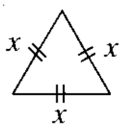
1. **એક સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુ 2 સેમી/સેકન્ડના દરથી વૃદ્ધિ પામે છે. જ્યારે તેની બાજુ 10 સેમી હોય ત્યારે તેના ક્ષેત્રફળનો વૃદ્ધિ દર .... (સેમી)^2/સેકન્ડ થશે.**

(A) 10 (B) $\sqrt{3}$ (C) $10\sqrt{3}$ (D) $\frac{10}{3}$

જવાબ **(C) $10\sqrt{3}$**

➡ ધારો કે સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુ = x સેમી તથા $\frac{dx}{dt} = 2$ સેમી/સેકન્ડ



($\because$ બાજુનો વૃદ્ધિ દર 2 સેમી/સેકન્ડ આપેલ છે.)

A = સમબાજુ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$= \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$

$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2x \cdot \frac{dx}{dt}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \frac{dx}{dt}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} (10) \cdot 2$ (સેમી)^2/સેકન્ડ

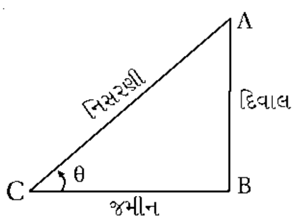
$= 10\sqrt{3}$ (સેમી)^2/સેકન્ડ

2. **5 મીટર લંબાઈની નિસરણી (Ladder) એક શિરોલંબ દિવાલને ટેકવેલ છે. તેનો ઉપરનો છેડો 10 સેમી/સેકન્ડના દરથી નીચે તરફ સરકે છે. જ્યારે નિસરણીનો નીચેનો છેડો દિવાલથી 2 મીટર દૂર હોય ત્યારે નિસરણીના નીચલો છેડો અને ભોંયતળીયા વચ્ચે રચાયેલા ખૂણાનો વૃદ્ધિ દર .... રેડિયન/સેકન્ડ હોય.**

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{20}$ (C) 20 (D) 10

જવાબ **(B) $\frac{1}{20}$**

➡ આકૃતિમાં,



AC = 5 મીટર લંબાઈ ધરાવતી નિસરણી = 5 મીટર

$\therefore$ AC = 500 સેમી

BC = y સેમી ભોંયતળીયાની લંબાઈ

AB = x સેમી દિવાલની ઊંચાઈ

ધારો કે, $\overline{AC} \wedge \overline{BC} = \theta$

આકૃતિ પરથી $\sin\theta = \frac{x}{500}$ અને $\cos\theta = \frac{y}{500}$

$\therefore$ $x = 500 \sin\theta$ અને $y = 500 \cos\theta$

અહીં, નિસરણીનો ઉપરનો છેડો 10 સેમી/સેકન્ડના દરથી નીચે આવે છે.

$\therefore \frac{dx}{dt} = 10$ સેમી/સેકન્ડ

$\therefore x = 500 \sin\theta$

$\therefore \frac{dx}{dt} = 500 \ \cos\theta \frac{d\theta}{dt}$

$\therefore 500 \cdot \cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = 10$

$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{10}{500 \cdot \cos\theta} = \frac{10}{500\left(\frac{y}{500}\right)}$ ($\because$ $y = 500 \cos\theta$ છે.)

$= \frac{10}{y} = \frac{10}{200}$ ($\because$ $y = 2$ મીટર આપેલ છે.)

$= \frac{1}{20}$ રેડિયન/સેકન્ડ

3. વક્ર $y = x^{\frac{1}{5}}$ ને ઊગમબિંદુ (0, 0) આગળ સ્પર્શક....

(A) શિરોલંબ છે. (B) સમક્ષિતિજ છે. (અર્થાત્ X- અક્ષને સમાંતર છે.)

(C) X- અક્ષ સાથે $\theta = 90°$ નો ખૂણો બનાવતી રેખા છે. (D) અસ્તિત્વ ધરાવે નહીં.

