1. **બિંદુઓ (2, 1, –1) તથા (–1, 3, 4) માંથી પસાર થતા અને સમતલ $x - 2y + yz = 10$ને લંબ સમતલનું સમીકરણ મેળવો.**

➡ ધારો કે માંગેલ સમતલ $ax + by + cz = d$ છે.

$\therefore n = (a, b, c)$ થાય.

આ સમતલ આપેલ સમતલ $x - 2y + 4z = 10$ ને લંબ છે.

$\therefore n \cdot (1, -2, 4) = 0$ ....(i)

હવે A(2, 1, –1) અને B(–1, 3, 4) આપેલા બિંદુઓ છે. માટે $n \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ થાય.

$\therefore \overrightarrow{AB} = B - A$

$= (-1, 3, 4) - (2, -1, -1)$

$= (-1 - 2, 3 - 1, 4 + 1)$

$= (-3, 2, 5)$

$\therefore n \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\therefore n \cdot (-3, 2, 5) = 0$ ....(ii)

અહીં માંગેલ અભિલંબ $n = (1, -2, 4) \cdot (-3, 2, 5)$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$= -18\bar{i} - 17\bar{j} - 4\bar{k}$

$= (-18, -17, -4)$

$\therefore$ માંગેલ સમતલ $\bar{r} \cdot \bar{n} = \bar{a} \cdot \bar{n}$ મુજબ મેળવતાં,

$\therefore (x\ y\ z) \cdot (-18, -17, -4) =$

$(2, 1, -1) \cdot (-18, -17, -4)$

$\therefore -18x - 17y - 4z = -36 - 17 + 4$

$\therefore -18x - 17y - 4z = -49$

$\therefore -18x - 17y - 4z = 49$

2. **સમતલ $ax + by = 0$ ને સમતલ $z = 0$ ની છેદ રેખા સાથે α ખૂણે પરિભ્રમણ કરવામાં આવે છે. તો બતાવો કે નવા સ્વરૂપમાં સમતલનું સમીકરણ $ax + by \pm \left(\sqrt{a^2 + b^2}\ \tan\alpha\right) z = 0$ થાય.**

➡ આપેલ સમતલ $ax + by = 0$ ને $z = 0$ છેદ રેખા સાથે α ખૂણે પરિભ્રમણ કરવામાં આવે છે.

$\therefore$ સમતલનું નવું સ્વરૂપ નીચે મુજબ થાય.

$$\frac{ax \cdot \cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{by \cdot \cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2}} \pm z \sin\alpha = 0$$

$$\therefore ax \cdot \cos\alpha + by \cos\alpha \pm z \sin\alpha \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

$$\therefore ax + by \pm z \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) \cdot \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right) = 0$$

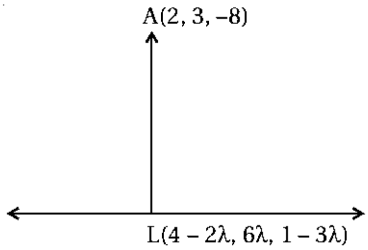
$$\therefore ax + by \pm z \tan\alpha \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

3. **બિંદુ (2, 3, –8) થી રેખા $\frac{4-x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{1-z}{3}$ પરનો લંબપાદ મેળવો તથા આપેલા બિંદુથી લંબઅંતર મેળવો.**

➡ આપેલ રેખા $\frac{4-x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{1-z}{3}$

$\therefore \frac{x-4}{-2} = \frac{y-0}{6} = \frac{z-1}{-3} = k$ ધારો.

$\therefore x = -2k + 4,\ y = 6k,\ z = -3k + 1$



ધારો કે બિંદુ A માંથી રેખા પરનો લંબપાદ L(4 – 2λ, 6λ, 1 – 3λ) છે.

$\therefore \vec{AL} = L - A$

$= (4 - 2\lambda, 6\lambda, 1 - 3\lambda) - (2, 3, -8)$

$= (4 - 2\lambda - 2, 6\lambda - 3, 1 - 3\lambda + 8)$

$= (2 - 2\lambda, 6\lambda - 3, 9 - 3\lambda)$

અહીં આપેલ રેખાની દિશા $\bar{l} = (-2, 6, -3)$ છે.

અને $\bar{l} \perp \vec{AL}$ છે.

$\therefore \vec{l} \cdot \vec{AL} = 0$

$\therefore (-2, 6, -3) \cdot (2 - 2\lambda, 6\lambda - 3, 9 - 3\lambda) = 0$

$\therefore -4 + 4\lambda + 36\lambda - 18 - 27 + 9\lambda = 0$

$\therefore 49\lambda = 49$

$\therefore \lambda = 1$

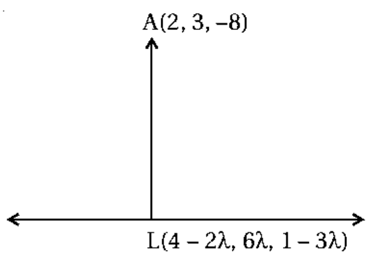
$\therefore$ લંબપાદ $L = (4 - 2(1), 6(1), 1 - 3(1))$

$= (4 - 2, 6, -2) = (2, 3, -2)$

➡ આપેલ રેખા $\frac{4-x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{1-z}{3}$

$\therefore \frac{x-4}{-2} = \frac{y-0}{6} = \frac{z-1}{-3} = k$ ધારો.

