GOVERNMENT OF TAMIL NADU

ఎనిమిదవ తరగతి

STANDARD EIGHT

తృతీయాంతరము
సంపుటము - 2

TERM - III
VOLUME -2

గణితము

MATHEMATICS

TELUGU MEDIUM

A publication under Free Textbook Programme of Government of Tamil Nadu

Department of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

Government of Tamil Nadu

First Edition - 2019

(Published under New Syllabus in

Trimester Pattern)

NOT FOR SALE

Content Creation

State Council of Educational
Research and Training

© SCERT 2019

Printing & Publishing

Tamil Nadu Textbook and Educational
Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

8th_Front Pages_EM Term-3.indd 2 10-01-2020 14:48:35

**ప్రపంచంలో పలు భాషలు మాట్లాడినను, ప్రపంచపు ఒకే మామూలు భాష గణితం అగును.
దీనిని సులభ పద్ధతిలో విద్యార్థులకు ఇవ్వడమే ఈ పాఠ్యపుస్తకము యొక్క ముఖ్య ఉద్దేశం అగును**

**గణితమైనది సంఖ్యలు, సమీకరణాలు, ప్రాథమిక ప్రక్రియలు సోపానాలు అనుదానికంటే
అర్థంచేసుకోవడానికి ఆధారంగా ఉన్నది.**

– విలియం బౌల్ థర్స్టన్.

గణితము యొక్క ముఖ్య ఉద్దేశ్యము పాఠశాల విద్యలో విద్యార్థులు గణితమును ఎలా సులభంగా నేర్చుకోవడానికి మరియు విద్యార్థుల ఆలోచనా ప్రక్రియను మార్చుటకు ఉపయోగపడును.

8th_Front Pages_EM Term-3.indd 3 10-01-2020 14:48:36

విషయ సూచిక

అధ్యాయము	పాఠ్యాంశము	పుట సంఖ్య	నెల
1	సంఖ్యలు	1-30	జనవరి
2	జీవనాధార గణితము	31-48	ఫిబ్రవరి
3	రేఖాగణితము	49-74	ఫిబ్రవరి & మార్చి
4	సాంఖ్యాక శాస్త్రము	75-101	మార్చి
5	సమాచార ప్రక్రియ	102-122	ఏప్రిల్
	జవాబులు	123-126	
	గణిత పదాలు	127-128	

D6Q6W6
పాఠ్యపుస్తకము

R1S8B4
మూల్యాంకనము

B358_8_MATHS_EM
అంతర్జాల అనుసంధానాలు

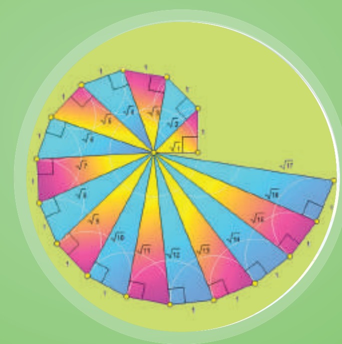
QR GUIDE

పాఠ్యపుస్తకంలోని QR సంకేతాన్ని ఉపయోగించు విధానం

- గూగుల్ ప్లేస్టోర్ నుండి 'దీక్ష' ఆప్‌ను డౌన్‌లోడ్ చేసుకోండి.
- పాఠ్యపుస్తకంలోని QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయడానికి QR కోడ్ ఐకాన్‌ను స్పర్శించండి.
- పాఠ్యపుస్తకంలోని QR చిత్రంపై ఉంచి స్కాన్ చేయుము.
- స్కాన్ అయిన తరువాత పాఠ్యాంశాలు ప్రత్యక్షమగును.
- **గమనిక:** అంతర్జాల కృత్యం, డిజిలింక్ QR కోడ్స్‌ను స్కాన్ చేయడం కోసం మరో QR స్కానర్‌ను వాడండి.

8th_Front Pages_EM Term-3.indd 4 10-01-2020 14:48:36

1 సంఖ్యలు



అభ్యసన లక్ష్యాలు

- ❖ వర్గసంఖ్యలను కనుగొనుట.
- ❖ ఒక సంఖ్య వర్గమూలమును
  (i) కారకాంక పద్ధతి. (ii) భాగహార పద్ధతి ద్వారా కనుగొనుట.
- ❖ ఘనసంఖ్యలను కనుగొనడం.
- ❖ కారణాంక పద్ధతిలో ఘనమూలములను కనుగొనుట.
- ❖ వర్గమూలముల మరియు ఘనమూలములను కనుగొనుట.
- ❖ సంఖ్యలను ఘాతాంక రూపంలో తెల్పుట.
- ❖ ఘాతాంక న్యాయములను అర్థము చేసుకొనుట.
- ❖ శాస్త్రీయ సంకేతములను గుర్తుచేసుకొనుట మరియు వ్యక్తపరుచుట.

Q3C1L2

1.1 వర్గసంఖ్యల పరిచయం

1	1 2 3 4	1 2 3 4 5 6 7 8 9
ఇది 1 ప్రమాణం గల ఒక చతురస్ర భుజము. ఇక్కడ 1 వర్గం చేయబడినది. దీనిని 1^2 గా వ్రాయవచ్చు. $\mathbf{1^2 = 1}$	ఇది 2 ప్రమాణం గల ఒక చతురస్ర భుజము ఇక్కడ 2 వర్గం చేయబడినది. దీనిని 2^2 గా వ్రాయవచ్చు. $\mathbf{2^2 = 2 \times 2 = 4}$	ఇది 3 ప్రమాణం గల ఒక చతురస్ర భుజము ఇక్కడ 3 వర్గం చేయబడినది. దీనిని 3^2 గా వ్రాయవచ్చు. $\mathbf{3^2 = 3 \times 3 = 9}$

దీనిని అలాగే కొనసాగిస్తే:

$4^2 = 16$

దీనిని 4 యొక్క వర్గం అని పిలుస్తారు.

పైనున్న 2ను వర్గం అని అంటారు. ఇది 4ను రెండుసార్లు లబ్దంచేయవలెనని తెలుపుతుంది. $(4 \times 4 = 4^2 = 16)$.

1, 4, 9, 16, ... సంఖ్యలను వర్గసంఖ్యలు (ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యలు) అని అంటారు. ఒక్కొక్కటి అదే సంఖ్యను, రెండుసార్లు గమనించగా ఏర్పడినది.

n అనే సహజసంఖ్యను వర్గసంఖ్యగా పిలువవలెనన్నా మనము m అనే మరొక సహజసంఖ్యను కనుగొనవలెను. $n = m^2$.

49 వర్గసంఖ్యనా? అవును, ఎందుకంటే దీనిని 7^2 గా వ్రాయవచ్చు. 50 వర్గసంఖ్యనా?

క్రింది పట్టిక 20 వరకు గల వర్గసంఖ్యలను చూపును.

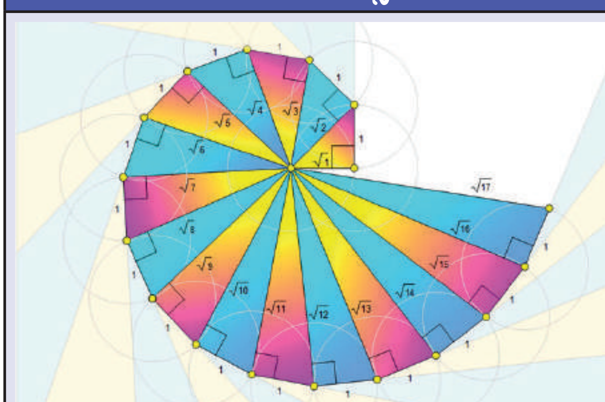
సంఖ్య	దీని వర్గము	సంఖ్య	దీని వర్గం	సంఖ్య	దీని వర్గం	సంఖ్య	దీని వర్గం
1	1	6	36	11	121	16	256
2	4	7	49	12	144	17	289
3	9	8	64	13	169	18	324
4	16	9	81	14	196	19	361
5	25	10	100	15	225	20	400

పై పట్టికను 50 వరకు గల వర్గ సంఖ్యలను విస్తరించి వ్రాయుటకు ప్రయత్నించుము.

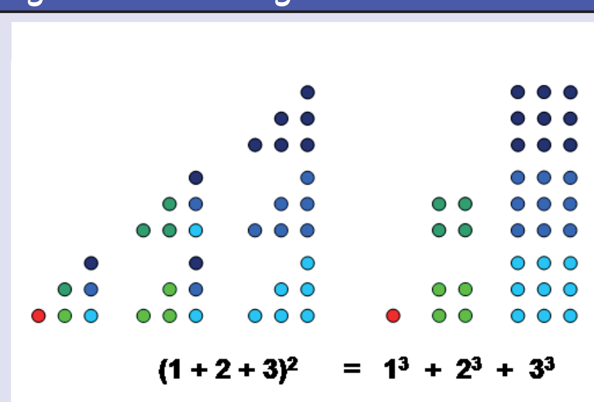
పై పట్టికలోని వర్గసంఖ్యలను కింద ఇవ్వబడిన ధర్మముల ద్వారా సులభముగా సరిచూడవచ్చును.

- వర్గసంఖ్యలు 0, 1, 4, 5, 6 లేక 9 సంఖ్యలతో మాత్రమే అంతమగును.
- ఒక సంఖ్య 1 లేక 9తో అంతమయిన, దాని వర్గము 1తో అంతమగును.
- ఒక సంఖ్య 2 లేక 8తో అంతమయిన, దాని వర్గము 4తో అంతమగును.
- ఒక సంఖ్య 3 లేక 7తో అంతమయిన, దాని వర్గము 9తో అంతమగును.
- ఒక సంఖ్య 4 లేక 6తో అంతమయిన, దాని వర్గము 6తో అంతమగును.
- ఒక సంఖ్య 5 లేక 0తో అంతమయిన, దాని వర్గము కూడా 5లేక 0తో అంతమగును.
- బేసి సంఖ్యల వర్గము ఎల్లప్పుడూ బేసి సంఖ్య మరియు సరిసంఖ్యల వర్గము ఎల్లప్పుడూ సరిసంఖ్య అవుతుంది.
- 2,3,7 మరియు 8తో అంతమయ్యే సంఖ్యలు ఖచ్చిత వర్గములుకావు.

ఔత్సాహిక గణితము – నిత్యజీవితములో సంఖ్యలు



జ్యామితిలోని పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి సర్పిలాకారంలో సంఖ్యల వర్గమూలములను కనుగొనడం.



సంఖ్యల వర్గములు మరియు ఘనముల అమరికలను సంధానము చేయడం మరియు వివరించడం.

$(1 + 2 + 3 + ... + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

Unit 1 - Numbers.indd 2
10-01-2020 17:38:27

1.1.1 ఒకటికి బేసి సంఖ్యలను కూడడం మరియు దాని వర్గము:

కింది బేసి సంఖ్యల అమరికలను పరిశీలించుము:

మొదటి బేసి సంఖ్య	= 1 దాని వర్గము కూడా		1^2 అవుతుంది.
మొదటి రెండు బేసి సంఖ్యల మొత్తము	$= 1 + 3$	$= 4$	$= 2^2$
మొదటి మూడు బేసి సంఖ్యల మొత్తము	$= 1 + 3 + 5$	$= 9$	$= 3^2$
మొదటి నాలుగు బేసి సంఖ్యల మొత్తము	$= 1 + 3 + 5 + 7$	$= 16$	$= 4^2$
మొదటి ఐదు బేసి సంఖ్యల మొత్తము	$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9$	$= 25$	$= 5^2$

దీనిని ఇదేవిధంగా కొనసాగించిన, 1తో ప్రారంభమయ్యే n వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తము ఏమవుతుంది?

> మొదటి n వరుస బేసి సహజసంఖ్యల మొత్తము n^2.

1.1.2 రెండు వరుస సహజసంఖ్యల మొత్తము మరియు దాని వర్గము:

ఒక బేసి సంఖ్య 7ను తీసుకొనుము. దాని వర్గము $7^2 = 49$.

దీనిని మనము ఈ విధముగా వ్రాయవచ్చు

$$7^2 = 24 + 25 \left(\frac{7^2 - 1}{2} + \frac{7^2 + 1}{2}\right.$$ కు ఇది సమానం)

మరికొన్ని బేసి సహజసంఖ్యలను తీసుకొనుము. వాటి ప్రతి వర్గమును రెండు వరుస సహజసంఖ్యల మొత్తముగా వ్రాయుటను చూడవచ్చు. కావున, బేసి సంఖ్యల వర్గమును రెండు వరుస సహజసంఖ్యల మొత్తముగా వ్రాయవచ్చు.

ఆలోచించుము

1. ప్రధానసంఖ్యల వర్గము ప్రధానసంఖ్యేనా?
2. రెండు ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యల మొత్తము ఎల్లప్పుడూ ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యేనా? అయితే వాటి వ్యత్యాసము మరియు వాటి లబ్ధములు ఏమగును?

ప్రయత్నించుము

కింది వర్గసంఖ్యలను తీసుకొనుము.

(i) 441 (ii) 225 (iii) 289 (iv) 1089

ప్రతి సంఖ్యను రెండు వరుస ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్యల మొత్తముగా వ్యక్తపరుచుము.

ఉదాహరణ 1.1

1 + 3 + 5 + 7 + ... + 99 అనే బేసి సహజసంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము..

సాధన:

ఇక్కడ, 1 నుండి 9 వరకు 50 బేసి సంఖ్యలు కలవు.

మొదటి n వరుస బేసి సహజసంఖ్యల మొత్తము $= n^2$

మొదటి 50 వరుస బేసి సహజసంఖ్యల మొత్తము $= 50^2$

$= 50 \times 50 = 2500$

మీకు తెలుసా?

ఒక ఖచ్చిత సంఖ్య వర్గము కాదు. ఖచ్చిత సంఖ్యలయిన 6, 28, 496, 8128 మొదలగునవి వర్గములుకావు.

ఆలోచించుము

1. 46 అనే ఒక సరిసంఖ్యను తీసుకొనుము. (లేక ఏదైనా నీకు నచ్చిన సరిసంఖ్యను తీసుకొనుము) 1తో ప్రారంభించి వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తముగా వ్రాయుటకు ప్రయత్నించుము. నీవు విజయం సాధించావా?
2. బేసి సంఖ్యల వర్గమును ఎల్లప్పుడూ రెండు వరుస సహజసంఖ్యల మొత్తముగా వ్రాయవచ్చును. దీని విపర్యయము నిజమగునా? రెండు వరుస సహజసంఖ్యల మొత్తము ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య అగునా?

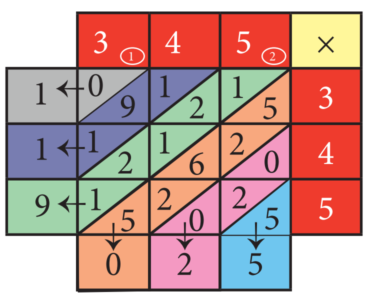
1.1.3 వికర్ణ పద్ధతి ఉపయోగించి వర్గసంఖ్యలను కనుగొనుము:

వికర్ణ పద్ధతిని ఉపయోగించి, ఒక సంఖ్య యొక్క వర్గమును సులభముగా కింది ఉదాహరణ ద్వారా కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 1.2

వికర్ణ పద్ధతి ఉపయోగించి 345కు వర్గమును కనుగొనుము.

సాధన: *v*



345 (ఎరుపు) సంఖ్యలకు కింద దాని ఎడమవైపుకు, ఒక 3×3 చతురస్రమును ఏర్పరచుము. ఏర్పరచిన 9 చతురస్రములలో ఒక వికర్ణమును గీయుము. మొదట $5 \times 3 = 15$ లబ్దములో గల 1 ను పైభాగములోను పూరించిన పిదప, సంఖ్యలను రంగు వేయబడిన వికర్ణముల ద్వారా కూడుము. బాణపు గుర్తుగల సంఖ్యలపై ఎడమవైపు నుండి 119025 అనేది 345 యొక్క వర్గము అగును.

$\therefore \ 345^2 = 119025$.

ప్రయత్నించుము

(i) 256, 576, 960, 1025, 4096 సంఖ్యలలో ఖచ్చిత వర్గములు.
(సూచన: ఇదివరకే పైనచూపిన వర్గపట్టికను కొనసాగించుము)

(ii) 82, 113, 2057, 24353, 8888, 1972 అనేవి ఖచ్చిత వర్గములు కావు అని ఒకతను చూపిన వెంటనే చెప్పెను. ఎందుకు? వివరించుము.

(iii) క్రింది ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను ఉపయోగించి కర్ణము పద్ధతి ద్వారా ఆ సంఖ్యల యొక్క వర్గములను మరియు వాటి ఒకట్ల స్థానములోని అంకెను కనుగొనుము:11, 27, 42, 79, 146, 324, 520.

గమనిక

ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య 0 తో అంతమయిన, ఆ సున్నల సంఖ్య ఎల్లప్పుడూ సరిసంఖ్యగానే ఉండును. మనము ఈ విషయాన్ని కింది పట్టిక ద్వారా చూడవచ్చునుయ:

సంఖ్య	10	20	30	40	...	90	100	110	...	200	...
దాని వర్గము	100	400	900	1600	...	8100	10000	12100	...	40000	...

Unit 1 - Numbers.indd 4
10-01-2020 17:38:30

ఆలోచించుము

ఒక వాదనను తీసుకొందాము. “ n మరియు $(n+1)$ వరుస వర్గసంఖ్యల మధ్య $2n$ వర్గముకాని సంఖ్యలు ఉంటాయి. ఇది సత్యమగునా? 2500 మరియు 2601 మధ్య ఎన్ని వర్గముకాని సంఖ్యలు ఉంటాయి. వాదనను సరిచూడుము.

కృత్యము

క్రింది ప్రవచనములను సరిచూడుము:

(i) 1 తప్ప మిగిలిన సహజసంఖ్యల వర్గము 3 యొక్క గుణిజము లేక 3 యొక్క గుణిజము కన్నా 1 ఎక్కువగా ఉండును.

(ii) 1 తప్ప మిగిలిన సహజసంఖ్యల వర్గము 3 యొక్క గుణిజము లేక 3 యొక్క గుణిజము కన్నా 1 ఎక్కువగా ఉండును.

(iii) 1 తప్ప, మిగిలిన సహజసంఖ్యల వర్గము 4 యొక్క గుణిజము లేక 4 యొక్క గుణిజము కన్నా 1 ఎక్కువగా ఉండును.

(iv) ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యను 3తో భాగించగా శేషము 0 లేక 1 వచ్చును. కాని ఎప్పటికి 2 రాదు.

(v) ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యను 8చే భాగించగా శేషము 0 లేక 1 లేక 4 వచ్చును. కాని 2,3,5,6 లేక 7 ఎప్పటికీ రావు.

1.1.4 పైథాగరస్ త్రిపాది:

పైథాగరస్ త్రిపాది అని పిలువబడేవాటిని వివరించుటకు వర్గము అనే భావన ఉపయోగపడుతుంది.

త్రిపాది అనగా మూడుసంఖ్యల సమితి. ఏదైనా మూడుసంఖ్యలను లంబకోణ త్రిభుజాలుగా చూపగలిగిన అట్టసంఖ్యలను పైథాగరస్ త్రిపాది అంటారు.

గణితపరంగా, a, b, c అనే మూడు సంఖ్యలు పైథాగరస్ త్రిపాదిని ఏర్పరచిన, ఏదైనా రెండు భుజాల వర్గముల మొత్తము, మూడవ భుజము యొక్క వర్గమునకు సమానము అనగా

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (లేక) } b^2 + c^2 = a^2 \text{ (or) } c^2 + a^2 = b^2$$

ఉదాహరణకు క్రింది పట్టిక పైథాగరస్ త్రికాలను తెల్పుతుంది.

త్రిపాది	కారణము
(3, 4, 5)	$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ అనునది 5^2.
(5, 12, 13)	$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$ అనునది 13^2
(20, 21, 29)	$20^2+21^2 = 400 + 441 = 841$ అనునది 29^2

ఉదాహరణ 1.3

(8, 15, 17) అనేది పైథాగోరియన్ త్రికాలు అని పరీక్షించుము.

సాధన:

$8^2 = 8 \times 8 = 64$, $15^2 = 15 \times 15 = 225$ మరియు $17^2 = 17 \times 17 = 289$

$8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$ అని కనుగొంటాము.

కావున, $8^2 + 15^2 = 17^2$ $\therefore$ (8, 15, 17) పైథాగోరియన్ త్రికాలు.

Unit 1 - Numbers.indd 5 10-01-2020 17:38:30

కృత్యము

$m > 1$ అనే సహజసంఖ్యలలో $(2m, m^2 - 1, m^2 + 1)$ అనే త్రికాలు పైథాగారియన్ త్రికాలు ఏర్పరచును. (ఈ చిన్న బీజ గణితము పైథాగోరియన్ త్రికాలు సులభముగా కనుగొనుటకు ఉపయోగపడును.

పై సూత్రము నుండి కొన్ని పైథాగోరియన్ త్రికాలు కనుగొనుము. ఒకటి మీ కొరకు ఇవ్వబడింది.

$2m = 14$ గా తీసుకొనుము. ఇక్కడ $2m$ అనేది సరిపూర్ణసంఖ్య (ఎందుకు?)

$$2m = 14 \Rightarrow (2m)^2 = 14^2 = 196$$

నిరూపించుటకు

$$m^2 - 1 = 7^2 - 1 = 48 \Rightarrow (m^2 - 1)^2 = 48^2 = 2304$$

$$m^2 + 1 = 7^2 + 1 = 50 \Rightarrow (m^2 + 1)^2 = 50^2 = 2500$$

$$196 + 2304 = 2500$$

(లేక) $2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$

కావున $(14, 48, 50)$ పైథాగోరియన్ త్రికాలు.

1.2 వర్గమూలము

ఒక సంఖ్యను వర్గము చేయడమనేది కూడిక, తీసివేత, గుణకారము లాంటి ఒక గణిత ప్రక్రియ. చాలా గణిత పరిక్రియలకు విలోమ (అనగా వ్యతిరేకము) పరిక్రియలు ఉంటుంది. ఉదాహరణకు తీసివేతకు విలోమ పరిక్రియ కూడిక, గుణకారమునకు విలోమ పరిక్రియ భాగహారము మొదలగునవి. అదేవిధంగా వర్గమునకు కూడా ఒక విలోమ పరిక్రియ కలదు, అదే వర్గమూలము.

n యొక్క వర్గమూలమును $\sqrt{n}$ లేదా $n^{\frac{1}{2}}$ గా వ్రాయవచ్చు.

ఉదాహరణకు $\sqrt{81}$ విలువ 9, ఎందుకనగా $9 \times 9 = 81$.

ప్రక్కపటములో 1 నుండి 100 వరకు గస ఖచ్చిత వర్గముల వర్గమూలములు కలవు.

వర్గమూలము	కారణము
$\sqrt{1} = 1$	$1^2 = 1$
$\sqrt{4} = 2$	$2^2 = 4$
$\sqrt{9} = 3$	$3^2 = 9$
$\sqrt{16} = 4$	$4^2 = 16$
$\sqrt{25} = 5$	$5^2 = 25$
$\sqrt{36} = 6$	$6^2 = 36$
$\sqrt{49} = 7$	$7^2 = 49$
$\sqrt{64} = 8$	$8^2 = 64$
$\sqrt{81} = 9$	$9^2 = 81$
$\sqrt{100} = 10$	$10^2 = 100$

$324 = 18^2$ అని మనకు తెలుసు. దీనిని మనము $\sqrt{324}$ విలువ 18 అని చెప్పవచ్చు.

$11^2 = 121$, అయిన $\sqrt{121}$ విలువ?

$529 = 23^2$, అయిన 529 యొక్క వర్గమూలము ఎంత?

$1^2 = 1$ అని మనకు తెలుసు కావున 1 యొక్క వర్గమూలం 1. $(-1)^2$ విలువ కూడా 1 కావున 1 యొక్క వర్గమూలము (-1) కూడా.

$2^2 = 4$ కావున 4 యొక్క వర్గమూలము 2 $(-2)^2$ కూడా 4 కావున 4 యొక్క వర్గమూలము -2 కూడా అవుతుంది.

అదేవిధముగా,

$3^2 = 9$ మరియు 9 యొక్క వర్గమూలము $(-3)^2$ విలువ కూడా $= 9$. కావున 9 యొక్క వర్గమూలము (-3) అవుతుంది.

పై ఉదాహరణముల నుండి ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యకు రెండు వర్గమూలాలు ఉంటాయని తెలుపుతున్నది. సమస్యలు సాధించేటప్పుడు ధనాత్మక వర్గమూలమును మాత్రమే తీసుకొనవలెను.

ధనాత్మక వర్గమూలమును ఎల్లప్పుడూ $\sqrt{\ }$ అనే గుర్తుతో సూచిస్తాము.

కావున $\sqrt{4}$ విలువ 2 (కాని −2 కాదు) , $\sqrt{9}$ విలువ 3 (కాని −3 కాదు). మనము ఇక్కడ మరలా గుర్తుచేసుకోవలసినది ఇది విశ్వవ్యాప్తంగా అంగీకరించబడినది.

1.2.1 వరుస బేసి సంఖ్యల యొక్క పునరావృత వ్యవకలనము ద్వారా వర్గమూలము కనుగొనుట:

వర్గసంఖ్యలను 1 నుండి ప్రారంభమయ్యే వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తముగా వ్రాయవచ్చునని మనకు తెలుసు. ఇప్పుడు సున్న వచ్చువరకు వరుస బేసిసంఖ్యల యొక్క పునరావృత వ్యవకలనము నుండి వర్గమూలము కనుగొంటాము.

ఉదాహరణ 1.4

64 యొక్క వర్గమూలమును పునరావృత వ్యవకలన పద్ధతి ద్వారా కనుగొనుము.

సాధన:

కింది విధంగా కొనసాగించవచ్చును:

సోపానము 1: $64 - 1 = 63$

సోపానము 2: $63 - 3 = 60$

సోపానము 3: $60 - 5 = 55$

సోపానము 4: $55 - 7 = 48$

సోపానము 5: $48 - 9 = 39$

సోపానము 6: $39 - 11 = 28$

సోపానము 7: $28 - 13 = 15$

సోపానము 8: $15 - 15 = 0$

ప్రయత్నించుము

వరుస బేసిసంఖ్యల యొక్క తీసివేత పద్ధతిని ఉపయోగించి (1 నుండి ప్రారంభిస్తూ) క్రింది సంఖ్యలు ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్యలా! కాదా అని పరిక్షించుము. ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.