જવાબ (A) શિરોલંબ છે. (અર્થાત્ Y- અક્ષને સમાંતર છે.)

➡ $y = x^{\frac{1}{5}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}\left(x^{\frac{1}{5}-1}\right)$

$= \frac{1}{5}\left(x^{-\frac{4}{5}}\right)$

$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}}$

$\therefore$ ઊગમબિંદુ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,\,0)}$

$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{0}\right)^{\frac{4}{5}}$

$= \infty$

$\therefore$ સ્પર્શકનો ઢાળ અવ્યાખ્યાયિત છે.

$\therefore$ સ્પર્શક શિરોલંબ રેખા હોય.

$\therefore$ વક્ર $y = x^{\frac{1}{5}}$ ને (0, 0) આગળનો સ્પર્શક Y- અક્ષને સમાંતર રેખા હોય.

4. રેખા $x + 3y = 8$ ને સમાંતર વક્ર $3x^2 - y^2 = 8$ ને અભિલંબનું સમીકરણ નીચેના પૈકી .... છે.

(A) $3x - y = 8$ (B) $3x + y + 8 = 0$ (C) $x + 3y \pm 8 = 0$ (D) $x + 3y = 0$

જવાબ (C) $x + 3y \pm 8 = 0$

➡ અહીં, અભિલંબ આપેલ રેખા $x + 3y = 8$ ને સમાંતર છે.

$\therefore$ અભિલંબનો ઢાળ = આપેલ રેખાનો ઢાળ

$= -\frac{}{3}$

અહીં, $3x^2 - y^2 = 8$

બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\therefore 6x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x}{y}$ જે સ્પર્શકનો ઢાળ થાય. ($\because$ $\frac{dy}{dx}$ એ હંમેશાં આપેલ વક્રના સ્પર્શકનો ઢાળ હોય.)

$\therefore$ અભિલંબનો ઢાળ $= \frac{-1}{\frac{dy}{dx}}$

$= -\frac{1}{\left(\frac{3x}{y}\right)}$

$\therefore -\frac{1}{3} = -\frac{y}{3x}$ ($\because$ અભિલંબનો ઢાળ $= -\frac{1}{3}$ છે.)

$\therefore 3x = 3y$

$\therefore x = y$

$3x^2 - y^2 = 8$ માં $x = y$ મૂકો.

$\therefore 3x^2 - x^2 = 8$

$\therefore 2x^2 = 8$

$\therefore x^2 = 4$

$\therefore x = \pm 2$

તથા $y = \pm 2$ થશે.

$\therefore$ બિંદુ $(\pm 2, \pm 2)$ માંથી પસાર થતી અને $-\frac{1}{3}$ રેખાનું સમીકરણ અભિલંબનું સમીકરણ થાય.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ મુજબ મેળવતાં,

$y - (\pm 2) = -\frac{1}{3}(x - (\pm 2))$

$\therefore 3(y - (\pm 2)) = -(x - (\pm 2))$

$\therefore 3y - (\pm 6) = -x + (\pm 2)$

$\therefore x + 3y \pm 8 = 0$

5. **વક્રો $ay + x^2 = 7$ અને $y = x^3$ બિંદુ (1, 1) આગળ કાટખૂણે છેદતાં હોય તો a = ...**

(A) 1 (B) 0 (C) -6 (D) 6

જવાબ **(D) 6**

➡ પ્રથમ વક્ર $ay + x^2 = 7$ નો બિંદુ (1, 1) આગળ ઢાળ m_1 મેળવતાં,

હવે x પ્રત્યે વિકલન કરતાં $a\frac{dy}{dx} + 2x = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{a}$

$\therefore m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)}$

$\therefore m_1 = -\frac{2}{a}$

બીજા વક્ર $y = x^3$ નો બિંદુ (1, 1) આગળ ઢાળ m_2 મેળવતાં,

હવે x પ્રત્યે વિકલન કરતાં $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

$\therefore m_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = 3(1^2) = 3$

હવે, વક્રો પરસ્પર કાટખૂણે છેદે છે.

