}{2}\text{Q.D.}$

$\therefore$ S.D. = $\frac{3}{2} \times 16 = 24$.

15. (a) हम जानते हैं, $\text{Q.D.} = \frac{5}{6} \times \text{M.D.} = \frac{5}{6} \times 12 = 10$

$\therefore \text{S.D.} = \frac{3}{2} \times \text{Q.D.} = \frac{3}{2} \times 10 \Rightarrow \text{S.D.} = 15$.

16. (b) परास $= X_{\max} - X_{\min} = 9 - 2 = 7$.

17. (b) यह स्पष्ट है।

18. (b) यह स्पष्ट है।

19. (d) प्रसरण गुणांक $= \frac{\text{S.D.}}{\text{माध्य}} \times 100 = \frac{19.76}{35.16} \times 100$.

20. (d) यहाँ हमें निम्न चतुर्थक $Q_1 = 20$ एवं उच्च चतुर्थक $Q_3 = 40$ दिया गया है।

अतः चतुर्थक विचलन $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{40-20}{2} = \frac{20}{2} = 10$.

21. (d) यह स्पष्ट है।

22. (c) यह स्पष्ट है।

23. (b) माध्य $= \frac{-1+0+4}{3} = 1$.

अतः, माध्य से माध्य विचलन

$= \frac{|-1-1|+|0-1|+|4-1|}{3} = 2$.

24. (a) माध्य $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

मानक विचलन (S.D.) $= \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma x_i^2 - (\bar{x})^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) - \frac{49}{4}}$

$= \sqrt{\frac{91}{6} - \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{182-147}{12}} = \sqrt{\frac{35}{12}}$.

25. (a) यदि सभी पद एक निश्चित अचर द्वारा बढ़ाया या घटाया जाए तो मानक विचलन पूर्ववत् रहेगा।

26. (d) यदि सभी पद एक निश्चित अचर द्वारा बढ़ाया या घटाया जाए तो मानक विचलन पूर्ववत् रहेगा।

27. (d) $N = (\Sigma f) = 20$

$Q_1 = \frac{(N+1)}{4}$ वाँ प्रेक्षण $= \left(\frac{21}{4}\right)$ वाँ प्रेक्षण = 3

इसी प्रकार $Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ वाँ अवलोकन

$= \left(\frac{63}{4}\right)$ वाँ अवलोकन = 5

अब, Q.D. $= \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(5-3) = 1$.

28. (b) S.D. $(\sigma) = \sqrt{\frac{250}{10}} = \sqrt{25} = 5$

अतः प्रसरण गुणांक $= \frac{\sigma}{\text{माध्य}} \times 100 = \frac{5}{50} \times 100 = 10$ %.

29. (c) माना कि दो अज्ञात पद x एवं y है, तब

माध्य $= 4 \Rightarrow \frac{1+2+6+x+y}{5} = 4$

$\Rightarrow x + y = 11$ .....(i)

एवं प्रसरण = 5. 2

$\Rightarrow \frac{1^2+2^2+6^2+x^2+y^2}{5} - (\text{माध्य})^2 = 5.2$

$41 + x^2 + y^2 = 5[5.2 + (4)^2]$

$41 + x^2 + y^2 = 106$

$x^2 + y^2 = 65$ .....(ii)

(i) एवं (ii) को हल करने पर x एवं y के लिए हम पाते हैं;

$x = 4, y = 7$ या $x = 7, y = 4$.

30. (b) माध्य विचलन न्यूनतम तब होगा जब यह उस पद से लिया जाये जहाँ से प्रारंभ एवं अंत समान दूरी पर हैं अर्थात् माध्यिका। इस प्रकरण में माध्यिका $\frac{101+1}{2}$ वाँ अर्थात् 51वाँ पद है, अर्थात् x_{51} .

31. (b) दिये गये आंकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर हम पाते हैं,

सभी ऋणात्मक पद $\underbrace{O}_{(n+1)\text{वाँ पद}}$ सभी धनात्मक पद

दिये गये प्रेक्षण की माध्यिका $= (n+1)$ वाँ पद = 0

$\therefore$ S. D. > M .D.

32. (d) चूँकि S.D. $\le$ परास = $b - a$

$\therefore Var(x) \le (b-a)^2$ या $(b-a)^2 \ge Var(x)$.

33. (d) जब प्रत्येक वस्तुओं के आंकड़ों को λ से गुणा किया जाए तब प्रसरण λ^2 से गुणा होगा।

अतः नया प्रसरण $= 5^2 \times 9 = 225$.