(i) 144 (ii) 256 (iii) 360

వరుస బేసి సంఖ్యలను తీసివేస్తూ (1 నుండి ప్రారంభించి) ఇవ్వబడిన 64 సంఖ్యకు 8వ సోపానము వద్ద మనము సున్నను పొందుతాము.

కావున $\sqrt{64} = 8$. ఒకవేళ సున్న రాకున్నచో ఇచ్చిన సంఖ్య ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య కాదు.

685584 ఒక ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య దీనికి వర్గమూలమును వరుస బేసిసంఖ్యల తీసివేత పద్ధతిని ఉపయోగించి కనుగొనుట వీలగునా?

అవును, వీలగును, కాని సమయము ఎక్కువ తీసుకొంటుంది మరియు శ్రమతో కూడుకొన్నది. కావున మనకు వర్గమూలము కనుగొనుటకు వేరొక పద్ధతి అవసరము.

1.2.2 ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలమును కనుగొనుట:

క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడిన సంఖ్యల ప్రధాన కారణాంకములు మరియు వాటి వర్గములను గమనించుము.

సంఖ్యలు	సంఖ్యల ప్రధాన కారణాంకములు	ఇవ్వబడిన సంఖ్యల వర్గములు	ప్రధాన కారణాంకముల యొక్క వర్గములు
6	$6 = 2 \times 3$	$6^2 = 36$	$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = (2 \times 3)^2$
8	$8 = 2 \times 2 \times 2$	$8^2 = 64$	$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = (2 \times 2 \times 2)^2$
12	$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^2 = 144$	$44 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = (2 \times 2 \times 3)^2$
15	$15 = 3 \times 5$	$15^2 = 225$	$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 = (3 \times 5)^2$

6 కు గల ప్రధాన కారణాంకములను గమనించుము. 2 ఎన్నిసార్లు వస్తున్నది.

ఇప్పుడు 6 వర్గము 36 యొక్క ప్రధాన కారణాంకములను గమనించుము.

Unit 1 - Numbers.indd 7 10-01-2020 17:38:35

ఇక్కడ 2 ఎన్నిసార్లు వస్తున్నది? 8, 12, మరియు 15 లకు కూడా ఇదే పద్ధతిని కొనసాగించండి. (మీరు సొంతముగా ఒక సంఖ్యను దాని వర్గమును ఎంపిక చేసుకొనము)

వర్గములో ప్రధాన కారణాంకములు వచ్చిన సంఖ్య } = { సంఖ్య యొక్క ప్రధానకారణాంకములో సంభవించే రెట్టింపు సంఖ్య

మనము ఇదే పద్ధతిని వర్గసంఖ్యలకు వర్గమూలము కనుగొనుటకు ఉపయోగించవచ్చు. మొదట ఇచ్చిన సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకములుగా విడగొట్టవలెను. ఒకేరకమైన కారణాంకములు జతలుగా చేసి దాని నుండి ఒక సంఖ్యను తీసుకొన్న సంఖ్య యొక్క వర్గమూలము వస్తుంది.

ఉదాహరణ 1.5

325 యొక్క వర్గమూలమును ప్రధానకారణాంక పద్ధతి ద్వారా కనుగొనుము.

సాధన:

మొదట ఇచ్చిన సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకములుగా వ్రాయవలెను. ఒకే విధమైన కారణాంకముల జతను సమూహపరచి వాటి నుండి ఒకదానిని తీసుకొని వర్గమూలమును కనుగొనుము..

ఇప్పుడు, $324 = 2\times2\times3\times3\times3\times3$

$= 2^2\times3^2\times3^2$

$= (2\times3\times3)^2$

$\therefore \sqrt{324} = \sqrt{(2\times3\times3)^2}$

$= 2\times3\times3$

$= 18$

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

ఉదాహరణ 1.6

108 ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యేనా?

సాధన:

ఇక్కడ, $108 = 2\times2\times3\times3\times3$

$= 2^2\times3^2\times3$

ఇక్కడ రెండవ ప్రధాన కారణాంకము 3కు జతలేదు. కావున 108 ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య కాదు.

2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

ఆలోచించుము

మనము ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యను పొందుటకు 108 కు గుణించగల లేదా భాగించ గల అతి చిన్న కారణాంకమును కనుగొనుటకు ఏమి చేయవలెను?

ఉదాహరణ 1.7

250 కు ఏ కనిష్ట సంఖ్యను గుణించిన లేదా భాగించిన ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య వచ్చును మరియు దాని వర్గమూలమును కనుగొనుము.

సాధన:

5	250
5	50
5	10
	2

250 ను $5 \times 5 \times 5 \times 2$ గా వ్రాయవచ్చును.

$= 5^2 \times 5 \times 2$

ఇక్కడ 5 మరియు 2 ప్రధాన కారణాంకములకు జతలేదు.

కావున, 250ను 10తో భాగించవలెను. లేదా 10తో గుణించవలెను.

Unit 1 - Numbers.indd 8 10-01-2020 17:38:38

(i) 250ను 10 తో గుణించిన 2500 వచ్చును. $5^2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2$ మరియు 2500 లకు వర్గమూలము $5 \times 5 \times 2 = 50$.

(ii) 250 ను 10 తో భాగించిన 25 వచ్చును. 25కు వర్గమూలము $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$

అభ్యాసము 1.1

1. ఖాళీలను పూరింపుము:

(i) 77 యొక్క వర్గములో ఒకట్ల స్థానము ___________.

(ii) 242 మరియు 252 మధ్య గల వర్గము కాని సంఖ్యలు ___________.

(iii) ఒక సంఖ్య చివరలో 5 వచ్చిన, దాని వర్గము చివరిలో ___________ వచ్చును.

(iv) వర్గసంఖ్యలు ___________ సంఖ్యలతో అంతము కాదు.

(v) 300 మరియు 500 మధ్య గల ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యలు ___________

2. సత్యమా లేదా అసత్యమా అని తెల్పుము.

(i) వర్గసంఖ్య చివరలో 6 ఉంటే దాని వర్గమూలములోని ఒకట్ల స్థానములో 6 ఉంటుంది.

(ii) వర్గసంఖ్యలోని చివర సున్నల సంఖ్య బేసి సంఖ్యలో ఉండవు.

(iii) 961000 సంఖ్యను వర్గము చేసిన సున్నల సంఖ్య 9 ఉంటుంది.

(iv) (7, 24, 25) అనేది పైథాగరస్ త్రిపాది.

(v) 221 యొక్క వర్గమూలము 21

3. క్రింది సంఖ్యలను వర్గము చేసిన ఒకట్ల స్థానంలో వచ్చు సంఖ్యలేవి?

(i) 36 (ii) 252 (iii) 543

4. క్రింది సంఖ్యలను చూసి అవి ఖచ్చిత వర్గములు కావని న్యాయపరచుము.

(i) 1000 (ii) 34567 (iii) 408

5. క్రింది బేసి సంఖ్యలను మొత్తమును కనుగొనుము.

(i) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots\dots\dots + 35$

(ii) మొదటి 99 బేసి సంఖ్యల మొత్తము

6. (i) 15^2 మరియు (ii) 19^2 ను రెండు వరుస ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్యల మొత్తముగా వ్రాయుము.

7. (i) 10^2 మరియు (ii) 11^2 ను రెండు వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తముగా వ్రాయుము.

8. పైథాగోరియన్ త్రికాలు కనుగొనము

(i) పెద్ద భుజము 65 (ii) చిన్న భుజము 10

9. పునరావృత వ్యవకలన పద్ధతి ద్వారా కింది వాటికి వర్గమూలమును కనుగొనుము.

(i) 144 (ii) 256 (iii) 784

10. ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలమును కనుగొనుము.

(i) 1156 (ii) 4761 (iii) 9025

11. క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలు ఖచ్చిత వర్గములా అని పరీక్షించుము.

Unit 1 - Numbers.indd 9 10-01-2020 17:38:38

(i) 725 (ii) 190 (iii) 841 (iv) 1089

12. 800 కు ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యను గుణించిన ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య అగును మరియు వచ్చిన ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.

13. 10985 కు ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యను భాగించిన దాని భాగఫలము ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య అగును.

14. 2352 ఖచ్చిత వర్గమగునా? కానిచో 2352కు ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యను గుణించిన అది ఖచ్చిత వర్గమగును. గుణిచగా వచ్చిన ఖచ్చిత వర్గమునకు వర్గమూలము కనుగొనుము.

15. 8,12 మరియు 15. సంఖ్యలతో భాగించబడే చిన్న వర్గసంఖ్యను కనుగొనుము.

1.2.3 దీర్ఘ భాగాహార పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలము కనుగొనుట

పెద్ద సంఖ్యలకు వర్గమూలమును కారణాంక పద్ధతి ద్వారా కనుగొనడం చాలా కష్టతరం మరియు పెద్దది. ఇలాంటి సందర్భములో దీర్ఘభాగహార పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలము కనుగొనవచ్చును. ఈ పద్ధతిలో వర్గమూలము కనుగొనుటకు కింది వివరణలు మనకు సహాయపడును.

వివరణ 1

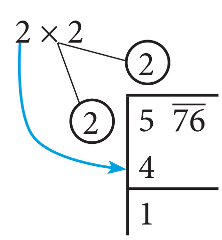
576 యొక్క వర్గమూలము దీర్ఘభాగహార పద్ధతిలో కనుగొనుము.

సోపానము 1:

ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క అంకెలను ఒకట్ల స్థానం మొదలుకొని రెండేసి సంఖ్యల (జతలుగా) సమూహములుగా విభజించుము. ప్రతి జతను మరియు మిగిలిన ఏదైనా అంకెము అవధి అంటారు. ఇచ్చిన సంఖ్యకు కుడి వైపు నుండి ప్రతి జతపై గీతను (బార్) గీయుము. ఇచ్చిన సంఖ్యలో బేసి సంఖ్యలలో అంకెలు ఉన్నచో చివరి ఎడమ అంకెపై గీత గీయుము.

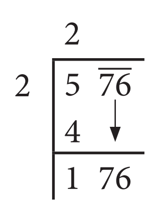
కావున, ఇక్కడ 5 $\overline{76}$ లో 5కు గీత లేదు.

సోపానము 2:



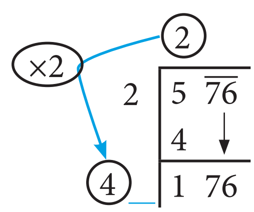
మొదటి జత లేదా అంకెను (ఎడమ నుండి కుడికి) సమానమైన లేదా తక్కువైన పరిపూర్ణ వర్గసంఖ్యను కనుగొనండి. ఈ సంఖ్యను విభాజకంగా మరియు భాగఫలముగా తీసుకొనండి. ఇక్కడ చివరి సంఖ్య 5 కావున 5 కన్నా తక్కువైన లేదా సమానమైన వర్గసంఖ్య 2 తీసుకొనిన, ఇదే ఇక్కడ విభాజకము మరియు భాగఫలము అగును.

సోపానము 3:



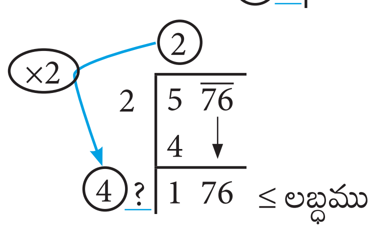
76ను క్రిందకు తీసుకొనివచ్చి శేషము '1' ప్రక్కన వ్రాయవలెను. ఇప్పుడు క్రొత్త భాజ్యము 176 అవుతుంది.

సోపానము 4:



క్రొత్త భాజకము కనుగొనుటకు, ముందు భాగఫలము (2)ను (2)తో గుణించవలెను మరియు దాని ప్రక్కన ఖాళీ స్థలము వదిలి వ్రాయవలెను.

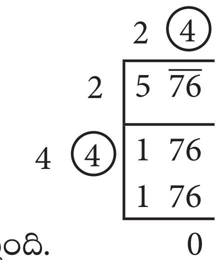
సోపానము 5:



క్రొత్త విభాజకము 4 తరువాత అంకెను సరియైన అంకె 4ను ఎంపిక చేసిన అది క్రొత్త భాగఫలము 176 కన్నా తక్కువ లేదా సమానంగా ఉండవలెను.

Unit 1 - Numbers.indd 10 10-01-2020 17:38:38

సోపానము 6:



స్పష్టంగా, ఇక్కడ కావలసిన అంకె 4 లేదా 6 (ఎందుకు?)

గుణకారం చేసిన,

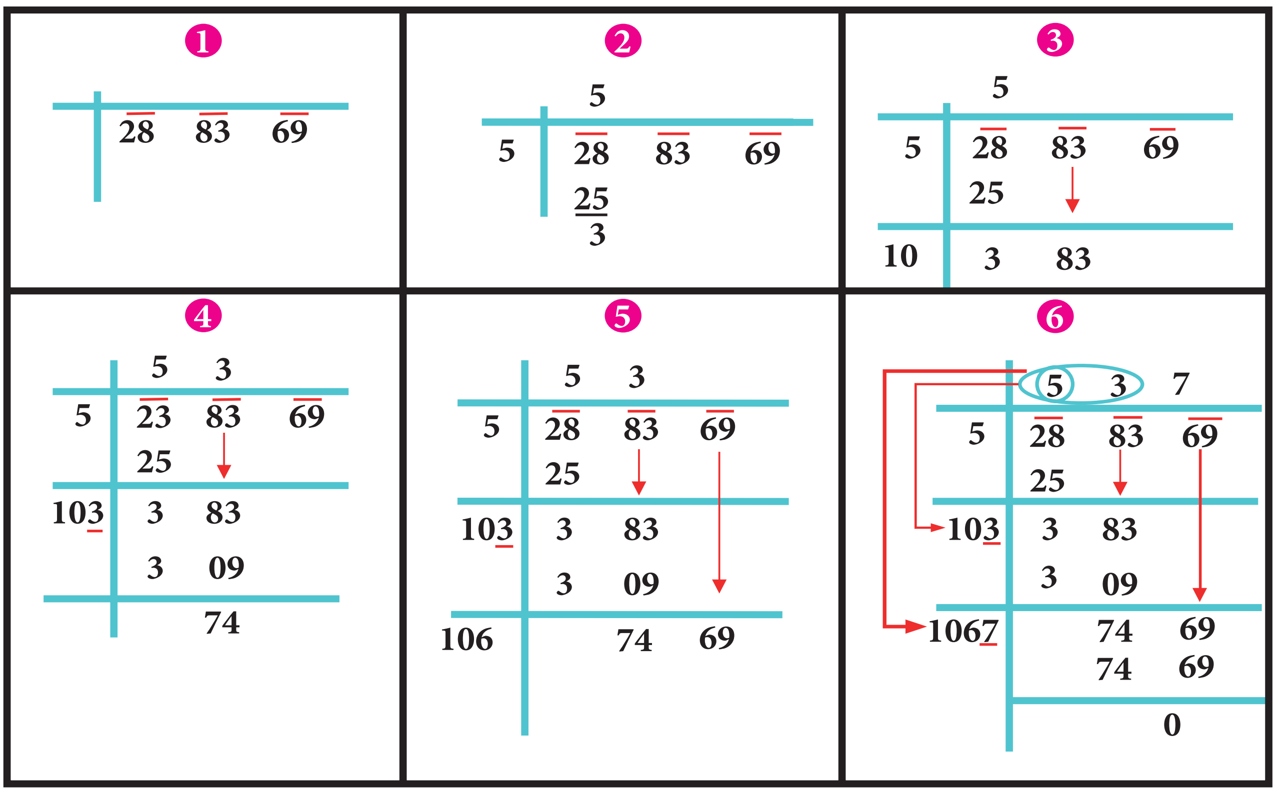
$\underline{46}\times\underline{6}=276$ మరియు $\underline{44}\times\underline{4}=176$.

కావున, 4 ను ఖాళీ ప్రదేశంలో ఉంచి, 176 క్రింద 176 వ్రాసి రెండింటిని తీసివేసిన 0 వస్తుంది.

$\therefore \sqrt{576}=24$.

వివరణ 2

క్రింది ఉదాహరణలో 288369 యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుటకు దశలవారీగా గల బొమ్మల నుండి ఒకదాని తరువాత ఒకటి వచ్చే బొమ్మలు ఏమి వివరిస్తున్నదని తెలుపుము?



మీరు $\sqrt{288369}=537$ అని కనుగొనుము.

ప్రయత్నించుము

దీర్ఘభాగహార పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలమును కనుగొనుము.

(i) 400 (ii) 1764 (iii) 4356

1.2.4 ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య యొక్క వర్గమూలములో గల అంకెల సంఖ్య

భాగహార పద్ధతిలో వర్గమూలము కనుగొనుటకు సంఖ్యపై గీత (బార్) ఉపయోగిస్తాము. ఈ గీతలు ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య యొక్క వర్గమూలము కనుగొనుటకు ఉపయోగిస్తాము. క్రింది ఉదాహరణలను గమనించండి. (అంకెలపై గీత వేసి భాగహార పద్ధతిలో వర్గమూలమును కనుగొనుట).

Unit 1 - Numbers.indd 11 10-01-2020 17:38:40

సంఖ్యల వర్గమూలము	గీతల సంఖ్య	వర్గమూలములో గల అంకెల సంఖ్య	సంఖ్యల యొక్క వర్గమూలము	గీతల సంఖ్య	వర్గమూలములో గల అంకెల సంఖ్య
$\sqrt{169} = 13$	2	2	$\sqrt{4356} = 66$	2	2
$\sqrt{441} = 21$	2	2	$\sqrt{6084} = 78$	2	2
$\sqrt{12544} = 112$	3	3	$\sqrt{27225} = 165$	3	3

కావున వర్గమూలములో గీతల సంఖ్య, సంఖ్యలో గల అంకెలకు సమానమని నిర్ధారించవచ్చు.

గమనిక

సంఖ్యలోని అంకెల సంఖ్య n అయిన దాని వర్గమూలములో గల అంకెల సంఖ్య $= \begin{cases} \frac{n+1}{2} & n \text{ బేసి సంఖ్య అయిన} \\ \frac{n}{2} & n \text{ సరి సంఖ్య అయిన} \end{cases}$

ప్రయత్నించుము

వర్గమూలమును చేయకుండా క్రింది సంఖ్యలకు వర్గమూలములోని అంకెల సంఖ్యను ఊహించి చెప్పుము.

(i) 14400 (ii) 100000000 (iii) 390625

1.2.5 దశాంశ సంఖ్యల వర్గమూలములు:

దశాంశ సంఖ్యలకు వర్గమూలము కనుగొనుటకు, క్రింది సోపానములను అనుసరించవలెను.

సోపానములు (అవసరమైతే)

సోపానము 1:

దశాంశ భాగంలో అంకె యొక్క కుడి వైపు సున్నాను ఉంచడం ద్వారా కూడా దశాంశ స్థానాలను ఏర్పరచవచ్చు.

$\sqrt{42.25}$ కనుగొనుటకు

సోపానము 2:

దశాంశ సంఖ్యకు పూర్ణాంక భాగము మరియు దశాంశ భాగము ఉండును. పూర్ణాంక భాగములో, భాగహార పద్ధతిలో చర్చించిన విధముగానే బార్ గీయుము.

$\sqrt{\overline{42}.\overline{25}}$ బార్‌లను ఈ విధముగా గీస్తాము

సోపానము 3:

దశాంశ భాగములో మొదటి దశాంశ స్థానము మొదలుకొని ప్రతి అంకెల జత పై బార్ గీయుము.

ప్రయత్నించుము

క్రింది వాటికి వర్గమూలము కనుగొనుము

(i) 19.36 (ii) 1.2321 (iii) 116.64

సోపానము 4:

ఇప్పుడు, దీర్ఘ భాగహార పద్ధతిలో వర్గమూలము కనుగొనుము.

సోపానము 5:

పూర్ణాంక భాగము పూర్తి అయిన తరువాత వర్గమూలములో దశాంశ బిందువును ఉంచండి.

$\therefore \sqrt{42.25} = 6.5$

	6 5
6	$\overline{42}$ $\overline{25}$
	36
125	6 25
	6 25
	0

1.2.6 లబ్ద సంఖ్యలు మరియు భిన్న సంఖ్యల వర్గమూలము:

p మరియు q అనే ఏదైనా రెండు ధనాత్మక సంఖ్యలలో

(i) $\sqrt{pq} = \sqrt{p} \times \sqrt{q}$ మరియు (ii) $\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$

Unit 1 - Numbers.indd 12 10-01-2020 17:38:42

ఉదాహరణ 1.8

$\sqrt{256}$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన:

$\sqrt{256} = \sqrt{16 \times 16} = \sqrt{16} \times \sqrt{16} = 4 \times 4 = 16.$ *or* $\sqrt{256} = \sqrt{64 \times 4} = \sqrt{64} \times \sqrt{4} = 8 \times 2 = 16.$

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ను ఉపయోగించి క్రింది పట్టికను పూరించుము.

ఆలోచించుము

పట్టికను పూరించుము

$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{9} \times \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$	$\sqrt{36} = \sqrt{9} \times \sqrt{4}$? అగునా?	$\sqrt{81} = ?$	$\sqrt{9} \times \sqrt{9} =$ __ $\times$ __ $=$ __	$\sqrt{81} = \sqrt{9} \times \sqrt{9}$? అగునా?
$\sqrt{144} = ?$	$\sqrt{9} \times \sqrt{16} =$ __ $\times$ __ $=$ __	$\sqrt{144} = \sqrt{9} \times \sqrt{16}$? అగునా?	$\sqrt{144} = ?$	$\sqrt{36} \times \sqrt{4} =$ __ $\times$ __ $=$ __	$\sqrt{144} = \sqrt{36} \times \sqrt{4}$? అగునా?
$\sqrt{100} = ?$	$\sqrt{25} \times \sqrt{4} =$ __ $\times$ __ $=$ __	$\sqrt{100} = \sqrt{25} \times \sqrt{4}$? అగునా?	$\sqrt{1225} = ?$	$\sqrt{25} \times \sqrt{49} =$ __ $\times$ __ $=$ __	$\sqrt{1225} = \sqrt{25} \times \sqrt{49}$? అగునా?

కృత్యము

పైన పేర్కొన్న వర్గమూల సమస్య పట్టికను a మరియు b లు రెండు ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యలయిన, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$ కు తయారుచేయుము.

పై విధానము నుండి మనము వర్గమూల సమస్యలను సులభముగా సాధించవచ్చును.

ఉదాహరణ 1.9

$\sqrt{42.25}$ విలువ కనుగొనుము

సాధన:

$\sqrt{42.25}$ ను ఈ విధముగా వ్రాయవచ్చు $= \sqrt{\frac{4225}{100}} = \frac{\sqrt{4225}}{\sqrt{100}}$

పై విధముగా వ్రాయడం ద్వారా 4225 యొక్క వర్గమూలమును సులభముగా కనుగొనవచ్చును.

$\sqrt{4225} = 65$ మరియు కావున $\sqrt{42.25} = \sqrt{\frac{4225}{100}} = \frac{\sqrt{4225}}{\sqrt{100}} = \frac{65}{10} =$

దీర్ఘభాగహార పద్ధతి బదులు పై పద్ధతిలో కూడా దశాంశ సంఖ్యల వర్గమూలమును కనుగొనవచ్చు.

ప్రయత్నించుము

పై పద్ధతిని ఉపయోగించి 1.2321 మరియు 11.9025 లకు వర్గమూలము కనుగొనండి.

ఉదాహరణ 1.10

సూక్ష్మీకరించుము: $\sqrt{12} \times \sqrt{3}$

సాధన:

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ నియమాన్ని గుర్తుచేసుకొనుము. $\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$

Unit 1 - Numbers.indd 13 10-01-2020 17:38:47

ఉదాహరణ 1.11

సూక్ష్మీకరించుము: $\sqrt{\dfrac{98}{162}}$

సాధన:

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (b \neq 0)$ నియమాన్ని గుర్తుచేసుకొనుము.

$$\sqrt{\frac{98}{162}} = \sqrt{\frac{2\times 49}{2\times 81}} = \sqrt{\frac{49}{81}} = \sqrt{\frac{7^2}{9^2}} = \frac{7}{9}$$

ఉదాహరణ 1.12

సూక్ష్మీకరించుము: (i) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$ (ii) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

సాధన:

(i) $\sqrt{2\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{5^2}{3^2}} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ (ii) $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \sqrt{\frac{5^2}{4^2}} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

గమనిక: రెండవ సమస్యలో చూసిన వెంటనే $1\frac{3}{4}$ వర్గమూలము అని ఇవ్వడానికి ప్రయత్నించవచ్చు. కాని ఇది తప్పు. ఎందుకనగా మిశ్రమ భిన్నాన్ని అపక్రమ భిన్నంలోకి మార్చిన తరువాతనే $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (b \neq 0)$ అనే నియమాన్ని ఉపయోగించి వర్గమూలము కనుగొనవలెను.

1.2.7 వర్గమూలములను అంచనా వేయడం:

$\sqrt{40}$, 6 మరియు 7 లను ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాయగలమా? ఇక్కడ $\sqrt{40}$ ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య కాదు మరియు దాని వర్గమూలమును సులభముగా నిర్ణయించలేము. అందువలన $\sqrt{40}$ విలువను ఉజ్జాయింపుగా అంచనా వేయవచ్చు

40 కు దగ్గరగా గల వర్గసంఖ్యలు 36 మరియు 49 అని మనకు తెలుసు

కావున $36 < 40 < 49$ దీనిని $6^2 < 40 < 7^2$. గా వ్రాయవచ్చు.

వర్గమూలముగా తీసుకొన్నప్పుడు దీనిని $6 < \sqrt{40} < 7$ గా వ్రాయవచ్చు.

ప్రయత్నించుము

(i) 4, $\sqrt{14}$, 5 మరియు (ii) 7, $\sqrt{65}$, 8 లను ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాయుము.

అభ్యాసము 1.2

1. **ఖాళీలను పూరింపుము:**
   (i) ఒక సంఖ్యనందు 5 లేక 6 అంకెలు ఉన్నచో దాని వర్గమూలములో ________ అంకెలు ఉండును.
   (ii) $\sqrt{180}$ యొక్క విలువ ______ మరియు ________ మధ్య ఉండును.
   (iii) $\sqrt{10}\times\sqrt{6}\times\sqrt{15} =$ ______.
   (iv) $\dfrac{\sqrt{300}}{\sqrt{192}} =$ ______.
   (v) $\sqrt{65.61} =$ ______.

