12

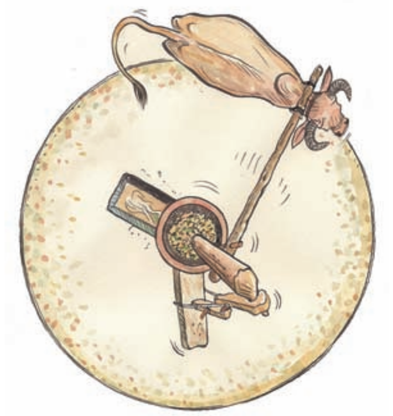
वृत्त
(Circles)

12.1 प्रस्तावना

हम अपने आसपास बहुतसी गोल आकार की वस्तुएँ जैसे सिक्के, चूडियाँ, घडीयाँ, पहिए, बटन, आदि देखते है। सभी वस्तुएँ आकार में वृत्ताकार हैं। तुम अपने बचपन के दिनों में शायद सिक्के, चूडी,

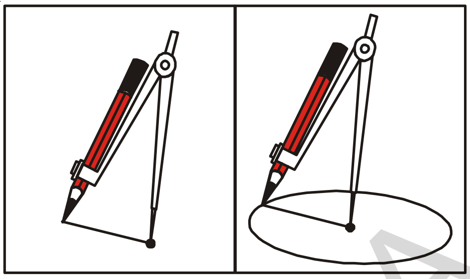
बटन के कोर के साथ-साथ, वृत्त बनाने के लिए बाहरी ओर से रूपरेखा बनायी होगी। इसलिए, क्या तूम बतला सकते हो, वृत्ताकार वस्तुएँ तथा इन वस्तुओं की सहायता से खींचे हुए वृत्तों में क्या अन्तर है? ऊपर की हमने देखी हूई सभी वृत्ताकार वस्तुओं को मोटाई है और ये त्रिविमीय वस्तुएँ हैं जब कि वृत्त द्विविमीय आकृति है जिस में मोटाई नहीं रहती है।

अब, वृत्त का दूसरा उदाहरण लीजिए। शायद तुमने कोल्हू (Oil Press) जो ऑइल मील कहलाती है, (स्पॅनिश व्हील जिसे तेलुगु मे गानुगा कहते है) देखा होगा। आकृति में एक आबद्ध (fined) बिंदु पर एक बैल को आलंम्ब के साथ बंधा हुआ है। क्या तुम मार्ग का आकार पहचानते हो जिस पर बैल गतिमान है? यह आकार में वृत्ताकार है।



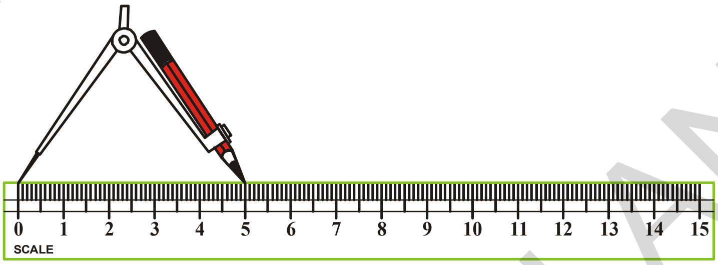
बैल द्वारा बनाई गई सीमा रेखा वृत्त है। कोल्हू एक निश्चित बिंदू पर जमीन के साथ जूडा रहता है, जो वृत्त का केंद्र है। वृत्त के संदर्भ में, आलम्ब की लम्बाई, वृत्त की त्रिज्या होती है। आपके जीवन से वृत्तों के बारेमें कुछ और उदाहरण सोचिए।

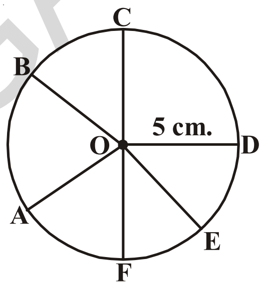
इस अध्याय में हम वृत्त, इससे संबधित पारिभाषिक शब्द, और इसके गुणधर्मों का अभ्यास करेंगे।



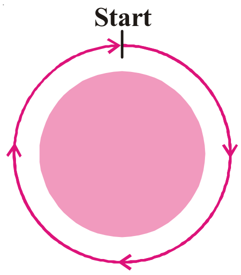
परकार के पेन्सिल होल्डर में पेन्सिल रखिए और स्क्रू या पेंच कसिए। आरेख-कागज पर बिन्दू 'O' चिन्हित कीजिए। 'O'. पर परकार की नुकीला बिन्दू द्दढ रखिए। परकार को बिन्दुपर दृढता से रखते हुए पेन्सिल को कागज पर आकृति में बताये जैसे चारों और घुमाईए ताकि वृत्त प्राप्त हो। यदि हमे, दी हुई त्रिज्या का वृत खींचना आवश्यक है तो स्केल की सहायता से हम यह करते है।

परकार के नुकीले बिंदु और पेन्सिल की नोक में दी हुई त्रिज्या की लम्बाई के बराबर अंतर ठीक कीजिए। बिन्दु 'O'को चिन्हित कीजिए। (आकृति मे वृत की त्रिज्या ५ सेमी है) और ऊपर के वर्णन के अनुसार वृत खींचिए।





वृत्त पर कोई भी 6 बिंदूA, B, C, D, E और F लीजिए. आप देख सकते है कि प्रत्येक रेखाखण्ड OA, OB, OC, OD, OE और OF की सम्बाई 5 से.मी. है., जो दी हुई गिज्या के बराबर है। कुछ और बिंदु, वृत्तपर लीजिए और उन की 'O'. से दूरीयाँ नापिए। तुमने क्या अवलोकर किया? गम कह सकते है कि वृत्त, एक समतल में उन सभी बिन्दुओं का समुह है जो उसी समतल पर स्थित किसी निश्चित बिंदु से किसी निश्चित दूरी पर स्थित होता है।

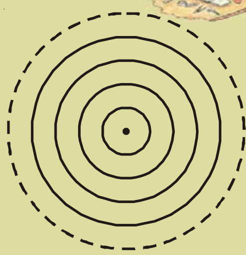


निश्चित बिंदु 'O' वृत्त का केन्द्र कहलाता है और निश्चित दूरी OA, वृत्त की गिज्या (या अर्धव्यास) कहलाती है।

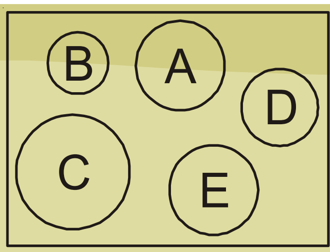
एक वृत्ताकार बगीचे में नरसिम्हा किसी बिंदुसे चलना आरंभ किया और बगीचे के चारों और १ चक्कर पूर्ण किया। नरसिम्हा द्वारा तय की दूरी को तुम क्या कहते हो? यह वृत्ताकार बगीचे के सीमा की कुल लम्बाई है और यह बगीचे की परधि कहलाती है। इसलिए, वृत की कुल लम्बाई को उसकी परिधि कहते है।

क्रिया कलाप

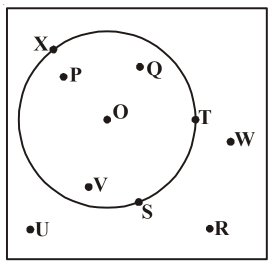
अब हम नीचे दिया हुआ क्रिया कलाप करेंगे। कागज के टुकडे एक बिंदु चिन्हित कीजिए। इस बिंदु को केन्द्र मानते हुए कोई भी अर्धव्यास का एक वृत्त खींचिए। अब अर्धव्यास कम या अधिक करते हुए इसी को केंद्र मानते हुए कुछ और वृत्त बनाईए। इस क्रिया कलाप में प्राप्त वृत्तों को आप क्या कहते है? वृत्त जिनका उभयनिष्ठ केंद्र विभिन्न अर्धव्यास है, संकेन्द्री वृत कहलाते है।



यह कीजिए



1. आकृति में, कौन से वृत्त, वृत्त A. को सर्वांगसम है ?
2. कौनसे माप वत्तों को सर्वांग सम बनाते है?