34. (a) दिये गये आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर 34, 38, 42, 44, 46, 48, 54, 55, 63, 70

माध्यिका = $M = \frac{46+48}{2} = 47$

($\because n = 10$, अतः माध्यिका 5वाँ एवं 6वाँ पद का माध्य है)

$\therefore$ माध्य विचलन $= \frac{\Sigma|x_i - M|}{n} = \frac{\Sigma|x_i - 47|}{10}$

$= \frac{13+9+5+3+1+1+7+8+16+23}{10} = 8.6$.

35. (c)

वर्ग	f_i	y_i	$d = y_i - A$, $A = 25$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
0-10	1	5	– 20	– 20	400
10-20	3	15	– 10	– 30	300
20-30	4	25	0	0	0
30-40	2	35	10	20	200
कुल योग	10			– 30	900

$\sigma^2 = \frac{\sum f_i d_i^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}\right)^2 = \frac{900}{10} - \left(\frac{-30}{10}\right)^2$

$\sigma^2 = 90 - 9 = 81 \Rightarrow \sigma = 9$.

36. (a) $\sum x = 170$, $\sum x^2 = 2830$

$\sum x$ में वृद्धि $= 10$, तब $\sum x' = 170 + 10 = 180$

$\sum x^2$ में वृद्धि $= 900 - 400 = 500$, तब

$\sum x'^2 = 2830 + 500 = 3330$

$\therefore$ प्रसरण $= \frac{1}{n}\sum x'^2 - \left(\frac{\sum x'}{n}\right)^2$

$= \frac{3330}{15} - \left(\frac{180}{15}\right)^2 = 222 - 144 = 78$.

37. (d) दिये गए आंकड़ों के आरोही क्रम का परिमाण 7, 10, 12, 15, 17, 19, 25 है।

यहाँ $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ वें पद का आकार

= द्वितीय पद का आकार = 10

$Q_3 = \left(\frac{3(n+1)}{4}\right)$ वाँ पद का आकार = छठवें पद का आकार = 19

तब, चतुर्थक विचलन (Q.D.) $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{19-10}{2} = 4.5$.

38. (b) हम जानते हैं कि $S_k = \frac{M - M_o}{\sigma}$,

जहाँ M = माध्य, M_o = बहुलक, σ = S.D.

अर्थात् $0.32 = \frac{39.6 - M_o}{6.5} \Rightarrow M_o = 37.52$ एवं यह भी जानते हैं कि, $M_o = 3$ (माध्यिका) – 2 (माध्य)

$37.52 =$ 3 (माध्यिका) – 2(39.6)

माध्यिका = 38.81, (लगभग).

Critical Thinking Questions

1. (c) माना n पद; $x_1, x_2, ...\ x_n$ हैं, तब $\bar{x} = \frac{1}{n}\Sigma x_i$

माना $y_1 = x_1 + 1, y_2 = x_2 + 2, y_3 = x_3 + 3, .., y_n = x_n + n$

तब नई श्रेणी का माध्य = $\frac{1}{n}\Sigma y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + i)$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}(1 + 2 + 3 + ... + n)$$

$$= \bar{x} + \frac{1}{n}.\frac{n(n+1)}{2} = \bar{x} + \frac{n+1}{2}.$$

2. (d) अभीष्ट माध्य =

$$\bar{x} = \frac{0.1 + 1.{}^nC_1 + 2.{}^nC_2 + 3.{}^nC_3 + ... + n.{}^nC_n}{1 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_n}$$

$$= \frac{\sum_{r=0}^{n} r.\,{}^nC_r}{\sum_{r=0}^{n} {}^nC_r} = \frac{\sum_{r=1}^{n} r.\frac{n}{r}\,{}^{n-1}C_{r-1}}{\sum_{r=0}^{n} {}^nC_r} = \frac{n\sum_{r=1}^{n} {}^{n-1}C_{r-1}}{\sum_{r=0}^{n} {}^nC_r}$$

$$= \frac{n.2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}.$$

3. (b) 100 वस्तुओं का योग = 45×100 = 4500

जोड़ी गई वस्तुओं का योग = 19 +31 = 50

हटाई गई वस्तुओं का योग = 91+ 13 = 104

नया योग = $4500 - 104 + 50$ = 4446

$\therefore$ नया माध्य = $\frac{4446}{100}$ = 44.46

4. (b) $M = \frac{x_1 + x_2 + x_3 ...... x_n}{n}$

$nM = x_1 + x_2 + x_3 + ... x_{n-1} + x_n$

अर्थात् $nM - x_n = x_1 + x_2 + x_3 + ... x_{n-1}$

$$\frac{nM - x_n + x'}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... x_{n-1} + x'}{n}$$

$\therefore$ नया औसत $= \frac{nM - x_n + x'}{n}$.