$\therefore m_1 m_2 = -1$

$\therefore \left(\frac{-2}{a}\right)(3) = -1$

$\therefore\ -6 = -a$

$\therefore\ a = 6$

6. **$y = x^4 - 10$ માં x નું મૂલ્ય 2 થી બદલાઈને 1.99 થાય તો y નું મૂલ્ય બદલાઈને .... થાય.**

(A) 0.32 (B) 0.032 (C) 5.68 (D) 5.968

જવાબ **(A) 0.32**

➡ અહીં, x નું મૂલ્ય 2 થી બદલાઈને 1.99 થાય છે.

$\therefore\ \Delta x = 2.00 - 1.99$

$= 0.01$

$\therefore\ y$ નો વૃદ્ધિ દર $= \left(\dfrac{dy}{dx}\right)\Delta x$

$= 4x^3 \times \Delta x$

$= 4(2^3) \times (0.01)$

$= 32 \times 0.01$

$= 0.32$

7. **વક્ર $y(1 + x^2) = 2 - x$ ને X- અક્ષને છેદતા વક્રનું સમીકરણ નીચેના પૈકી .... છે.**

(A) $x + 5y = 2$ (B) $x - 5y = 2$ (C) $5x - y = 2$ (D) $5x + y = 2$

જવાબ **(A) $x + 5y = 2$**

➡ આપેલ વક્ર $y(1 + x^2) = 2 - x$

વક્ર X- અક્ષને છેદે છે.

$\therefore\ y = 0$ લેતાં,

$\therefore\ 2 - x = 0$

$\therefore\ x = 2$

$\therefore$ આપેલ વક્રના X- અક્ષ સાથેના છેદબિંદુના યામ = (2, 0)

સ્પર્શક આ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

હવે, $y(1 + x^2) = 2 - x$ નું બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\therefore\ y(2x) + (1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} = 0 - 1$

$\therefore\ (1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} = -1 - 2xy$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1 - 2xy}{1 + x^2}$

$\therefore$ (2, 0) આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ $m = \dfrac{-1 - 2(0)}{1 + (2^2)}$

$= \dfrac{-1}{5}$

$\therefore$ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y - y_1 = m(x - x_1)$ પ્રમાણે મેળવતાં,

$\therefore\ y - 0 = \dfrac{-1}{5}(x - 2)$

$\therefore\ 5y = -x + 2$

$\therefore\ x + 5y = 2$

8. **નીચેના પૈકી .... બિંદુએ વક્ર $y = x^3 - 12x + 18$ ને દોરેલા સ્પર્શકો X- અક્ષને સમાંતર છે.**

(A) (2, –2), (–2, –34) (B) (2, 34), (–2, 0) (C) (0, 34), (–2, 0) (D) (2, 2), (–2, 34)

જવાબ **(D) (2, 2), (–2, 34)**

➡ વક્ર $y = x^3 - 12x + 18$ નો સ્પર્શક X- અક્ષને સમાંતર છે. આમ સ્પર્શક સમક્ષિતિજ રેખા થશે.

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = 0$ (અર્થાત્ સ્પર્શકનો ઢાળ શૂન્ય હોય.)

$\therefore\ 3x^2 - 12 = 0$

$\therefore x^2 - 4 = 0$ ($\because$ બંને બાજુ 3 વડે ભાગતાં)
$\therefore x^2 = 4$
$\therefore x = \pm 2$
હવે, $x = 2$ માટે $y = (2)^3 - 12(2) + 18$
$= 8 - 24 + 18$
$= 2$
$\therefore$ બિંદુ (2, 2) થશે.
તથા $x = -2$ માટે $y = (-2)^3 - 12(-2) + 18$
$= -8 + 24 + 18$
$= 34$
$\therefore$ બિંદુ (–2, 34) થાય.
$\therefore$ બિંદુઓ (2, 2) તથા (–2, 34) આગળનો સ્પર્શક X- અક્ષને સમાંતર થશે.