वृत्त, समतल को, जिसपर वह स्थित है, तीन भागों में विभाजित करता है। वह है (i) वृत के भीतर, जो वृत्त का आन्तरिक भाग कहलाता है। ; (ii) वृत्त पर, यह वृत्त की परिधि कहलाती है और (iii) वृत्त के बाहर जो वृत्त का बाहियभाग कहलाता है। संलग्न आकृति से उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जो वृत्त पर, के भीतर और बाहर है।

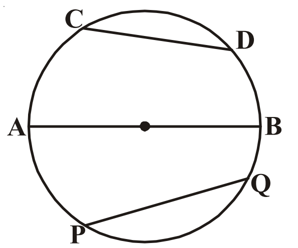
वृत्त और उसका आन्तरिक (अन्तस्थ) मिलकर वृत्ताकार क्षेत्र बनता है।

क्रियाकलाप

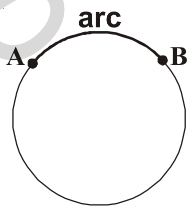
एक पतला वृत्ताकार कागज का टूकडा लीजिए और इसको आधे में मोडिए और खोलिए। पूनः इसे और किसी दूसरे स्थान से आधे में मोडिए और खोलिए। यह क्रिया अनेक बार दोहराईए। अंत में जब आप खोलते है, आप क्या देखोगे।

आप अवलोकर करते है कि सभी चूनत (मोड के निशान) एक ही बिंदुपर प्रतिच्छेद करते हैं। क्या तुम्हे याद है, हम इस बिंदू को क्या कहते है? यह वृत्त का केंदॅ है।

उपर के क्रियाकलाप के यदि हम कागज को किसी भी तरह से, केवल आधे में नहीं, हम देखते है कि चूनत वृत्त पर स्थिति दो बिंदुओं को जोडती है। इन चूनतों को हम वृत्त की ज्याएँ कहते हैं। इसलिए, वृत्त पर स्थित दो बिंदुओं को जोडने वाली रेखा को ज्या कहते है।



लम्बाई में सबसे अधिक जीवा को तुम क्या कहोगे? क्या वह केंद्र से गुजरती है? आकृति देखिए।, CD, AB और PQ वृत्त की जीवाएँ है।

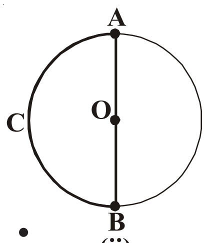


(i)

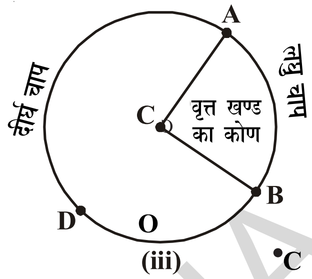
आकृति .(i) में , वृत्त पर A और B दो बिंदु है और वह वृत्त के परिधि को दो भागों में विभाजित करती है। कोई दो बिंदुओं के बीच के वृत्त के भाग को आप चाप कहते है।आकृति (i) AB चाप है और इसे $\overparen{AB}$ निर्देशित करते है।

यदि चाप के अंतिम बिंदु वृत्त के व्यास के अंतिम सिरे हो तब ऐसा चाप अर्धवृत्तार चाप या अर्धवृत कहलाता है। आकृति (ii) $\overparen{ACB}$ में अर्धवृत्त है।

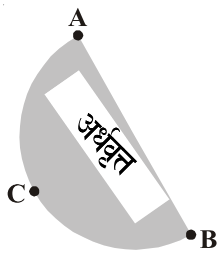
यदि चाप, अर्धवृत से छोटा (कम) हो तो इसे लघुचाप कहते है ओर यदि चाप, अर्धवृत से बडा हो तो इसे दीर्घ चाप कहते है। आकृति(iii) में $\overparen{ACB}$ लघुचाप और $\overparen{ADB}$ दीर्घचाप है।

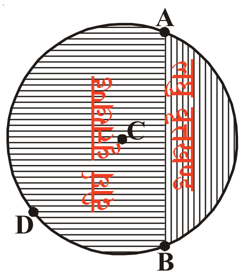


(ii)



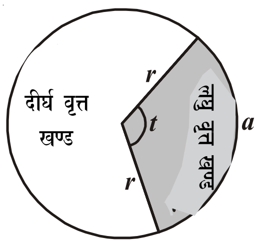
(iii)





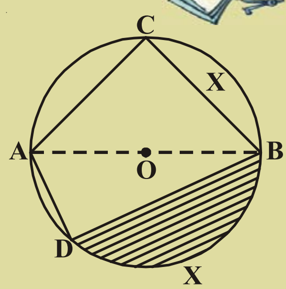
यदि हम किसी के अंतिम बिंदुओं जीवा द्वारा जोड दिया, जीवा वृत को दो भागों में विभाजित करती है। जीवा और लघुचाप के मध्य के क्षेत्र को लघुखण्ड और जीवा और दीर्घचाप के मध्य के क्षेत्र को दीर्घखण्ड कहते है। यदि जीवा, वृत का व्यास हो तब व्यास वृत को दो समान भागों में खण्डों में विभाजजित करता है।

वृत का चाप और केन्द्र से अंतिम बिन्दुओं को जोड़ने वाले दो अर्धव्यास से परविद्ध क्षेत्रफल को वृत्तखण्ड कहते है। एक लघु त्रिज्या खण्ड और दूसरा दीर्घ वृत्तखंड होता है (संलग्न आकृति देखिए)



अभ्यास -12.1

1. संलग्न आकृति में, वृत का केन्द्र 'O' है। इसमें निम्न लिखित क्षेत्र का नाम दीजिए



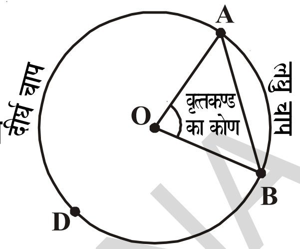
(i) $\overline{AO}$ (ii) $\overline{AB}$ (iii) $\overparen{BC}$

(iv) $\overline{AC}$ (v) $\overparen{DXB}$ (vi) $\overparen{ACB}$

(vii) $\overline{AD}$ ((viii) छायांकित क्षेत्र

2. सही या गलत, बताईए
   i. वृत्त एक समतल, जिस पर वृत स्थित है, को तीन भागों में विभाजति करता है। ( )
   ii. ज्या और लघुचाप से परिबद्ध क्षेत्र को लघु वृत्तखण्ड कहते है। ( )
   iii. ज्या और दीर्घचाप द्वारा घिरे हुए क्षेत्र को दीर्घ वृत्तखण्ड कहते है। ( )
   iv. व्यास, एक वृत को दो असमान भागों विभाजित करता है। ( )
   v. वृत्तखंड यह दो त्रिज्याएं और एक ज्या द्वारा परिवद्ध क्षेत्रफल रहता है ( )
   vi. वृत्त की सभी ज्याओं में अधिक लम्बाई की ज्या, व्यास कहलाती है। ( )
   vii. वृत्त के किसी भी व्यास का मध्यबिंदु, केंद्र रहता है । ( )

12.2 वृत्त पर स्थित किसी बिंदु पर ज्या द्वारा बना हुआ कोण
(Angle Subtended by a chord at a point on the circles)

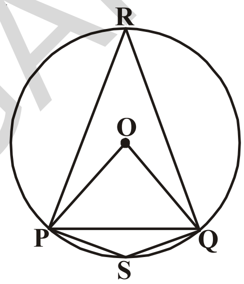


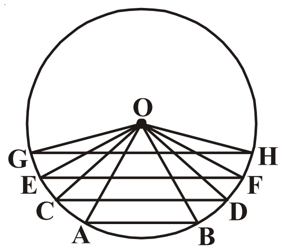
माना कि 'O' केन्द्र के वृत्त पर A,B कोई दो बिंदु है। AO और BO मिलाईए। $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ द्वारा केन्द्र 'O'पर बना कोण अर्थात $\angle AOB$ यह केंद्र 'O' पर जीवा $\overline{AB}$ द्वारा बना हुआकोण कहलाता है।

आकृति में $\angle POQ$, $\angle PSQ$ और $\angle PRQ$ कोणों को तुम क्या नाम देंगे ?

i. जीवा PQ द्वारा केंद्र 'O'पर बना हुआ कोण $\angle POQ$ हैं।

ii. जीवा PQ द्वारा लघुचाप और दीर्घचाप पर स्थित बिंदु S और R पर बने हुए कोण क्रमशः $\angle PSQ$ और $\angle PRQ$ हैं।





आकृति में, वृत्त का केंद्र O और AB, CD, EF और GH वृत्त की ज्या हैं।

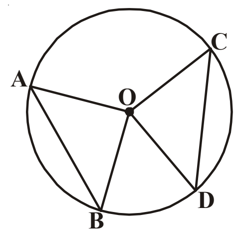
आकृति से हम अवलोकन कर सकते है कि GH > EF > CD > AB.