5. (b) आंकड़ों को परिमाणों के आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर हम पाते हैं

ऊँचाई (से.मी. में)	150	152	154	155	156	160	161
छात्रों की संख्या	8	4	3	7	3	12	4
संचयी बारंबारता	8	12	15	22	25	37	41

यहाँ कुल पदों की संख्या 41 है, अर्थात् विषम संख्या है

अतः माध्यिका $\frac{41+1}{2}$ वाँ अर्थात् 21वाँ पद है।

संचयी बारंबारता तालिका से हम माध्यिका पाते हैं, अर्थात् 21वाँ पद 155 है,

(16 से 22वाँ तक सभी वस्तुएँ बराबर हैं एवं प्रत्येक 155 है).

6. (d) भोजन एवं वस्त्र के लिए अभीष्ट कोण $= \frac{400}{1000} \times 360° = 144°$.

7. (b) सही $\Sigma x = 40 \times 200 - 50 + 40 = 7990$

$\therefore$ सही किया गया माध्य $\bar{x} = 7990 / 200 = 39.95$

गलत $\Sigma x^2 = n[\sigma^2 + \bar{x}^2] = 200[15^2 + 40^2] = 365000$

सही $\Sigma x^2 = 365000 - 2500 + 1600 = 364100$

$\therefore$ सही किया गया मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{364100}{200} - (39.95)^2}$

$= \sqrt{(1820.5 - 1596)} = \sqrt{224.5} = 14.98$.

8. (a) $r = \underset{i \neq j}{Max} |\ x_i - x_j\ |$

एवं $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

अब $(x_i - \bar{x})^2 = \left(x_i - \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)^2$

$$= \frac{1}{n^2}[(x_i - x_1) + (x_i - x_2) + ... + (x_i - x_i - 1)$$

$$+ (x_i - x_i + 1) + ...\ + (x_i - x_n)] \leq \frac{1}{n^2}[(n-1)r]^2,$$

$[\because |\ x_i - x_j | \leq r]$

$\Rightarrow (x_i - \bar{x})^2 \leq r^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \leq nr^2$

$\Rightarrow \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \leq \frac{nr^2}{(n-1)} \Rightarrow S^2 \leq \frac{nr^2}{(n-1)}$

$\Rightarrow S \leq r\sqrt{\frac{n}{n-1}}$.

9. (c) माना $a, a, ...n$ बार तक एवं $-a, -a, -a, -a, ...n$ बार तक

अर्थात् माध्य = 0 एवं S.D. $= \sqrt{\frac{n(a-0)^2 + n(-a-0)^2}{2n}}$

$2 = \sqrt{\frac{na^2 + na^2}{2n}} = \sqrt{a^2} = \pm a$. अतः $|\ a| = 2$.

10. (b) माना $y = \frac{ax + b}{c}$ अर्थात् $y = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}$

अर्थात् $y = Ax + B$, जहाँ $A = \frac{a}{c}, B = \frac{b}{c}$

$\therefore\ \bar{y} = A\bar{x} + B$

$\therefore\ y - \bar{y} = A(x - \bar{x}) \Rightarrow (y - \bar{y})^2 = A^2(x - \bar{x})^2$

$\Rightarrow \Sigma(y - \bar{y})^2 = A^2\,\Sigma(x - \bar{x})^2$

$\Rightarrow n.\sigma_y^2 = A^2.n\sigma_x^2 \Rightarrow \sigma_y^2 = A^2\sigma_x^2$

$\Rightarrow \sigma_y = |\ A|\ \sigma_x \Rightarrow \sigma_y = \left|\frac{a}{c}\right|\sigma_x$

अतः नया S.D. $= \left|\frac{a}{c}\right|\sigma$.

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

SET Self Evaluation Test - 29

1. किसी फैक्ट्री में कर्मचारियों के मासिक वेतन का माध्य 500 रु. है। पुरुष तथा महिला कर्मचारियों के मासिक वेतन के माध्य क्रमशः 510 तथा 460 रुपये है। फैक्ट्री में पुरुष कर्मचारियों का प्रतिशत है

   (a) 60 (b) 70

   (c) 80 (d) 90

2. एक कार यात्रा का प्रथम आधा भाग v_1 वेग से तथा शेष आधा भाग v_2 वेग से पूर्ण करती है। सम्पूर्ण यात्रा के लिये कार की औसत चाल है [AMU 1989; DCE 1995]