2. క్రింది వర్గమూలములను దగ్గరి పూర్ణాంకమునకు సవరించుము.
   (i) $\sqrt{440}$ (ii) $\sqrt{800}$ (iii) $\sqrt{1020}$

Unit 1 - Numbers.indd 14 10-01-2020 17:38:54

3. 1300కు ఏ కనిష్ట సంఖ్యను కూడిన ఖచ్చిత వర్గమగును. ఆ ఖచ్చిత వర్గమునకు వర్గమూలమును కూడా కనుగొనుము.

4. 6412 ఏ కనిష్ట సంఖ్య తీసివేసిన ఖచ్చిత వర్గమగును. ఆ ఖచ్చిత వర్గమునకు వర్గమూలమును కూడా కనుగొనుము.

5. దీర్ఘభాగహార పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలమును కనుగొనుము.
(i)17956 (ii) 11025 (iii) 6889 (iv) 1764 (v) 418609

6. క్రింది దశాంశ సంఖ్యలకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.:
i) 2.89 *ii)* 1.96 *iii)* 67.24 *iv)* 31.36 *v)* 2.0164 *vi)* 13.987

7. క్రింది భిన్నములకు వర్గమూలము కనుగొనుము.
$i)\ \frac{144}{221}$ $ii)\ 7\frac{18}{49}$ $iii)\ 6\frac{1}{4}$ $iv)\ 4\frac{25}{36}$

8. **సత్యమా లేక అసత్యమా తెల్పుము:**

$(i)\ \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} = 2$ $(ii)\ \sqrt{\frac{625}{1024}} = \frac{25}{32}$ $(iii)\ \sqrt{28} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

$(iv)\ \sqrt{225} + \sqrt{64} = \sqrt{289}$ $(v)\ \sqrt{1\frac{400}{441}} = 1\frac{20}{21}$

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

9. $\sqrt{48}$ విలువ సుమారుగా

(అ) 5 (ఆ) 6 (ఇ) 7 (ఈ) 8

10. $\sqrt{128} - \sqrt{98} + \sqrt{18} =$

(అ) $\sqrt{2}$ (ఆ) $\sqrt{8}$ (ఇ) $\sqrt{48}$ (ఈ) $\sqrt{32}$

11. $\sqrt{22 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}} =$

(అ) $\sqrt{25}$ (ఆ) $\sqrt{33}$ (ఇ) $\sqrt{31}$ (ఈ) $\sqrt{29}$

12. 123454321 యొక్క వర్గమూలములోని అంకెల సంఖ్య

(అ) 4 (ఆ) 5 (ఇ) 6 (ఈ) 7

1.3 ఘనములు మరియు ఘనసంఖ్యలు

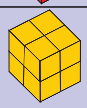
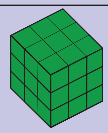
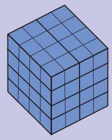
నీవు ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యతో గుణించి మరలా అదే సంఖ్యతో మరొకసారి గుణించిన వచ్చే ఫలితము ఘనసంఖ్య అవుతుంది. అంటే దీని అర్థము ఒకే సంఖ్యను మూడుసార్లు గుణించడం. n అనేది ఒక సంఖ్య అయిన దాని ఘనమును n^3 గా సూచిస్తారు.

ఘనసంఖ్యలను దృశ్యపరంగా ఒకే ప్రమాణ ఘనములతో కూడిన త్రిమితీయ ఘనములుగా సూచించవచ్చు. ఘనసంఖ్యలను ఖచ్చిత ఘనములు అని కూడా అంటారు. సహజసంఖ్యల యొక్క ఖచ్చిత ఘనములు 1, 8, 27, 64, 125, 216, .. మొదలగునవి.

మీకు తెలుసా?

రామానుజన్ సంఖ్య - $1729 = 12^3+1^3 = 10^3+9^3$

ఒకసారి రామానుజన్ అనారోగ్యం బారినపడినప్పుడు ప్రొఫెసర్ హర్డీ అతనిని పరామర్శించడానికి 1729 సంఖ్య గల టాక్సీలో వచ్చెను. ఆ 1729 సంఖ్య దురదృష్టకర సంఖ్య అని హర్డీ తెలిపెను. దానికి రామానుజన్ కాదు ఆ సంఖ్య గమ్మతైన సంఖ్య అని చెప్పెను. ఇది రెండు ఘనాల మొత్తముగా రెండు వేర్వేరు మార్గాల్లో వ్యక్తపరచబడే అతి చిన్న సంఖ్య అని రామానుజమ్ తెలిపెను. అదేవిధముగా 4104, 13832, 20683 అనేవి కొన్ని రామానుజన్ సంఖ్యలకు ఉదాహరణలు.

జ్యామితీయ రూపము	లబ్ద రూపము	సంకేతము	ఖచ్చిత ఘనము
	$1\times1\times1$	1^3	1
	$2\times2\times2$	2^3	8
	$3\times3\times3$	3^3	27
	$4\times4\times4$	4^3	64

1.3.1 ఘనసంఖ్యల యొక్క ధర్మములు:

	ధర్మములు	ఉదాహరణలు
1	ధనసంఖ్య యొక్క ఘనము ధనాత్మకము.	$6^3 = 6\times6\times6 = 216.$
2	ఋణసంఖ్య యొక్క ఘనము ఋణాత్మకము.	$(-7)^3 = (-7)\times(-7)\times(-7) = -$
3	ప్రతి సరిసంఖ్య యొక్క ఘనము సరిసంఖ్యయే	$2^3, 4^3, 6^3, 8^3$... అన్ని సరిసంఖ్యలు
4	ప్రతి బేసిసంఖ్య యొక్క ఘనము బేసిసంఖ్యయే.	$1^3, 3^3, 5^3, 7^3, 9^3$... అన్ని సరిసంఖ్యలు
5	ఒక సంఖ్య 0, 1, 4, 5, 6 లేక 9తో అంతమయిన దాని ఘనము కూడా 0, 1, 4, 5, 6 లేక 9తో అంతమగును.	$10^3 = 1000$, $11^3 = 1331$, $14^3 = 2744$ $15^3 = 3375$, $16^3 = 4096$, $19^3 = 6859$
6	ఒక సంఖ్య 2 లేక 8తో అంతమయిన దాని ఘనము కూడా 8 లేక 2తో అంతమగును.	$12^3 = 1728$, $18^3 = 5832$
7	ఒక సంఖ్య 3 లేక 7తో అంతమయిన దాని ఘనము కూడా 7 లేక 3తో అంతమగును.	$13^3 = 2197$, $17^3 = 4913$
8	మొదటి వరుస n సహజసంఖ్యల ఘనముల మొత్తము ఆ సంఖ్య మొత్తము యొక్క వర్గానికి సమానము.	$1^3+2^3+3^3+.....+n^3 = (1+2+3+.....+n)^2$ $1^3+2^3+3^3+4^3 = (1+2+3+4)^2$ ను సరిచూడుము.

Unit 1 - Numbers.indd 16

10-01-2020 17:39:00

గమనిక

- ఒక ఖచ్చిత ఘనము రెండు సున్నలతో అంతమవ్వదు.
- రెండంకెల సంఖ్య యొక్క ఘనములో 4 లేక 5 లేక 6 అంకెలు గల సంఖ్యగా ఉండును.

ప్రయత్నించుము

క్రింది సంఖ్యలను ఘనము చేయగా ఒకట్ల స్థానములో గల అంకెలను కనుగొనుము.

(i) 17 (ii) 12 (iii) 38

(iv) 53 (v) 71 (vi) 84

1.3.2 ఘనమూలము:

ఒక సంఖ్య ఘనమూలము కనుగొనుటకు ఆ సంఖ్యను ఘనము చేయగా ఘనమూలము వచ్చును. ఉదాహరణకు 27 యొక్క ఘనమూలము 3, ఎందుకనగా 3ను ఘనముచేయగా 27 వచ్చును.

సంకేతము:

x యొక్క ఘనమూలమును $\sqrt[3]{x}$ (లేక) $x^{\frac{1}{3}}$ తో సూచిస్తారు.

ఇక్కడ మరికొన్ని ఘనములు మరియు ఘనమూలములు కలవు.

$\sqrt[3]{1} = 1$ కావున $1^3 = 1$, $\sqrt[3]{8} = 2$ కావున $2^3 = 8$,

$\sqrt[3]{27} = 3$ కావున $3^3 = 27$, $\sqrt[3]{64} = 4$ కావున $4^3 = 64$,

$\sqrt[3]{125} = 5$ కావున $5^3 = 125$ మొదలగునవి.

ఘనములు	ఘన మూలములు	ఘనములు	ఘన మూలములు
1	1	729	9
8	2	1000	10
27	3	1331	11
64	4	1728	12
125	5	2197	13
216	6	2744	14
343	7	3375	15
512	8	4096	16

ఉదాహరణ 1.13

400 ఒక ఖచ్చిత ఘనమగునా?

సాధన:

ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి ద్వారా $400 = 2 \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5 \times 5$.

ఇక్కడ ఒకే ఒక త్రిపాది మాత్రమే కలదు. మరిన్ని త్రికాలు రావడానికి, '2' లు రెండు మరియు 5 ఒకటి అవసరమగును. కావున 400 ఖచ్చిత ఘనముకాదు.

ఉదాహరణ 1.14

675కు ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యను గుణించిన ఖచ్చిత ఘనము వచ్చును.

సాధన:

3	675
3	225
3	75
5	25
5	1
	1

$675 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$ ....(i)

675 కు గల ప్రధాన కారణాంకములను త్రికాలుగా సమూహపరచిన 5×5 మిగిలెను.

మనకు ఖచ్చిత ఘనమగుటకు ఇంకా ఒక 5 అవసరము.

$675 \times 5 = (3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5) \times 5$

$3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

ఇప్పుడు 3375 ఖచ్చిత ఘనము కావున 675 కు గుణించవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్య 5

ఆలోచించుము

పై ప్రశ్నలో గుణించడం బదులు భాగహారం ఇచ్చిన యెడల సాధన ఏవిధముగా మారును?

Unit 1 - Numbers.indd 17 10-01-2020 17:39:02

1.3.3 ఇవ్వబడిన సంఖ్యకు ఘనమూలమును ప్రధాన కారణాంకము ద్వారా కనుగొనుట

సోపానము 1: ఇచ్చిన సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకములుగా విడగొట్టుట.

సోపానము 2: ఒకే ప్రధానసంఖ్యలను త్రికాలుగా అమర్చుము.

సోపానము 3: ప్రతి త్రికము నుండి ఒక్కొక్క సంఖ్యను ఎంపికచేసి ఆ సంఖ్యలను లబ్దము చేయుము.

ఉదాహరణ 1.15

27000 కు ఘనమూలమును కనుగొనుము.

సాధన:

$27000 = 2\times2\times2\times3\times3\times3\times5\times5\times5$ కు ప్రధాన కారణాంకములు

$\therefore \sqrt[3]{27000} = 2\times3\times5 = 30.$

ఉదాహరణ 1.16

విశ్లేషించుము: i) $\sqrt[3]{\dfrac{9261}{8000}}$ ii) $\sqrt[3]{\dfrac{1728}{729}}$

సాధన:

i) $\sqrt[3]{\dfrac{9261}{8000}} = \dfrac{\sqrt[3]{9261}}{\sqrt[3]{8000}} = \dfrac{(21\times21\times21)^{1/3}}{(20\times20\times20)^{1/3}} = \dfrac{(21^3)^{1/3}}{(20^3)^{1/3}} = \dfrac{21}{20} =$

ii) $\sqrt[3]{\dfrac{1728}{729}} = \dfrac{\sqrt[3]{1728}}{\sqrt[3]{729}} = \dfrac{(12\times12\times12)^{1/3}}{(9\times9\times9)^{1/3}} = \dfrac{(12^3)^{1/3}}{(9^3)^{1/3}} = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3} = 1\dfrac{1}{3}$

అభ్యాసము 1.3

1. **ఖాళీలను పూరింపుము:**
   (i) 73 యొక్క ఘనములో ఒకట్ల స్థానములోని అంకె ____________
   (ii) రెండంకెల సంఖ్య యొక్క ఘనములో గల గరిష్ట అంకెల సంఖ్య ____________
   (iii) 540×50 యొక్క ఘనమూలము ____________
   (iv) 0.000004913 యొక్క ఘనమూలము ____________
   (v) 3333 కు ____________ కనిష్ట సంఖ్యను కూడిన ఖచ్చిత ఘనమగును.
2. **సత్యమా లేక అసత్యమా తెల్పుము.:**
   (i) 0.0012 యొక్క ఘనము 0.000001728.
   (ii) 250047 యొక్క ఘనము 63
   (iii) 79570 ఒక ఖచ్చిత ఘనముకాదు.

Q5F3Z8

3. 1944 ఖచ్చిత ఘనము కాదని నిరూపించుము.
4. 24 × 36 × 80 × 25 యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.
5. 10985 కు ఏ కనిష్ట సంఖ్యను భాగించిన దాని భాగఫలము ఖచ్చిత ఘనమగును.
6. ఖచ్చిత ఘనమగుటకు గుణించవలసిన రెండు ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యలను కనుగొనుము.
7. ఒక వర్గసంఖ్య యొక్క ఘనము 729, అయితే ఆ సంఖ్యకు వర్గమూలము కనుగొనుము.

Unit 1 - Numbers.indd 18 10-01-2020 17:39:03

8. 46656 యొక్క ఘనమూలమునకు వర్గమూలము ఎంత?

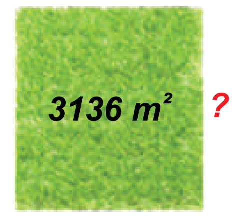
9. 729 మరియు 6859 లకు ఘనమూలమును ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి ద్వారా కనుగొనుము.

10. 200కు ఏ కనిష్ట సంఖ్యను గుణించిన ఖచ్చిత ఘనమగును.

ఇతర ఉదాహరణలు:

ఉదాహరణ 1.17

ఒక చతురస్రాకార పొలము వైశాల్యము 3136 మీ^{2} దాని చుట్టుకొలతను కనుగొనుము.



సాధన:

ఇవ్వబడిన చతురస్రాకార పొలము వైశాల్యము = 3136 మీ^{2}.

$\therefore$ చతురస్రార పొలము భుజము = $\sqrt{3136}\,m$ = 56 మీ (కనుగొంటిమి)

$\therefore$ చతురస్రాకార పొలము చుట్టుకొలత = $4 \times$ side

= 4×56

= 224 మీ

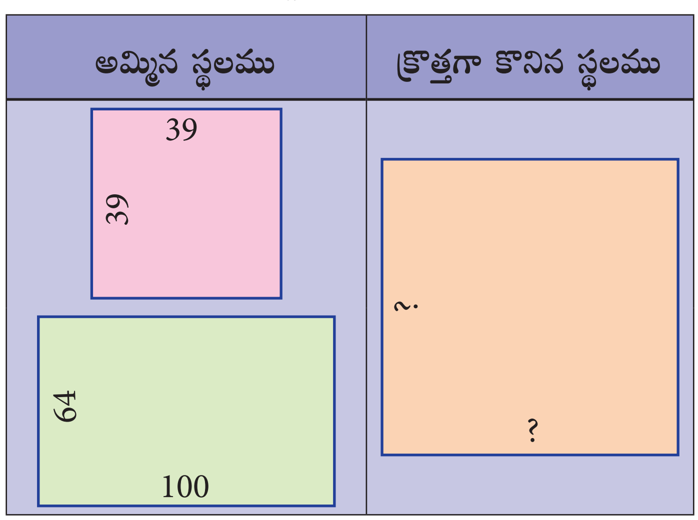
```
        5 6
    ---------
 5  | 31 36
    | 25
    ---------
106 |  6 36
    |  6 36
    ---------
    |     0
```

ఉదాహరణ 1.18

ఒక రియల్ ఎస్టేట్ వ్యాపారి వద్ద రెండు స్థలములు కలవు. ఒకటి భుజము 39మీ కలిగిన చతురస్రాకారంలోను, మరొకటి పొడవు 100మీ మరియు వెడల్పు 64మీ కొలతలు గల దీర్ఘచతురస్రాకారంలో గలదు. అతడు ఈ రెండు స్థలములను అమ్మి అంతే వైశాల్యము గల చతురస్రాకార స్థలమును కొనెను. క్రొత్తగా కొనిన చతురస్రాకార స్థలము యొక్క భుజము పొడవును కనుగొనుము.

సాధన:

లావాదేవీలను ఈ క్రింది విధముగా వివరించవచ్చును.



క్రొత్తగా కొనిన చతురస్రాకార స్థల వైశాల్యము = అమ్మిన చతురస్రాకార స్థల వైశాల్యము + అమ్మిన దీర్ఘచతురస్రాకార స్థల వైశాల్యము

= 39×39 + 100×64

= 1521 + 6400

= 7921 మీ^{2}

```
        8  9
    ----------
 8  | 79 21
    | 64
    ----------
169 | 15 21
    | 15 21
    ----------
    |     0
```

క్రొత్తగా కొనిన చతురస్రాకార స్థల భుజము పొడవు = $\sqrt{7921}$ = 89 మీ.

Unit 1 - Numbers.indd 19 10-01-2020 17:39:04

1.4 ఘాతాలు మరియు ఘాతాంకములు

కొన్ని సంఖ్యలను వర్గములుగా మరియు ఘనములుగా ఏవిధముగా వ్యక్తపరచవలెనో తెలుసుకొన్నాము. ఉదాహరణకు 25ను 5^2 గా , 125 ను 5^3 గా మనము వ్రాస్తాము.

సాధారణంగా, ఒకే కారణాంకము యొక్క పునరావృత గుణకాన్ని సూచించే సమాసమును **ఘాతాంకము** అంటారు.

5 ను ఆధారము లేక భూమి మరియు 2ను **ఘాతము** లేక **ఘాతాంకము** అంటారు.

ఘాతాంకము యొక్క విస్తరణ రూపమును ఆ సంఖ్య యొక్క కారణాంకము అని అంటారు.

1.4.1 ధనాత్మక ఘాతములు గల ఘాతాంకములు:

క్రింది ఉదాహరణను గమనించిన పూర్ణాంకముల ఘాతాంకములు క్రమంగా పెరుగుచున్నది.

$$2^1 = 2$$
$$2^2 = 2\times2=4$$
$$2^3 = 2\times2\times2=8$$
$$2^4 = 2\times2\times2\times2 =16$$
$$2^5 = 2\times2\times2\times2\times2=32$$
$$2^6 = 2\times2\times2\times2\times2\times2=64$$
$$2^7 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=128$$
$$2^8 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=256$$
$$2^9 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=512$$
$$2^{10} = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=1024$$

ఇదే విధంగా 2^{100} యొక్క విలువ ఏమవుతుంది?

బహుశా, **2^{100}=1,267, 650, 600, 228, 229, 401, 496, 703, 205, 376**

మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్యలను సూక్ష్మరూపములో వ్రాయుటకు ఘాతాంక రూపము ఉపయోగపడుతుంది.

1.4.2 సున్న మరియు ఋణాత్మక విలువలు గల ఘాతాంకములు:

ఈ అమరికను గమనించుము మొదటి నుండి ప్రారంభించిన తరువాత సోపానాలలో ఏమి జరుగును? ముందు సోపానమునకు సగము ఉండును. కావున 2^0 గురించి ఏమి చెప్పగలము?

$2^5 = 32$
$2^4 = 16$
$2^3 = 8$
$2^2 = 4$
$2^1 = 2$
$2^0 = ?$

మనము $3^5, 3^4, 3^3$, మొదలగు వాటిలో ఒక పట్టికను తయారుచేసిన 3^0 గురించి ఏమి చెప్పగలము?

ఏదైనా శూన్యేతర సంఖ్య యొక్క ఘాతము 0 అయిన దాని విలువ 1

$a^0 = 1$, ఇక్కడ $a \neq 0$

Unit 1 - Numbers.indd 20 10-01-2020 17:39:04

పై నమూనాను మరింత క్రిందికి విస్తరిస్తే ఏమి జరుగుతుందో చూద్దాం.
ముందువలె, ప్రారంభం నుండి వరుస సోపానాలలోని ఫలితాలు మునుపటి సోపానంలో సగం అని తెలుసుకొన్నాము.

$2^0 = 1$, కు తరువాత సోపానము 2^{-1}. దీని విలువ 1ను 2తో భాగించిన, $\frac{1}{2}$ వచ్చును. తరువాత సోపాన విలువ 2^{-1}, ఇది $\frac{1}{2}$ ను 2 తో భాగించిన $\frac{1}{4}$ వచ్చును.

$2^3 = 8$
$2^2 = 4$
$2^1 = 2$
$2^0 = 1$
$2^{-1} = \frac{1}{2}$
$2^{-2} = \frac{1}{4}$
$2^{-3} = \frac{1}{8}$

సాధారణంగా, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, m అనేది పూర్ణసంఖ్య.

1.4.3 ఘాతాంకములనుఉపయోగించి సంఖ్యలను విస్తరించడం

ముందు తరగతులలో, పూర్ణాంకములను ఏ విధంగా విస్తరించాలో మనము తెలుసుకొన్నాము.. ఉదాహరణకు,

$$5832 = (5\times1000) + (8\times100) + (3\times10) + (2\times1)$$
$$= 5\times10^3 + 8\times10^2 + 3\times10^1 + 2,$$ (ఘాతాంక రూపమును ఉపయోగించి).

దశాంశ స్థానములు వచ్చిన ఏమి చేయాలి? 10 యొక్క ఋణాత్మక ఘాతములు మనకు ఉపయోగపడును!

కావున, $58.32 = 50 + 8 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100}$

$$= (5\times10) + (8\times1) + \left(3\times\frac{1}{10}\right) + \left(2\times\frac{1}{100}\right)$$

$$= (5\times10^1) + (8\times10^0) + (3\times10^{-1}) + (2\times10^{-2})$$

5 8 3 2
2 × 1 = 2
3 × 10 = 30
8 × 100 = 800
5 × 1000 = 5000

ప్రయత్నించుము

ఘాతాంకములు ఉపయోగించి కింది సంఖ్యలను విస్తరించుము.
(i) 8120 (ii) 20,305 (iii) 3652.01 (iv) 9426.521

1.4.4 ఘాతాంక న్యాయములు:

ఘాతాంక న్యాయం కొన్ని ప్రాథమిక పరిక్రియల నుండి ఉత్పన్నమవుతుంది. ఒక సంఖ్యను ఎన్నిసార్లు గుణించవో ఘాతాంకము సూచిస్తుంది. ఋణ ఘాతాంకములు భాగించుటను తెల్పుతుంది. ఎందుకనగా గుణకారానికి విలోమము భాగహారం కాబట్టి.

గుణకార న్యాయం

ఈ న్యాయం ప్రకారము రెండు సమాన ఆధారము గల ఘాతాలను గుణించేటప్పుడు, ఘాతాంకములను కూడవలెను. అనగా

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ఇక్కడ a అనేది $(a\neq0)$, m, n అనేవి పూర్ణసంఖ్యలు. ఇక్కడ గమనించవలసినది రెండు పరిమాణంలో ఒకేవిధమైన ఆధారము ఉండవలెను.

Unit 1 - Numbers.indd 21
10-01-2020 17:39:06

ఉదాహరణలు:

a)	$2^3 \times 2^2 = 2^5$ (అనగా $8\times 4 = 32$ గా వ్రాయరాదు) $2^{3\times 2}$)
b)	$(-2)^{-4}\times(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^4}\times\frac{1}{(-2)^3}=\frac{1}{(-2)^4\times(-2)^3}=\frac{1}{(-2)^{4+3}}=\frac{1}{(-2)^7}=(-2)^{-7}$ *or* $(-2)^{-4}\times(-2)^{-3}=(-2)^{(-4)+(-3)}=(-2)^{-7}$
c)	$(-5)^3\times(-5)^{-3}=(-5)^{3-3}=(-5)^o=1$

భాగహార న్యాయము

రెండు సమాన ఆధారము గల ఘాతములను భాగించేటప్పుడు ఘాతాంకములను తీసివేయవలెనని ఈ న్యాయం తెల్పుతుంది.

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

ఇక్కడ a, అనేది $(a\neq 0)$, m, n అనేవి పూర్ణసంఖ్యలు. ఇక్కడ గమనించవలసినది రెండు పరిమాణములో ఒకే విధమైన ఆధారము ఉండవలెను.

ఇది ఎలా చేయవలెను? కింది ఉదాహరణలను చూసి అనుసరించుము

ఉదాహరణ:

అ)	$\frac{(-3)^5}{(-3)^2}=\frac{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}{(-3)\times(-3)}=(-3)\times(-3)\times(-3)=(-3)^3$ (లేక) $\frac{(-3)^5}{(-3)^2}=(-3)^5\times(-3)^{-2}=(-3)^{5-2}=(-3)^3$ (లేక) $\frac{(-3)^5}{(-3)^2}=(-3)^{5-2}$ భాగహార న్యాయం ప్రకారం $=(-3)^3$ [సూక్ష్మీకరించిన సాధన -27].
b)	$\frac{(-7)^{100}}{(-7)^{98}}=\frac{(-7)\times(-7)\times(-7)\times\ldots 100 \text{ సార్లు}}{(-7)\times(-7)\times(-7)\times\ldots 98 \text{ సార్లు}}=(-7)\times(-7)=49$ *(or)* $\frac{(-7)^{100}}{(-7)^{98}}=(-7)^{100-98}$ భాగహార న్యాయం ప్రకారం$=(-7)^2=49$.

ఘాత న్యాయము

ఘాతము యొక్క ఘాతము ఇచ్చినప్పుడు ఆ రెండు ఘాతాంకములను గుణించవలెనని, ఘాత న్యాయం తెలుపుతుంది.

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

ఇక్కడ a, అనేది $(a\neq 0)$, m, n అనేవి పూర్ణసంఖ్యలు.

ఉదాహరణలు:

$$[(-2)^3]^2 = [(-2)\times(-2)\times(-2)]^2 = [-8]^2 = 64$$

(లేక)

$$[(-2)^3]^2 = [-8]^2 = (-8)\times(-8) = 64$$

(లేక)

$$[(-2)^3]^2 = (-2)^{3\times 2} = (-2)^6 = 64$$

(ఘాత న్యాయం ఉపయోగించి)

ప్రయత్నించుము

a,b అనేవి శూన్యేతర సంఖ్యలు మరియు m, n అనేవి పూర్ణసంఖ్య అయిన క్రింది న్యాయములను సరిచూడుము.