$\therefore x = -2k + 4,\ y = 6k,\ z = -3k + 1$



ધારો કે બિંદુ A માંથી રેખા પરનો લંબપાદ L(4 – 2λ, 6λ, 1 – 3λ) છે.

$\therefore \vec{AL} = L - A$

$= (4 - 2\lambda, 6\lambda, 1 - 3\lambda) - (2, 3, -8)$

$= (4 - 2\lambda - 2, 6\lambda - 3, 1 - 3\lambda + 8)$

$= (2 - 2\lambda, 6\lambda - 3, 9 - 3\lambda)$

અહીં આપેલ રેખાની દિશા $\bar{l} = (-2, 6, -3)$ છે.

અને $\bar{l} \perp \overrightarrow{AL}$ છે.

$\therefore \overrightarrow{l} \cdot \overrightarrow{AL} = 0$

$\therefore (-2, 6, -3) \cdot (2 - 2\lambda, 6\lambda - 3, 9 - 3\lambda) = 0$

$\therefore -4 + 4\lambda + 36\lambda - 18 - 27 + 9\lambda = 0$

$\therefore 49\lambda = 49$

$\therefore \lambda = 1$

$\therefore$ લંબપાદ $L = (4 - 2(1), 6(1), 1 - 3(1))$

$= (4 - 2, 6, -2) = (2, 3, -2)$

4. **બિંદુ (2, 4, –1) થી રેખા $\dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z-6}{-9}$ નું લંબ અંતર મેળવો.**

➥ આપેલ રેખા $\dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z-6}{-9}$ અને બિંદુ $A(2, 4, -1)$ લેતાં,

ધારો કે $\dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z-6}{-9} = k$

$\therefore \dfrac{x+5}{1} = k, \dfrac{y+3}{4} = k, \dfrac{z-6}{-9} = k$

$\therefore x = k - 5, y = 4k - 3, z = -9k + 6$

ધારો કે રેખા પરનો લંબપાદ $L(k - 5, 4k - 3, 6 - 9k)$ છે.

અહીં રેખાની દિશા $\bar{l} = (1, 4, -9)$ છે.

$\therefore PL = L - P$

$= (k - 5, 4k - 3, 6 - 9k) - (2, 4, -1)$

$= (k - 5 - 2, 4k - 3 - 4, 6 - 9k + 1)$

$= (k - 7, 4k - 7, 7 - 9k)$

તથા રેખાની દિશા $\bar{l} = (1, 4, -9)$ છે.

અહીં $\overrightarrow{PL} \perp \overrightarrow{l}$ છે.

$\therefore \bar{l} \cdot \overrightarrow{PL} = 0$

$\therefore (1, 4, -9) \cdot (k - 7, 4k - 7, 7 - 9k) = 0$

$\therefore k - 7 + 4(4k - 7) - 9(7 - 9k) = 0$

$\therefore k - 7 + 16k - 28 - 63 + 81k = 0$

$\therefore 98k = 98$

$\therefore k = 1$

$\therefore$ લંબપાદના યામ $= L(1 - 5, 4 - 3, 6 - 9)$

$= L(-4, 1, -3)$

$\therefore$ લંબઅંતર $= d(PL)$

$= \sqrt{(-4-2)^2 + (1-4)^2 + (-3+1)^2}$

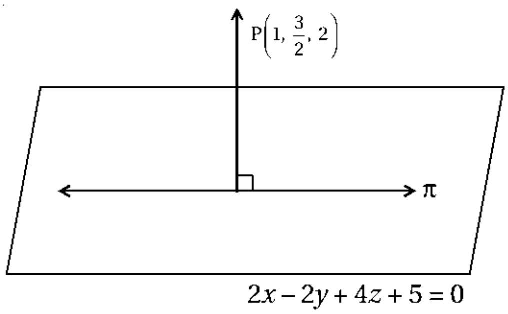
$= \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{36 + 9 + 4}$

$= \sqrt{49}$

$\therefore$ લંબઅંતર $= 7$ એકમ

5. **બિંદુ $\left(1, \dfrac{3}{2}, 2\right)$ થી સમતલ $2x - 2y + 4z + 5 = 0$ નું લંબઅંતર તથા લંબપાદ મેળવો.**



આપેલ સમતલ $2x - 2y + 4z + 5 = 0$ નો અભિલંબ $\overline{n} = (2, -2, 4)$ થાય.
અર્થાત્ $\overline{n} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + 4\overline{k}$ છે.

રેખા બિંદુ $P\left(1, \frac{3}{2}, 2\right)$ માંથી પસાર થતી રેખાની દિશા (2, –2, 4) થશે.