9. વક્ર $y = e^{2x}$ ને દોરેલ (0, 1) આગળનાં સ્પર્શક X- અક્ષને .... બિંદુએ છેદશે.

(A) (–1, 0) (B) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ (C) (2, 0) (D) (–2, 0)

જવાબ **(B)** $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

➥ સૌ પ્રથમ આપણે (0, 1) આગળ આપેલ વક્રનો ઢાળ મેળવતાં,
$y = e^{2x}$ આપેલ વક્ર
$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 \cdot e^{2x}$
$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,1)} = 2 \cdot e^0 = 2(1) = 2$
$\therefore$ વક્રના સ્પર્શકનો ઢાળ $m = 2$
સ્પર્શકનું સમીકરણ $y - y_1 = m(x - x_1)$ મુજબ મેળવતાં,
$\therefore y - 1 = 2(x - 0)$
$\therefore y - 1 = 2x$
$\therefore 2x - y + 1 = 0$ સ્પર્શકનું સમીકરણ છે.
આ સ્પર્શક X- અક્ષને છેદે છે.
$\therefore y = 0$ લેતાં,
$\therefore 2x - 0 + 1 = 0$
$\therefore 2x = -1$
$\therefore x = -\frac{1}{2}$
$\therefore$ X- અક્ષ સાથેનું છેદબિંદુ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ થશે.

10. વક્ર $y = 2t^2 - 2t - 5$ અને $x = t^2 + 3t - 8$ ને બિંદુ (2, –1) આગળ દોરેલ સ્પર્શકનો ઢાળ .... છે.

(A) $\frac{22}{7}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $-\frac{6}{7}$ (D) -6

જવાબ **(B)** $\frac{6}{7}$

➥ વક્ર $x = t^2 + 3t - 8$ અને $y = 2t^2 - 2t - 5$ ને બિંદુ (2, –1) માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore t^2 + 3t - 8 = 2$	તથા $2t^2 - 2t - 5 = -1$
$\therefore t^2 + 3t - 10 = 0$	$\therefore 2t^2 - 2t - 4 = 0$
$\therefore t^2 + 5t - 2t - 10 = 0$	$\therefore t^2 - t - 2 = 0$
$\therefore t(t + 5) - 2(t + 5) = 0$	$\therefore (t - 2)(t + 1) = 0$
$\therefore (t + 5)(t - 2) = 0$	$\therefore t = 2$ અથવા $t = 1$
$\therefore t = -5$ અથવા $t = 2$	

અહીં, બંનેમાં t નું સામાન્ય મૂલ્ય $t = 2$ છે.

આપણે સ્પર્શકનો ઢાળ t = 2 માટે મેળવીશું.

અહીં, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$= \frac{4t - 2}{2t + 3}$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=2} = \frac{4(2) - 2}{2(2) + 3} = \frac{6}{7}$

$\therefore$ સ્પર્શકનો ઢાળ $= \frac{6}{7}$ થશે.

11. **વક્રો $x^3 - 3xy^2 + 2 = 0$ અને $3x^2y - y^3 - 2 = 0$ નો છેદકોણ ....**

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

જવાબ **(C) $\frac{\pi}{2}$**

➡ પ્રથમ વક્ર : $x^3 - 3xy^2 + 2 = 0$

બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\therefore 3x^2 - 3\left(2xy\frac{dy}{dx} + y^2\right) = 0$

હવે બંને બાજુ 3 વડે ભાગતાં,

$\therefore x^2 - 2xy\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$

$\therefore -2xy\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$

$\therefore$ પ્રથમ વક્રના સ્પર્શકનો ઢાળ $m_1 = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$

બીજો વક્ર : $3x^2y - y^3 - 2 = 0$

બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$3\left(x^2\frac{dy}{dx} + y \cdot 2x\right) - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$

હવે બંને બાજુ 3 વડે ભાગતાં,

$\therefore (x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} = -2xy$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 - y^2}$

$\therefore$ બીજા વક્રના સ્પર્શકનો ઢાળ $m_2 = \frac{-2xy}{x^2 - y^2}$

હવે, $m_1 \cdot m_2 = \left(\frac{-2xy}{x^2 - y^2}\right)\left(\frac{x^2 - y^2}{2xy}\right) = -1$

$\therefore$ સ્પર્શકો પરસ્પર લંબ છે.