1. సున్న ఘాతాంక న్యాయం,: $a^0 = 1$.
2. ఒకే విధమైన ఘాతముల లబ్దము $a^m \times b^m = (ab)^m$ గుణకార న్యాయం నుండి
3. ఒకే ఘాతము గల భిన్నము భాగహార న్యాయము నుండి $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

ఉదాహరణ 1.19

(i) 4^{-3} (ii) $\dfrac{1}{2^{-3}}$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన:

(i) $4^{-3} = \dfrac{1}{4^3} = \dfrac{1}{4\times4\times4} = \dfrac{1}{64}$ (ii) $\dfrac{1}{2^{-3}} = 2^3 = 2\times2\times2 = 8$

ఉదాహరణ 1.20

సూక్ష్మీకరించుము: (i) $(-2)^5 \times (-2)^{-3}$ (ii) $\dfrac{3^2}{3^{-2}}$

సాధన:

(i) $(-2)^5 \times (-2)^{-3} = (-2)^{5-3} = (-2)^2 = -2\times -2 = 4$.

(ii) $\dfrac{3^2}{3^{-2}} = 3^2 \times 3^2 = 9 \times 9 = 81$

ఉదాహరణ 1.21

4^{-5} ను 2 ఆధారముగా గల ఘాతముగా వ్రాయుము.

సాధన:

$4 = 2^2$, కావున, $4^{-5} = (2^2)^{-5} = 2^{2\times(-5)} = 2^{-10}$ [ఇక్కడ ఘనము $(a^m)^n = a^{mn}$ ఉపయోగించుము]

ఉదాహరణ 1.22

సూక్ష్మీకరించి మరియు వచ్చిన జవాబును ఘాతరూపములో వ్యక్తపరుచుము.:

(i) $(3^5 \div 3^8)^5 \times 3^{-5}$ (ii) $(-3)^4 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^4$

సాధన:

(i) $\left(\dfrac{3^5}{3^8}\right)^5 \times 3^{-5} = (3^{5-8})^5 \times 3^{-5} = (3^{-3})^5 \times 3^{-5} = 3^{-3\times5} \times 3^{-5} = 3^{-15} \times 3^{-5} = 3^{-15-5} = 3^{-20} = \dfrac{1}{3^{20}}$

(ii) $(-3)^4 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^4 = 3^4 \times \dfrac{5^4}{3^4} = 5^4 = 625$

ఉదాహరణ 1.23

$(-7)^{x+2} \times (-7)^5 = (-7)^{10}$ అయిన x విలువ కనుగొనుము.

సాధన:

$$(-7)^{x+2} \times (-7)^5 = (-7)^{10}$$

$$(-7)^{x+2+5} = (-7)^{10}$$

ఆధారములు సమానము కావున ఘాతాంకములు సమానము

$$x + 7 = 10$$

$$x = 10 - 7 = 3$$

1.4.5 ప్రామాణిక రూపము మరియు సాంకేతిక రూపము:

ఒక సంఖ్యకు ప్రామాణిక రూపం మనకు సాధారణంగా వ్రాసే సంఖ్య మాత్రమే. ప్రతి అంకె విలువను చూపించుటకు విస్తరణ రూపాన్ని ఉపయోగిస్తాము. ఇది ప్రతి అంకె మొత్తముగా చూపబడుతుంది. దానికి సరిపోయే స్థాన విలువ ఒకట్లు, పదులు, వందలు మొదలైన వాటితో గుణించాలి.

ఉదాహరణ:

195 ప్రామాణిక రూపంలో గలదా?.

$195 = 1 \times 100 + 9 \times 10 + 5$

ప్రామాణిక రూపం (195) — విస్తరణ రూపం ($1 \times 100 + 9 \times 10 + 5$)

ఖగోళశాస్త్రవేత్తలు, జీవశాస్త్రవేత్తలు, భౌతికశాస్త్రవేత్తలు మరియు ఇంజనీర్లకు పెద్ద పరిమాణాన్ని కొలుచుటకు కొలతలు అవసరమగును. అవి ప్రామాణిక రూపంలోఉన్న కొలవడం అతి కష్టమగును. అందువలన అవి సాంకేతిక రూపములో ఉన్నచో దానిని అర్థము చేసుకోవడం మరియు లెక్కించడం సులభము.

ఒక సంఖ్య సాంకేతిక రూపంలో ఉన్నట్లయితే ఆ సంఖ్య (పూర్ణసంఖ్య లేదా దశాంశ సంఖ్య) మరియు 10 యొక్క ఘాతముల లబ్దముగా ఉంటుంది. మనము దశాంశము (దశాంశ బిందువు) 1 నుండి 10 లోపల ఒక సంఖ్య వచ్చువరకు ముందువైపుకు లేదా వెనుక వైపుకు జరుపవలెను. దశాంశ బిందువును ముందు వైపుకు లేదా వెనుక వైపుకు ఎన్ని స్థానములు జరిపినామో దానిని బట్టి 10 యొక్క ఘాతమును కూడవలెను.

గమనిక

1. ధన ఘాతాంకములో 1.3×10^{12} పెద్దసంఖ్యను సూచిస్తుంది.
2. ఋణ ఘాతాంకములో 7.89×10^{-21} చిన్నసంఖ్యను సూచిస్తుంది.

Unit 1 - Numbers.indd 24 10-01-2020 17:39:09

ఉదాహరణలు:

ప్రామాణిక రూపము	సాంకేతిక రూపము	ప్రామాణిక రూపము	సాంకేతిక రూపము
0.00123	1.23×10^{-3}	123	1.23×10^{2}
0.0123	1.23×10^{-2}	1,230	1.23×10^{3}
0.123	1.23×10^{-1}	12,300	1.23×10^{4}
1.23	1.23×10^{0}	1,23,000	1.23×10^{5}
12.3	1.23×10^{1}	12,30,000	1.23×10^{6}

సాంకేతిక రూపములో వ్రాయుటకు $\mathbf{N \times 10^{a}}$ ను అనుసరించవలెను.

N అనేది 1 నుండి 10 మధ్యగల సంఖ్య, కాని 10కాదు, మరియు a అనేది పూర్ణసంఖ్య (ధనాత్మకము లేక ఋణాత్మక సంఖ్య)

మరికొన్ని ఉదాహరణలు:

(a) భూ వ్యాసము 12756000 మైళ్ళు. దీనిని సాంకేతిక రూపంలో వ్రాసిన 1.2756×10^{7} మైళ్ళుగా వ్రాయవచ్చు

(b) బృహస్పతి గ్రహం యొక్క ఘనపరిమాణము 143,300,000,000,000 కి.మీ^{3} దీనిని సులభముగా సాంకేతిక రూపంలో $1\,433 \times 10^{14}$ కి.మీ^{3} గా వ్రాయవచ్చు.

(c) ఒక బ్యాక్టీరియా పరిమాణము 00000085 మి.మీ. దీనిని సాంకేతిక రూపంలో 8.5×10^{-7} మి.మీగా వ్రాయవచ్చు.

ఉదాహరణ 1.24

సాంకేతిక రూపంలో వ్రాయుము: (i) 1642.398 (ii) $(7 \times 10^{2})(5.2 \times 10^{7})$ (iii) $(3.7 \times 10^{-5})(2 \times 10^{-3})$

సాధన:

(i) $1642.398 = 1.642398 \times 10^{3}$

(ii) $(7 \times 10^{2})(5.2 \times 10^{7}) = 36.4 \times 10^{9} = 3.64 \times 10^{10}$

(iii) $(3.7 \times 10^{-5})(2 \times 10^{-3}) = 7.4 \times 10^{-8}$

ఉదాహరణ 1.25

ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయుము: (i) 2.27×10^{-4}

(ii) కాంతి ఒక సెకనుకు 1.86×10^{5} మైళ్ళ దూరం ప్రయాణించును.

సాధన:

(i) $2.27 \times 10^{-4} = 0.000227$. (ii) కాంతి ఒక సెకనుకు 1.86×10^{5} మైళ్ళ దూరం ప్రయాణించును.

= సెకనుకు 186000 మైళ్ళు

ప్రయత్నించుము

1. ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయుము: యురేనస్ గ్రహము యొక్క బరువు 8.68×10^{25} కి.గ్రా.
2. సాంకేతిక రూపంలో వ్రాయుము: (i) 0.000012005 (ii) 4312.345 (iii) 0.10524
(iv)సూర్యునికి మరియు గ్రహమునకు మధ్య గల దూరము 1.4335×10^{12} మైళ్ళు

అభ్యాసము 1.4

1. **ఖాళీలను పూరింపుము:**

(i) $(-1)^{\text{సరిసంఖ్య}}$ ______________.

(ii) $a \neq 0$, అయిన a^0 అనేది ______________.

(iii) $4^{-3} \times 5^{-3} =$ ______________.

(iv) $(-2)^{-7} =$ ______________.

(v) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-5} =$ ______________.

2. **సత్యమా లేక అసత్యమా తెల్పుము:**

(i) $8^x = \frac{1}{64}$, అయిన x విలువ -2

(ii) $(256)^{\frac{-1}{4}}$ యొక్క సూక్ష్మరూపము $\frac{1}{4}$.

(iii) 2×10^{-4} యొక్క ప్రామాణిక రూపము 0.0002.

(iv) 123.456 యొక్క సాంకేతిక రూపము 1.23456×10^{-2}

(v) 3^{-7} యొక్క గుణకార విలోమము 3^7.

3. విలువ కనుగొనుము: (i) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ (iii) (-3) (iv) $(-3)^4$ (v) $\left(\frac{-5}{6}\right)^{-3}$

(vi) $\left(2^{-5} \div 2^7\right) \times 2^{-2}$ (vii) $\left(2^{-1} \times 3^{-1}\right) \div 6^{-2}$ (viii) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$

4. విలువ కనుగొనుము: (i) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2$ (ii) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^7$

5. విలువ కనుగొనుము: (i) $\left(5^0 + 6^{-1}\right) \times 3^3$ (ii) $\left(2^{-1} \times 3^{-1}\right) \div 6^{-1}$ (iii) $\left(3^{-1} + 4^{-2} + 5^{-3}\right)^0$

6. విలువ కనుగొనుము: (i) $(3^2)^3 \times (2 \times 3^5)^{-2} \times (18)^2$ (ii) $\frac{9^2 \times 7^3 \times 2^5}{84^3}$ (iii) $\frac{2^{-8} \times 4^2 \times 3^5}{3^7 \times 2^5}$

Unit 1 - Numbers.indd 26 10-01-2020 17:39:13

7. సాధించుము x : (i) $\frac{10^x}{10^{-3}} = 10^9$ (ii) $\frac{2^{2x-1}}{2^{x+2}} = 4$ (iii) $\frac{5^5 \times 5^{-4} \times 5^x}{5^{12}} = 5^{-5}$

8. ఘాతాంకములను ఉపయోగించి విస్తరించుము.: (i) 6054.321 (ii) 897.14

9. ప్రామాణిక రూపంలో కనుగొనము:

(i) $8\times10^4 + 7\times10^3 + 6\times10^2 + 5\times10^1 + 2\times1 + 4\times10^{-2} + 7\times10^{-4}$

(ii) $5\times10^3 + 5\times10^1 + 5\times10^{-1} + 5\times10^{-3}$

10. హైడ్రోజన్ రూపము వ్యాసార్ధము 2.5×10^{-11} మీ. ఈ సంఖ్యను ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయుము.

11. క్రింది వాటిని సాంకేతిక రూపంలో వ్రాయుము.

(i) 467800000000 (ii) 0.000001972

12. సాంకేతిక రూపములో వ్రాయుము:

(i) భూ ఘనపరిమాణము 1,083,000,000,000 క్యూబిక్ కిలోమీటర్లు

(ii) నీవు ఒక బకెట్టును ధూళితో నింపిన బకెట్టులో ఉన్న మొత్తం ధూళి భూమి యొక్క మొత్తం భాగంలో 0.0000000000000000000000016 కి.గ్రా ఉంటుంది.

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

13. $(-4)^{-1}$ కు ఏ సంఖ్యను గుణించిన లబ్ధము 10^{-1}? అగును?

(అ) $\frac{2}{3}$ (ఆ) $\frac{-2}{5}$ (ఇ) $\frac{5}{2}$ (ఈ) $\frac{-5}{2}$

14. 0.0000000002020 యొక్క సాంకేతిక రూపము

(అ) 2.02×10^9 (ఆ) 2.02×10^{-9} (ఇ) 2.02×10^{-8} (ఈ) 2.02×10^{-10}

15. $(-2)^{-3}\times(-2)^{-2}$ విలువ

(అ) $\frac{-1}{32}$ (ఆ) $\frac{1}{32}$ (ఇ) 32 (ఈ) –32

16. సరికానిది ఏది?

(అ) $\left(\frac{-1}{4}\right)^2 = 4^{-2}$ (ఆ) $\left(\frac{-1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ (ఇ) $\left(\frac{-1}{4}\right)^2 = 16^{-1}$ (ఈ) $-\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 16^{-1}$

17. $\left(\frac{p}{q}\right)^{1-3x} = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$, అయిన x విలువ

(అ) 4^{-1} (ఆ) 3^{-1} (ఇ) 2^{-1} (ఈ) 1^{-1}

Unit 1 - Numbers.indd 27 10-01-2020 17:39:16

అభ్యాసము 1.5

ఇతర అభ్యాస సమస్యలు

1. ఒక చతురస్రాకార తివాచీ ఒక పెద్ద హాలు మధ్యలో 1024 మీ^{2} వైశాల్యమును ఆక్రమించిన ఆ తివాచీ భుజము పొడవు కనుగొనుము.

2. 4489 సెం.మీ^{2} వైశాల్యము గల ఒక నాయకుని విగ్రహము చతురస్రాకారంలో కలదు. విగ్రహము చుట్టూ 2 సెం.మీ కొలత గల చెక్క చట్రము కలదు. ఆ చట్రము వైశాల్యము కనుగొనుము.

3. ఒక తోటలో 2401 చెట్లు సమాన వరుసలో నాటబడెను. వరుసల సంఖ్యను, ఒకొక్క వరుసలో గల చెట్ల సంఖ్యను కనుగొనుము.

4. $\sqrt[3]{1906624} \times \sqrt{x} = 3100$, అయిన x విలువను కనుగొనుము.

5. $(625)^x = 15625$, అయిన x^2 మరియు x^3 విలువను కనుగొనుము.

6. $2^{m-1} + 2^{m+1} = 640$, అయిన m విలువ కనుగొనుము.

7. సూక్ష్మీకరించుము: $\dfrac{16 \times 10^2 \times 64}{4^2 \times 2^4}$

8. సాంకేతిక రూపంలో జవాబులిమ్ము:
మానవ హృదయం ఒక నిమిషమునకు 80 సార్లు కొట్టుకొన్న i) ఒక గంటకు?
ii) ఒక రోజుకు? iii) ఒక సంవత్సరమునకు? iv) 100 సంవత్సరములకు ఎన్నిసార్లు కొట్టుకొనవలెను??

సవాలు ప్రశ్నలు

9. ఒక పెండ్లిపత్రిక వైశాల్యము 56సెం.మీ^{2} పత్రిక భుజము పొడవు ఏ రెండు పూర్ణాంకముల మధ్య కలదు?

10. ఒక చతురస్రాకార వరండాను నింపుటకు 1 చదరం వైశాల్యం గల నేలపలకలు 225 చతురస్రాకార నేల పలకలు అవసరమగును. అయితే ఆ వరండా భుజము పొడవు కనుగొనుము.

11. 1536 జవాన్ల సమూహం ఒక చతురస్రాకార కవాతు ఏర్పాటు చేయుటకు సాధ్యమగునా? సాధ్యం కాకపోతే కవాతు ఏర్పాటుకు ఇంకా ఎంతమంది జవాన్లు అవసరమవుతారు?

12. 176.252176 ను అదే సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చు దశాంశ భిన్నమును కనుగొనుము.

13. $\sqrt{2862.25} + \sqrt{28.6225}$ ను ఉపయోగించి $\sqrt{286225}$ విలువను కనుగొనుము.

14. గాజులో కాంతి యొక్క వేగము 2×10^8 మీ/సె. కాలము $= \dfrac{\text{దూరము}}{\text{వేగము}}$ సూత్రమును ఉపయోగించి గాజులో 7200కి.మీ ప్రయాణించుటకు పట్టు కాలమును కనుగొనుము.

15. సూక్ష్మీకరించుము: $(3.769 \times 10^5) + (4.21 \times 10^5)$

16. క్రింది వాటిని ఆరోహణక్రమంలో అమర్చుము.: $16^{25}, 8^{100}, 3^{500}, 4^{400}, 2^{600}$

Unit 1 - Numbers.indd 28 10-01-2020 17:39:16

కృత్యము

$$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3$$
$$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3$$
$$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3$$

పై అమరికను గమనించి ఈ అమరిక నుండి $15^3 - 14^3$ విలువను కనుగొనుము.

ఆలోచించుము

$$1^3 = 1 = 1$$
$$2^3 = 8 = 3 + 5$$
$$3^3 = 27 = 7 + 9 + 11$$

ఈ అమరికను గమనించి కొనసాగించిన 7^3 విలువను వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తముగా కనుగొనుము.

సారాంశము

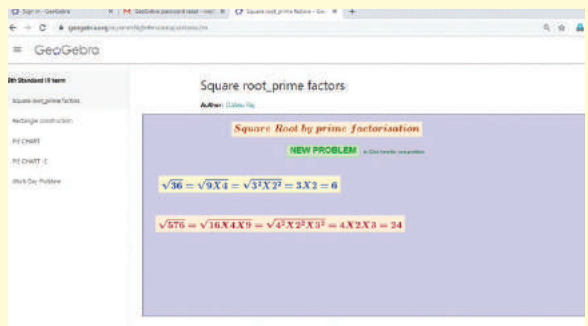
- మనము ఒక సహజసంఖ్య n ను మరియొక సహజసంఖ్య m నుండి $n = m^2$ గా చూపిన యెడల n అనేది ఒక వర్గసంఖ్య అని చెప్పవచ్చు.
- మొదటి n వరుస బేసిసంఖ్యల మొత్తము n^2
- బేసి సంఖ్య వర్గమును రెండు వరుస సహజసంఖ్యల మొత్తముగా వ్రాయవచ్చు.
- గణితపరంగా a, b, c అనే మూడు సంఖ్య పైథాగోరియన్ త్రికాలు కావలెనన్నా ఏదైనా రెండు భుజముల వర్గముల మొత్తము మూడవ భుజము వర్గమునకు సమానంగా ఉండవలెను.
- n సహజసంఖ్య యొక్క వర్గమూలమును $\sqrt{n}$ (లేదా) $n^{\frac{1}{2}}$,గా వ్రాస్తాము.
- ఒక సంఖ్య వర్గములో గల ప్రధాన కారణాంకముల సంఖ్య = ఆ సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకముల సంఖ్యకు రెట్టింపుగా ఉండును.
- n అనేది ఒక సంఖ్యలోని అంకెల సంఖ్య అయిన, దాని వర్గమూలములో

  గల అంకెల సంఖ్య $= \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} & n \text{ బేసి సంఖ్య అయిన} \\ \dfrac{n}{2} & n \text{ సరి సంఖ్య అయిన} \end{cases}$
- Fp మరియు q అనే ఏదైనా రెండు ధనాత్మక సంఖ్యలయిన (i) $\sqrt{pq} = \sqrt{p} \times \sqrt{q}$ మరియు

  (ii) $\sqrt{\dfrac{p}{q}} = \dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$
- ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యచే మూడుసార్లు గుణించగా వచ్చుసంఖ్యను ఆ సంఖ్య యొక్క ఘనము అంటారు.
- అనగా మూడు సమాన సంఖ్యల లబ్దమే ఆ సంఖ్య యొక్క ఘనము అవుతుంది.
- ఒకే కారణాంకము యొక్క ఆవర్తన లబ్దమును సూచించు సమాసమును మనము ఘాతము అంటాము.
- ఘాతాంకము అనేది ఒక ఆధార సంఖ్యను ఎన్నిసార్లు కారణాంకముగా ఉపయోగించబడినదానిని సూచించును.
- ఘాతాంక న్యాయాలు: (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (iii) $(a^m)^n = a^{mn}$
- మరిన్ని ఫలితాలు: (i) $a^0 = 1$ (ii) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$ (iv) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$
- ఒక సంఖ్యను సాంకేతిక రూపంలో వ్రాయుటకు మనము $N \times 10^a$ రూపమును అనుసరించవలెను. ఇక్కడ N అనేది 1 మరియు 10 మధ్యగల అంకె కాని 10 మాత్రము కాదు, a అనేది (ధన లేక ఋణ) పూర్ణసంఖ్య.

అంతర్జాల కృత్యము

ఆశించు ఫలితము

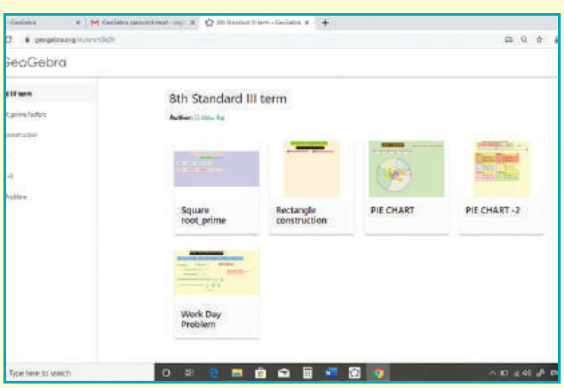


సోపానము – 1

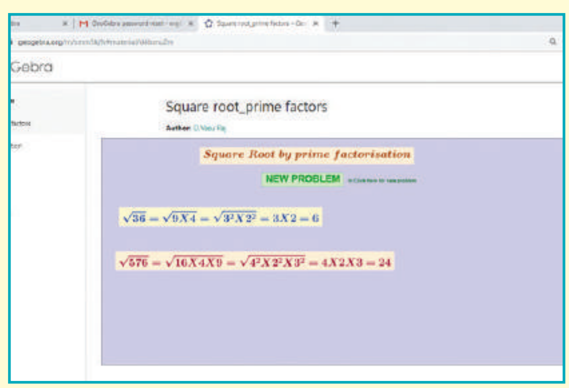
బ్రౌసర్‌ను ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇచ్చిన URL లింకును టైపు చేయుము లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము. GeoGebra అనే వర్క్‌షీటులో 8వ తరగతి 3వ అంతరము అనే పేజీ ఓపెన్ అగును. “Square root_prime factors” అనే వర్క్‌షీటును ఎంపిక చేయుము.

సోపానము - 2

“NEW PROBLEM” వద్ద క్లిక్ చేసి లెక్కలను సరిచూడుము.



సోపానము – 1



సోపానము – 2

Browse in the link
NUMBERS:
https://www.geogebra.org/m/xmm5kj9r or
Scan the QR Code.

B358_8_MATHS_EM

Unit 1 - Numbers.indd 30 10-01-2020 17:39:17

2 జీవనాధార గణితము

అభ్యసన లక్ష్యాలు

F9I9R9

❖ అనులోమ మరియు విలోమ అనుపాతములు పునశ్చరణ.

❖ సంయుక్త మార్పును తెలుసుకొనుట దానిని సమస్య సాధనకు ఉపయోగించుట.

❖ కాలము – పని సమస్యలను సాధించుట.

2.1 పరిచయము

ఎనిమిదవ తరగతి గణిత తరగతిలో క్రింది సంభాషణ జరుగుచున్నది.

టీచర్: విద్యార్థులు! సంయుక్త మార్పు (సంయుక్త అనుపాతం) అంటే ఏమిటో తెలుసుకోవడానికి ముందు మీరు ఇప్పటికే ఏడవ తరగతిలో నేర్చుకొన్న అనులోమ మరియు విలోమ అనుపాతములపై కొన్ని ప్రశ్నలు వేస్తాను. మీలో ఎవరైనా అనులోమానుపాతము అంటే ఏమిటో నాకు చెప్పగలరా?

భారతి: సరే, టీచర్ గారు! రెండు రాశులలో, ఒక రాశిలోని పెరుగుదల లేక తగ్గుదల మరొక రాశిలో పెరుగుదల లేక తగ్గుదలకు కారణమైతే ఆ రెండు రాశులు అనులోమానుపాతము (అనులోమ చరత్వాన్ని) కలిగియుంటాయి.

టీచర్: శభాష్ భారతి! ఒక ఉదాహరణ ఇవ్వగలవా!

భారతి: ఖచ్చితంగా టీచర్ గారు! నేను, నా పుట్టినరోజు పార్టీలో నా ప్రతి స్నేహితుడికి 2 పెన్నులు ఇవ్వాలనుకొంటే, కొనుగోలు చేయాల్సిన పెన్నులు సంఖ్య పార్టీకి హాజరయ్యే స్నేహితుల సంఖ్యతో అనులోమానుపాతములో ఉంటుంది, టీచర్ గారు. క్రింది పట్టిక స్పష్టంగా అర్థం చేసుకోవడానికి సహాయపడుతుంది

స్నేహితుల సంఖ్య	1	2	5	12	15
పెన్నుల సంఖ్య	2	4	10	24	30

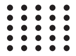
టీచర్: భారతి! చాలా మంచి ఉదాహరణ చెప్పావు. విద్యార్థులు భారతికి చప్పట్లు కొట్టండి ముఖేష్, మరి నీవు విలోమానుపాతము గురించి తెలుపగలవా?

ముఖేష్: అలాగే టీచర్‌గారు! మా తరగతిలోని 30 మంది విద్యార్థులు, గ్రామంలో ఆరోగ్య అవగాహన ప్రచారం కోసం వీధుల్లోకి క్రమపద్ధతిలో తీసుకువెళితే అడ్డ వరుసలు మరియు నిలువు వరుసల సంఖ్యలను విలోమానుపాతములో చూడవచ్చు గురువుగారు. ఈ క్రింది పట్టిక నుండి సులభంగా అర్థమవుతుంది.

నిలువు వరుసలోని విద్యార్థుల సంఖ్య	1	2	3	5	6
అడ్డ వరుసలోని విద్యార్థుల సంఖ్య	30	15	10	6	5

Unit -2 Life Mathematics.indd 31 10-01-2020 17:39:30

టీచర్: మంచిది ముఖేష్, సరియైన ఉదాహరణతో వివరించావు.

ముఖేష్: మనము ఈ ఏర్పాట్లలో కొన్నింటిని ఇలా  మరియు గా కూడా చూపించ వచ్చును. మరియు వీటి వ్యతిరేక నిష్పత్తి కూడా అడ్డ వరుసలు మరియు నిలువు వరుసలలో చూడవచ్చును.