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ : $\overline{r} = \left(1, \frac{3}{2}, 2\right) + k(2, -2, 4)$

હવે $\overline{r} = (x, y, z)$ લેતાં

$\therefore (x, y, z) = \left(1 + 2k, \frac{3}{2} - 2k, 2 + 4k\right)$

આ બિંદુ સમતલ $2x - 2y + 4z + 5 = 0$ પર છે.

$\therefore 2(1 + 2k) - 2\left(\frac{3}{2} - 2k\right) + 4(2 + 4k) + 5 = 0$

$\therefore 2 + 4k - 3 + 4k + 8 + 16k + 5 = 0$

$\therefore 24k + 12 = 0$

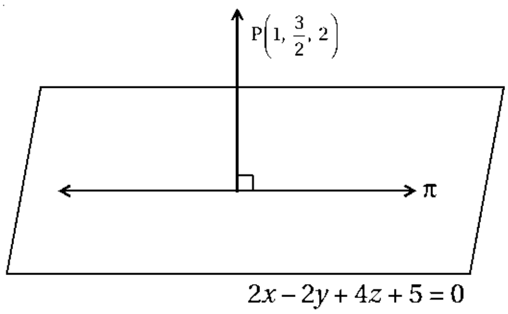
$\therefore k = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ લંબપાદના યામ

$$L = \left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right), \frac{3}{2} - 2\left(-\frac{1}{2}\right), 2 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \left(1 - 1, \frac{3}{2} + 1, 2 - 2\right)$$

$$= \left(0, \frac{5}{2}, 0\right)$$



આપેલ સમતલ $2x - 2y + 4z + 5 = 0$ નો અભિલંબ $\overline{n} = (2, -2, 4)$ થાય.
અર્થાત્ $\overline{n} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + 4\overline{k}$ છે.

રેખા બિંદુ $P\left(1, \frac{3}{2}, 2\right)$ માંથી પસાર થતી રેખાની દિશા (2, –2, 4) થશે.

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ : $\overline{r} = \left(1, \frac{3}{2}, 2\right) + k(2, -2, 4)$

હવે $\overline{r} = (x, y, z)$ લેતાં

$\therefore (x, y, z) = \left(1 + 2k, \frac{3}{2} - 2k, 2 + 4k\right)$

આ બિંદુ સમતલ $2x - 2y + 4z + 5 = 0$ પર છે.

$\therefore 2(1 + 2k) - 2\left(\frac{3}{2} - 2k\right) + 4(2 + 4k) + 5 = 0$

$\therefore 2 + 4k - 3 + 4k + 8 + 16k + 5 = 0$

$\therefore 24k + 12 = 0$

$\therefore k = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ લંબપાદના યામ

$$L = \left(1+2\left(-\frac{1}{2}\right), \frac{3}{2}-2\left(-\frac{1}{2}\right), 2+4\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \left(1 - 1, \frac{3}{2} + 1, 2 - 2\right)$$

$$= \left(0, \frac{5}{2}, 0\right)$$

6. બિંદુ (3, 0, 1) માંથી પસાર થતી અને સમતલો $x + 2y = 0$ તથા $3y - z = 0$ ને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

➡ રેખા બિંદુ $A(\bar{a}) = (3, 0, 1)$ માંથી પસાર થાય છે.

અહીં $x + 2y = 0$

અર્થાત્ $x + 2y + 0z = 0$

$\therefore$ સમતલનો અભિલંબ $\vec{n_1} = (1, 2, 0)$

તથા સમતલ $3y - z = 0$

અર્થાત્ $0x + 3y - z = 0$

$\therefore$ સમતલનો અભિલંબ $\vec{n_2} = (0, 3, -1)$

રેખાની દિશા $= \vec{n_1} \times \vec{n_2}$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}(-2 - 0) - \bar{j}(-1 - 0) + \bar{k}(3 - 0)$$

$$= -2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$$

$$= (-2, 1, 3)$$

$\therefore$ રેખાનું સદિશ સમીકરણ $\bar{r} = \bar{a} + \lambda\bar{b}$

$\therefore \bar{r} = (3, 0, 1) + \lambda(-2, 1, 3)$

હવે $\bar{r} = (x, y, z)$ લેતાં,

$\therefore (x, y, z) = (3, 0, 1) + \lambda(-2, 1, 3)$

$\therefore (x, y, z) - (3, 0, 1) = \lambda(-2, 1, 3)$

$\therefore (x - 3, y - 0, z - 1) = \lambda(-2, 1, 3)$

$\therefore (x - 3)\bar{i} + y\bar{j} + (z - 1)\bar{k} = \lambda(-2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k})$

માંગેલ રેખાનું સદિશ સમીકરણ છે.

તથા કાર્તેઝિયન સમીકરણ નીચે મુજબ થશે.