   (a) $\frac{v_1+v_2}{2}$ (b) $\sqrt{v_1 v_2}$

   (c) $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. यदि एक चर 0, 1, 2, ..., n मान ग्रहण करता है, जबकि आवृत्तियाँ $q^n, \frac{n}{1}q^{n-1}p, \frac{n(n-1)}{1.2}q^{n-2}p^2, ..., p^n$ हैं, जहाँ $p+q=1$, तब माध्य है

   (a) np (b) nq

   (c) $n(p+q)$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. निम्नलिखित सारणी से माध्यिका का मान है

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या
0-10	2
10-20	18
20-30	30
30-40	45
40-50	35
50-60	20
60-70	6
70-80	3

   (a) 36.55 (b) 35.55

   (c) 40.05 (d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि किसी दुर्बल असममित बंटन के लिए, माध्य तथा माध्यिका क्रमशः 5 तथा 6 हैं, तब इसका बहुलक है [DCE 1998]

   (a) 5 (b) 6

   (c) 7 (d) 8

6. प्रथम n प्राकृत संख्याओं का मानक विचलन (S.D.) है

   (a) $\frac{n+1}{2}$ (b) $\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$

   (c) $\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. एक समूह की पाँच संख्याओं का माध्य 8 तथा प्रसरण 18 है तथा दूसरे समूह की 3 संख्याओं का माध्य 8 तथा प्रसरण 24 है। तब संख्याओं के संयुक्त समूह का प्रसरण है

   (a) 42 (b) 20.25

   (c) 18 (d) इनमें से कोई नहीं

8. पाँच प्रेक्षणों का माध्य 4.4 तथा इनका प्रसरण 8.24 है। यदि तीन प्रेक्षण 1, 2 तथा 6 हैं, तब अन्य दो प्रेक्षण हैं [AMU 1998]

   (a) 4 तथा 8 (b) 4 तथा 9

   (c) 5 तथा 7 (d) 5 तथा 9

9. किसी असतत् श्रेणी में (जबकि सभी मान समान नहीं हैं) माध्य से माध्य विचलन तथा मानक विचलन के मध्य सम्बन्ध है

   (a) माध्य विचलन = मानक विचलन

   (b) माध्य विचलन ⍰ मानक विचलन

   (c) माध्य विचलन < मानक विचलन

   (d) माध्य विचलन ⍰ मानक विचलन

10. यदि बंटन (y_i, f_i) का माध्य μ है, तब $\sum f_i(y_i-\mu)=$ [Kerala PET 2001]

   (a) माध्य विचलन (b) मानक विचलन

   (c) 0 (d) आपेक्षिक बारम्बारता

Answers and Solutions

(SET - 29)

1. (c) संयुक्त माध्य $\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

दिया है $\bar{x} = 500$, $\bar{x}_1 = 510$, $\bar{x}_2 = 460$

माना $n_1 + n_2 = 100$ एवं n_1 पुरुष दर्शाता है, n_2 महिला दर्शाता है इस प्रकार $n_2 = 100 - n_1$

$$500 = \frac{510n_1 + (100 - n_1)460}{100}$$

$$\Rightarrow 50000 = 510n_1 + 46000 - 460n_1$$

$$\Rightarrow 50000 - 46000 = 50n_1$$

$$\Rightarrow 4000 = 50n_1$$

$$\Rightarrow n_1 = \frac{4000}{50} = 80 .$$

अतः पुरुष कर्मचारियों का फेक्ट्री में प्रतिशत 80 है।

2. (c) $V = \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}}$

अब प्रथम यात्रा में लिया गया समय $t_1 = (d/v_1)$ एवं द्वितीय यात्रा में लिया गया समय $t_2 = (d/v_2)$

$$\therefore V_{av} = \frac{2d}{(d/v_1) + (d/v_2)} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} .$$

3. (a) अभीष्ट माध्य

$$\bar{x} = \frac{0.q^n + 1.\frac{n}{1}q^{n-1}p + 2.\frac{(n)(n-1)}{2!}q^{n-2}p^2 + ...n.p^n}{q^n + \frac{n}{1}q^{n-1}p + \frac{n(n-1)}{2}q^{n-2}p^2 + ... + p^n}$$

$$= \frac{0.{}^nC_0q^np^0 + 1.{}^nC_1q^{n-1}p + ... + n.{}^nC_nq^0p^n}{{}^nC_0q^np^0 + {}^nC_1q^{n-1}p^1 + ... + {}^nC_nq^{n-n}p^n}$$

$$= \frac{\sum_{r=0}^{n} r.{}^nC_rq^{n-r}p^r}{\sum_{r=0}^{n} {}^nC_rq^{n-r}p^r} = \frac{\sum_{r=1}^{n} r.\frac{n}{r}\,{}^{n-1}C_{r-1}q^{n-r}.p.p^{r-1}}{\sum_{r=0}^{n} {}^nC_rq^{n-r}p^r}$$

$$= \frac{np\left(\sum_{r=1}^{n} {}^{n-1}C_{r-1}p^{r-1}q^{(n-1)-(r-1)}\right)}{\sum_{r=0}^{n} {}^nC_rq^{n-r}p^r}$$

$$= \frac{np(q+p)^{n-1}}{(q+p)^n} = np , \quad [\because q + p = 1].$$

4. (a)