టీచర్: శభాష్ ముఖేష్! విద్యార్థులు, పై రెండు ఉదాహరణల ద్వారా మీరు 7వ తరగతిలో చదివిన అనులోమానుపాతము మరియువిలోమానుపాతమును గురించి బాగుగా అర్థం చేసుకొనియుంటారు. నేను ఇప్పుడు మీకు సంయుక్త మార్పు (నిష్పత్తి)ని వివరించెదను. కొన్ని సమస్యలలో రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ మార్పుల స్పృంకలనములను కలిగియుండును. దీనినే సంయుక్త మార్పు (నిష్పత్తి) అంటారు.

రాగిని: టీచర్‌గారు! సంయుక్త నిష్పత్తి (మార్పు)ను ఉదాహరణ ద్వారా వివరించగలరా!

టీచర్: అలాగే రాగిని, దానిని వివరించుటకు ముందు నేను మీ అందరినీ కొన్ని ప్రశ్నలు అడుగుతాను. కని ఒక పనిని 2 గంటలలో పూర్తి చేయగలదు, మరియు విజి 2 గంటల్లో పూర్తి చేయగలదు, అయిన ఇరువురు కలిసి ఎన్ని గంటలలో ఆ పనిని పూర్తి చేయగలరు?

భారతి: $2\frac{1}{2}$ గంటల్లో పూర్తి చేయగలరు అని నేను తలచుచున్నాను, నేను చెప్పింది సరియేనా టీచరుగారు.

టీచర్: భారతి! అది నిజం కాదు! నేను నీకు సరియైన సమాధానమును చెబుతాను. కాలము మరియు పని శీర్షిక క్రింద వచ్చే ఈ రకమైన ప్రశ్నలకు కొంత వివరణ అవసరం మరియు ఈ విషయములను ఈ విడతలో నేర్చుకొందాము.

ఇప్పుడు, అనులోమానుపాతము మరియు విలోమానుపాతముల యొక్క భావనలను పునశ్చరణ చేసుకొందాము.

2.2 అనులోమానుపాతము

ఒక రాశిలోని పెరుగుదల లేక తగ్గుదల మరొక రాశిలో పెరుగుదల లేక తగ్గుదలకు కారణమైతే ఆ రెండు రాశులు అనులోమానుపాతము కలిగియున్నాయని అంటాము. అదేవిధముగా, ఇందు $\frac{x}{y}=k$ ఒక స్థిర ధన సంఖ్య. అయిన x మరియు y అనులోమానుపాతము కలిగియుండును.

అనులోమానుపాతమునకు ఉదాహరణలు:

1. దూరము – కాలము (స్థిర వేగముతో ఉన్నప్పుడు) : దూరము అధికమైనప్పుడు, చేరుటకు పట్టు కాలము కూడా అధికమగును మరియు విపర్యయము కూడా.
2. కొనుగోలు – ఖర్చు చేయుట : ఒక కుటుంబంలో పండుగ కాలములలో వినియోగాల కొనుగోలు అధికమైన వారి ఖర్చు పరిమితి కూడా అధికమగును మరియు విపర్యయము కూడా
3. పని కాలము : సంపాదన: తక్కువ కాలము పనిచేసిన, సంపాదన కూడా తక్కువగును మరియు విపర్యయము కూడా.

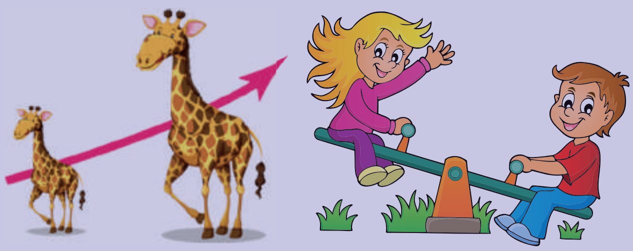
2.3 విలోమానుపాతము

రెండు రాశులలో, ఒక రాశిలోని పెరుగుదల లేక తగ్గుదల మరొక రాశిలోనికి తగ్గుదల లేక పెరుగుదలకు కారణమైతే ఆ రెండు రాశులు విలోమానుపాతమును కలిగియున్నాయని అంటాము. $xy=k$ ఇక్కడ k ఒక ధన స్థిరసంఖ్య అయిన x మరియు y విలోమానుపాతము కలిగియున్నవి.

Unit -2 Life Mathematics.indd 32 10-01-2020 17:39:31

విలోమానుపాతమునకు ఉదాహరణలు:

1. ధర – వినియోగం: వస్తువుల ధర అధికమైన, దాని వినియోగం సహజముగానే తగ్గను మరియు విపర్యయము కూడా
2. పని వారు – కాలము: ఒక పని పూర్తిచేయుటకు అధిక పనివారిని నియమించిన, ఆ పని పూర్తి అగుటకు పట్టు కాలము తక్కువ అగును మరియు విపర్యయము కూడా.
3. వేగము – కాలము: (ఖచ్చిత దూరము ఇచ్చినప్పుడు) తక్కువ వేగముతో ప్రయానించునపుడు ఇచ్చిన దూరమును పూర్తిచేయుటకు ఎక్కువ కాలము పట్టును మరియు విపర్యయము కూడా.

ఔత్సాహిక గణితము – నిత్యజీవితములో జీవనాధార గణితము	
	
కాలక్రమేణా జిరాఫీ యొక్క పెరుగుదల అనులోమానుపాతమునకు ఒక ఉదాహరణ మరియు తూగుడు బల్ల (see-saw) విలోమానుపాతమునకు ఉదాహరణ.	A, B మరియు c అను ముగ్గురు వ్యక్తులు క్రమంగా x, y మరియు z రోజులలో పని పూర్తిచేయుదురు అయిన వారి వేతనముల నిష్పత్తి $\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}$.

ప్రయత్నించుము

క్రింది ఉదాహరణలను, అనులోమానుపాతమా లేక విలోమానుపాతమమా అని వర్గీకరించుము.

(i) పప్పు దినుసుల బరువు మరియు వాటి ధర.
(ii) బస్సులో ప్రయాణించు దూరము మరియు టికెట్టు ధర.
(iii) ఒక నిర్దిష్ట దూరాన్ని పూర్తిచేయడానికి అథ్లెట్ వేగం.
(iv) నిర్ధిష్ట కాలములో నిర్మాణ పని పూర్తిచేయడానికి కావలసిన పని వారి సంఖ్య.
(v) ఒక గొట్టములో ప్రవహించు నీటి ఘనపరిమాణము మరియు దాని ఒత్తిడి
(vi) వృత్త వైశాల్యము మరియు దాని వ్యాసార్థము.

అనులోమాను, విలుమానుపాతము భావనను ఉపయోగించి క్రింది ప్రశ్నలను సాధించుము.

1. ఒక విద్యార్థి 15 నిమిషాలలో 21 పేజీలను టైప్ చేయగలడు. అదే వేగముతో 84 పేజీలు టైపు చేయుటకు ఎంత కాలము పట్టును?
2. ఒక ఇనుప గొట్టము యొక్క బరువు దాని పొడవునకు అనులోమానుపాతముగా ఉండును. 8 అడుగుల పొడవు గల గొట్టము బరువు 3.2 కి.గ్రా అయిన అనుపాత స్థిరసంఖ్య k మరియు 36 అడుగుల పొడవు గల గొట్టము బరువును కనుగొనుము.

Unit -2 Life Mathematics.indd 33 10-01-2020 17:39:33

3. ఒక కారు 51 లీటర్ల పెట్రోలుతో 765 కి.మీ ప్రయాణించును. 30 లీటర్ల పెట్రోలుతో ఎంత దూరం ప్రయాణించగలదు?

4. x మరియు y విలోమానుపాతములో ఉన్నవి. మరియు $y = 12$ అయిన $x = 24$ అగును. మరి $y = 8$ అయిన x విలువను కనుగొనుము.

5. ఒక పనిని 35 మంది స్త్రీలు 16 రోజులలో పూర్తి చేసిన, అదే పనిని 28 స్త్రీలు ఎన్ని రోజులలో పూర్తి చేయగలరు?

6. ఒక రైతు వద్ద ఉన్న దాణా 14 ఆవులకు 39 రోజులకు సరిపోవును. ఇంకను 7 ఆవులు ఆ మందును చేరిన దాణా ఎన్ని రోజులకు సరిపోను?

7. క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టిక ఏ అనుపాతమునకు చెందినది అని కనుగొని ఖాళీలను పూరింపుము.

x	1	2		4	6	8		12	15		24
y	20		60		120		180		300	360	

8. క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టిక ఏ అనుపాతమునకు చెందినది అని కనుగొని ఖాళీలను పూరింపుము.

x	1	2		4	6	8		12		18	24
y	144		48		24		16		9	8	

2.4 సంయుక్త నిష్పత్తి

ఇందు కొన్ని సమస్యలలో రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ అనుపాతముల సృంకలనములను కలిగి ఉండును. దీనినే సంయుక్త నిష్పత్తి అంటారు. రెండు అనుపాతముల యొక్క వైవిధ్య అవకాశాలు: అనులోమ –అనులోమ; అనులోమ – విలోమ; విలోమ – అనులోమ; విలోమ – విలోమ అనుపాతములు.

గమనిక

అనులోమానుపాతము లేదా విలోమానుపాతము వర్తించని పరిస్థితులు ఉన్నాయి. ఉదాహరణకు ఒక కంటి ద్వారా ఒక చిలుకను చూడగలిగితే, అతను రెండు కళ్ళ ద్వారా రెండు చిలుకలను చూడగలడని అర్థము కాదు, అలాగే ఒక గారెను వేయించడానికి 5 నిమిషాల సమయం పడితే 20 గారెలను వేయించడానికి 100 నిమిషాలు పడుతుందని దీని అర్థం కాదు.

సంయుక్త వైవిధ్యం (సమ్మేళనం) పై కొన్ని సమస్యలను ఇప్పుడు పరిష్కరించుకొందాం. ఇక్కడ, మనకు తెలిసిన పరిమాణాన్ని (రాశిని) తెలియని (x) తో పోలుస్తాము. దీనికి సంబంధించి కొన్ని పద్ధతులు ఆచరణలో ఉన్నాయి. దీని ద్వారా సంయుక్త వైవిధ్యముపై సమస్యలు పరిష్కరించబడతాయి. అవి:

2.4.1 నిష్పత్తి పద్ధతి

ఈ పద్ధతిలో, మనము ఇచ్చిన దత్తాంశమును పోల్చి అవి అనులోమానుపాతములో ఉన్నవా! లేదా విలోమానుపాతములో ఉన్నాయో లేదో కనుగొంటాము. వాటి అనుపాతము కనుగొన్న పిదప క్రింది వాస్తవాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

పూర్వపదము లబ్ధము = పరపదముల లబ్ధము ద్వారా తెలియని

రాశి (x) విలువను పొందగలము.

Unit -2 Life Mathematics.indd 34 10-01-2020 17:39:33

2.4.2 గుణకార కారణాంక పద్ధతి:

దృష్టాంతం :

పురుషులు	గంటలు	రోజులు
a	c	e
D I	D	I
x	d	f

ఇక్కడ తెలియని పురుషుల సంఖ్య (x) ను, తెలిసిన గంటలు మరియు రోజులతో పోల్చబడుతుంది. పురుషులు మరియు గంటలు అనులోమానుపాతములో (D) ఉంటే, $\frac{d}{c}$ వలె గుణించే కారకాన్ని తీసుకోండి. (విలోమము తీసుకోండి) అలాగే, పురుషులు మరియు రోజులు విలోమానుపాతములో (I) ఉంటే, అప్పుడు కారకాన్ని $\frac{e}{f}$ (మార్పు లేదు) గా తీసుకోండి. ఈ విధంగా, తెలియని విలువ పురుషుల సంఖ్య (x) ను $x = a\times\frac{d}{c}\times\frac{e}{f}$. తో కనుగొనవచ్చును.

గమనిక

- రోజుల సంఖ్య స్థిరమైనది అయిన, పని మరియు మనుషుల సంఖ్య ఒకదానికొకటి అనులోమానుపాతములో ఉండును, మరియు విపర్యయము కూడా.

  i.e., పనిలో పెరుగుదల (↑) అనునది మనుషుల పెరుగుదల (↑) అవే రోజుల సంఖ్యలో.
- పని మనుషుల స్థిరత్వమున, పని మరియు రోజులు ఒకదానికొకటి అనులోమానుపాతములో వుండును మరియు విపర్యయము కూడా.

  i.e., స్థిరమైన మనుషుల సంఖ్యతో, పనిలో పెరుగుదల (↑) అనునది రోజుల పెరుగుదల (↑)
- పని స్థిరత్వముతో, మనుషుల సంఖ్య మరియు పని చేయు రోజుల సంఖ్య ఒకదానికొకటి విలోమానుపాతములో ఉండును.

  i.e., పని స్థిరత్వముతో, మనుషుల సంఖ్య పెరుగుదల (↑) అనునది రోజుల సంఖ్య తగ్గుదల (↑) అగును.

2.4.3 సూత్ర పద్ధతి:

ఇచ్చిన సమస్యలోని వివరములను మనుషులు (P) రోజులు (D) గంటలు (H) మరియు పని (W) అని గుర్తించుము. మరియు సూత్రమును ఉపయోగించుము.

$$\frac{P_1\times D_1\times H_1}{W_1}=\frac{P_2\times D_2\times H_2}{W_2}$$

ఇక్కడ పాదాంకము 1 గల రాశుల దత్తాంశములు సమస్య యొక్క మొదటి పాదము నుండి తీసుకొనవలెను. పాదాంకము 2 నగల తెలియని విలువ రెండవ పాదము నందు చూడగలము. అనగా! సూత్రములో P_1 మనుషులు, W_1 ప్రమాణముల పనిని, D_1 రోజులు, ప్రతి రోజుకు H_1 గంటలు పని చేయుదురు. అదేవిధముగా P_2 మనుషులు, W_2 ప్రమాణముల పనిని, D_2 రోజులు, రోజుకు H_2 గంటలు పని చేయుదురు. W_1 మరియు W_2 పనులను గుర్తించుటయే ఈ సమస్యలలో అతి కీలకమైనది. ఈ పద్ధతి తెలియని విలువ (x) త్వరగా కనుగొనుటకు సులభమైనది.

Unit -2 Life Mathematics.indd 35 10-01-2020 17:39:35

ఉదాహరణ 2.1 (అనులోమ – అనులోమానుపాతములు)

ఒక కంపెనీవారు 15 మంది పనివారికి, 20 రోజులకు ₹6 లక్షలు చెల్లించినది. మరి 5 మంది పనివారికి, 12 రోజులకు ఎంత చెల్లించవలెను?

సాధన:

నిష్పత్తి పద్ధతి:

పనివారు	చెల్లించిన పైకము	రోజులు
D 15	D 6 D	20 D
5	x	12

ఇక్కడ, చెల్లించిన పైకము అను తెలియని విలువను కనుగొనుటకు పనివారి సంఖ్య మరియు రోజులను పోల్చుట ద్వారా తెలుసుకొందాము.

సోపానము 1:

ఇక్కడ, తక్కువ రోజులు కనుక తక్కువ మొత్తము. కాబట్టి ఇది అనులోమానుపాతము

$\therefore\ 20 : 12 :: 6 : x \longrightarrow$ (1) నిష్పత్తి అగును.

సోపానము 2:

మరియు, తక్కువ పనివారు కనుక తక్కువ మొత్తము (చెల్లింపు). కాబట్టి ఇది కూడా అనులోమానుపాతము లో ఉన్నది.

$\therefore\ 15 : 5 :: 6 : x \longrightarrow$ (2) నిష్పత్తి అగును.

సోపానము 3:

(1) మరియు (2) కలుపుట ద్వారా

$$\left.\begin{matrix} 20 : 12 \\ 15 : 5 \end{matrix}\right\} :: 6 : x$$

పూర్వపదముల లబ్ధము = పరపదముల లబ్ధము అని మనకు తెలుసు

పూర్వ పదములు		పరపదములు		పూర్వము
20	:	12 : 6	:	x
15	:	5		

కనుక, $20 \times 15 \times x = 12 \times 6 \times 5 \Rightarrow x = \dfrac{12 \times 6 \times 5}{20 \times 15}$ = ₹ 1.2 లక్షలు.

గుణకార కారణాంక పద్ధతి:

పనివారు	వేతనము (పని)	రోజులు
15	6	20
D 5	D x D	12 D

ఇక్కడ వేతనము (x) తెలియని విలువ దానిని పనివారు మరియు రోజులను పోల్చుట ద్వారా తెలుసుకొందుము.

సోపానము 1:

ఇక్కడ తక్కువ రోజులు కనుక తక్కువ వేతనము.

Unit -2 Life Mathematics.indd 36 10-01-2020 17:39:36

$\therefore$ గుణకార కారకము $\frac{12}{20}$ (విలోమము తీసుకొనుము)

సోపానము 2:

మరియు తక్కువ పనివారు కనుక తక్కువ వేతనము. కాబట్టి మరలా అనులోమానుపాతము.

$\therefore$ గుణకార కారకము $\frac{5}{15}$ (విలోమము తీసుకొనుము)

సోపానము 3:

$$\therefore x = 6 \times \frac{12}{20} \times \frac{5}{15}$$

x = ₹ 1.2 లక్షలు

సూత్ర పద్ధతి

ఇక్కడ, $P_1 = 15, D_1 = 20$ మరియు $W_1 = 6$

$P_2 = 5, D_2 = 12$ మరియు $W_2 = x$

సూత్రమును ఉపయోగించిన, $\frac{P_1 \times D_1}{W_1} = \frac{P_2 \times D_2}{W_2}$

లభించునది, $\frac{15 \times 20}{6} = \frac{5 \times 12}{x}$

$x \Rightarrow \frac{5\cdot\ 12\ \ 6}{15\cdot\ 20}$ = ₹ 1.2 లక్షలు.

ఉదాహరణ 2.2 (అనులోమ – విలోమానుపాతములు)

180 మీ పొడవు గల చాపను 15 మంది స్త్రీలు 12 రోజులలో చేసిరి. అయిన 32 మంది స్త్రీలు 512 మీ పొడవు గల చాపను ఎన్ని రోజుల్లో పూర్తి చేయగలరు?

సాధన:

నిష్పత్తి పద్ధతి:

పొడవు (పని)	స్త్రీలు	రోజులు
D 180	15 I	D 12 I
512	32	x

ఇక్కడ తెలియని విలువ రోజులు (x)ను కనుగొనుటకు పొడవు మరియు స్త్రీల సంఖ్యతో దానిని పోల్చవలయును.

సోపానము 1:

ఇక్కడ ఎక్కువ పొడవు కనుక ఎక్కువ రోజులు. ఇది అనులోమానుపాతము అగును.

$\therefore$ నిష్పత్తి 180 : 512 :: 12 : x ⟶ (1)

సోపానము 2:

మరియు స్త్రీల సంఖ్య పెరుగుదల అనునది రోజుల తగ్గుదల అగును. కాబట్టి ఇది విలోమానుపాతము అగును.

$\therefore$ నిష్పత్తి 32 : 15 :: 12 : x ⟶ (2)

Unit -2 Life Mathematics.indd 37 10-01-2020 17:39:39

సోపానము 3:

(1) మరియు (2) కలుపుట ద్వారా

$$\left.\begin{matrix}180:512\\32:15\end{matrix}\right\} :: 12 : x$$

పూర్వపదముల లబ్ధము = పరపదముల లబ్ధము అని మనకు తెలియును.

పూర్వములు		పదములు		పూర్వము
180	:	512 : 12	:	x
32	:	15		

కాబట్టి, $180 \times 32 \times x = 512 \times 12 \times 15 \Rightarrow x = \dfrac{512 \times 12 \times 15}{180 \times 32} = 16$ రోజులు .

గుణకార కారక పద్ధతి:

పొడవు (పని)	స్త్రీలు	రోజులు
D 180	15 *I*	*D* 12 *I*
512	32	x

ఇక్కడ తెలియని విలువ రోజుల సంఖ్య (x) దీనిని పొడవు మరియు స్త్రీల సంఖ్యతో పోల్చుట ద్వారా తెలుసుకొనగలము.

సోపానము 1:

ఇక్కడ పొడవు పెరుగుదల అనగా రోజుల పెరుగుదల. కావున, ఇది అనులోమానుపాతము

$\therefore$ గుణకార కారకము $\dfrac{512}{180}$ (విలోమము తీసుకొనుము).

సోపానము 2:

మరియు స్త్రీల పెరుగుదల అనగా రోజుల తగ్గుదల, కావున ఇది విలోమానుపాతము.

$\therefore$ గుణకార కారకము $\dfrac{15}{32}$ (మార్పులేదు)

సోపానము 3:

$\therefore x = 12 \times \dfrac{512}{180} \times \dfrac{15}{32} = 16$ రోజులు.

కారణాంక పద్ధతి:

ఇక్కడ, $P_1 = 15,\ D_1 = 12$ మరియు $W_1 = 180$

$P_2 = 32,\ D_2 = x$ మరియు $W_2 = 512$

సూత్రమును ఉపయోగించుట ద్వారా, $\dfrac{P_1 \times D_1}{W_1} = \dfrac{P_2 \times D_2}{W_2}$

$\dfrac{15 \times 12}{180} = \dfrac{32 \times x}{512}$ మనకు లభించును,

$\Rightarrow 1 = \dfrac{32 \times x}{512} \Rightarrow x = \dfrac{512}{32} = 16$ రోజులు.

వ్యాఖ్య: పైన ఇవ్వబడిన మూడు పద్ధతులలో ఏదేని ఒక దానిని ఉపయోగించి విద్యార్థులు సమాధానము ఇవ్వవచ్చును.

Unit -2 Life Mathematics.indd 38
10-01-2020 17:39:42

ప్రయత్నించుము

1. $x = 5$ మరియు $y = 5$ మరియు x అనుపాతములో ఉండిన, y స్థిర సంఖ్యను కనుగొనుము.
2. x మరియు y విలోమానుపాతములో వుండిన $x = 64$ మరియు $y = 0.75$ అయిన, స్థిర మార్పును కనుగొనుము.
3. మీరు ఇచ్చిన వ్యాసార్థముతో వృత్తాన్ని గీయండి. తరువాత వ్యాసార్థముల మధ్య కోణములు సమానంగా ఉండునట్లు వ్యాసార్థములను గీయుము, 3 వ్యాసార్థములతో ప్రారంభించి 12 వ్యాసార్థములతో ముగించుము. వరుస వ్యాసార్థముల మధ్య కోణానికి, వ్యాసార్థముల సంఖ్యకు పట్టికను సిద్ధం చేయండి. అవి విలోమానుపాతములో ఉన్నాయో, లేదో, తనిఖీ చేయండి. అనుపాత స్థిరాంకమును కనుగొనుము.

ఆలోచించుము

(i) x మరియు y అనులోమానుపాతములో ఉన్నవి. మరియు y ని రెండింతలు చేసిన, x కు ఏమి అగును?

(ii) $\frac{x}{y-x} = \frac{6}{7}$ అయిన $\frac{x}{y}$ ఏమి?

ఉదాహరణ 2.3 (విలోమ – అనులోమ అనుపాతములు)

81 మంది విద్యార్థులు 448 మీ పొడవుగల గోడపై 56 రోజులలో పెయింటింగ్ పూర్తి చేయుదురు. 160 మీ పొడవుగల అలాంటి గోడపై 27 రోజులలో పూర్తి చేయుటకు ఎంత మంది విద్యార్థులు కావలెను?

సాధన:

గుణకార కారక పద్ధతి:

విద్యార్థులు	రోజులు	గోడ పొడవు (పని)
81	56	448
I *D*	*I*	*D*
x	27	160

సోపానము 1:

ఇక్కడ రోజుల తగ్గుదల అనగా విద్యార్థుల సంఖ్య పెరుగుదల కావున ఇది విలోమానుపాతము అగును.

$\therefore$ గుణకార కారకము $\frac{56}{27}$ అగును.

సోపానము 2:

మరియు, పొడవు తగ్గుదల అనగా విద్యార్థుల సంఖ్య తగ్గుదల, కనుక ఇది అనులోమానుపాతము అగును.

$\therefore$ గుణకార కారకము $\frac{160}{448}$ అగును.

సోపానము 3:

$\therefore x = 81 \times \frac{56}{27} \times \frac{160}{448}$

$x = 60$ విద్యార్థులు.

Unit -2 Life Mathematics.indd 39 10-01-2020 17:39:46

సూత్ర పద్ధతి:

ఇక్కడ, $P_1 = 81, D_1 = 56$ మరియు $W_1 = 448$

$P_2 = x, D_2 = 27$ మరియు $W_2 = 160$

సూత్రమును ఉపయోగించుట ద్వారా, $\frac{P_1 \times D_1}{W_1} = \frac{P_2 \times D_2}{W_2}$

మనకు లభించినది, $\frac{81 \times 56}{448} = \frac{x \times 27}{160}$

$$\Rightarrow x = \frac{81 \times 56}{448} \times \frac{160}{27}$$

$x = 60$ విద్యార్థులు.

ఉదాహరణ 2.4 (విలోమ – విలోమ అనుపాతము)

48 మంది పురుషులు, రోజుకు 7 గంటల చొప్పున పని చేయుట ద్వారా, ఒక పనిని 24 రోజుల్లో పూర్తి చేయగలరు. అయిన 28 మంది, రోజుకు 8 గంటల చొప్పున పని చేయుట ద్వారా, అదే పనిని ఎన్ని రోజులలో పూర్తి చేయగలరు?

సాధన:

గుణకార కారణాంక పద్ధతి:

పురుషులు	గంటలు	రోజులు
I 48 / 28	7 / 8 I	I 24 / x I

సోపానము 1:

ఇక్కడ పురుషుల సంఖ్య తగ్గుదల అనగా రోజుల సంఖ్య పెరుగుదల, కనుక ఇది విలోమానుపాతములో ఉన్నది.

$\therefore$ గుణకార కారకము $\frac{48}{28}$ అగును.

సోపానము 2:

మరియు, గంటల పెరుగుదల అనగా రోజుల సంఖ్య తగ్గుదల, కనుక విలోమానుపాతములో ఉన్నవి.

$\therefore$ గుణకార కారకము $\frac{7}{8}$ అగును.

సోపానము 3:

$\therefore x = 24 \times \frac{48}{28} \times \frac{7}{8} = 36$ రోజులు.

సూత్ర పద్ధతి:

ఇక్కడ, $P_1 = 48, D_1 = 24, H_1 = 7$ మరియు $W_1 = 1$ (ఎందుకు?)

$P_2 = 28, D_2 = x, H_2 = 8$ మరియు $W_2 = 1$ (ఎందుకు?)

సూత్రము , $\frac{P_1 \times D_1 \times H_1}{W_1} = \frac{P_2 \times D_2 \times H_2}{W_2}$ ద్వారా

$\frac{48 \times 24 \times 7}{1} = \frac{28 \times x \times 8}{1}$ లభించును, $x => \frac{48 \times 24 \times 7}{28 \times 8} = 36$ రోజులు.