$\therefore \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$

$\therefore \frac{x - 3}{-2} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 1}{3}$

$\therefore \frac{x - 3}{-2} = y = \frac{z - 1}{3}$

7. રેખાઓ $\vec{r} = (8 + 3\lambda)\bar{i} - (9 + 16\lambda)\bar{j} + (10 + 7\lambda)\bar{k}$ અને $\bar{r} = 15\bar{i} + 29\bar{j} + 5\bar{k} + \mu(3\bar{i} + 8\bar{j} - 5\bar{k})$ વચ્ચેનું ન્યૂનતમ અંતર મેળવો.

➡ અહીં $\bar{r} = (8 + 3\lambda)\bar{i} - (9 + 16\lambda)\bar{j} + (10 + 7\lambda)\bar{k}$

$\therefore \bar{r} = (8\bar{i} - 9\bar{j} + 10\bar{k}) + \lambda(3\bar{i} - 16\bar{j} + 7\bar{k})$

$\therefore \bar{r} = \vec{a_1} + \lambda(\vec{b_1})$ સાથે સરખાવો.

$\therefore \vec{a_1} = (8, -9, 10),\ \vec{b_1} = (3, -16, 7)$

આજ પ્રમાણે બીજી રેખાના સમીકરણ પરથી

$\therefore \vec{a_2} = (15, 29, 5), \vec{b_2} = (3, 8, -5)$

$\therefore \vec{a_2} - \vec{a_1} = (15, 29, 5) - (8, -9, 10)$

$= (15 - 8, 29 + 9, 5 - 10)$

$\therefore \vec{a_2} - \vec{a_1} = (7, 38, -5)$ ....(i)

તથા $\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -16 & 7 \\ 3 & 8 & -5 \end{vmatrix}$

$= (80 - 56)\ \bar{i} - (-15 - 21)\ \bar{j} + (24 + 48)\ \bar{k}$

$= 24i - (-36)j + (72)k$

$= (24, 36, 72)$ ....(ii)

$\therefore \overline{b_1} \times \overline{b_2} = 12(2, 3, 6)$

$\therefore |\overline{b_1} \times \overline{b_2}| = \sqrt{(12)^2 (4 + 9 + 36)}$

$= \sqrt{(12)^2 \cdot (7)^2}$

$= \sqrt{(84)^2}$

$= 84$

તથા $(\overline{b_1} \times \overline{b_2}) \cdot (a_2 - a_1)$

$= (24, 36, 72) \cdot (7, 38, -5)$ ($\because$ પરિણામ (i) તથા (ii) પરથી)

$= 168 + 1368 - 360$

$= 1176$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ વચ્ચેનું ન્યૂનતમ અંતર

$= \dfrac{|(\overline{b_1} \times \overline{b_2}) \cdot (\overline{a_2} - \overline{a_1})|}{|\overline{b_1} \times \overline{b_2}|}$

$= \dfrac{1176}{84}$

$= 14$ એકમ

8. આપેલ સમતલો $x + 2y + 3z - 4 = 0$ અને $2x + y - z + 5 = 0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતા અને સમતલ $5x + 3y + 6z + 8 = 0$ ને લંબ સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

➡ $\pi_1 : x + 2y + 3z - 4 = 0$ ....(i)

અને $\pi_2 : 2x + y - z + 5 = 0$ ....(ii) ના

છેદબિંદુમાંથી પસાર થતા સમતલનું વ્યાપક સમીકરણ

$\pi_1 + \lambda(\pi_2) = 0$ છે.

$\therefore x + 2y + 3z - 4 + \lambda(2x + y - z + 5) = 0$

$\therefore (1 + 2\lambda)x + (2 + \lambda)y + (3 - \lambda)z - 4 + 5\lambda = 0$ ..(iii)

હવે સમતલ (iii) નો અભિલંબ

$n_1 = (1 + 2\lambda, 2 + \lambda, 3 - \lambda)$

આપેલ સમતલ $5x + 3y + 6z + 8 = 0$ નો અભિલંબ

$n_2 = (5, 3, 6)$

અહીં સમતલ (iii) અને સમતલ $5x + 3y + 6z + 8 = 0$ પરસ્પર લંબ છે.

$\therefore n_1 \cdot n_2 = 0$

$\therefore (1 + 2\lambda, 2 + \lambda, 3 - \lambda) \cdot (5, 3, 6) = 0$
$\therefore 5 + 10\lambda + 6 + 3\lambda + 18 - 6\lambda = 0$
$\therefore 29 + 7\lambda = 0$
$\therefore 7\lambda = -29$
$\therefore \lambda = -\frac{29}{7}$
∴ માંગેલ સમતલ નીચે મુજબ થાય.
$\therefore x + 2y + 3z - 4 - \frac{29}{7}(2x + y - z + 5) = 0$
$\therefore 7x + 14y + 21z - 28 - 58y - 29y + 29z - 145 = 0$
$\therefore -51x - 15y + 50z - 173 = 0$
$\therefore 51x + 15y - 50z + 173 = 0$