अब इन ज्या द्वारा केंद्र पर बने हुए कोणों के बारे में तुम क्या हते हो?

कोणों का अवलोकन करने पर, तुम्हे ज्ञात होगा कि वृत्त के केंद्र पर ज्या द्वारा बने हुए कोण बढ़ते है जैसे ज्या की लम्बाई बढ़ती है।

इसलिए, अब सोचिए, यदि, वृत्त की दो बराबर ज्या ली गई और वृत्त के केंद्र पर इन के द्वारा बने हुए कोण कैसे होंगे?

एक वृत्त का निर्माण कीजिए जिसका केंद्र 'O' है। परकार और पटरी की सहायता से दो बराबर ज्या AB और CD खींचिए।



केंद्र 'O' के साथ A, B और C, D मिलाईए। अब कोण $\angle AOB$ और $\angle COD$ मापिए। क्या वह एक दूसरे के बराबर है ? वृत्त की दो अथवा अधकि ज्याएँजो बराबर है, खींचिए और उनके द्वारा केंद्र पर बने कोणों को मापिए।

तुम्हे ज्ञात होगा कि केंद्र पर उनके द्वारा बने हुए कोण बराबर हैं।

इस तथ्य को सिद्ध करने की कोशिश करते है।

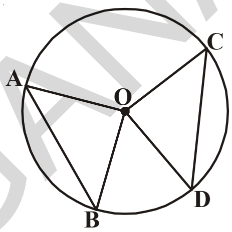
प्रमेय-12.1 वृत्त की समान ज्या केंद्र पर समान कोण बनाते है।

दिया है : माना कि वृत्त का केंद्र 'O' $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ दो समान जीवाएं है और $\angle AOB$ और $\angle COD$ कोण ज्याओं द्वारा केंद्र पर बने हुए कोण है।

सिद्ध करना है: $\angle AOB \cong \angle COD$

रचना: : प्रत्येक ज्या के अंतिम सिरों को केंद्र के साथ जोड़िए और तुम्हे दो त्रिभुज ΔAOB और ΔCOD प्राप्त होंगे।

उपपत्ति: AOB और COD में



AB = CD (दिया है)

OA = OC (एक ही वृत्त के अर्धव्यास)

OB = OD (एक ही वृत्त के अर्धव्यास)

इसलिए $\Delta AOB \cong \Delta COD$(भुजा भुजा भुजा नियम)

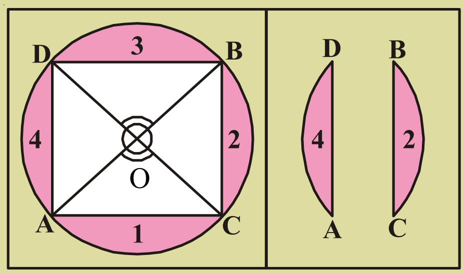
इस तरह, $\angle AOB \cong \angle COD$ (सर्वाग सम त्रिभुजों के सगत भाग)

नोट : "अनुरूप त्रिभुजों के संगत भाग" के स्थान पर हम C.P.C.T. का उपयोग करेंगे। ऊपर के प्रमेय में, यदि वृत्त में, दो ज्याएँ केंद्र पर समान कोण बनाते हैं,

ज्या के बारे में तुम क्या कह सकते हो? निम्न क्रिया कलाप द्वारा हम इसकी जांच-पड़ताल करते है।

क्रियाकलाप

एक वृत्तकार कागज लीजिए। इसे किसी भी व्यास के साथ-साथ इस प्रकार मोडिए कि दो किनारे एक दूसरे के साथ संपाती होते है। अब इसे खोलिए। पूनः इसे दूसरे व्यास के साथ मोडिए। खोलने पर, हमें दिखाई देगा कि दोनों व्यास केंद्र 'O' पर मिलते हैं। यहाँ पर दो शीर्षाभिमुख कोणों के युग्म बनते है जो बराबर होते है। व्यास के अंतिम सिरों को A, B, C और D नाम दीजिए। जीवाएं , , $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ और $\overline{AD}$ खींचिए।



अब, चार खण्ड 1, 2, 3,4 को काटकर उन्हे अलग से लीजिए।

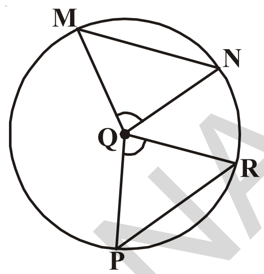
यदि तुम इन खण्डों को युग्मों में एक के ऊपर दूसरा रखिए। यूग्म (1,3) और (2,4) के किनारे एक दूसरे के साथ मेंल खाते है।

क्या $\overline{AD} = \overline{BC}$ और $\overline{AC} = \overline{BD}$?

यद्यपि इस विषय स्थिति में तुमने देखा है, दूसरे समान कोणों के लिए भी कोशिश कीजिए। सभी जीवाएं, बराबर रहती है इसका कारण है नीचे दिया प्रमेय। इसे हम प्रमेय रुप में सिध्द करेंगे।

ऊपर के प्रमेय के विलोम के बारे में क्या कह सकते है?

प्रमेय-12.2 : यदि वृत्त के केंद्र पर, उसके ज्याओं द्वारा बने हुए कोण बराबर हो तब ज्याएँ बराबर होती है।



यह, पूर्व प्रमेय का विलोम है

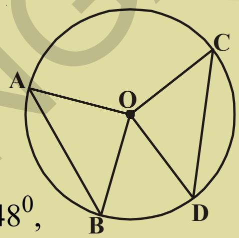
दिए हुए प्रमेय में $\angle PQR = \angle MQN$, तब

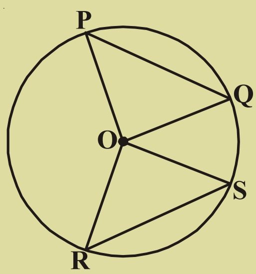
$\Delta PQR \cong \Delta MQN$ (क्यों?)

Is $PR = MN$? (जाँच कीजिए)

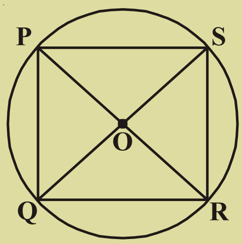
अभ्यास-12.2

1. आकृति में, यदि $AB = CD$ और $\angle AOB = 90^0$, $\angle COD$ ज्ञात कीजिए।





2. आकृति में, $PQ = RS$ और $\angle ORS = 48^0$, $\angle OPQ$ और $\angle ROS$ ज्ञात कीजिए

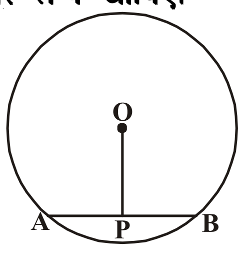


3. आकृति में PR और QS दो व्यास है । क्या $PQ = RS$?

12.3 केंद्र से ज्या पर लम्ब (Perpendicular from the center on the chord)

कार्य विधि:

- **केंद्र O का वृत्त बनाईए। जीवा $\overline{AB}$ खींचिए और 'O'से जीवा $\overline{AB}$ पर लम्ब खींचिए।**
- **माना कि $\overline{AB}$ पर लम्ब का प्रतिच्छेद बिंदु P है ।**
- **PA और PB को नापने के बाद पता चलेगा कि PA = PB**



प्रमेय-12.3 : यदि किसी वृत्त के केंद्र से ज्या पर लम्ब डाला गया तो वह जीवा को बराबर भागों में विभाजित करता है।

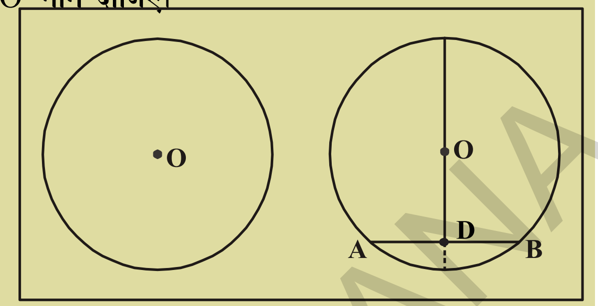
O से A और B को मिलाने के बाद सिद्ध कीजिए कि $\Delta OPA \cong \Delta OPB$।इस की उपपत्ति अपने-आप लिखिए।

इस प्रमेय का विलोम क्या है?