Unit -2 Life Mathematics.indd 40 10-01-2020 17:39:49

ప్రయత్నించుము

క్రింది వానిలో ఇవ్వబడిన వాటిలోని వ్యత్యాసమైన అనుపాతములను కనుగొనుము.

1. 24 మంది, 48 వస్తువులను 12 రోజులలో చేయగలరు. అయిన 6 మంది 6 రోజులలో ______ వస్తువులను చేయగలరు.
2. 4 కి.మీ పొడవు గల రోడ్డును 15 మంది పనివారు 4 గంటల్లో వేయగలరు. అయిన 8 కి.మీ పొడవు గల రోడ్డును 8 గం॥లలో వేయడానికి ______ మంది పనివారు కావలెను.
3. 25 మంది స్త్రీలు 12 గం॥ పని చేయుట ద్వారా ఒక పనిని 36 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు. అయిన, 30 మంది స్త్రీలు ______ గంటలు ఖచ్చితముగా పని చేయుట ద్వారా 30 రోజులలో పని పూర్తి చేయగలరు.
4. ఒక క్యాంపులో 420 కి.గ్రా. బియ్యం, 98 మందికి 45 రోజులకు సరిపోవును. మరి 60 కి.గ్రా బియ్యం 42 మందికి ______ రోజులు వచ్చును.

ఉదాహరణ 2.5

ఒక పనిని 15 మంది 40 రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. ఇంకొక 15 మంది వీరితో కలుసుకొనుట ద్వారా అదే పనిని ఎంత కాలంలో పూర్తి చేయుదురు?

సాధన:

15 మంది, 40 రోజులలో పని పూర్తి చేయుదురు. దీని పనిని మనుషులు రోజులలో మార్చిన $= 15 \times 40 = 600$ మనుషులు రోజులు.

ఇదే పని $30\,(15+15)$ మంది మనుషులు చేసిన, వారు తీసుకొను కాలము $\frac{600}{30} = 20$ రోజులు.

గమనిక

- వ్యక్తి రోజుల భావన ఇక్కడ ముఖ్యమైనది. పనిని పూర్తి చేయడానికి అవసరమైన రోజుల సంఖ్యతో గుణించబడిన వ్యక్తుల సంఖ్య "వ్యక్తులకి రోజులు" ఇస్తుంది. ఇక్కడ, పని వ్యక్తి రోజులను బట్టి కొలుస్తారు
- x స్త్రీలు, y పురుషులు ఒక పనిని p రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. అయిన a స్త్రీలు b పురుషులు అదే పనిని $\frac{xyp}{xb+ya}$ (or) $\frac{p}{\frac{a}{x}+\frac{b}{y}}$ రోజులలో పూర్తి చేస్తారు.

ఉదాహరణ 2.6

6 గురు స్త్రీలు, 8 మంది పురుషులు ఒక గదిని 86 రోజులలో నిర్మించగలరు. 7 మంది స్త్రీలు, 5 మంది పురుషులు అదే విధమైన గదిని నిర్మించడానికి ఎంత కాలం పట్టును?

సాధన:

వ్యక్తుల సంఖ్య – పనిరోజులు పద్ధతి (Person days Method):

ఇక్కడ M మరియు W స్త్రీలు మరియు పురుషులను క్రమంగా సూచించును అనుకొనుము.

ఇవ్వబడినది, $6W = 8M \Rightarrow 1W = \frac{8}{6}M = \frac{4}{3}M.$

ఇప్పుడు, $7W + 5M = 7 \times \frac{4}{3}M + 5M = \frac{43M}{3}$

8M ఒక గదిని 86 రోజుల్లో పూర్తిచేయగలరు అనిన, $\frac{43M}{3}$ అదే విధమైన గదిని నిర్మించుటకు.

$8M \times 86 \div \frac{43M}{3} = 8M \times 86 \times \frac{3}{43M} = 48$ రోజులు.

సూత్ర పద్ధతి:

గదిని నిర్మించుటకు పట్టు కాలము $= \frac{xyp}{xb + ya}$

$$= \frac{6 \times 8 \times 86}{6 \times 5 + 8 \times 7} = \frac{6 \times 8 \times 86}{30 + 56} = \frac{6 \times 8 \times 86}{86} = 48 \text{ రోజులు.}$$

(లేక)

గదిని నిర్మించుటకు పట్టు కాలము $= \frac{p}{\frac{a}{x} + \frac{b}{y}}$

$$= \frac{86}{\frac{7}{6} + \frac{5}{8}} = \frac{86 \times 48}{86} = 48 \text{ రోజులు}$$

2.5 కాలము మరియు పని

చేయవలసిన పనిని సాధారణంగా ఒక ప్రమాణముగా పరిగణిస్తారు. గోడను నిర్మించడం, రహదారిని తయారుచేయడం, ట్యాంక్ నింపడం లేదా ఖాళీ చేయడం లేదా కొంత మొత్తంలో ఆహారం తినడం వంటి పనులు ఏదైనా రూపంలో ఉండును.

కాలమును గంటలు, రోజులు మొదలైనవాటితో కొలుస్తారు. అలా చేసిన, పని ఏకరీతిగా ఉంటుందని మరియు సమూహ పనిని పూర్తి చేయడంలో ప్రతి వ్యక్తి ఒకే పని సమయాన్ని పంచుకొంటారని కొన్ని అంచనాలు కలవు.

ఏకీకృత పద్ధతి:

ఇద్దరు వ్యక్తులు X మరియు Y ఒక పనిని విడివిడిగా a మరియు b రోజులలో పూర్తి చేస్తారు. అయిన వారు ఒక రోజులో పూర్తిచేయు పని క్రమంగా $\frac{1}{a}$ మరియు $\frac{1}{b}$ అగును.

మరియు వారిరువురు కలిసి ఒక రోజులో చేయు పని $= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$

కావున, X మరియు Y ఇరువురు కలిసి ఆ పనిని $\frac{ab}{a+b}$ రోజులలో పూర్తి చేయగలరు.

ఉదాహరణ 2.7

A మరియు B కలిసి ఒక పనిని 16 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు. A మరియు B మాత్రము 48 రోజుల్లో పూర్తిచేసిన, A మాత్రము ఆ పనిని పూర్తిచేయుటకు ఎంత కాలము పట్టును?

సాధన:

$(A+B)$ యొక్క ఒకరోజు పని $= \frac{1}{16}$

గమనిక

ఒక పని లేదా పనిని పూర్తిచేయడానికి తీసుకొన్న కాలము, వ్యక్తుల సంఖ్య, పని చేయగలవారి సామర్థ్యము, పని మొత్తం మరియు పనిని పూర్తి చేయడానికి రోజుకు గడిపిన కాలము వంటి వివిధ అంశాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

Unit -2 Life Mathematics.indd 42 10-01-2020 17:39:57

A యొక్క ఒక రోజు పని $= \frac{1}{48}$

$\therefore$ B యొక్క ఒక రోజు పని $= \frac{1}{16} - \frac{1}{48}$

$= \frac{3-1}{48} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$

$\therefore$ B మాత్రము 24 రోజుల్లో పూర్తి చేయును.

> **మీకు తెలుసా?**
>
> A, $\frac{a}{b}$ కన్నా B ఇంతలు మంచి పనివాడు, అయిన A, $\frac{b}{a}$ యొక్క B వ వంతు కాలములో పనిని పూర్తిచేయును.

ఉదాహరణ 2.8

A ఒక పనిని B కంటే మూడు రెట్లు వేగంగా చేయగలడు. మరియు B తీసుకొన్న రోజుల కంటే 24 రోజులు తక్కువలో పనిని పూర్తి చేయగలడు. వారు కలిసి పనిని పూర్తిచేయగల సమయాన్ని కనుగొనండి.

సాధన:

B ఒక పనిని 3 రోజుల్లో చేసిన, A దానిని ఒక రోజులో చేయగలడు. అంటే వారి భేదము 2 రోజులు. ఇక్కడ A మరియు B పని పూర్తి చేయడానికి ఇచ్చిన కాల వ్యత్యాసము 24 రోజులలో. A తీసుకొన్న సమయము $\frac{24}{2} = 12$ మరియు B తీసుకొన్న సమయము $3 \times 12 = 36$ రోజులు. పనిని విడివిడిగా పూర్తి చేయగలడు.

కనుక, A మరియు B కలిసి పనిచేయుటకు పట్టు కాలము $= \frac{ab}{a+b}$ రోజులు

$= \frac{12 \times 36}{12 + 36} = \frac{12 \times 36}{48} = 9$ రోజులు.

ఉదాహరణ 2.9

P మరియు Q ఒక పనిని క్రమంగా 20 రోజులు మరియు 30 రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. ఇరువురు కలిసి పనిని ప్రారంభించిరి. కొంతకాలము తర్వాత Q పని నుండి వెళ్ళిపోయెను. మిగిలిన పనిని P మాత్రమే 5 రోజులలో పూర్తి చేసెను. అయిన Q పని ప్రారంభమైన ఎన్ని రోజుల తర్వాత విరమించుకొనెను?

సాధన:

P యొక్క ఒక రోజు పని $= \frac{1}{20}$ మరియు Q యొక్క ఒక రోజు పని $= \frac{1}{30}$

P యొక్క 5 రోజుల పని $= \frac{1}{20} \times 5 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

మిగిలిన పని $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (ఎల్లప్పుడూ పూర్తి పని 1 అగును.)

ఈ మిగిలిన పని P మరియు Q ఇరువురు కలిసి చేసిరి.

P మరియు Q చేసిన ఒక రోజు పని $= \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$

వారిరువురు కలిసి పనిచేసిన రోజులు $= \frac{3/4}{1/12} = \frac{3}{4} \times \frac{12}{1} = 9$ రోజులు.

కావున, Q పని మొదలైన 9రోజుల తరువాత వెళ్ళిపోయెను.

ఉదాహరణ 2.10

A మరియు B ఒక పనిని క్రమంగా 12 రోజులు మరియు 9 రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. వీరు A తో ప్రారంభించి రోజు మార్చి రోజు పని చేయుదురు. అయిన ఎన్ని రోజులకు పని పూర్తి చేయగలరు?

సాధన:

వారు రోజుమార్చి రోజు పని చేయుట వలన 2 రోజులను ఒక కాల వ్యవధిగా తీసుకొందుము.

రెండు రోజుల కాలవ్యవధిలో A మరియు B చేసిన పని = $\frac{1}{12}+\frac{1}{9}=\frac{7}{36}$

$\frac{7}{36}$ భిన్నమునకు 5 కాల వ్యవధులను తీసుకొనిన, (36 ను 7 చే 5మార్లు పూర్తిగా భాగించగలము. కనుక '5' కాలవ్యవధిని తీసుకొంటాము.)

A మరియు B పని చేసిన రోజులు $5\times2\ =10 \quad => 5\times\frac{7}{36}=\frac{35}{36}$

మిగిలిన పని $=1-\frac{35}{36}=\frac{1}{36}$.

ఈ పని A చే పూర్తి చేయబడినది. (ఎందుకు?) $\frac{1}{36}\times12=\frac{1}{3}$ రోజులు.

కాబట్టి, మొత్తము కాలము = 10 రోజులు $+\frac{1}{3}$ రోజు $=10\frac{1}{3}$ రోజులు.

2.6 పని కొరకు డబ్బు పంచుకోవడం

వ్యక్తుల సమూహం వారి వ్యక్తిగత పని ఆధారంగా కొంత పని చేసినప్పుడు వారు డబ్బులో వాటాను పొందుతారు. సాధారణంగా **సంపాదించిన డబ్బు** ప్రతి ఒక్కరు చేసిన **మొత్తం పని** నిష్పత్తితో పనిచేసిన వ్యక్తులు పంచుకొంటారు.

మీకు తెలుసా?

- A మరియు B ఒక పని చేయుటకు తీసుకున్న కాలము నిష్పత్తి $\frac{1}{x}:\frac{1}{y}=y:x$ మరి వారి పని పూర్తి చేసిన నిష్పత్తి $x:y$. ఇదియే వారి వేతనముల నిష్పత్తియు అగును.
- ముగ్గురు వ్యక్తులు A, B మరియు C ఒక పనిని క్రమంగా x, y మరియు z రోజులలో పూర్తి చేయుదురు. అయిన వారి వేతనములను పంచు నిష్పత్తి $\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}$.

ఉదాహరణ 2.11

X, Y మరియు Z ఒక పనిని క్రమముగా 4, 6 మరియు 10 రోజులలో పూర్తిచేయుదురు. X,Y మరియు Z కలిసి పని పూర్తిచేసిన, వారి విడివిడి వాటాలను కనుగొనుము. పని పూర్తిచేసినందుకు వారికి ₹ 3100 లభించినది.

సాధన:

వారందరూ సమానమైన రోజులు పనిచేసిరి. కావున వారి వాటా, వారు 1 రోజుకు పని చేయు వాటాయే అగును.

అనగా, $\frac{1}{4}:\frac{1}{6}:\frac{1}{10}=\frac{15}{60}:\frac{10}{60}:\frac{6}{60}=15:10:6$

Unit -2 Life Mathematics.indd 44 10-01-2020 17:40:08

ఇక్కడ మొత్తము భాగములు = 15 + 10 + 6 = 31

కావున, A వాటా $= \frac{15}{31} \times 3100 = ₹1500$, B వాటా $= \frac{10}{31} \times 3100 = ₹1000$ మరియు

C వాటా ₹ 3100 – (₹ 1500 + ₹ 1000)= ₹ 600.

ప్రయత్నించుము

1. విక్రమ్ $\frac{1}{3}$ వంతు పనిని p రోజులలో చేయును. మరి అతను $\frac{3}{4}$ వంతు పనిని ________ రోజులలో పూర్తిచేయగలడు.
2. m మనుషులు ఒక పనిని n రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. అయిన $4m$ మనుషులు అదేపనిని ________ రోజులలోను, మరియు $\frac{m}{4}$ మనుషులు అదేపనిని ________ రోజులలో పూర్తిచేయగలరు.

అభ్యాసము 2.1

1. క్రింది ఖాళీలను పూరింపుము:

(i) ఒక పనిని A అను వ్యక్తి 3 రోజులలో పూర్తిచేసెను. అదే పనిని B అను వ్యక్తి 6 రోజులలో పూర్తిచేయగలడు. అయిన వారిరువురు కలిసి ఆ పనిని చేయుటకు ____________ రోజులు పట్టును.

(ii) 5మంది వ్యక్తులు 5 విధమైన పనిని 5 రోజులలో పూర్తిచేసినచో, 50 మంది వ్యక్తులు 50 రకములైన పనులను పూర్తిచేయుటకు ____________ రోజులు అగును.

(iii) A ఒక పనిని 24 రోజులలో పూర్తిచేయును. A మరియు B కలిసి అదే పనిని 6 రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. అయినచో B మాత్రమే అదే పనిని పూర్తిచేయుటకు ____________ రోజులు అగును.

(iv) A మరియు B అను ఇద్దరు వ్యక్తులలో A మాత్రమే ఒక పనిని 35 రోజులలో పూర్తిచేయును. కాని B అను వ్యక్తి A కంటే 40% ఎక్కువ సామర్థ్యముతో పని చేయగలరు. అయితే B ఆ పనిని ____________ రోజులలో పూర్తిచేయును.

(v) A ఒక పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టు రోజులు 10 అదే పనిని B అను వ్యక్తి 15 రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. వారు ఆ పనిని పూర్తిచేయుటకు ₹200000 పొందినచో A అను వ్యక్తి పొందు మొత్తము ____________

2. 210 మంది పురుషులు కలిసి రోజుకు 12 గంటలు చొప్పున ఒక పనిని 18 రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. అదే పనిని రోజుకు 14 గంటలు చొప్పున 20 రోజులలో పూర్తిచేయుటకు ఎంత మంది పురుషులు కావలెను?
3. ఒక సిమెంటు కంపెనీలో 36 యంత్రముల సహాయముతో 12రోజులలో 700 బస్తాల సిమెంటును ఉత్పత్తి చేసినచో 24 యంత్రాల సహాయముతో 18 రోజులలో ఎన్ని సిమెంటు బస్తాలు ఉత్పత్తి చేయగలము?
4. ఒక సోపు కంపెనీ రోజుకు 15 గంటలు చొప్పున 6 రోజులలో 6900 సోపులు తయారుచేయగలరు. 14400 సోపులు తయారుచేయుటకు రోజుకు 3 గంటలు అధికముగా పనిచేసినచో ఎన్ని రోజులలో పూర్తిచేయగలరు?
5. 135 టన్నుల సరకును 6 లారీలలో తరలించుటకు 5 రోజులు పట్టును. అదేవిధముగా 180 టన్నుల

Unit -2 Life Mathematics.indd 45 10-01-2020 17:40:08

సరకును 4 రోజులలో తరలించుటకు ఎన్ని లారీలు అవసరము?

6. A ఒక పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టు సమయము 12 గంటలు. B మరియు C కలిసి చేయుటకు పట్టు సమయము 3 గంటలు. అదేవిధముగా A మరియు C కలిసి పని చేయుటకు పట్టు సమయము 6 గంటలైనా అదే పనిని B మాత్రమే పూర్తిచేయుటకు పట్టు సమయము ఎంత?

7. A మరియు B కలిసి ఒక పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టు సమయము 12 రోజులు. B మరియు C అదే పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టు సమయము 15రోజులు. అదేవిధముగా A మరియు C పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టు సమయము 20 రోజులు. అయితే ఒక్కొక్కరు అదే పనిని పూర్తిచేయుటకు పట్టు కాలము ఎంత?

8. A అను వడ్రంగి ఒక కుర్చీని తయారుచేయుటకు 15నిమిషాలు అగును. B అను వడ్రంగి ఒక కుర్చీని తయారుచేయుటకు A కంటే 3నిమిషాలు ఎక్కువ తీసుకొనును. వారిద్దరు కలిసి 22 కుర్చీలు తయారుచేయుటకు పట్టు సమయము ఎంత?

9. ఒక పురుషుడు ఒక పనిని 10 రోజులలో పూర్తిచేయగలడు. అదే పనిని ఒక స్త్రీ 6 రోజులలో పూర్తిచేయగలదు. వారిరువురు 3 రోజులు కలిసి పనిచేసిన తరువాత మధ్యలో ఆ స్త్రీ పనిని విడిచి పెట్టి వెళ్ళెను. మిగిలిన పనిని ఆ పురుషుడు ఎన్ని రోజులలో చేయగలడు?

10. A, B కంటే మూడు రెట్లు వేగముగా పనిచేయగలడు. ఒక పనిని B 24 రోజులలో పూర్తిచేయగలడు. ఇద్దరు కలిసి అదేపనిని ఎన్ని రోజులలో చేయగలరు?

అభ్యాసము 2.2

ఇతర అభ్యసన సమస్యలు

1. 5 బాలురు లేదా 3 బాలికలు ఒక విజ్ఞానశాస్త్ర ప్రయోగిక కృత్యమును 40 రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. 15 బాలురు మరియు 6 బాలికలు అదే విజ్ఞానశాస్త్ర ప్రయోగిక కృత్యమును చేయుటకు ఎంతకాలము పట్టును?
2. 37 మంది, రోజుకు 12 గంటలు చొప్పున పనిచేసి 15 రోజులలో పనిని పూర్తిచేయగలరు, రోజుకు 10గం॥ చొప్పున రెండింతల పనిని 24 రోజులలో పూర్తిచేయుటకు ఎంతమంది కావలయును?
3. అముదా ఒక చీరను 18 రోజులలో నేయగలదు. అంజలి, అముదా కన్నా రెండింతల పనితనము గలది. వారిరువురు కలిసి ఒక చీరను నేయుటకు ఎన్ని రోజులు పట్టును.
4. A, B మరియు C ఒక పనిని 5 రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. A మరియు C అదే పనిని $7\frac{1}{2}$ రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. మరియు A మాత్రమే 15 రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. అయిన B మరియు C ఇరువురు కలిసి ఎన్ని రోజులలో పూర్తిచేయగలరు.
5. P మరియు Q ఒక పనిని క్రమముగా 12 మరియు 15 రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. P పనిని ఒంటరిగా ప్రారంభించెను. మరియు మూడు రోజుల తరువాత Q పని పూర్తి అగునంతవరకు కలిసి పనిచేసెను. అయిన ఎంత కాలము పని జరిగినది కనుగొనుము.

సవాళాత్మక ప్రశ్నలు

6. ఒక శిబిరములో 490 మంది సైనికులకు 65 రోజులకు సరిపోవు సరకులు కలవు. 15 రోజుల తరువాత, ఇంకను కొంతమంది సైనికులు వచ్చిరి. అందుచే మిగిలి ఉన్న సరకులు 35 రోజులకు మాత్రమే వచ్చెను. ఎంత మంది సైనికులు శిబిరమునకు వచ్చారో కనుగొనుము.

Unit -2 Life Mathematics.indd 46
10-01-2020 17:40:09

7. ఒక చిన్నతరహా పరిశ్రమ 15 రోజులలో 540 మోటారు పంపులను తయారుచేయుటకు అంగీకరించిరి. దాని కొరకు 40 మందిని పనికి అమర్చిరి. 75 రోజుల తరువాత పరిశ్రమవారు 180 మోటారు పంపులను మాత్రమే చేయగలిగారు. చెప్పిన కాలములో పనిని పూర్తి చేయుటకు ఇంకనూ ఎంతమందిని అధికముగా అమర్చవలెనని కనుగొనుము?

8. A ఒక పనిని 4 రోజులలో పూర్తిచేయగలడు. 15 రోజులు పని చేసిన పిదప, మిగిలి ఉన్న పనిని B మాత్రమే 24 రోజులలో పూర్తిచేసెను. వారిరువురు కలిసి పనిచేసిన, 80% పని పూర్తి అగుటకు పట్టుకాలము కనుగొనుము.

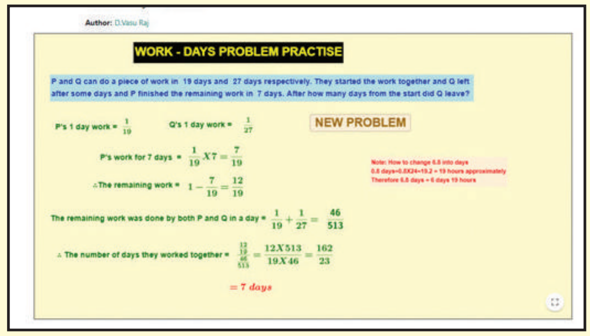
9. $\frac{1}{2}$ వ వంతు పనిని P మాత్రమే 6 రోజులలో పూర్తిచేయుదురు. మరియు, $\frac{2}{3}$ వ వంతు అదే పనిని 4 రోజులలో పూర్తి చేయును. ఇరువురు కలిసి 3/4 వంతు పనిని పూర్తి చేయుటకు ఎన్ని రోజులు పట్టును?

10 ఒక పనిని X మాత్రము 6 రోజులలో పూర్తిచేయును, మరియు Y మాత్రము 8 రోజులలో పూర్తిచేయును. X మరియు Y ఇరువురు ఈ పనిని ₹4800కు చేయబూనిరి. Z యొక్క సహాయముతో పనిని 3 రోజులలో పూర్తిచేసిరి, అయిన Z యొక్క భాగము ఎంత?

సారాంశము

- ఒక రాశిలోని పెరుగుదల లేక తగ్గుదల మరొక రాశిలో పెరుగుదల (తగ్గుదల)కు కారణమైతే ఆ రెండు రాశులు అనులోమానుపాతము కలిగియున్నాయని అంటాము.
- ఇందు $\frac{x}{y} = k$ ఒక ధనాత్మక స్థిర సంఖ్య అయిన, x మరియు y అనులోమచరత్వాన్ని కలిగియుండును.
- రెండు రాశులలో ఒక రాశిలోని పెరుగుదల లేక తగ్గుదల మరొక రాశిలో తగ్గుదల లేక పెరుగుదలకు కారణమైతే ఆ రెండు రాశులు విలోమానుపాతము కలిగియున్నాయని అంటాము.
- $xy = k$ (ఎల్లప్పుడూ), ఇందు k ఒక ధనాత్మక స్థిర సంఖ్య అయిన x మరియు y విలోమానుపాతము కలిగియున్నవి.
- కొన్ని సమస్యలలో రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ మార్పు సృంకలనములను కలిగియుండును. దీనినే సంయుక్తమార్పు అందురు.
- రెండు నిష్పత్తులను ఒకే నిష్పత్తిగా తెలపడానికి ఆ రెండు నిష్పత్తుల పూర్వపదముల లబ్దము మరియు పర పదముల లబ్దముల నిష్పత్తిని కనుగొంటాము.
- $\frac{P_1 \times D_1 \times H_1}{W_1} = \frac{P_2 \times D_2 \times H_2}{W_2}$ సూత్రమును ఉపయోగించి తెలియని (x) విలువను కనుగొనగలము.
- తెలియని (x) విలువను, కారణాంక గుణకార పద్ధతిని ఉపయోగించి కూడా కనుగొనగలము.
- X మరియు Y ఇరువురు విడివిడిగా a మరియు b రోజులలో ఒక పనిని పూర్తిచేయగలిగిన వారి ఒక రోజు పని క్రమముగా $\frac{1}{a}$ మరియు $\frac{1}{b}$ అగును.
- X మరియు Y కలిసి ఆ పనిని $\frac{ab}{a+b}$ రోజులలో పూర్తిచేయగలరు.

అంతర్జాల కృత్యములు



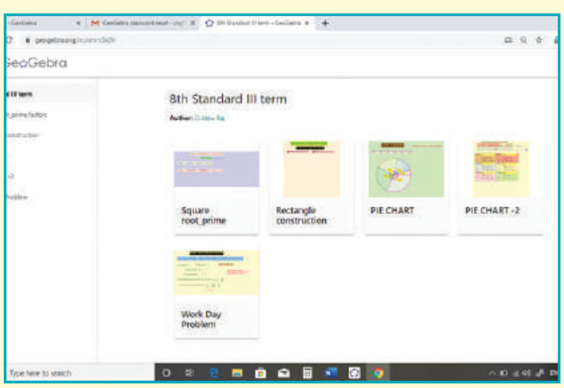
ఆశించిన ఫలితాలు

సోపానము – 1

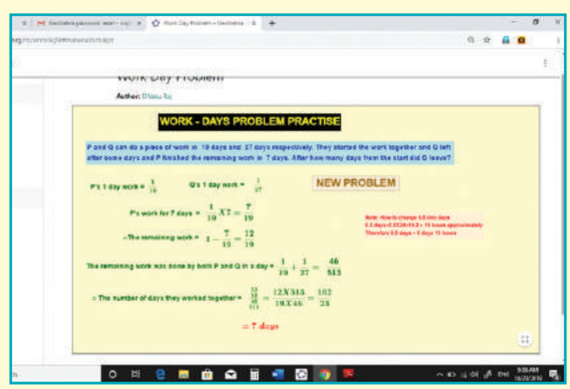
క్రింద ఇవ్వబడిన URL ను టైపు చేయండి. లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయండి. అప్పుడు 8వ తరగతి తృతీయాంతరము అనే పేరు కలిగిన జియోజీబ్రా వర్క్ షీట్ ఓపెన్ అవుతుంది. Work Day Problem అను పేరు గల వర్క్ షీట్‌ను ఎంచుకొనుము.