9. $\vec{r} \cdot (\bar{i} + 3\bar{j}) - 6 = 0$ અને $\bar{r} \cdot (3\bar{i} - \bar{j} - 4\bar{k}) = 0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતા અને જે ઉગમબિંદુથી એક એકમ અંતરે હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

➡ આપેલ સમતલ $\bar{r} \cdot (\bar{i} + 3\bar{j}) - 6 = 0$
$\therefore (x\ y\ z) \cdot (1, 3, 0) - 6 = 0$
$\therefore x + 3y - 6 = 0$ ....(i)
અને $\bar{r} \cdot (3\bar{i} - \bar{j} - 4\bar{k}) = 0$
$\therefore (x\ y\ z) \cdot (3, -1, -4) = 0$
$\therefore 3x - y - 4z = 0$ ....(ii)
સમતલ (i) તથા (ii) ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતા સમતલનું વ્યાપક સમીકરણ નીચે મુજબ થશે.
$(x + 3y - 6) + \lambda(3x - y - 4z) = 0$ ....(iii)
$\therefore (1 + 3\lambda)x + (3 - \lambda)y - (4\lambda)z - 6 = 0$
આ સમતલનું ઉગમબિંદુથી લંબઅંતર = 1 એકમ
$\therefore \frac{|-6|}{\sqrt{(1 + 3\lambda)^2 + (3 - \lambda)^2 + (-4\lambda)^2}} = 1$
($\because$ ઉગમબિંદુથી સમતલ $ax + by + cz = d$ નું
લંબઅંતર $\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ છે.)
$\therefore |-6| = \sqrt{(1 + 3\lambda)^2 + (3 - \lambda)^2 + (-4\lambda)^2}$
$\therefore 36 = (1 + 3\lambda)^2 + (3 - \lambda)^2 + (-4\lambda)^2$
$\therefore 9\lambda^2 + 6\lambda + 1 + \lambda^2 - 6\lambda + 9 + 16\lambda^2 = 36$
$\therefore 26\lambda^2 + 10 = 36$
$\therefore 26\lambda^2 = 26$
$\therefore \lambda^2 = 1$
$\therefore \lambda = \pm 1$
હવે $\lambda = 1$ પરિણામ (iii) માં મૂકતાં,
$\therefore x + 3y - 6 + (3x - y - 4z) = 0$
$\therefore 4x + 2y - 4z - 6 = 0$
$\therefore 2x + y - 2z - 3 = 0$ ......(A)
તથા $\lambda = -1$ માટે $x + 3y - 6 - (3x - y - 4z) = 0$
$\therefore x + 3y - 6 - 3x + y + 4z = 0$
$\therefore -2x + 4y - 4z - 6 = 0$
$\therefore x - 2y - 2z + 3 = 0$ ......(B)
પરિણામ (A) તથા (B) માંગેલ સમતલના સમીકરણો છે.

10. સાબિત કરો કે બિંદુઓ $\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$ અને $3(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$ એ સમતલ $\bar{r} \cdot (5\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k}) + 9 = 0$ થી સમાન અંતરે છે અને બંને પરસ્પર વિરૂદ્ધ દિશામાં છે.

➡ આપેલ બિંદુ $A(\bar{a}) = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$

$\therefore A(\bar{a}) = (1, -1, 3)$

અને $B(\bar{b}) = 3(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$

$= 3(1, 1, 1)$

$= (3, 3, 3)$

આપેલ સમતલ $\pi : \bar{r} \cdot (5i + 2j - 7k) + 9 = 0$

$\therefore \pi : \bar{r}\ (x, y, z) \cdot (5, 2, -7) + 9 = 0$

$\therefore \pi : \bar{r} \cdot 5x + 2y - 7z + 9 = 0$

p_1 = બિંદુ $A(\bar{a})$ થી સમતલ π નું લંબઅંતર

$$= \frac{|1(5) + (-1)2 + 3(-7) + 9|}{\sqrt{(5)^2 + (2)^2 + (-7)^2}}$$

$$= \frac{|5 - 2 - 21 + 9|}{\sqrt{25 + 4 + 49}}$$

$$= \frac{|-23 + 14|}{\sqrt{98}} = \frac{9}{\sqrt{98}} \qquad ....(i)$$

p_2 = બિંદુ $B(\bar{b})$ થી સમતલ π નું લંબઅંતર

$$= \frac{|3(5) + 3(2) + 3(-7) + 9|}{\sqrt{5^2 + 2^2 + (-7)^2}}$$

$$= \frac{|15 + 6 - 21 + 9|}{\sqrt{25 + 4 + 49}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{98}} \qquad ....(ii)$$

અહીં $p_1 = p_2$

$\therefore$ આપેલ બિંદુઓ $A(\bar{a})$ તથા $B(\bar{b})$ સમતલથી સમાન અંતરે છે.