$\therefore$ બંને વક્રો વચ્ચેનો છેદકોણનું મૂલ્ય $\frac{\pi}{2}$ હોય.

12. **નીચેના પૈકી .... અંતરાલમાં વિધેય $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x - 1$ ઘટતું વિધેય છે.**

(A) $[-1, \infty]$ (B) $[-2, -1]$ (C) $(-\infty, -2]$ (D) $[-1, 1]$

જવાબ **(B) $[-2, -1]$**

➡ $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x - 1$

$\therefore f'(x) = 6x^2 + 18x + 12$

$= (x^2 + 3x + 2)$

$= 6(x + 2)(x + 1)$

જો $f(x)$ ઘટતું વિધેય હોય તો $f'(x) < 0$ થાય.

$\therefore x + 2 < 0$ અને $x + 1 > 0$ હોય.

અથવા $(x + 2) > 0$ અને $(x + 1) < 0$ હોય.

$x + 2 < 0$ અને $x + 1 > 0$

$\therefore x < -2$ $x < -1$

$\therefore -1 < x$

$-1 < x < -2$ થાય.

તથા $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$

અને $x + 1 < 0$

$\therefore x < -1$

આમ, $x < -1$ અને $-2 < x$

$\therefore -2 < x < -1$

$\therefore$ આમ બંને વિકલ્પમાં $-2 < x < -1$

$\therefore x \in [-2, -1]$

$\therefore [-2, -1]$ અંતરાલમાં $f(x)$ ઘટતું વિધેય હોય.

13. વિધેય $f : R \to R$, $f(x) = 2x + \cos x$ નીચેના પૈકી .... વિકલ્પ સત્ય છે.

(A) $x = \pi$ માટે $f(x)$ ને ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય. (B) $x = 0$ માટે $f(x)$ ને મહત્તમ મૂલ્ય હોય.

(C) $f(x)$ ઘટતું વિધેય છે. (D) $f(x)$ વધતું વિધેય છે.

જવાબ (D) $f(x)$ વધતું વિધેય છે.

➡ $f : R \to R$, $f(x) = 2x + \cos x$

$\therefore f'(x) = 2 - \sin x$

હવે $-1 \le \sin x \le 1$

$\therefore 1 \ge -\sin x \ge -1$

$\therefore 2 + 1 \ge 2 - \sin x \ge 2 - 1$

$\therefore 3 \ge f'(x) \ge 1$

$\therefore 1 \le f'(x) \le 3$

$f'(x) \in [1, 3]$

$\therefore f'(x) > 0$ થાય.

$\therefore f(x)$ વધતું વિધેય કહેવાય.

14. જો $y = x(x - 3)^2$ એ ઘટતું વિધેય હોય તો ....

(A) $1 < x < 3$ (B) $x < 0$ (C) $x > 0$ (D) $0 < x < \frac{3}{2}$

જવાબ (A) $1 < x < 3$

➡ $f(x) = x(x - 3)^2$

$\therefore f(x) = x(x^2 - 6x + 9)$

$= x^3 - 6x^2 + 9x$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$= 3(x^2 - 4x + 3)$

$\therefore f'(x) = 3(x - 3)(x - 1)$

અહીં, $f(x)$ ઘટતું વિધેય છે.

$\therefore f'(x) < 0$ થવું જોઈએ.

આમ, સ્પષ્ટ છે કે $x \in (1, 3)$ માટે જ $f'(x) < 0$ થાય.

$\therefore x \in (1, 3)$ અર્થાત્ $1 < x < 3$ માટે $f'(x) < 0$ થાય.

$\therefore f(x)$ ઘટતું વિધેય હોય તો $1 < x < 3$ થાય.