సోపానము - 2

NEW PROBLEM అను క్రొత్త సమస్యపై క్లిక్ చేయుము. మీ గణనలను స్వీయ పరిశీలన చేసుకొనగలరు.



సోపానము – 1



సోపానము – 2

Browse in the link

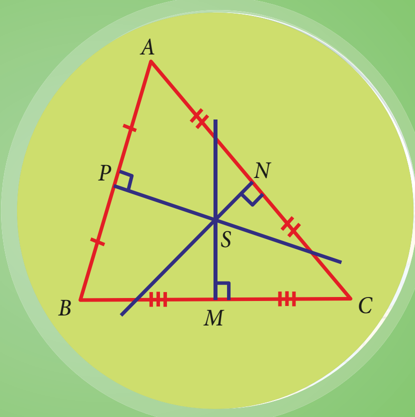
జీవవాధార గణితము:

https://www.geogebra.org/m/xmm5kj9r or
Scan the QR Code.

B358_8_MATHS_EM

Unit -2 Life Mathematics.indd 48 10-01-2020 17:40:09

3 రేఖాగణితము

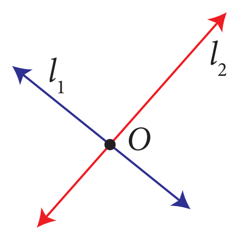


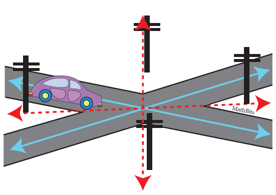
అభ్యసన లక్ష్యాలు

Y7B9C7

- త్రిభుజము యొక్క మధ్యగతముల ఎత్తులు, కోణసమద్విఖండనములు మరియు లంబ సమద్విఖండనముల అనుషక్తముల గూర్చి తెలుసుకొని మరియు అవగాహన చేసుకొనుట.
- రాంబస్ (సమబాహుచతుర్భుజము), దీర్ఘచతురస్రము మరియు చతురస్రమును నిర్మించుట.

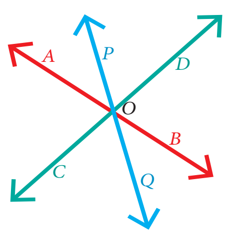
3.1 పరిచయము

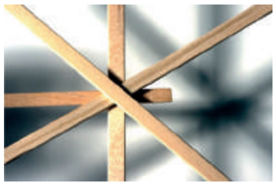




ఖండన రహదారులు

సమతలమునందు రెండు రేఖలు ఖండించుకొనిన, ఆ రేఖలను ఖండన రేఖలు అంటారు. ఇక్కడ l_1 మరియు l_2 రేఖలు బిందువు O వద్ద ఖండించుకొనును. కావున, l_1 మరియు l_2 రేఖల ఖండన బిందువు O అంటారు..



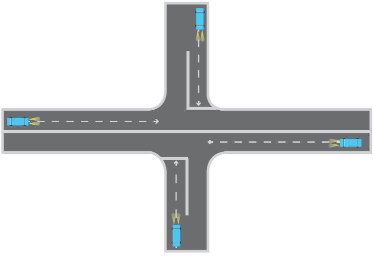


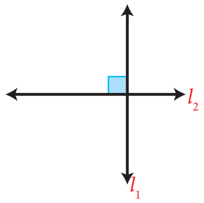
చెక్క ముక్కల అనుషక్తాలు

సమతలమునందు మూడు లేదా అనేక రేఖలు ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించుకొనిన అటువంటి రేఖలను అనుషక్త రేఖలు అంటారు.

పై పటములో $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ మరియు $\overleftrightarrow{PQ}$ లు అనుషక్త రేఖలు మరియు O ను అనుషక్త బిందువు అంటారు.

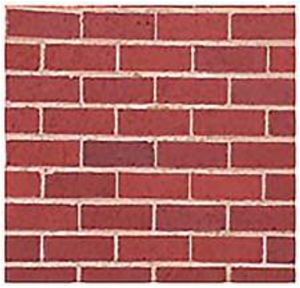
ఇక్కడ మీరు రెండు రహదారులు ప్రత్యేక పద్ధతిలో ఖండించుకోవడం చూడగలరు. అవి ఒకదానికొకటి 90º వద్ద ఖండించుకొనును. ఇటువంటి రేఖలను లంబరేఖలు అంటారు..





పటమునందు రెండు లంబరేఖలు l_1 మరియు l_2 లను చూడగలము. వీటిని $l_1 \perp l_2$ వ్రాయవలెను.

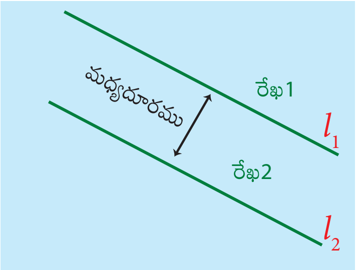
మీ చుట్టూగల పరిసరాలలో అనేక లంబరేఖలను చూడగలము.



Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 49 10-01-2020 17:40:45

ఖండన రేఖలన్నియూ లంబరేఖలగునా? సమతలమునందు రెండు రేఖలు ఖండించుకోనందున ఏమగును? ఇది సాధ్యమా? అవును, మన చుట్టూ అనేక ఉదాహరణలు కలవు.

సమతలమునందు ఎప్పటికీ ఖండించుకోని రేఖలను సమాంతర రేఖలు అంటారు. వాటి మధ్య దూరం ఒకేలా ఉండును. పటమునందు l_1 మరియు l_2 సమాంతరరేఖలు. వీటిని $l_1 \parallel l_2$ అని వ్రాయవలెను.

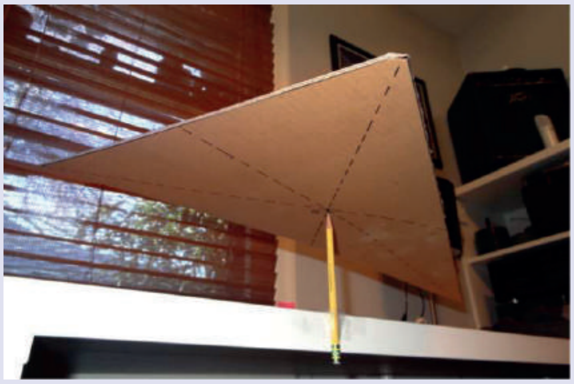


కృత్యము

ఏదైనా ఆకృతి గల పేపరు ముక్కను తీసుకొని మడుచుము.

(i) ఒక జత లంబరేఖలు (ii) ఒక జత సమాంతరరేఖలు

ఔత్సాహిక గణితము – నిత్యజీవితములో రేఖాగణితము



త్రిభుజము గురుత్వకేంద్రము వద్ద సమతుల్యమగును

లిఫ్ట్ నిచ్చెన నందు రాంబస్ ఆకృతిని చూడగలము

3.2 త్రిభుజము మధ్యగతము

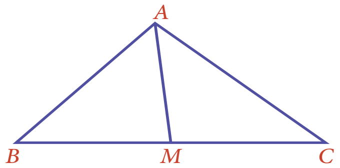
త్రిభుజములో ఏదైనా ఒక శీర్షమునుండి ఎదుటి భుజము యొక్క మధ్య బిందువుకు గీయబడిన రేఖాఖండమును మధ్యగతము అంటారు.

పటములో $\overline{AM}$ అనునది ΔABC యొక్క మధ్యగతము.

ΔABC లో మరిన్ని మధ్యగతములు కలవా? త్రిభుజమునందు మూడు శీర్షములు కలవు. కావున, త్రిభుజములో మూడు మధ్యగతములను గుర్తించవచ్చు.

ఉదాహరణ 3.1

పటములో ABC ఒక త్రిభుజము మరియు AM ఒక మధ్యగతము. BM = 3.5 సెం.మీ అయిన భుజము BC యొక్క పొడవును కనుగొనుము.



సాధన:

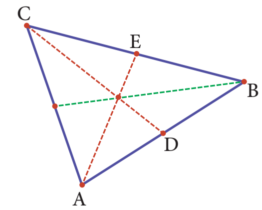
AM మధ్యగతము $\Rightarrow M$ అనునది BC యొక్క మధ్యబిందువు.

BM = 3.5 సెం.మీ

BC = పొడవుకు రెండింతలు $BM = 2 \times 3.5$ సెం.మీ = 7 సెం.మీ.

Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 50 10-01-2020 17:40:46

ఉదాహరణ 3.2



పటములో ABC ఒక త్రిభుజము మరియు CD ఒక మధ్యగతము. AD = 9x – 13 మరియు BD = 4x + 2, అయిన AB భుజము యొక్క పొడవును కనుగొనుము.

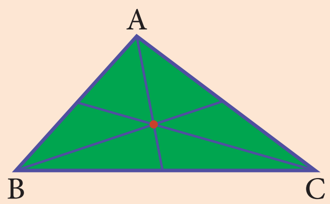
సాధన:

AB యొక్క మధ్యబిందువు D కావున, AD = DB.

$9x - 13 = 4x + 2$ ఈ సమీకరణాన్ని సాధించగా $x = 3$ వచ్చును

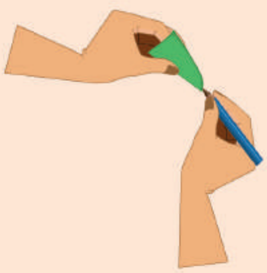
అందువలన $AB = 2(9x - 13) = 2(9(3) - 13)=28$ ప్రమాణాలు.

కృత్యము

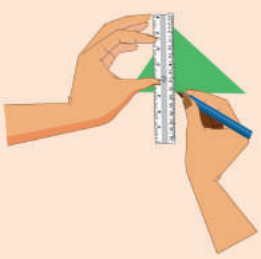


1. త్రిభుజము ఆకారములో గల కాగితాన్ని తీసుకొనెదము. (ప్రారంభానికి కావున అల్పకోణ త్రిభుజమును తీసుకొనుము) దీని పేరు ABC గా తీసుకొనుము.

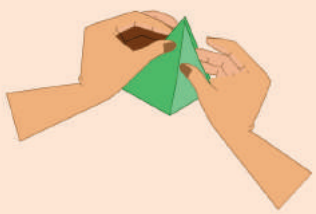
2. B బిందువును C బిందువుపై ఉండునట్లుగా, మడచిన, A ద్వారా ఒక రేఖ BC ను కలిపెను. కాగితము మడతను తీసివేయుము.



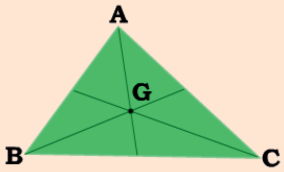
3. BC యొక్క మధ్యబిందువు M అని గుర్తించుము.



4. ప్రస్పుటముగా చూడవలెనన్నా ఇప్పుడు మధ్యగతము AM ను గీయుము. (లేక మడతను అలాగే వదిలివేయుము)



5. అదేవిధముగా, మిగిలిన రెండు మధ్యగతములను మడిచి మరియు గీయుము.



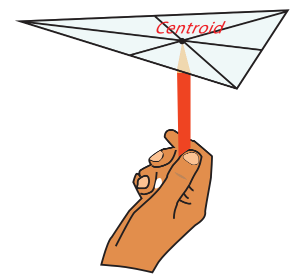
6. మధ్యగతములు ఒకే బిందువు గుండా పోవుచున్నవా?

ఇప్పుడు ఈ కృత్యమును గురుకోణత్రిభుజమునకు మరియు లంబకోణ త్రిభుజమునకు చేయుము? దీని నుండి ఏమి గమనించారు?

త్రిభుజములోని మూడు మధ్యగతములు అనుషక్తాలు.

Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 51 10-01-2020 17:40:46

3.2.1 గురుత్వకేంద్రం (Centroid)



త్రిభుజములోని మూడు మధ్యగతముల అనుషక్త బిందువును **గురుత్వకేంద్రం** అంటారు. దీనిని ఆంగ్ల అక్షరము **G** చో సూచిస్తారు. ఇదే త్రిభుజము యొక్క ద్రవ్యరాశి కేంద్రముగా చెప్పబడుతుంది. ఈ నిజాన్ని సులభముగా ధ్రువీకరించవచ్చు. త్రిభుజాకారములో గల గట్టి కాగితాన్ని తీసుకొనుము. ఈ బిందువు వద్ద వేలితో లేదా పెన్సిల్ మొనతో పట్టుకొన్న సమతుల్యమగును.

గురుత్వకేంద్రాన్ని కనుగొనడానికి మూడు మధ్యగతములను మడచవెలనా? ఇప్పుడు మీరు క్రింది ప్రశ్నకు అన్వేషించి సమాధానములను కనుగొనుము:

(i) త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రాన్ని ఏ విధముగా కనుగొంటారు?

(ii) గురుత్వకేంద్రము శీర్షముల నుండి సమాన దూరములో కలదా?

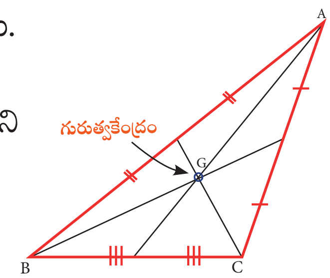
(iii) త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రం ఎల్లప్పుడూ త్రిభుజము లోపలే ఉంటుందా?

(iv) క్రింది త్రిభుజముల యొక్క మధ్యగతముల ప్రత్యేకతలు కలవా?

(a) సమద్విబాహు త్రిభుజము (b) సమబాహు త్రిభుజము?

3.2.2 త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రం ధర్మాలు

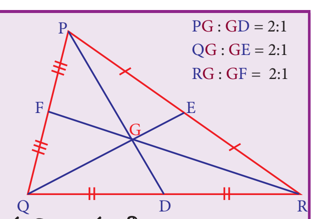
త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రము యొక్క స్థానము కొన్ని ధర్మాలను ప్రదర్శించును.



- ఇది ఎల్లప్పుడూ త్రిభుజము లోపల ఉంటుంది.
- ఇది ఏదైనా త్రిభుజాకార లామినాకు గురుత్వాకర్షణ కేంద్రముగా పనిచేస్తుందని ముందే చూశాము.
- ప్రతి శీర్షము నుండి G వద్ద కు గీయబడిన రేఖలు మూడు త్రిభుజములు $\triangle ABG$, $\triangle BCG$ మరియు $\triangle CAG$. లను ఏర్పరుస్తుంది.

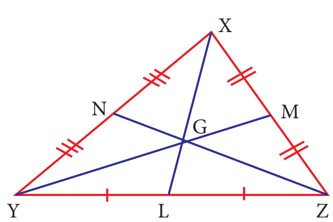
త్రిభుజములోని మధ్యగతాలు సమాన వైశాల్యము గల మూడు చిన్న త్రిభుజాలుగా విభజిస్తాయి.

మీకు తెలుసా?



త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రము ప్రతి మధ్యగతాన్ని రెండు విభాగాలుగా విభజించును. ఒకటి శీర్షానికి దగ్గరగా మరొకటి దాని కంటే రెండు రెట్లు ఎక్కువ దూరంలో ప్రతి మధ్యగతాన్ని గురుత్వకేంద్రము 2:1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది. (ఉదాహరణకు GD అనునది PD లో 1/3 వ వంతు) పేపరు మడతల ద్వారా నిరూపించుటకు ప్రయత్నించండి.

ఉదాహరణ 3.3



పటములో G అనునది త్రిభుజము XYZ యొక్క గురుత్వకేంద్రము

(i) GL = 2.5సెం.మీ అయిన XL యొక్క పొడవును కనుగొనము.

(ii) YM = 9.3 సెం.మీ అయిన GM యొక్క పొడవును కనుగొనము.

సాధన:

(i) G గురుత్వకేంద్రము కావున, XG : GL = 2 : 1, XG : 2.5 = 2 : 1.

$\therefore$ 1 × (XG) = 2 × (2.5) ⇒ XG = 5 సెం.మీ.

XL పొడవు = XG + GL = 5 + 2.5 = 7.5 సెం.మీ

(ii) YG రెండు భాగాలైన GM ఒక భాగమగును.

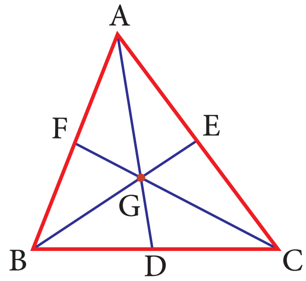
అనగా, YM మూడు భాగాలు.

3 భాగాలు 9.3 సెం.మీ అయిన. GM (ఒక భాగము) 9.3 ÷ 3 = 3.1 సెం.మీ

Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 52 10-01-2020 17:40:47

ఉదాహరణ 3.4

ABC ఒక త్రిభుజము మరియు G అనునది గురుత్వకేంద్రము. AD= 12 సెం.మీ, BC= 8 సెం.మీ మరియు BE=9 సెం.మీ అయిన ΔBDG యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనుము.



సాధన:

ABC ఒక త్రిభుజము మరియు G గురుత్వకేంద్రము

$AD = 12$ సెం.మీ మరియు $\Rightarrow GD =$ AD లో $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(12) = 4$ సెం.మీ

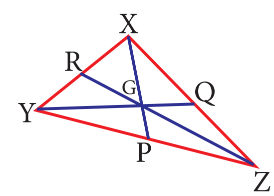
$BE = 9$ సెం.మీ. $\Rightarrow BG = BE$ లో $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}(9) = 6$ సెం.మీ

BC యొక్క మధ్యబిందువు D $\Rightarrow BD =$ BC లో $\frac{1}{2}\cdot(8) = 4$ సెం.మీ

$\therefore$ ΔBDG యొక్క చుట్టుకొలత= BD+GD+BG = 4+4+6 = 14 సెం.మీ

ఉదాహరణ 3.5

XYZ ఒక త్రిభుజము మరియు G అనునది త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రము. GP=2.5 సెం.మీ, GY=6 సెం.మీ మరియు ZR=12 సెం.మీ అయిన, XP, QY మరియు GR లను కనుగొనుము.



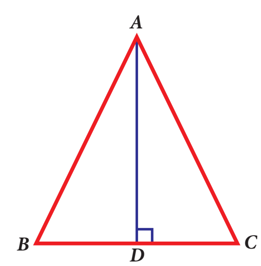
సాధన:

గురుత్వకేంద్రము G ప్రతి మధ్యగతాన్ని 2:1 నిష్పత్తిలో విభజించును.

$\therefore XG = 2GP \Rightarrow XG = 2(2.5) = 5$ సెం.మీ మరియు $XP = XG + GP = 5 + 2.5 = 7.5$ సెం.మీ

$GY = 2GQ \Rightarrow 6 = 2GQ \Rightarrow GQ = 3$ సెం.మీ మరియు $QY = 3 + 6 = 9$ సెం.మీ.

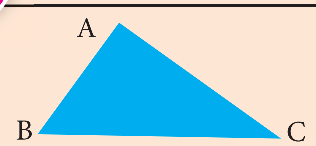
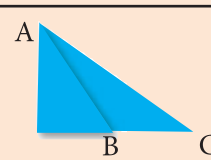
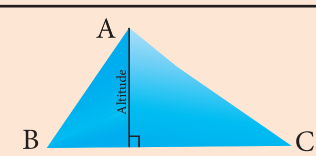
$ZR = 12$ సెం.మీ $\Rightarrow GR + GZ = 12$ సెం.మీ $\Rightarrow GR+2GR = 12$ సెం.మీ $\Rightarrow GR = 4$ సెం.మీ.



3.3 త్రిభుజము యొక్క ఎత్తు (Altitude of a triangle)

త్రిభుజములో ఏదైనా ఒక శీర్షము నుండి దాని ఎదుటి భుజానికి గీయబడిన లంబమును ఎత్తు అంటారు. ఎత్తు ఒక త్రిభుజము యొక్క ఆధారముతో లంబకోణాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. ΔABC లో, $AD \perp BC$ AD ఒక ఎత్తు.

కృత్యము

		
1. అల్పకోణ త్రిభుజము ఆకారములో కాగితాన్ని కత్తిరించి తీసుకొనుము. దీని పేరు ABC	2. త్రిభుజములోని ఒక భుజము అదే భుజముపై ఉండునట్లు మడిచిన, శీర్షాన్ని కలిగిన మడత భుజానికి వ్యతిరేకముగా ఉండును.	3. ఇప్పుడు ఎత్తు AM ను గీచిన, ప్రస్ఫుటముగా కనబడును.

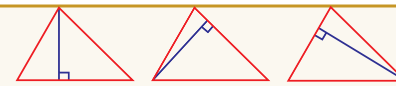
ఇదేవిధముగా, మిగిలిన భుజాల యొక్క ఎత్తులను కనుగొనవచ్చును. మీ ఉపాధ్యాయుల సహాయముతో లంబకోణ త్రిభుజము మరియు అధికకోణ త్రిభుజము యొక్క ఎత్తులను కనుగొనుము.

త్రిభుజము యొక్క మూడు ఎత్తులు అనుషక్తాలు.

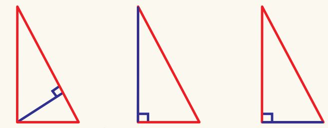
ఈ అనుషక్త బిందువును లంబకేంద్రము అంటారు. దీనిని ఆంగ్ల అక్షరము H' తో సూచిస్తారు.

Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 53 10-01-2020 17:40:48

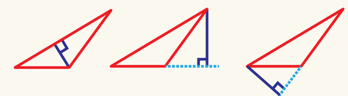
ఆలోచించుము



1. **లఘుకోణ త్రిభుజములో** మూడు ఎత్తులు త్రిభుజము లోపల ఉండును. లంబకేంద్రము ఎక్కడ కలదు?త్రిభుజము లోపల ఉందా? వెలుపల ఉందా?



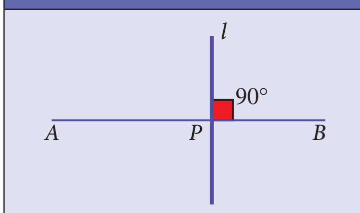
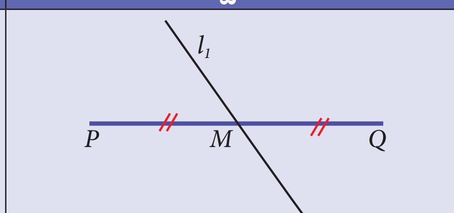
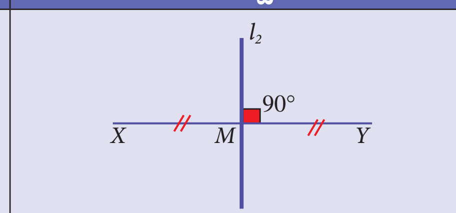
2. **లంబకోణ త్రిభుజములో,** కర్ణమునకు లంబముగా ఎత్తు త్రిభుజములో ఉండును. మిగిలిన రెండు ఎత్తులు త్రిభుజము కాళ్ళు. ఈ సందర్భములలో లంబకేంద్రాన్ని గుర్తించగలమా?



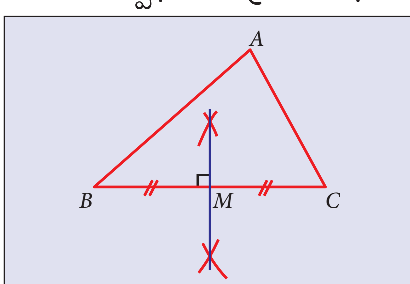
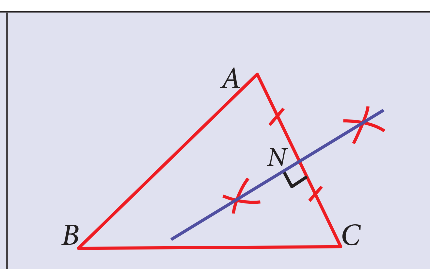
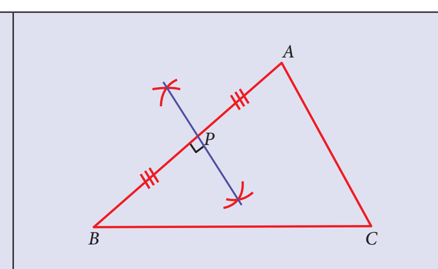
3. **అధికకోణ త్రిభుజములో** ఎత్తు అధిక శీర్షానికి కలుపబడింది, త్రిభుజములో కలదు. మరియు అల్పశీర్షాలకు కలుపబడిన ఎత్తులు త్రిభుజములోపల ఉంటాయి. ఈ సందర్భములో లంబకేంద్రాన్ని గుర్తించగలవా?

3.4 లంబసమద్విఖండన (Perpendicular bisector)

క్రింది ఆలోచనలను గుర్తుచేసుకోండి.

లంబము	సమద్విఖండన	లంబసమద్విఖండన
		
$\overline{AB}$ రేఖాఖండము l అనునది $\overline{AB}$ కు లంబము. లంబము యొక్క పాదము P ఇక్కడ $\overline{AP} \neq \overline{PB}$	$\overline{PQ}$ రేఖాఖండము l_1 అనునది $\overline{PQ}$ యొక్క సమద్విఖండన $\overline{PQ}$ యొక్క మధ్యబిందువు M l_1 అనునది $\overline{PQ}$ కు లంబముగా ఉండనవసరము లేదు.	$\overline{XY}$ రేఖాఖండము l_2 అనునది $\overline{XY}$ యొక్క సమద్విఖండన. l_2 అనునది $\overline{XY}$ కు లంబముగా కలదు. $\overline{XY}$ కు మధ్యబిందువు M

త్రిభుజము ABC తీసుకొనుము. త్రిభుజమునకు మూడు భుజములు కలవు. ప్రతి భుజానికి లంబసమద్విఖండన క్రింది విధముగా కలవు:

		
భుజము BC కి లంబసమద్విఖండన	భుజము AC కి లంబసమద్విఖండన	భుజము AB కి లంబసమద్విఖండన
$\overline{BC}$ యొక్క మధ్యబిందువు M M వద్ద లంబము కలదు.	$\overline{AC}$ యొక్క మధ్యబిందువు N N వద్ద లంబము కలదు..	$\overline{AB}$ యొక్క మధ్యబిందువు P P వద్ద లంబము కలదు.