હવે $M(m) = \overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ લેતાં,

$$= \left(\frac{1 + 3}{2}, \frac{-1 + 3}{2}, \frac{3 + 3}{2}\right)$$

$= (2, 1, 3)$

➡ આપેલ બિંદુ $A(\bar{a}) = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$

$\therefore A(\bar{a}) = (1, -1, 3)$

અને $B(\bar{b}) = 3(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$

$= 3(1, 1, 1)$

$= (3, 3, 3)$

આપેલ સમતલ $\pi : \bar{r} \cdot (5i + 2j - 7k) + 9 = 0$

$\therefore \pi : \bar{r}\ (x, y, z) \cdot (5, 2, -7) + 9 = 0$

$\therefore \pi : \bar{r} \cdot 5x + 2y - 7z + 9 = 0$

p_1 = બિંદુ $A(\bar{a})$ થી સમતલ π નું લંબઅંતર

$$= \frac{|1(5) + (-1)2 + 3(-7) + 9|}{\sqrt{(5)^2 + (2)^2 + (-7)^2}}$$

$$= \frac{|5 - 2 - 21 + 9|}{\sqrt{25 + 4 + 49}}$$

$$= \frac{|-23 + 14|}{\sqrt{98}} = \frac{9}{\sqrt{98}} \qquad ....(i)$$

p_2 = બિંદુ $B(\bar{b})$ થી સમતલ π નું લંબઅંતર

$$= \frac{|3(5) + 3(2) + 3(-7) + 9|}{\sqrt{5^2 + 2^2 + (-7)^2}}$$

$= \frac{|15 + 6 - 21 + 9|}{\sqrt{25 + 4 + 49}}$

$= \frac{9}{\sqrt{98}}$ ....(ii)

અહીં $p_1 = p_2$

∴ આપેલ બિંદુઓ $A(\bar{a})$ તથા $B(\bar{b})$ સમતલથી સમાન અંતરે છે.

હવે $M(m) = \overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ લેતાં,

$= \left(\frac{1 + 3}{2}, \frac{-1 + 3}{2}, \frac{3 + 3}{2}\right)$

$= (2, 1, 3)$

11. **$\vec{AB} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ અને $\vec{CD} = -3\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$ આપેલા સદિશો છે. A તથા C ના સ્થાન સદિશો અનુક્રમે $6\bar{i} + 7\bar{j} + 4\bar{k}$ અને $-9\bar{i} + 2\bar{k}$ છે. બિંદુ $P \in \vec{AB}$ તથા $Q \in \vec{CD}$ મેળવો કે જેથી $\vec{PQ}$ એ $\vec{AB}$ તથા $\vec{CD}$ બંનેને લંબ થાય.**

➡ અહીં $\vec{AB} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k} = (3, -1, 1)$ અને $\vec{CD} = -3\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k} = (-3, 2, 4)$ છે તથા A તથા C ના સ્થાન સદિશો અનુક્રમે (6, 7, 4) અને (0, –9, 2) છે.

$\vec{PQ}$ એ $\vec{AB}$ તથા $\vec{CD}$ ને લંબ છે.

∴ P તથા Q એ બિંદુઓ A અને C માંથી દોરેલા લંબપાદ છે.

∴ બિંદુ A માંથી પસાર થતી અને $\vec{AB}$ ને સમાંતર રેખા $\vec{r} = (6, 7, 4) + \lambda(3, -1, 1)$ થશે. તથા બિંદુ C માંથી પસાર થતી અને $\vec{CD}$ ને સમાંતર રેખા $\bar{r} = (0, -9, 2) + \mu(-3, 2, 4)$ થાય.

ધારો કે $P(6 + 3\lambda, 7 - \lambda, 4 + \lambda)$ એ પ્રથમ રેખા પર અને $Q(-3\mu, 2\mu - 9, 2 + 4\mu)$ બીજી રેખા પરના બિંદુઓ છે.

$\therefore \vec{PQ} = Q - P$

$= (-3\mu, 2\mu - 9, 2 + 4\mu) - (6 + 3\lambda, 7 - \lambda, 4 + \lambda)$

$= (-3\mu - 6 - 3\lambda, 2\mu - 9 - 7 + \lambda, 2 + 4\mu - 4 - \lambda)$

$\therefore \vec{PQ} = (-3\mu - 3\lambda - 6, 2\mu + \lambda - 16, 4\mu - \lambda - 2)$...(i)

હવે $\vec{PQ}$ એ બિંદુ A માંથી પસાર થતી રેખાને લંબ છે.

$\therefore (-3\mu - 3\lambda - 6, 2\mu + \lambda - 16, 4\mu - \lambda - 2) \cdot (3, -1, 1) = 0$

$\therefore 3(-3\mu - 3\lambda - 6) - 1(2\mu + \lambda - 16) + 1(4\mu - \lambda - 2) = 0$

$\therefore -9\mu - 9\lambda - 18 - 2\mu - \lambda + 16 + 4\mu - \lambda - 2 = 0$

$\therefore -7\mu - 11\lambda - 4 = 0$

$\therefore 7\mu + 11\lambda + 4 = 0$ ....(ii)

હવે $\vec{PQ}$ એ બિંદુ B માંથી પસાર થતી રેખાને પણ લંબ છે.