"वृत्त के ज्या के मध्यबिंदु से वृत्त के केंद्र को मिलाने वाली सरल रेखा ज्या पर लम्ब होती है।"

क्रियाकलाप

एक वृत्ताकार कागज लीजिए और केंद्र को 'O' नाम दीजिए।

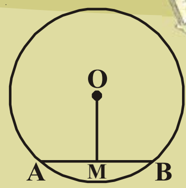


इसे दो असमान भागों में मोडिए और खोलिए। माना कि यूनट, जीवा AB को निर्देशित करती है। अब और एक बार इस प्रकार मोडिए कि A,B के साथ संपाती हो। दो यूनटों का प्रतिच्छेद बिंड D लीजिए। क्या AD = DB? $\angle ODA$ = ? $\angle ODB$ = ?यूनटों के बीच का कोण मापिए। ये समकोण हैं। इसलिए, हम एक प्रावक्कल्पना कर सकते हैं, "वृत्त के जीवा के मध्यबिंदु से वृत्त के केंद्र को मिलाने वाली सरल रेखा जीवा पर लम्ब होती है।"

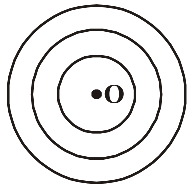
यह कीजिए

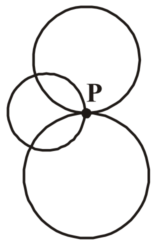
किसी वृत्त केंद्र 'O', जीवा $\overline{AB}$ का मध्य बिंदु 'M' है। अब सिद्ध कीजिए कि AB पर लम्ब है।

(**संकेत :** OA और OB मिलाइए। त्रिभुज OAM और OBM को ध्यानपूर्वक देखिए।)

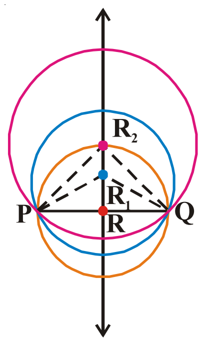


12.3.1 तीन बिंदु जो वृत्त का विवरण देते



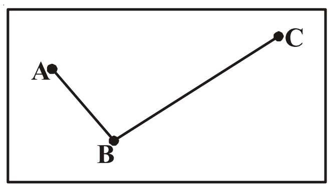


माना कि समतल पर 'O' बिंदु है। केंद्र 'O' से हम कितने वृत्त बना सकते है ? जितने हम चाहते है उतने वृत्त हम बना सकते हैं। हमने इससे पहले सिखा है कि ये वृत्त संकेंद्री वृत्त है। यदि वृत्त के केंद्र के अलावा कोई दूसरा बिंदु 'P' हो तो P से भी हम बहुत वृत्त खींच सकते है। मान लीजिए, बिंदु **P** और **Q** दो भिन्न बिंदु है।

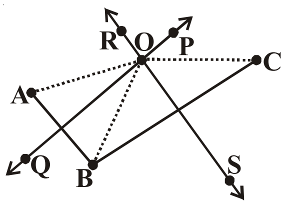


दो बिंदुओं से गुजरने वाले कितने वृत खिंचे जा सकते हैं? हम देखते है कि P और Q से गुजरनेवाले अनेक वृत्त खिंचे जा सकते है ?

P और Q मिलाइए। PQ का लम्ब समद्विभाजक खींचिए। तीन बिंदु R, R_1 और R_2 लम्बद्विभाजक पर लीजिए । ओर R, R_1,और R_2 को केंद्र मानकर क्रमशः RP, R_1P और R_2 अर्धव्यास लेकर वृत्त बनाईए । क्या ये वृत, Q से भी गुजरते है ? (क्यों?) रेखा के लंब समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिन्दु उसके अंतिम बिन्दु से समान दूरी पर स्थित होते है। वृत्त का केन्द्र ज्या के किसी भी लंब पर स्थित होता है।



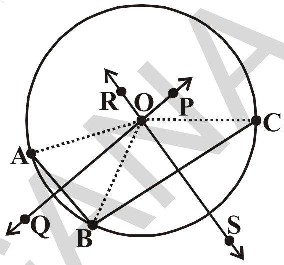
यदि तीन अ-संरेखी बिंदु दिये है, तब इन से गुजरने वाले कितने वृत्त बना सकते है? इसका परीक्षण कीजिए। कोई तीन अ-संरेखी बिंदु A, B, C लीजिए । AB और BC मिलाइए ।



$\overline{AB}$ और $\overline{BC}$ पर क्रमशः दो लम्ब समद्विभाजक $\overleftrightarrow{PQ}$ और $\overleftrightarrow{RS}$ खींचिए। दोनों रेखाएं बिंदु 'O' पर प्रतिच्छेद करती है।(चूंकी दो रेखाओं का एक से अधिक बिंदु उभयनिष्ठ नहीं रहता है।)

अब , $\overline{AB}$ के लम्बद्विभाजक पर बिंदु O स्थित है। इसलिए OA = OB. .....(i)

क्योंकि $\overleftrightarrow{PQ}$ पर स्थित प्रत्येक बिंदु A और B से समान दूरी पर रहते है।



इसी तरह बिंदु 'O' , $\overline{BC}$ के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित है

इसलिए OB = OC ..... (ii)

समीकरण (i) और (ii) से, हम कह सकते है कि

OA = OB = OC (संक्रमण नियम)

इसलिए, केवल 'O' एक ऐसा बिंदु है जो A, B और C बिन्दुओं से समान दरी पर रहता है। अतः यदि O को केंद्र मानकर OA त्रिज्या से वृत बनाए तो वह B और C से गुजरता है। अर्थात A, B और C से गुजरने वाला केवल एक ही वृत्त रहता है।

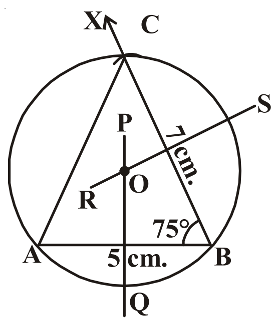
ऊपर के निरीक्षण पर आधारित प्राक्कल्पना है,"तीन अ-संरेखी बिंदुओं से गुजरने वाला केवल एक ही वृत्त बना सकते है।"

नोट : यदि हम AC मिलाए, तो त्रिभुज ABC बनता है। इसके सभी शीर्ष वृत पर स्थित है। यह वृत्त त्रिभुज का परिवृत कहलाता है । 'O' परि केंद्र और त्रिज्या OA या OB या OC परि त्रिज्या कहलाती है।

यह कीजिए

यदि तीन बिंदु संरेखी है, तब इन बिंदुओं से गुजरने वाले कितने त्रिभुज बनाए जा सकते है ? अब, ये तीन बिंदुओं से गुजरने वाला वृत्त बनाने की कोशिश करते है ।

उदाहरण-1 त्रिभुज ABC का परिवृत्त बनाइए जहाँ AB = 5से.मी; $\angle B = 75^0$ और BC = 7से.मी



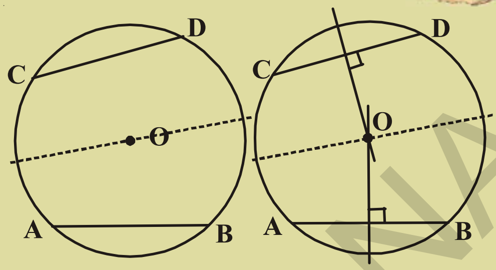
हल: AB= 5 से.मी रेखाखण्ड खींचिए । B पर BX इस प्रकार खींचिए की $\angle B = 75^0$, B को केन्द्र मानवुर 7 से.मी अर्धव्यास से $\overrightarrow{BX}$ को C पर काटने वाला चाप खींचिए । ΔABC बनाने के लिए CA मिलाइए। $\overline{AB}$ और $\overline{BC}$ के लम्ब समद्विभाजक क्रमशः $\overleftrightarrow{PQ}$ और $\overleftrightarrow{RS}$ खींचिए । $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{RS}$ रेखाएं 'O' पर प्रतिच्छेद करती है ।'O' को केंद्र मानते हुए, OA अर्धव्यास से एक वृत्त बनाइए जो B और C से भी गुजरता है। यह अभीष्ट परिवृत है।