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या	संचयी बारंबारता
0-10	2	2
10-20	18	20
20-30	30	50
30-40	45	95
40-50	35	130
50-60	20	150
60-70	6	156
70-80	3	159

$n = \Sigma f = 159$. यहाँ $n = 159$, जो कि विषम है

$$\therefore \text{माध्यिका} = \frac{1}{2}(n+1) = \frac{1}{2}(159+1) = 80 ,$$

जो कि वर्ग 30-40 में है (संचयी बारंबारता की पंक्ति 95 को देखें जो कि 80 को संयोजित किये हुये है)

अतः माध्यिका वर्ग 30-40 है

l = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा = 30

f = माध्यिका वर्ग की बारंबारता = 45

C = माध्यिका वर्ग से पहले की कुल बारंबारताओं का योग = 50

i = माध्यिका वर्ग का बड़ा अंतराल = 10

$$\therefore \text{अभीष्ट माध्यिका} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$$

$$= 30 + \frac{\frac{159}{2} - 50}{45} \times 10 = 30 + \frac{295}{45} = 36.55 .$$

5. (d) बहुलक = 3 माध्यिका – 2 माध्य = 3(6) – 2(5) = 8.

6. (c) प्रथम n प्राकृत संख्याओं का मानक विचलन

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma x^2 - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2} , \qquad \left[\because \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left[\frac{n(n+1)}{2n}\right]^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{n+1}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{n+1}{2}\left(\frac{4n+2-3n-3}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2-1}{12}} .$$

7. (b) यहाँ $n_1 = 5$, $\bar{x}_1 = 8$, $\sigma_1^2 = 18$, $n_2 = 3$

$\bar{x}_2 = 8$, $\sigma_2^2 = 24$

$\bar{x} =$ संयुक्त माध्य $= \dfrac{5 \times 8 + 3 \times 8}{5+3} = \dfrac{64}{8} = 8$

संयुक्त प्रसरण $= \dfrac{n_1(\sigma_1^2 + D_1^2) + n_2(\sigma_2^2 + D_2^2)}{n_1 + n_2}$,

जहाँ $D_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}$, $D_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}$

अब, $D_1 = 8 - 8;\ D_2 = 8 - 8 = 0$

संयुक्त प्रसरण $= \dfrac{5(18) + 3(24)}{5+3} = \dfrac{90 + 72}{8}$

$= \dfrac{162}{8} = 20.25$.

8. (b) माना कि दो अज्ञात पद x एवं y हैं।

तब, माध्य $= 4.4 \Rightarrow \dfrac{1+2+6+x+y}{5} = 4.4$

$\Rightarrow\ x + y = 13$ .....(i)

एवं प्रसरण = 8.24

$\Rightarrow\ \dfrac{1^2 + 2^2 + 6^2 + x^2 + y^2}{5} -$ (माध्य)$^2 = 8.24$

$\Rightarrow\ 41 + x^2 + y^2 = 5\{(4.4)^2 + 8.24\}$

$\Rightarrow\ x^2 + y^2 = 97$ .....(ii)

(i) एवं (ii) को x एवं y के लिए हल करने पर,

$x = 9,\ y = 4$ या $x = 4, y = 9$.

9. (d) माना $x_i / f_i;\ i = 1,2,......n$ बारंबारता बंटन है।

तब, $\text{S.D.} = \sqrt{\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2}$

एवं $\text{M.D.} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|$

माना $|x_i - \bar{x}| = z_i; i = 1,2,.....n$.

तब, $(\text{S.D.})^2 - (\text{M.D.})^2$

$= \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i z_i^2 - \left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i z_i\right)^2$

$= \sigma_z^2 \geq 0$

$\Rightarrow$ S. D. $\geq$ M.D.

10. (c) $\Sigma f_i(y_i - \mu) = \Sigma f_i y_i - \mu \Sigma f_i$,

$= \mu \Sigma f_i - \mu \Sigma f_i = 0$, $\left[\because \mu = \dfrac{\Sigma f_i y_i}{\Sigma f_i}\right]$.

* * *