$\therefore (-3\mu - 3\lambda - 6, 2\mu + \lambda - 16, 4\mu - \lambda - 2) \cdot (-3, 2, 4) = 0$

$\therefore -3(-3\mu - 3\lambda - 6) + 2(2\mu + \lambda - 16) + 4(4\mu - \lambda - 2) = 0$

$\therefore 9\mu + 9\lambda + 18 + 4\mu + 2\lambda - 32 + 16\mu - 4\lambda - 8 = 0$

$\therefore 29\mu + 7\lambda - 22 = 0$ ....(iii)

સમીકરણ (ii) અને (iii) ને ઉકેલતાં,

$\therefore -49\mu - 77\lambda - 28 = 0$

અને $319\mu + 77\lambda - 242 = 0$

$\therefore 270\mu - 270 = 0$ (∵ સરવાળો કરતાં)

$\therefore \mu - 1 = 0$

$\therefore \mu = 1$

સમીકરણ (iii) માં $\mu = 1$ મૂકો.

$\therefore -7(1) - 11\lambda - 4 = 0$

$\therefore -11 - 11\lambda = 0$

$\therefore 11\lambda = -11$

➥ અહીં $\vec{AB} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k} = (3, -1, 1)$ અને $\vec{CD} = -3\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k} = (-3, 2, 4)$ છે તથા A તથા C ના સ્થાન સદિશો અનુક્રમે (6, 7, 4) અને (0, –9, 2) છે.

$\vec{PQ}$ એ $\vec{AB}$ તથા $\vec{CD}$ ને લંબ છે.

$\therefore$ P તથા Q એ બિંદુઓ A અને C માંથી દોરેલા લંબપાદ છે.

$\therefore$ બિંદુ A માંથી પસાર થતી અને $\vec{AB}$ ને સમાંતર રેખા $\vec{r} = (6, 7, 4) + \lambda(3, -1, 1)$ થશે. તથા બિંદુ C માંથી પસાર થતી અને $\vec{CD}$ ને સમાંતર રેખા $\bar{r} = (0, -9, 2) + \mu(-3, 2, 4)$ થાય.

ધારો કે $P(6 + 3\lambda, 7 - \lambda, 4 + \lambda)$ એ પ્રથમ રેખા પર અને $Q(-3\mu, 2\mu - 9, 2 + 4\mu)$ બીજી રેખા પરના બિંદુઓ છે.

$\therefore \vec{PQ} = Q - P$

$= (-3\mu, 2\mu - 9, 2 + 4\mu) - (6 + 3\lambda, 7 - \lambda, 4 + \lambda)$

$= (-3\mu - 6 - 3\lambda, 2\mu - 9 - 7 + \lambda, 2 + 4\mu - 4 - \lambda)$

$\therefore \vec{PQ} = (-3\mu - 3\lambda - 6, 2\mu + \lambda - 16, 4\mu - \lambda - 2)$ ...(i)

હવે $\vec{PQ}$ એ બિંદુ A માંથી પસાર થતી રેખાને લંબ છે.

$\therefore (-3\mu - 3\lambda - 6, 2\mu + \lambda - 16, 4\mu - \lambda - 2) \cdot (3, -1, 1) = 0$

$\therefore 3(-3\mu - 3\lambda - 6) - 1(2\mu + \lambda - 16) + 1(4\mu - \lambda - 2) = 0$

$\therefore -9\mu - 9\lambda - 18 - 2\mu - \lambda + 16 + 4\mu - \lambda - 2 = 0$

$\therefore -7\mu - 11\lambda - 4 = 0$

$\therefore 7\mu + 11\lambda + 4 = 0$ ....(ii)

હવે $\vec{PQ}$ એ બિંદુ B માંથી પસાર થતી રેખાને પણ લંબ છે.

$\therefore (-3\mu - 3\lambda - 6, 2\mu + \lambda - 16, 4\mu - \lambda - 2) \cdot (-3, 2, 4) = 0$

$\therefore -3(-3\mu - 3\lambda - 6) + 2(2\mu + \lambda - 16) + 4(4\mu - \lambda - 2) = 0$

$\therefore 9\mu + 9\lambda + 18 + 4\mu + 2\lambda - 32 + 16\mu - 4\lambda - 8 = 0$

$\therefore 29\mu + 7\lambda - 22 = 0$ ....(iii)

સમીકરણ (ii) અને (iii) ને ઉકેલતાં,

$\therefore -49\mu - 77\lambda - 28 = 0$

અને $319\mu + 77\lambda - 242 = 0$

$\therefore 270\mu - 270 = 0$ ($\because$ સરવાળો કરતાં)

$\therefore \mu - 1 = 0$

$\therefore \mu = 1$

સમીકરણ (iii) માં $\mu = 1$ મૂકો.