12.3.2 ज्याएँ और उनकी वृत्त के क्रेद्र से दूरी

एक वृत्त में अनंत ज्याएँ हो सकती है। माना कि, हमने वृत्त में बराबर लम्बाई वाली अनेक ज्याएँ बनाई तब इन बराबर लम्बाई वाली ज्याओं के केंद्र से दूरी क्या होगी ? निम्न क्रियाकलाप से इसकी हम जांच करते है।

क्रियाकलाप

कागज पर एक बड़ा वृत्त बनाइए और इसको काट कर लीजिए। इसके केंद्र को 'O' नाम दीजिए। इसे आधे में मोडिए। अब अर्धवृतावर कोर के पास ओर एक बार मोडिए। अब इसे खोलिए। तुम्हे दो सर्वागसम ज्याओं के वलन दिखाई देंगे । इन्हे AB और CD से नामांकित कीजिए। अब इनके लिए 'O' से गुजरनेवाले लम्ब वलन बनाइए। विभाजक का उपयोग करते हुए केंद्र से इन परिवाओं की लम्ब दूरी की तुलना कीजिए।

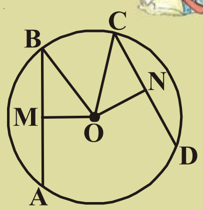


ऊपर का क्रियाकलाप, सर्वसमान ज्याओं को मोडकर, दोहराइए। प्राक्कल्पना जैसे तुम्हारे निरीक्षण को कथन कीजिए।

"वृत्त में सर्वसमान ज्याएँ, वृत्त के केंद्र से समानदूरी पर रहती है ।"

यह कीजिए

आकृति में, वृत का केंद्र O है और AB = CD । रेखा $\overline{AB}$ पर लम्ब OM और $\overline{CD}$ पर लम्ब $\overline{ON}$ है। सिद्ध कीजिए कि OM = ON



क्योंकि ऊपर की प्राक्कल्पना तर्क से सिद्ध की गई है, यह प्रमेय बनता हैं बराबर लम्बाई की जीवाएं वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ रहती है।

उदाहरण-2 आकृति में, वृत्त का केंद्र O हैं। CD की लम्बाई ज्ञात कीजिए यदि AB = 5 से.मी

हल : Δ AOB और Δ COD में,

OA = OC (क्यों ?)

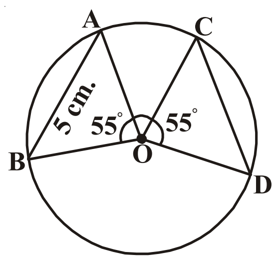
OB = OD (क्यों?)

$\angle$AOB = $\angle$COD

$\therefore$ Δ AOB $\cong$ Δ COD

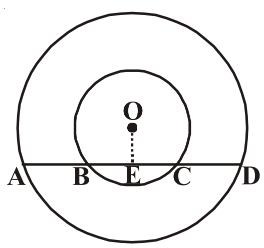
$\because$ AB = CD (सर्वाग सम त्रिभुज के संगत भाग)

$\therefore$ AB = 5 से.मी तब CD = 5 से.मी



उदाहरण-3 संलग्न आकृति में, दो संकेद्री वृत्त है, जिनका केंन्द्र 'O' है। बड़े वृत्त की जीवा AD , छोटे वृत्त को B और C पर प्रतिच्छेद करती है। बताइए कि AB = CD

दिया हैः दो से केंद्री वृत्तों का केन्द्र 'O' है । बडे वृत्त की जीवा $\overline{AD}$ है। $\overline{AD}$ ज्या छोटे वृत्त को B और C पर प्रतिच्छेद करती है।.



सिद्ध करना है: AB = CD

रचना : $\overline{AD}$ पर लम्ब $\overline{OE}$ खींचिए।

उपपत्ति : 'O'केंद्र के बडे वृत्त की ज्या AD है और $\overline{AD}$ पर लम्ब $\overline{OE}$ है ।

$\because$ $\overline{OE}$ रेखा $\overline{AD}$ को समद्विभाजित करती है (वृत्त के केन्द्र से ज्या पर खींचा गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है।)

$\therefore$ AE = ED ..... (i)

'O' केंद्र के छोटे वृत्त की ज्या $\overline{BC}$ है और $\overline{BC}$ पर लम्ब $\overline{OE}$ है।

$\because$ $\overline{OE}$ से $\overline{BC}$ को समद्विभाजित करती है।(उसी प्रमेय से)

$\therefore$ BE = CE ..... (ii)

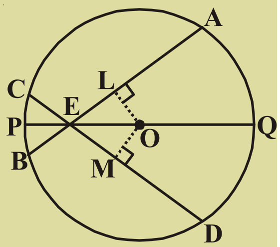
(i) से (ii) समीकरण को घटाने पर, हमें प्राप्त होगा

AE - BE = ED - EC

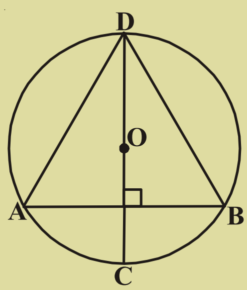
AB = CD

अभ्यास

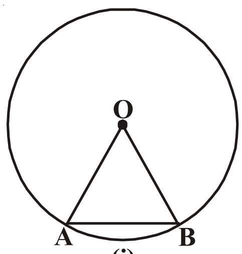
1. निम्नलिखित त्रिभुज बनाइए और इसके लिए परिवृत्त बनाइए।
   (i) ABC में, AB = 6से.मी, BC = 7से.मी. और $\angle A = 60^{o}$
   (ii) Δ PQR में, PQ = 5से.मी, QR = 6से.मी.और RP = 8.2से.मी
   (iii) Δ XYZ में, XY = 4.8से.मी, $\angle X = 60^{o}$ और $\angle Y = 70^{o}$
2. A, B से गुजरने वाले दो वृत्त बनाइए जहाँ AB = 5.4से.मी
3. यदि दो वृत्त, दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते है तो सिद्ध कीजिए कि उनके केंद्र, उभयनिष्ट ज्या के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित रहते है।



4. यदि वृत्त की दो प्रतिच्छेदी ज्याएँ, उनके प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाले व्यास के साथ समान कोण बनाते है, तो सिद्ध कीजिए कि ज्याएँ समान रहती है।
5. संलग्न आकृति में, वृत्त का केंद्र O और ज्या AB है। CD व्यास है जो ABपर लम्ब है। तो बताइए कि AD = BD



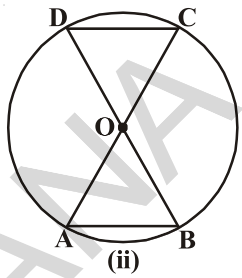
12.4 वृत्त के चाप द्वारा बना हुआ कोण



(i)

आकृति (i) में, $\overline{AB}$ ज्या है और $\overset{\frown}{AB}$ चाप (लघु चाप) है। ज्या और चाप के अंतिम बिंदु एक समान अर्थात A और B है।

इसलिए, केंद्र 'O' पर ज्या द्वारा बना हुआ कोण, केंद्र 'O' पर चाप द्वारा बना हुए कोण, वही रहता है।



(ii)

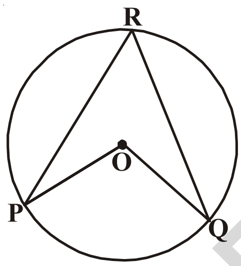
आकृति(ii) में, केंद्र 'O'के वृत्त की $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ दो जीवाएं है। यदि AB = CD, तब $\angle AOB = \angle COD$

इसलिए हम कह सकते कि चाप $\overset{\frown}{AB}$ द्वारा केंद्र पर बना हुआ कोण और चाप $\overset{\frown}{CD}$ द्वारा केंद्र पर बना हुआ कोण बराबर रहता है (सिद्ध कीजिए $\Delta AOB \cong \Delta DOC$)

ऊपर के निरीक्षणों से हम निष्कर्ष ले सकते है कि "**एक वृत्त में या सर्वसमान वृत्तों में बराबर लम्बाई के चाप केंद्र पर बराबर कोण बनाते है।**"

$\therefore$ **चाप द्वारा केन्द्र पर बनने वाले कोण को उस चाप का माप कहा जाता है।**

12.4.1 किसी चाप द्वारा, वृत के शेष भाग पर स्थित बिंदु पर बना हुआ कोण

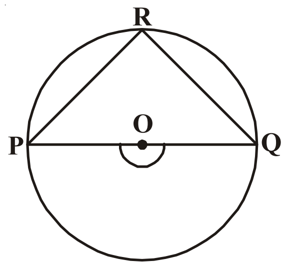


(i)