15. વિધેય $f(x) = 4\sin^3 x - 6\sin^2 4 + 12\sin x + 100$ માટે નીચેના પૈકી .... વિકલ્પ સત્ય હોય.

(A) અંતરાલ $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ માં વધતું વિધેય છે. (B) અંતરાલ $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ માં ઘટતું વિધેય છે.

(C) અંતરાલ $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ માં ઘટતું વિધેય છે.

(D) અંતરાલ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ માં ઘટતું વિધેય છે.

જવાબ (B) અંતરાલ $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ માં ઘટતું વિધેય છે.

➡ $f(x) = 4\sin^3 x - 6\sin^2 4 + 12\sin x + 100$

$\therefore f'(x) = 12\sin^2 x \cdot \cos x - 12\sin x\cos x + 12\cos x$

$= 12\cos x\,(\sin^2 x - \sin x + 1)$

અહીં, $\sin^2 x > 0$ તથા $\sin x \le 1$ હોય.

આમ, $\sin^2 x \ge 0$ તથા $0 \le 1 - \sin x$ થાય.

$\therefore \sin^2 x + 1 - \sin x$ ધન છે.

અને $\cos x > 0$ જો $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore f(x)$ એ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ માં વધતું વિધેય થાય.

જે એકપણ વિકલ્પમાં આપેલ નથી.

પરંતુ $\cos x < 0$ જો $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ હોય.

$\therefore f'(x) < 0$ થાય.

$\therefore f(x)$ એ $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ માં ઘટતું વિધેય કહેવાય.

16. અંતરાલ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં વિધેય .... વિધેય ઘટતું વિધેય છે.

(A) $\sin(2x)$ (B) $\tan x$ (C) $\cos x$ (D) $\cos(3x)$

જવાબ (C) $\cos x$

➡ આપેલ વિકલ્પ પૈકી $f(x) = \cos x$ માટે $f'(x) = -\sin x$ થાય.

આમ, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માટે $f'(x) < 0$ થાય.

$f(x) = \cos x$ ઘટતું વિધેય થાય.

17. વિધેય $f(x) = \tan x - x$ એ ....

(A) હંમેશાં વધતું વિધેય છે.

(B) હંમેશાં ઘટતું વિધેય છે.

(C) કદાપી વધતું વિધેય ન હોય.

(D) કંઈપણ ચોક્કસપણે ન કહી શકાય.

જવાબ (A) હંમેશાં વધતું વિધેય છે.

➡ $f(x) = \tan x - 1,\ x \in R$

$\therefore f'(x) = \sec^2 x - 1,\ x \in R$

$= \tan^2 x,\ x \in R$

$\therefore f'(x) > 0,\ x \in R$

$\therefore f(x) = \tan x - x$ એ હંમેશાં વધતું વિધેય છે.

18. $f(x) = x^2 - 8x + 17$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય .... છે. (જ્યાં $x \in R$)

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

જવાબ (C) 1

➡ $f(x) = x^2 - 8x + 17$

$\therefore f'(x) = 2x - 8$

$\therefore f''(x) = 2$

મહત્તમ/ન્યૂનતમ મૂલ્ય માટે $f'(x) = 0$

$\therefore 2x - 8 = 0$

$\therefore 2x = 8$

$\therefore x = 4$

અહીં $x = 4$ માટે $f''(x) = 2 > 0$

$\therefore$ $x = 4$ માટે $f(x)$ ન્યૂનતમ હોય.

$\therefore$ ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(4) = (4)^2 - 8(4) + 17$

$= 16 - 32 + 17$

$= 33 - 32$

$= 1$

$\therefore$ $f(x)$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= 1$ હોય.