$\therefore -7(1) - 11\lambda - 4 = 0$

$\therefore -11 - 11\lambda = 0$

$\therefore 11\lambda = -11$

12. **જો રેખાઓ $2l + 2m - n = 0$ અને $m \cdot n + nl + lm = 0$ ની દિક્કોસાઈન હોય તો બતાવો કે રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે.**

➥ $2l + 2m - n = 0$

$\therefore 2m = n - 2l$

$\therefore m = \dfrac{n - 2l}{2}$ ....(i)

હવે $m \cdot n + nl + lm = 0$

$\therefore n\left(\dfrac{n - 2l}{2}\right) + nl + l\left(\dfrac{n - 2l}{2}\right) = 0$

$\therefore n^2 - 2nl + 2nl + nl - 2l^2 = 0$

$\therefore n^2 + nl - 2l^2 = 0$

$\therefore n^2 + 2nl - nl - 2l^2 = 0$

$\therefore n(n + 2l) - l(n + 2l) = 0$

$\therefore (n + 2l)(n - l) = 0$

$\therefore\ n = l$ અથવા $n = -2l$

જો $n = l$ હોય તો $m = \frac{l - 2l}{2}$

$\therefore m = -\frac{l}{2}$

$\therefore$ દિક્કોસાઈન $\overline{x} = \left(l, -\frac{l}{2}, l\right)$ થાય.

તથા $n = -2l$ હોય તો

$m = \frac{-2l - 2l}{2}$ (પરિણામ (i) પરથી)

$= \frac{-4l}{2}$

$\therefore\ m = -2l$

$\therefore$ દિક્કોસાઈન $\overline{y} = (l, -2l, -2l)$ થશે.

હવે $\overline{x} \cdot \overline{y} = \left(l, -\frac{l}{2}, l\right) \cdot (l, -2l, -2l)$

$= l^2 + \left(-\frac{l}{2}\right)(-2l) + (l) \cdot (-2l)$

$= l^2 + l^2 - 2l^2$

$= 2l^2 - 2l^2$

$\therefore \overline{x} \cdot \overline{y} = 0$

$\therefore \overline{x} \perp \overline{y}$

$\therefore$ રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે.

13. (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) તથા (l_3, m_3, n_3) પરસ્પર ત્રણ લંબ રેખાઓની દિક્કોસાઈન છે. તો રેખાઓ જેની દિક્કોસાઈન $(l_1 + l_2 + l_3, m_1 + m_2 + m_3, n_1 + n_2 + n_3)$ ના પ્રમાણમાં હોય તો તે રેખા ત્રણેય રેખા સાથે સમાન ખૂણો બનાવે છે.

➡ ધારો કે $\overline{a} = (l_1, m_1, n_1)$

$\overline{b} = (l_2, m_2, n_2)$

$\overline{c} = (l_3, m_3, n_3)$

અને $\overline{d} = (l_1 + l_2 + l_3, m_1 + m_2 + m_3, n_1 + n_2 + n_3)$ લેતાં,

ધારો કે સદિશ $\overline{a}$, $\overline{b}$ અને $\overline{c}$ એ સદિશ $\overline{d}$ સાથે α, β અને γ ખૂણો બનાવે છે.

અહીં $|\overline{a}| = \sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}$

$\therefore |\overline{a}| = 1$

આજ રીતે $|\overline{b}| = 1$ અને $|\overline{c}| = 1$ થશે.

$|d|^2 = (l_1 + l_2 + l_3)^2 + (m_1 + m_2 + m_3)^2 + (n_1 + n_2 + n_3)^2$

$= (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) + (l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) +$

$(l_3^2 + m_3^2 + n_3^2) + 2(l_1l_2 + l_2l_3 + l_3l_1 + m_1m_2 + m_2m_3 + m_1m_3 + n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_1)$

$= 1 + 1 + 1 + 2(0)$

$|d|^2 = 3$ ($\because$ ત્રણેય રેખાઓ પરસ્પરલંબ છે. $\therefore\ l_1 \perp l_2, l_2 \perp l_3, l_3 \perp l_1, m_1 \perp m_2, m_2 \perp m_3,$

$m_1 \perp m_3, n_1 \perp n_2, n_2 \perp n_3, n_3 \perp n_1$ છે.)

$\therefore |d| = \sqrt{3}$

$\therefore \cos\alpha = \frac{\overline{a} \cdot \overline{d}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{d}|}$

અહીં $\overline{a} \cdot \overline{d}$

$= (l_1, m_1, n_1) \cdot (l_1 + l_2 + l_3, m_1 + m_2 + m_3, n_1 + n_2 + n_3)$

$= l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 + (l_1l_2 + l_1l_3 + m_1m_2 + m_2m_3 + n_1n_2 + n_2n_3)$

$= 1 + 0$

$= 1$

$\therefore \cos\alpha = \frac{1}{(1)\sqrt{3}}$

$\therefore \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

આજ પ્રમાણે $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ મળે.

$\therefore \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$

$\therefore \alpha = \beta = \gamma$

આમ માંગેલ પરિણામ સાબિત થાય છે.