माना कि, वृत्त का केंद्र 'O' है।

आकृति (i) में $\overset{\frown}{PQ}$ लघुचाप है, आकृति (ii) में अर्धवृत्त है और आकृति (iii) में दीर्घ चाप है।

वृत्त की परिधि पर कोई भी बिंदु R लीजिए। R को P और Q के साथ जोडिए।

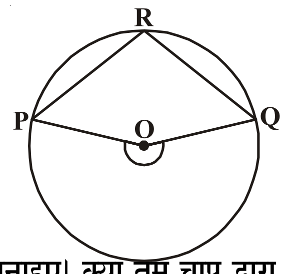


(ii)

चाप PQ द्वारा बिंदु R पर बना हुआ कोण$\angle PRQ$ और केंद्र 'O' पर बना हुआ कोण $\angle POQ$ है।

दि गई आकृतियों के लिए निम्न साराणी पूर्ण कीजिए

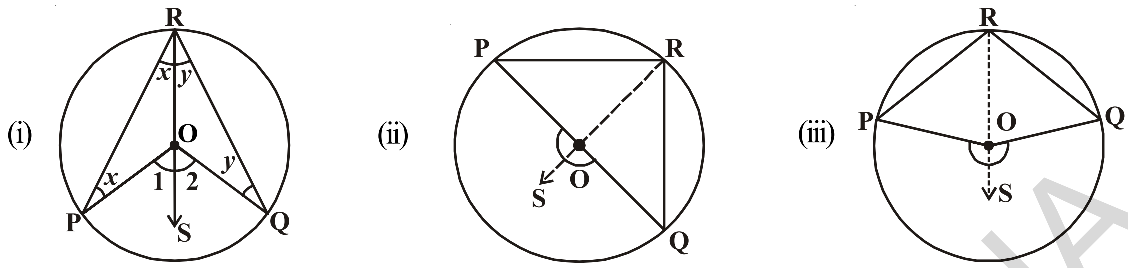
कोण	आकृति (i)	आकृति (ii)	आकृति (iii)
$\angle PRQ$			
$\angle POQ$			



(iii)

इसी तरह कुछ वृत्त बनाइए और चापों द्वारा परिधि पर और केंद्र पर कोण बनाइए। क्या तुम चाप द्वारा वृत पर स्थित बिंदु पर बना हुआ कोण और केंद्र पर बने हुए कोणों के बारे में अनुमान लगा सकते हो ? इसलिए ऊपर के निरीक्षण द्वारा हम कह सकते है कि चाप द्वारा केंद्र '*O*' बना हुआ कोण, वृत के शेष भाग चाप पर स्थित बिंदु पर बने हुए कोण के दुगुणा रहता है।

अब यह अनुमान तार्किक ढंग से सिद्ध करते है।



दिया है: माना कि वृत्त का केंद्र O है।

$\overset{\frown}{PQ}$ चाप है जो केंद्र पर $\angle POQ$ बनाता है।

माना कि वृत्त के शेष भाग पर ($\overset{\frown}{PQ}$ पर नहीं) बिंदु R है।

उपपत्ति:यहाँ तीन भिन्न-भिन्न स्थितियाँ है जिसमें (i) $\overset{\frown}{PQ}$ लघुचाप है, (ii) $\overset{\frown}{PQ}$ अर्धवृत्त है और (iii) $\overset{\frown}{PQ}$ दीर्घचाप है।

अब हम बिंदू R को केंद्र 'O' के साथ जोड़ने द्वारा शुरू करते है और इसे बिंदु S तक बढ़ाइए।(सभी स्थितियों में)

सभी स्थितियों के लिए, Δ ROP

RO = OP (एक ही वृत्त की त्रिज्याएं)

इसलिए $\angle ORP = \angle OPR$ (समद्विबाहु त्रिभुज के समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते है।)

Δ ROP का बाह्यकोण $\angle POS$ है।

(रचना)

$\angle POS = \angle ORP + \angle OPR = 2\,\angle ORP$ ..... (1)

($\because$ बाह्यकोण = दो अंतः कोणों का योग)

इसी प्रकार ΔROQ के लिए

$\angle SOQ = \angle ORQ + \angle OQR$ or $2\,\angle ORQ$ ..... (2)

($\because$ बाह्यकोण, दो अंतः कोणों के योग के समान रहता है।)

(1) और (2) से

$\angle POS + \angle SOQ = 2\,(\angle ORP + \angle ORQ)$

यह $\angle POQ = 2\,\angle QRP$ ..... (3)

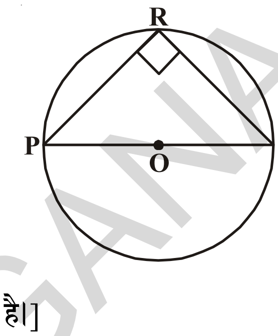
सुविधा के लिए
माना कि $\angle ORP = \angle OPR = x$
$\angle POS = \angle 1$
$\angle 1 = x + x = 2x$
माना कि $\angle ORQ = \angle OQR = y$
$\angle SOQ = \angle 2$
$\angle 2 = y + y = 2y$
अब $\angle POQ = \angle 1 + \angle 2 = 2x + 2y$
$= 2\,(x+y) = 2\,(\angle PRO + \angle ORQ)$
अर्थात $\angle POQ = 2\,\angle PRQ$

अतः प्रमेय होगा : वृत्त के चाप द्वारा केंद्र पर बना हुआ कोण, वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी भी बिंदु पर इसके द्वारा बने हुए कोण के दुगुणा होता है।

उदाहरण-4 मान लीजिए, वृत्त का केंद्र 'O', व्यास PQ है तो सिद्ध कीजिए कि $\angle PRQ = 90^o$

अथवा

सिद्ध कीजिए कि अर्धवृत्त द्वारा बना हुआ कोण 90^o रहता है।



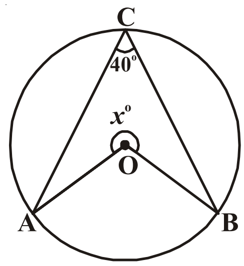
हल: दिया है कि वृत्त का व्यास PQ और केंद्र 'O' है।

$\therefore \angle POQ = 180^o$ [सरल रेखा पर बना हुआ कोण]

और $\angle POQ = 2\angle PRQ$ [चाप द्वारा केंद्र पर बना हुआ कोण, वृत पर स्थित किसी दूसरे बिंदु पर बने हुए कोण के दुगुणा रहता है।]

$$\therefore \angle PRQ = \frac{180^o}{2} = 90^o$$

उदाहरण-5 संलग्न आकृति में x° का मान ज्ञात कीजिए।



हल: Given $\angle ACB = 40^\circ$

$\angle AOB = 2\angle ACB = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$

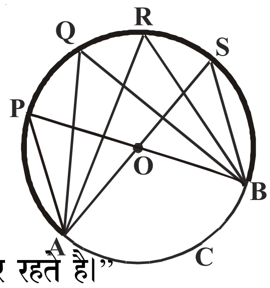
$\because \quad x^\circ + \angle AOB = 360^\circ$

इसलिए $x^\circ = 360^\circ - 80^\circ = 280^\circ$

12.4.2 एक ही वृत्तखण्ड में बने हुए कोण (Angles in the Same Sector)

अब हम वृत्त के एक ही वृत्तखण्ड में चाप द्वारा बने हुए कोणों के मापों की चर्चा करेंगे।

मान लीजिए, वृत का केंद्र 'O' और लघुचाप AB (आकृति देखिए) है। माना कि वृत के शेष भाग अर्थात दीर्घचाप AB पर P, Q, R और S बिंदु है। अब चाप AB के अंतिम बिंदुओं को P, Q, R और S के साथ जोडिए ताकि कोण $\angle APB$, $\angle AQB$, $\angle ARB$ और $\angle ASB$ बने।



$\because \quad \angle AOB = 2\angle APB$ (क्यों ?)

$\angle AOB = 2\angle AQB$ (क्यों ?)

$\angle AOB = 2\angle ARB$ (क्यों ?)

$\angle AOB = 2\angle ASB$ (क्यों ?)