19. **$x \in [0, 9]$ માટે બહુપદી $x^3 - 18x^2 + 96x$ નું લઘુત્તમ મૂલ્ય .... છે.**

(A) 126 (B) 0 (C) 135 (D) 160

જવાબ **(B) 0**

➡ $f(x) = x^3 - 18x^2 + 96x$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 36x + 96$

લઘુત્તમ/મહત્તમ મૂલ્ય માટે $f'(x) = 0$ લેતાં,

$3x^2 - 36x + 96 = 0$

$\therefore x^2 - 12x + 32 = 0$ ($\because$ 3 વડે ભાગતાં)

$\therefore (x - 8)(x - 4) = 0$

$\therefore x = 4$ અથવા $x = 8$

અહીં, 4 તથા $8 \in [0, 9]$

આમ, આપણે 0, 4, 8 અને 9 માટે $f(x)$ નું મૂલ્ય મેળવતાં તથા આપેલ $f(x)$ માં $x = 0$ માટે ન્યૂનતમ મૂલ્ય શૂન્ય થશે.

20. **વિધેય $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ માટે નીચેના પૈકી .... વિકલ્પ સાચા છે.**

(A) સ્થાનીય મહત્તમ હોવા માટેના બે મૂલ્યો મળે.

(B) સ્થાનીય ન્યૂનતમ હોવા માટેના બે મૂલ્યો મળે.

(C) એક મહત્તમ અને એક ન્યૂનતમ માટેનું મૂલ્ય મળે.

(D) x ના કોઈપણ મૂલ્ય માટે મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્ય ન મળે.

જવાબ **(C) એક મહત્તમ માટે અને એક ન્યૂનતમ માટેનું મૂલ્ય મળે.**

➡ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$

$\therefore f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$\therefore f''(x) = 12x - 6$

હવે મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ માટે $f'(x) = 0$

$\therefore 6x^2 - 6x - 12 = 0$

$\therefore x^2 - x - 2 = 0$

$\therefore (x - 2)(x + 1) = 0$

$\therefore x = -1$ અથવા $x = 2$

હવે $x = -1$ માટે $f''(-1) = -12 - 6 = -18 < 0$

$\therefore x = -1$ માટે $f(x)$ મહત્તમ થાય.

અને $x = 2$ માટે $f''(2) = 24 - 6 = 18 > 0$

$\therefore x = 2$ માટે $f(x)$ ન્યૂનતમ થાય.

$\therefore f(x)$ ને એક મહત્તમ અને એક ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે.

21. **$f(x) = \sin x \cdot \cos x$ નું મહત્તમ મૂલ્ય .... છે.**

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

જવાબ **(B) $\frac{1}{2}$**

➡ $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

$\therefore f'(x) = \sin x\left(\frac{d}{dx}\cos x\right) + \cos x\left(\frac{d}{dx}\sin x\right)$

$= -\sin x \sin x + \cos x \cdot \cos x$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

$\therefore f'(x) = \cos(2x)$

$\therefore f''(x) = -2\sin(2x)$

મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ મૂલ્ય માટે $f'(x) = 0$

$\therefore \cos(2x) = 0$

$\therefore \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore 2x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$

$\therefore f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\left(2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= -2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= -2$

$\therefore f''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$ માટે $f(x)$ મહત્તમ હોય.

$\therefore$ મહત્તમ મૂલ્ય $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{2}$

22. $x = \frac{5\pi}{6}$ માટે $f(x) = 2\sin(3x) + 3\cos(3x) =$ ....

(A) મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે છે.

(B) ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે છે.

(C) નું મૂલ્ય શૂન્ય (Zero) છે.

(D) મહત્તમ અને ન્યૂનતમ ન હોય.

જવાબ (D) મહત્તમ અને ન્યૂનતમ ન હોય.

➡ $f(x) = 2\sin(3x) + 3\cos(3x)$

$\therefore f'(x) = 2(\cos(3x))3 + 3(-\sin 3x)\cdot 3$

$= 6\cos(3x) - 9\sin(3x)$

$\therefore f''(x) = 6(-\sin(3x))3 - 9(\cos(3x))3$ તથા

$= -18\sin(3x) - 27(\cos(3x))$

$= -9(2\sin(3x) + 3\cos 3x)$

$\therefore f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -9\left\{2\sin\left(3\cdot\frac{5\pi}{6}\right) + 3\cos\left(3\cdot\frac{5\pi}{6}\right)\right\}$

$= -9\left\{2\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right\}$

$= -9\left\{2\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$= -9\left\{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$= -9\{2(1) + 3(0)\}$

$= -18 + 0$

$\therefore f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -18 < 0$

$\therefore$ વિધેય $f(x) = 2\sin 3x + 3\cos(3x)$ નું મૂલ્ય મહત્તમ $x = \frac{5\pi}{6}$ માટે હોય.