इसलिए $\angle APB = \angle AQB = \angle ARB = \angle ASB$

ध्यान दीजिए कि "चाप द्वारा वृत्त के एक ही वृत्त खण्ड में बने हुए कोण बराबर रहते है।"

नोटः ऊपर की चर्चा में हमने देखा है कि बिंदु P, Q, R, S और A, B एक ही वृत्त पर स्थित है। तुम उन्हें क्या कहेंगे ? "बिंदु जो एक ही वृत्त पर स्थित है, एक वृत्तीय कहलाते है।".

ऊपर के प्रमेय का विलोम निम्न प्रकार से कथन कर सकते हैः-

प्रमेय-12.4 : यदि दो बिंदुओं को जोडने वाला कोई रेखाखण्ड अपने एक ही ओर स्थित किन्ही दो बिंदुओं पर समान कोण निर्मित करें तो चारों बिंदु एक ही वृत्त पर (एक वृत्तीय) होते है।

इस परिणाम की सत्यता तुम नीचे देखोगे।

दिया हैः ABको जोडने वाला रेखाखण्ड $\overline{AB}$ के एक ही ओर बने दो कोण $\angle ACB$ और $\angle ADB$ समान है।

सिद्ध करना हैः A, B, C और D एक वृत्तीय है अर्थात एक ही वृत्त पर स्थित है।

रचनाः तीन असरेखी बिंदु A, B और C से होकर जानेवाला एक वृत्त खींचिए।

उपपत्तिः माना कि बिंदु 'D' वृत्त पर नहीं है।

तब एक ओर बिंदु 'E' इस प्रकार हो सकता है कि

वह AD को (अथवा बढाए गए AD को) प्रतिच्छेद करता है।

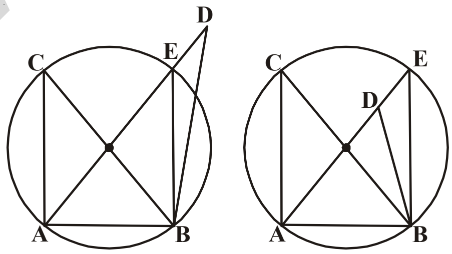
यदि A, B, C और E बिंदु वृत पर स्थित हो तो

$\angle ACB = \angle AEB$ (क्यों ?)

दिया है कि $\angle ACB = \angle ADB$.

इसलिए $\angle AEB = \angle ADB$

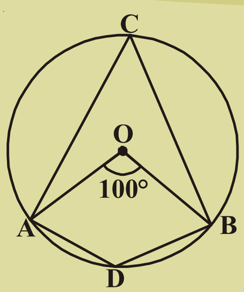
यह तभी संभव है जब बिंदु E और D संपाती हो (क्यों?) **अभ्यास-**12.4

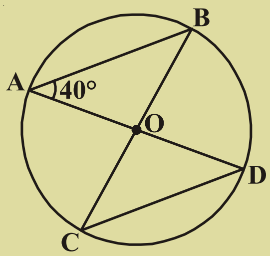


अभ्यास-12.4

1. आकृत्ति में, वृत्त का केंद्र 'O' है।

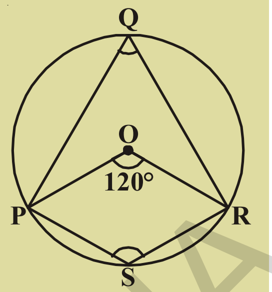
$\angle AOB = 100^\circ$ find $\angle ADB$

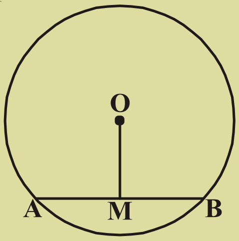




2. आकृत्ति में, $\angle BAD = 40^\circ$ तो $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए।

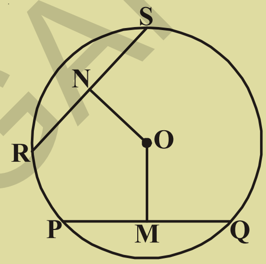
3. आकृति में, वृत्त का केंद्र O है और $\angle POR = 120^\circ$, $\angle PQR$ और $\angle PSR$ ज्ञात कीजिए।

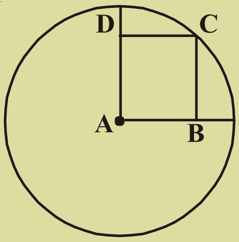




4. आकृति में, वृत्त का केंद्र 'O' है। OM = 3से.मी. और AB = 8से.मी वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

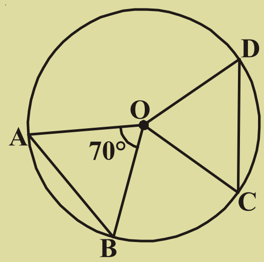
5. आकृति में, वृत्त का केंद्र 'O'है। केंद्र से ज्याओं PQ और RS पर क्रमशः OM, ON लम्ब है। यदि OM = ON और PQ = 6से.मी RS बताइए।





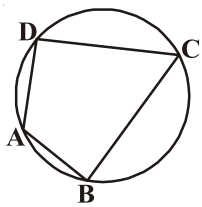
6. वृत्त का केंद्र A है और ABCD वर्ग है। यदि BD = 4से.मी तब वृत्त का अर्धव्यास ज्ञात कीजिए।

7. किसी भी अर्धव्यास का वृत्त बनाइए और तदन्तर केंद्र से समान दूरी पर दो जीवाएँ खींचिए।



8. दी हुई आकृति में, वृत्त का केंद्र 'O' है। AB और CD समान ज्याएँ है। यदि $\angle AOB = 70^\circ$, तो ΔOCD के कोण बताइए।

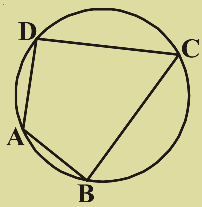
12.5 **चक्रीय चतुर्भुज** (Cyclic Quadrilateral)



आवृत्ति में, चतुर्भुज के शीर्ष A, B, C और D एक ही वृत्त पर स्थित हैं। इस प्रकार के चतुर्भुज ABCD को चक्रीय चतुर्भुज कहते है।**क्रियाकलाप**

क्रियाकलाप

एक वृत्तकार कागज लीजिए। कागज के परिधि पर A, B, C और D चार बिंदुओं को चिन्हित कीजिए। चक्रीय चतुर्भुज बनाइए और कोणों को नापिए। सारणी में लिखिए। तीन बार इसी क्रिया कलाप को दोहराइए

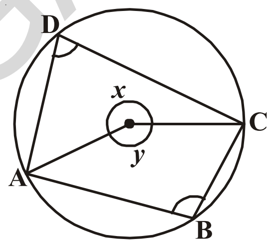


क्रम संख्या	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A+\angle C$	$\angle B+\angle D$
1						
2						
3						
4						

सारणी से तुम क्या निष्कर्ष निकालते हो?

प्रमेय-12.5 : "किसी चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के युग्म सम्पूरक होते है।".

दिया है : ABCD चक्रीय चतुर्भुज है।.



सिद्ध करना है: $\angle A + \angle C = 180°$

$\angle B + \angle D = 180°$

उपपत्ति : $\angle D = \frac{1}{2}\angle y$ (क्यों ?) ..... (i)

$\angle B = \frac{1}{2}\angle x$ (क्यों ?) ..... (ii)

(i) और (ii) जोडने पर

$\angle D + \angle B = \frac{1}{2}\angle y + \frac{1}{2}\angle x$

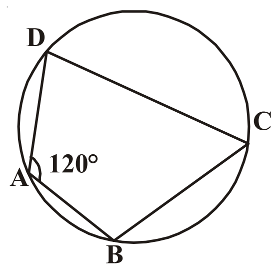
$\angle D + \angle B = \frac{1}{2}(\angle y + \angle x)$

$\angle B + \angle D = \frac{1}{2} \times 360°$

$\angle B + \angle D = 180°$

इसी प्रकार $\angle A + \angle C = 180°$

उदाहरण-6 आकृति में, $\angle A = 120^{\circ}$ तो $\angle C$ ज्ञात कीजिए ?



हल: ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

इसलिए $\angle A + \angle C = 180^{\circ}$

$120^0 + \angle C = 180^{\circ}$

इसलिए $\angle C = 180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$

ऊपर के प्रमेय का विलोम क्या है ?

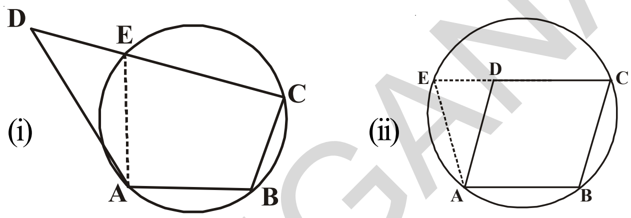
"यदि चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी युग्म का योगफल 180^0 हो तो वह चक्रीय चतुर्भुज होता है" विलोम भी सही है।

प्रमेय-12.6 : यदि चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी युग्म का योगफल 180^o हो तो वह चक्रीय चतुर्भुज होता है।

दिया है: माना कि ABCD चतुर्भुज होता है कि

$\angle ABC + \angle ADC = 180^o$

$\angle DAB + \angle BCD = 180^o$



सिद्ध करना है: ABCD चक्रीय चतुर्भुज है

रचना: तीन अ-संरेख बिंदु A, B और C से गुजरने वाला वृत्त बनाइए। यदि यह D से गुजरता है, प्रमेय सिद्ध हुआ क्योंकि A, B, C और D एक वृत्तीय है। यदि वृत्त D से नहीं गुजरता है, यह $\overline{CD}$ को प्रतिच्छेद करता है [आकृति (i)] अथवा बढाई हुई $\overline{CD}$ को E पर प्रतिच्छेद करती है [आकृति (ii)]

$\overline{AE}$ को मिलाओं

उपपत्ति: ABCE चक्रीय चतुर्भुज है (रचना)

$\angle AEC + \angle ABC = 180^o$ [चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग]

परन्तु $\angle ABC + \angle ADC = 180^o$ Given

$\therefore \angle AEC + \angle ABC = \angle ABC + \angle ADC \Rightarrow \angle AEC = \angle ADC$

परन्तु इनमें से एक ΔADE का बाह्य कोण है और दूसरा अंतः कोण है।

हम जानते है कि त्रिभुज का बाह्यकोण हमेशा दो अंतःकोण से अधिक रहता है।

$\therefore \angle AEC = \angle ADC$ जो असंगत है।

इसलिए हमारी अभिधारणा A, B और C से गुजरने वाला वृत्त D से नही गुजरता है, गलत है।.

$\therefore$ A, B, C से गुरजरने वाला वृत D से भी गुजरता है।

$\therefore$ A, B, C और D एक वृत्तीय है। अतः ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। उदाहरण -

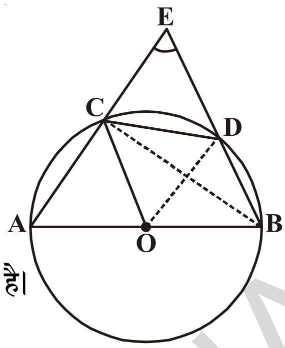
उदाहरण: 7 आकृति में, वृत्त का व्यास $\overline{AB}$ है, ज्या $\overline{CD}$ वृत्त के अर्धव्यास के बराबर है। $\overline{AC}$ और $\overline{BD}$ बढाने पर बिंदु E पर प्रतिच्छेद करते है। सिद्ध कीजिए कि $\angle AEB = 60°$

हल : OC, OD और BC मिलाइए।

त्रिभुज ODC समभुज त्रिभुज है। (क्यों ?)

इसलिए, $\angle COD = 60°$

अब, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (क्यों ?)



पुनः $\angle CBD = 30°$

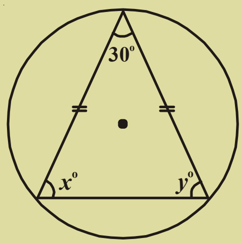
इसलिए, $\angle ACB = 90°$ (क्यों ?)

जिससे, $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$

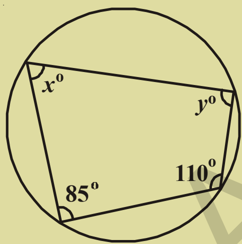
अर्थात $\angle CEB = 90° - 30° = 60°$, $\angle AEB = 60°$ प्राप्त होता है।

अभ्यास : 12.5

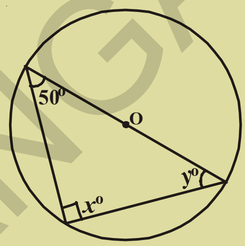
1. नीचे दी गई आकृतियों में x और y के मान ज्ञात कीजिए।



(i)



(ii)



(iii)

2. दिया है कि चतुर्भुज ABCD के शीर्ष A, B, C एक वृत्त पर स्थित है।

   तथा $\angle A + \angle C = 180°$ तो सिद्ध कीजिए कि शीर्ष D भी इसी वृत्त पर स्थित है।

3. सिद्ध कीजिए कि चक्रीय सम चतुर्भुज एक वर्ग रहता है।

4. यदि समांतर चतुर्भुज चक्रीय हो तो यह आयत रहता है। बताइए।

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए, एक वृत्त खींचिए और इसके अंतर्गत दी गई आकृति बनाइे। यदि दिये गए प्रकार का बहुभुज वृत के अंतर्गत नहीं बना सकते है तो अंसभव है, लिखिए।

   (a) आयात

   (b) समलंब चतुर्भुज

   (c) अधिक कोण त्रिभुज

   (d) समांतर चतुर्भुज जो आयत नहीं है

   (e) न्यूनकोण समद्धि बाहु त्रिभुज

   (f) चतुर्भुज PQRS जिसका $\overline{PR}$ व्यास है

हमने क्या सीखा?

- किसी समतल में सभी बिंदुओं का समुह, जो किसी निश्चित बिंदु से, उसी समतल में निश्चित दूरी पर रहते है, वृत्त कहलाता है।
- वृत्त पर स्थित कोई दो बिंदुओं को जोड़ ने वाला रेखाखण्ड जीवा कहलाता है।
- ज्याओं में सबसे अधिक लम्बाई की जीवा जो वृत्त के केंद्र से गुजरती है, व्यास कहलाती है।
- एक समान अर्धव्यास वाले वृत्त, सर्वांगसम वृत्त कहलाते है।
- एक ही केन्द्र और भिन्न त्रिज्या वाले वृत्तों को संकेंद्री वृत्त कहते है ।
- वृत्त का व्यास उसे दो अर्ध-वृत्तों में विभाजित करता है।
- वृत्त पर स्थित दो बिंदुओं के बीच के भाग का चाप कहते है।
- वृत्त की ज्या और चाप से परिबद्ध क्षेत्र को खण्ड कहते है। यदि चाप, लघुचाप हो तब वह लघुखण्ड और यदि चाप, दीर्घ चाप हो तो यह दीर्घखण्ड कहलाता है।
- चाप और चाप के अंतिम बिंदु और केंद्र को जोडने वाली दो त्रिज्या से परिबद्ध क्षेत्र को त्रिज्या खण्ड (वृत्तखण्ड) कहते है।
- सम चापों से केंद्र पर बनने वाले कोण समान होते है।
- एक ही खण्ड में बने हुए कोण आपस में बराबर रहते है ।
- अर्धव्यास में बना हुआ कोण समकोण रहता है।
- यदि केंद्र पर, दो मापों द्वारा आंतरित(subtended) कोण समान हो तो जीवाएं सर्वांगसम रहती है।
- वृत्त के केंद्र से जीवा पर खींचा गया लम्ब, जीवा को समद्विभाजित करता है। इसका विलोम भी सही है।
- तीन असंरेख बिन्दुओं से होकर एक और केवल एक (अद्वितीय) वृत खींचा जा सकता है।
- वृत्त की समान जीवाएं केंद्र से समदूरस्थ होती है, विलोमतः वृत के केंद्र से समदूरस्थ जीवाएं लम्बाई में बराबर होती है।
- वृत्त के किसी चाप द्वारा केंद्र पर बना कोण उसी चाप द्वारा शेष परिधि पर स्थित किसी बिंदु पर बने कोण का दुगुना होता है।
- अपने एकान्तर खण्ड में वृत्त के किसी बिंदु पर समकोण आंतरित करने वाला वृत्त का चाप अर्धवृत्त होता है।
- यदि कोई दो बिन्दुओं को जोड़ने वाला रेखाखण्ड अपने एक एक ही ओर स्थित किन्ही दो बिंदुओं पर समान कोण आंतरित करे तो चारों बिंदु एक वृत्तीय अर्थात एक ही वृत पर स्थित होते है।
- किसी चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के युग्म का योगफल सम्पूरक होता है.