23. વક્ર $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$ ના ઢાળનું મહત્તમ મૂલ્ય .... છે.

(A) 0 (B) 12 (C) 16 (D) 32

જવાબ **(B) 12**

➡ $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$

$\frac{dy}{dx} = -3x^2 + 6x + 9$ જે વક્રનો ઢાળ દર્શાવે છે.

મહત્તમ મૂલ્ય મેળવવા ઢાળને $f(x)$ તરીકે લેતાં,

$\therefore f(x) = -3x^2 + 6x + 9$

$\therefore f'(x) = -6x + 6$

$\therefore f''(x) = -6$

હવે મહત્તમ/ન્યૂનતમ મૂલ્ય માટે $f'(x) = 0$ લેતાં,

$\therefore -6x + 6 = 0$

$\therefore x = 1$

અહીં, $f''(x) = -6 < 0$ છે.

$\therefore x = 1$ માટે $f(x)$ મહત્તમ હોય.

મહત્તમ મૂલ્ય $f(1) = -3(1)^2 + 6(1) + 9$

$= -3 + 6 + 9$

$= -3 + 15$

$= 12$

$\therefore$ વક્રનો મહત્તમ ઢાળનું મૂલ્ય 12 હોય.

24. વિધેય $f(x) = x^x$ ની નિર્ણાયક સંખ્યા .... માટે મળે.

(A) $x = e$ (B) $x = \frac{1}{e}$ (C) $x = 1$ (D) $x = \sqrt{e}$

જવાબ **(B) $x = \frac{1}{e}$**

➡ અહીં, $f(x) = x^x$ છે.

$y = x^x$ લેતાં,

બંને બાજુ e ના આધારનો log લેતાં,

$\therefore \log y = \log(x^x)$

$= x \cdot \log x$

બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + \log x$

$= 1 + \log x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y(1 + \log x)$

$= x^x(1 + \log x)$

આમ, $f'(x) = x^x(1 + \log x)$

મહત્તમ/ન્યૂનતમ ઘટક (Stationary point) માટે $f'(x) = 0$ લેતાં,

$\therefore x^x(1 + \log x) = 0$

$\therefore 1 + \log x = 0$ ($\because x^x \neq 0$ થાય.)

$\therefore \log_e x = -1$

$\therefore x = e^{-1}$ ($\because$ લઘુગુણકની વ્યાખ્યા)

$\therefore x = \frac{1}{e}$

મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય $x = \frac{1}{e}$ માટે હોય.

25. $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$ નું મહત્તમ મૂલ્ય .... છે.

(A) e (B) e^e (C) $e^{\frac{1}{e}}$ (D) $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

જવાબ (C) $e^{\frac{1}{e}}$

➡ $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$

હવે $y = f(x)$ લેતાં,

$\therefore y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$

બંને બાજુ e ના આધારનો log લેતાં,

$\therefore \log y = x \cdot \log\left(\frac{1}{x}\right)$

હવે બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\left\{\frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right\} + \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -1 + \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left(-1 + \log\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)^x\left(-1 + \log\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

જવાબ (C) $e^{\frac{1}{e}}$

➡ $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$

હવે $y = f(x)$ લેતાં,

$\therefore y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$

બંને બાજુ e ના આધારનો log લેતાં,

$\therefore \log y = x \cdot \log\left(\frac{1}{x}\right)$

હવે બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\left\{\frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right\} + \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -1 + \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left(-1 + \log\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)^x\left(-1 + \log\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$