త్రిభుజములోని మూడు భుజాల యొక్క మూడు లంబసమద్విఖండన రేఖలు అనుషక్తాలు.

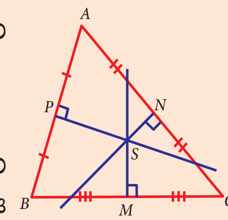
Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 54
10-01-2020 17:40:52

కృత్యము

కాగితము మడవడం ద్వారా లంబసమద్విఖండన అనుషక్త బిందువును గుర్తించవచ్చు. ప్రయత్నించుము.

త్రిభుజములోని భుజముల యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖలు అనుషక్తాలు.

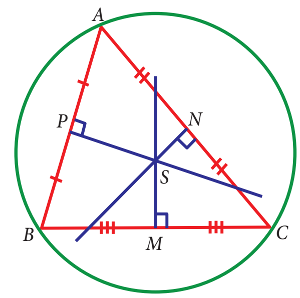
గురుత్వకేంద్రమునకు ముందు చేసిన కృత్యము వలె, లఘు, గురు, లంబ, సమద్విబాహు మరియు సమబాహు త్రిభుజములకు ప్రయోగాన్ని పునరావృతం చేయండి. ఈ సందర్భములో సమబాహు త్రిభుజములో ఎటువంటి ప్రత్యేకత కనబడినది?



3.4.1 పరివృత కేంద్రం (Circumcentre)

త్రిభుజములోని భుజాల లంబసమద్విఖండన రేఖల అనుషక్త బిందువును పరివృత్త కేంద్రము అంటారు. దీనిని ఆంగ్ల అక్షరము ‘S’ తో సూచిస్తారు.

దానిని ఎందుకలా పిలవాలి? ఎందుకనగా భుజముల యొక్క లంబసమద్విఖండనల అనుషక్త బిందువును కేంద్రముగా తీసుకొని గీసిన వృత్తము ఖచ్చితముగా త్రిభుజముల శీర్షాల గుండా పోవును. ఈ విధముగా పరివృత్త కేంద్రము త్రిభుజము యొక్క శీర్షములకు సమాన దూరములో ఉండును.



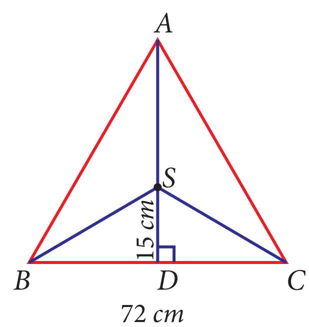
కృత్యము

క్రింద ఇవ్వబడినవి, కాగితము మడత పెట్టి నిజమా అని చేసి చూడుము.

1. అల్పకోణ త్రిభుజము యొక్క పరివృత్త కేంద్రము త్రిభుజము లోపల ఉండును.
2. అధికకోణ త్రిభుజము యొక్క పరివృత్త కేంద్రము త్రిభుజము వెలుపల ఉండును.
3. లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క పరివృత్త కేంద్రము కర్ణము యొక్క మధ్యబిందువుపై ఉండును.

ఉదాహరణ 3.6

ΔABC లో, S అనునది పరివృత్తకేంద్రం, BC = 72 సెం.మీ మరియు DS = 15 సెం.మీ. పరివృత్తం యొక్క వ్యాసార్థమును కనుగొనుము.



సాధన:

ΔABC యొక్క పరివృత్త కేంద్రం S , అది A, B మరియు C ల నుండి సమాన దూరములో కలదు. AS = BS = CS = పరివృత్తము యొక్క వ్యాసార్థము BC యొక్క లంబసమద్విఖండన AD , కావున $BD = \frac{1}{2} \times BC = \frac{1}{2} \times 72 = 36$ సెం.మీ

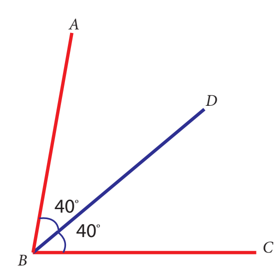
BDS లంబకోణ త్రిభుజమునందు, పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము

$$BS^2 = BD^2 + SD^2 = 36^2 + 15^2 = 1521 = 39^2 \Rightarrow BS = 39 \text{ సెం.మీ}$$

$\therefore \Delta ABC$ యొక్క పరివృత్తం యొక్క వ్యాసార్థము 39 సెం.మీ

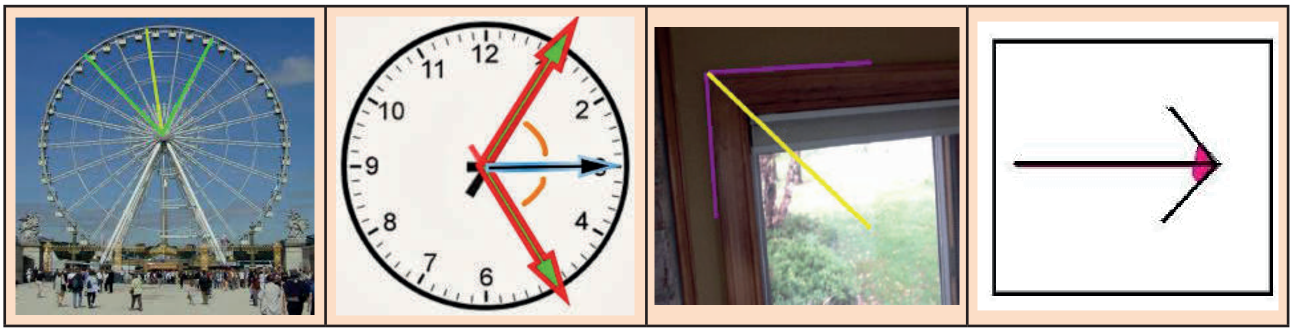
3.5 కోణ సమద్విఖండన (Angle bisector)

కోణసమద్విఖండన గూర్చి ముందు తరగతులలో నేర్చుకొన్నాము. ఇవ్వబడిన కోణమును ఒక రేఖచే లేదా ఒక కిరణముచే రెండు సమకోణములుగా విభజించబడిన, దానిని కోణసమద్విఖండన అంటారు. పటములో, రేఖ BD , $\angle ABC$ ను సమద్విఖండన చేసెను. అందువలన $\angle ABD = \angle CBD$

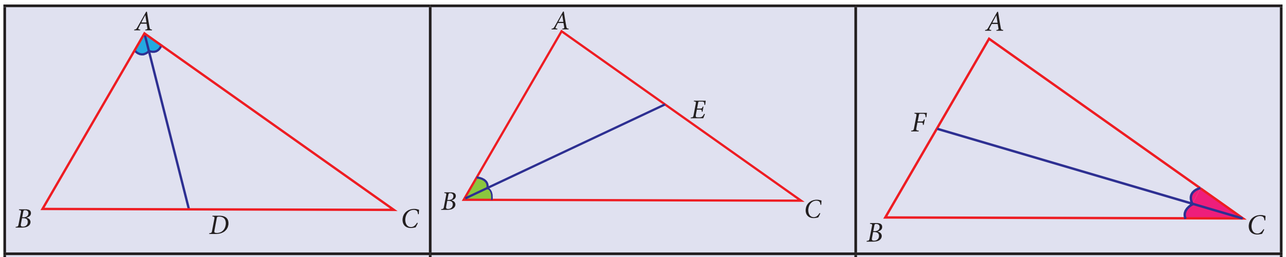


Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 55 10-01-2020 17:40:53

నిత్యజీవితములో రోజూ మనం చూడగలిగే కోణసమద్విఖండనకు కొన్ని ఉదాహరణలు

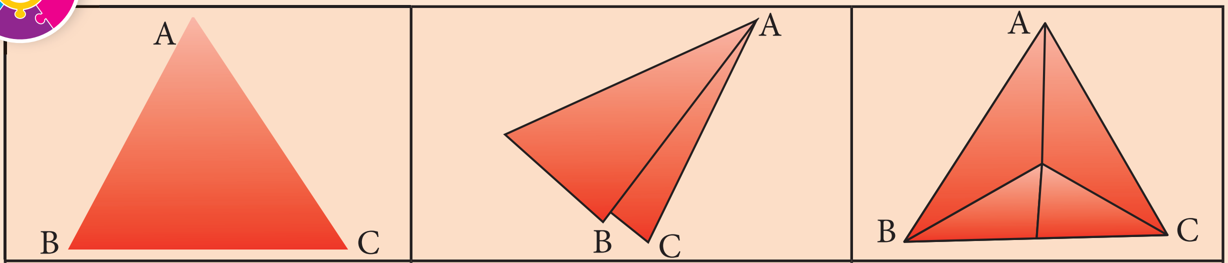


త్రిభుజము ABC తీసుకొనుము. త్రిభుజములో ఎన్ని కోణములు కలవు? మూడు కోణములు. ప్రతి కోణానికి కోణ సమద్విఖండన క్రింది విధముగా గీయవచ్చును.



∠A ను AD, రెండు సమాన కోణాలుగా విభజిస్తుంది. కావున, AD ని ∠A యొక్క కోణ సమద్విఖండన అంటారు.	∠B ను BE , రెండు సమాన కోణాలుగా విభజిస్తుంది. కావున,BE ని ∠B యొక్క కోణ సమద్విఖండన అంటారు.	∠C ను CF , రెండు సమాన కోణాలుగా విభజిస్తుంది. కావున, CF ని ∠C యొక్క కోణ సమద్విఖండన అంటారు.

కృత్యము



1. త్రిభుజాకారములో ఒక కాగిత ముక్క కట్టించుగును తీసుకొనుము. దానికి ABC అని పేరు పెట్టుము.	2. త్రిభుజములోని ఒక శీర్షము ఆధారముగా తీసుకొని మరియు వాటి ఎదుటి భుజాలు కలిసినట్టుగా మడుచుము. ఇదేవిధముగా మిగిలిన రెండు కోణాలకు కోణసమద్విఖండనలను కనుగొనుము.	3. మడతల యొక్క జాడలు కనుగొనుము. ఒకే బిందువు ద్వారా కోణసమద్విఖండన రేఖలు ప్రయాణించునా?

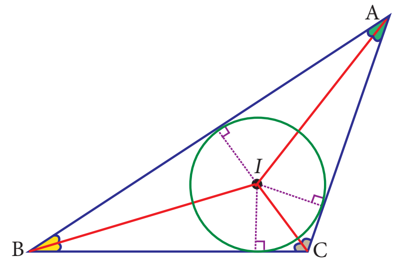
ఇప్పుడు అధికకోణ త్రిభుజమునకు మరియు లంబకోణ త్రిభుజమునకు ఇదే విధముగా కృత్యమును చేయుము. నీవు గమనించిన విషయాలను తెల్పుము.

అన్ని సందర్భాలలో కోణ సమద్విఖండన రేఖలు ఒకే బిందువు ద్వారా ప్రయాణించునా?

త్రిభుజములోని మూడు కోణసమద్విఖండన రేఖలు అనుషక్తాలు.

Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 56
10-01-2020 17:40:54

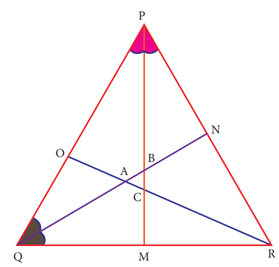
3.5.1 అంతరవృత్త కేంద్రము (Incentre) :



త్రిభుజ కోణసమద్విఖండన రేఖల అనుషక్త బిందువును అంతర వృత్తకేంద్రము అంటారు. దీనిని ఆంగ్ల అక్షరము 'I' తో సూచిస్తారు.

దానిని ఎందుకలా పిలవాలి? ఎందుకనగా కోణసమద్విఖండనల అనుషక్త బిందువును కేంద్రముగా తీసుకొని గీసిన వృత్తము మూడు భుజాలను అంతరముగా తాకును. అంతర కేంద్రము నుండి భుజములకు గీచిన లంబరేఖల పొడవులు సమానముగా ఉండును. ఈ విధముగా త్రిభుజములోని భుజాలకు సమాన దూరములో అంతర వృత్త కేంద్రము ఉండును.

ఉదాహరణ 3.7



త్రిభుజము PQR నందు అంతరవృత్త కేంద్రమును గుర్తించుము.

సాధన:

కోణసమద్విఖండనల అనుషక్త బిందువును అంతరకేంద్రము అంటారు.

ఇక్కడ, $\angle P$ మరియు $\angle Q$ ల కోణసమద్విఖండనలు PM మరియు QN లు, B వద్ద ఖండించుకొనును. కావున

త్రిభుజము PQR యొక్క అంతర వృత్తకేంద్రము 'B'

(త్రిభుజము ΔABC యొక్క అంతర వృత్త కేంద్రము A మరియు C అవుతుందా? ఎందుకు?)

మీకు తెలుసా?

త్రిభుజముల యొక్క రకముల ఆధారముగా **గురుత్వకేంద్రము, లంబకేంద్రము, పరివృత్తకేంద్రము** మరియు **అంతర వృత్త కేంద్రము** యొక్క స్థానాలు మారుతుంటాయి. క్రింది విషయాలు వీటిని గుర్తించడంలో మరియు గుర్తుంచుకోవడంలో మనకు సహాయపడుతాయి.

(i) అన్ని రకాల త్రిభుజములకు **గురుత్వకేంద్రం** (G) మరియు **అంతర వృత్త కేంద్రము** (I) త్రిభుజము లోపల ఉంటాయి.

(ii) **లంబకేంద్రము** (H) అనునది అల్పకోణ త్రిభుజములో లోపల, అధికకోణ త్రిభుజములో బాహ్యముగా మరియు లంబకోణ **త్రిభుజములో 90^0 కలిగిన శీర్షమునందుండును.**

(iii) **పరివృత్త కేంద్రం** (S) అనునది అల్పకోణ త్రిభుజములో లోపల, అధికకోణ త్రిభుజములో **బాహ్యంగా** మరియు లంబకోణ త్రిభుజములో **కర్ణముపై** కలిగియుండును.

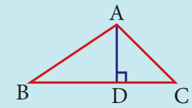
ప్రయత్నించుము

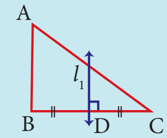
ప్రతి త్రిభుజములో ఇవ్వబడిన వాటిలో గుర్తించుము

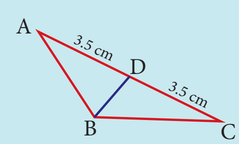
(మధ్యగతము, ఎత్తు, లంబసమద్విఖండన, కోణసమద్విఖండన)

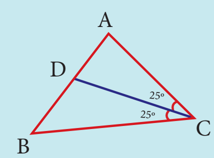
(i) AD =__________ (ii) l_1 =__________

(iii) BD =__________ (iv) CD =__________









Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 57 10-01-2020 17:40:54

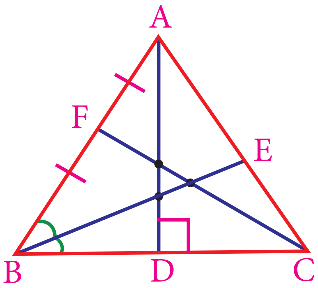
ఆలోచించుము

1. కాగితము మడత పెట్టడం ద్వారా, సమబాహు త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రం, లంబకేంద్రం, పరివృత్తకేంద్రం మరియు అంతరకేంద్రమును కనుగొనుము. అవి కలుస్తాయా?
2. కాగితము మడత పెట్టడం ద్వారా, ఒక త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రము (G), లంబకేంద్రము (H) పరివృత్తకేంద్రము (S) మరియు అంతర కేంద్రము (I) లను కనుగొనుము. G,H,S మరియు I లను కలుపుము. అవి సరేఖీయాలా?

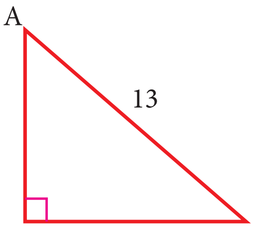
అభ్యాసము 3.1

1. **ఖాళీలను పూరింపుము.**
   (i) త్రిభుజము యొక్క ఎత్తులు ____________ వద్ద ఖండించుకొనును.
   (ii) త్రిభుజము యొక్క మధ్యగతములు ____________ వద్ద ఖండించుకొనెను.
   (iii) త్రిభుజము యొక్క కోణసమద్విఖండనల కలుసుకొనే బిందువు ____________
   (iv) త్రిభుజము యొక్క భుజాల లంబసమద్విఖండన రేఖల ఖండించుకొను బిందువు ____________
   (v) త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రము మధ్యగతాన్ని ____________ నిష్పత్తిలో విభజించును.
2. **సత్యమా లేక అసత్యమా తెలుపుము:**
   (i) ఒక త్రిభుజములో గురుత్వకేంద్రము మరియు అంతరకేంద్రము త్రిభుజము లోపల ఉండును.
   (ii) త్రిభుజములోని గురుత్వకేంద్రం, లంబకేంద్రం మరియు అంతరకేంద్రం అన్నియూ సరేఖీయాలు.
   (iii) అంతరకేంద్రము త్రిభుజములోని శీర్షములకు సమానదూరములో ఉంటాయి.
3. a) **క్రింద ఇవ్వబడిన సందర్భములో పరివృత్తకేంద్రాలు ఎక్కడ కలవు?**
   (i) లఘుకోణ త్రిభుజము
   (ii) గురుకోణ త్రిభుజము
   (iii) లంబకోణ త్రిభుజము

   b) **క్రింద ఇవ్వబడిన సందర్భాలలో లంబకేంద్రం ఎక్కడ ఉండును?**
   (i) లఘుకోణ త్రిభుజము
   (ii) గురుకోణ త్రిభుజము
   (iii) లంబకోణ త్రిభుజము
4. ఖాళీలను పూరింపుము
   ΔABC లో
   (i) కోణసమద్విఖండన ________
   (ii) ఎత్తు ________
   (iii) మధ్యగతము _______

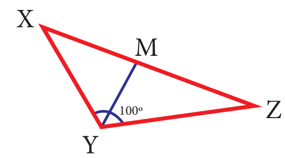


5. లంబకోణ త్రిభుజము ABC లో శీర్షము A నుండి BC కు గీయబడిన ఎత్తు యొక్క పొడవును కనుగొనుము?

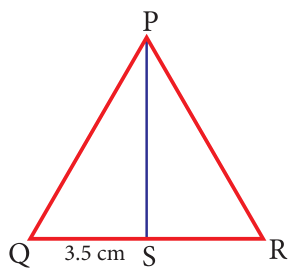


Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 58 10-01-2020 17:40:55

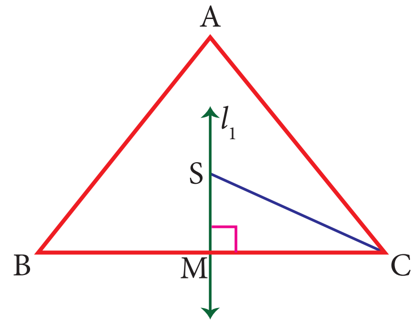
6. త్రిభుజము XYZ లో, $\angle Y$ యొక్క కోణసమద్విఖండన YM మరియు $\angle Y = 100°$. $\angle XYM$ మరియు $\angle ZYM$ కనుగొనుము.



7. త్రిభుజము PQR లో మధ్యగతము PS మరియు QS=3.5 సెం.మీ, QR ను కనుగొనుము.



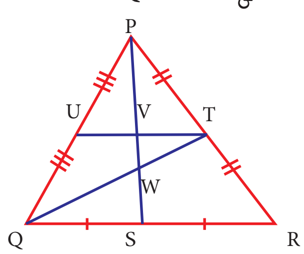
8. త్రిభుజము ABC లో BC యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ l_1 BC=12 సెం.మీ మరియు SM=8 సెం.మీ అయిన CS యొక్క పొడవును కనుగొనుము.



అభ్యాసము 3.2

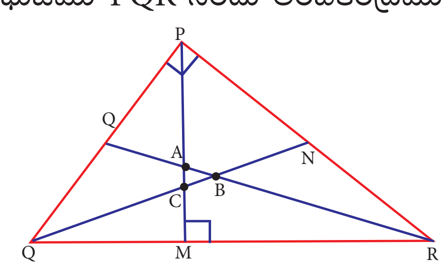
ఇతర అభ్యసన సమస్యలు

1. త్రిభుజము PQR యొక్క గురుత్వకేంద్రమును గుర్తించుము.

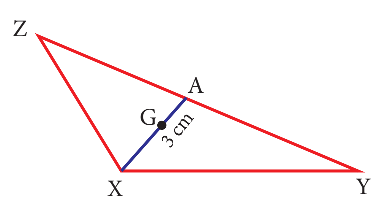


X8V2M5

2. త్రిభుజము PQR నందు లంబకేంద్రమును తెలుపుము.



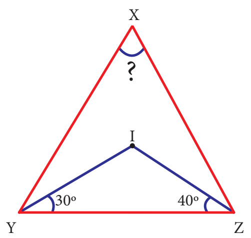
3. ఇవ్వబడిన పటమునందు YZ యొక్క మధ్యబిందువు A మరియు త్రిభుజము XYZ యొక్క గురుత్వకేంద్రము G . GA యొక్క పొడవు 3 సెం.మీ అయిన XA యొక్క పొడవును కనుగొనుము.



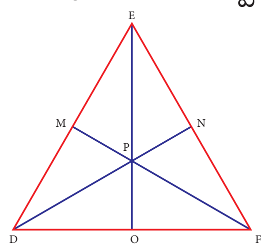
Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 59 10-01-2020 17:40:56

సవాళాత్మక ప్రశ్నలు

4. లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క కాళ్ళ పొడవులు 15 అడుగులు మరియు 20 అడుగులు అయిన దాని కర్ణముపై గల ఎత్తు యొక్క పొడవును కనుగొనుము.
5. త్రిభుజము XYZ యొక్క అంతరకేంద్రము I అయిన, $\angle IYZ = 30^\circ$ మరియు $\angle IZY = 40^\circ$, $\angle YXZ$ ను కనుగొనుము.



6. ΔDEF నందు DN, EO, FM. లు మధ్యగతములు మరియు బిందువులు P గురుత్వకేంద్రము. క్రింది వాటిని కనుగొనుము.

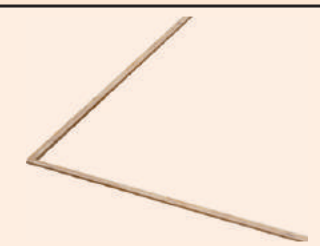


   (i) DE = 44, అయిన, DM = ?
   (ii) PD = 12, అయిన, PN = ?
   (iii) DO = 8, అయిన, FD = ?
   (iv) OE = 36 అయిన, EP = ?

3.6 నిర్ధిష్ట చతుర్భుజములను నిర్మించుట (Construction of certain quadrilaterals)

చతుర్భుజములను నిర్మించుటను నేర్చుకొనుటకు ముందు, వాటి ప్రాథమిక లక్షణాలను గుర్తుచేసుకోవడం వలన ప్రక్రియ సమయములో మనకు సహాయపడుతుంది. మనము కొన్ని కృత్యాలు చేయడం ద్వారా వీటిని చేయడానికి ప్రయత్నిస్తాము.

కృత్యము

	
1. రెండు, చివరలు గల జత అసమాన కర్రలను తీసుకొని ఒక చివర చేర్చుము (పైవిధముగా)	**2.** ఇప్పుడు మరొక జత యొక్క స్వేచ్ఛా కొనలతో కలుపుము.

ఎటువంటి పటము ఏర్పడును? చతుర్భుజము ఏర్పడును. ABCD అని పేరు పెట్టుము. ఎన్ని భుజములు కలవు? ఎన్ని కర్ణములు కలవు? కర్ణములు సమానముగా ఉన్నాయా? కోణములు సమానముగా ఉన్నాయా?

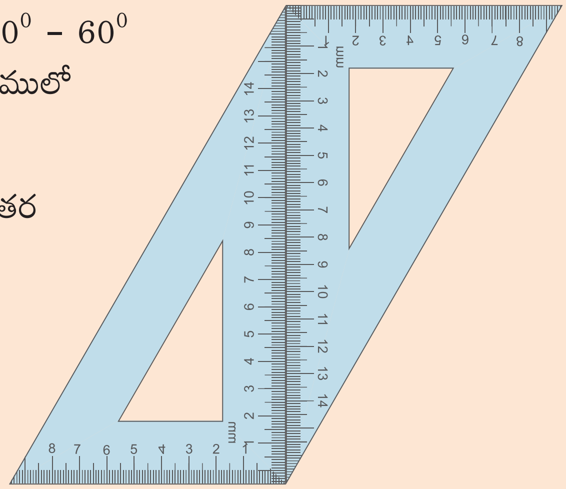
పై కృత్యములో క్రింది విధముగా ఉండిన చతుర్భుజమును పొందగలరా?

(i) నాలుగు కోణాలు అల్పకోణాలు
(ii) ఒక కోణము అధిక కోణము
(iii) రెండు కోణాలు అధికకోణాలు
(iv) ఒక కోణము లంబకోణము
(v) రెండు కోణాలు లంబకోణాలు
(vi) కర్ణములు పరస్పరం లంబములైన

Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 60 10-01-2020 17:40:56

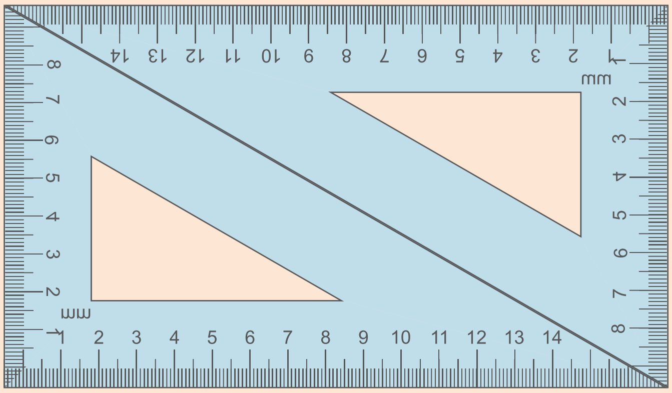
కృత్యము

1. ఈ కృత్యము చేయుటకు ఒక జత సమానమైన 30^0 – 60^0 – 90^0 ల మూలమట్టాలు అవసరమగును. పటములో చూపిన విధముగా వాటిని ఉంచండి.



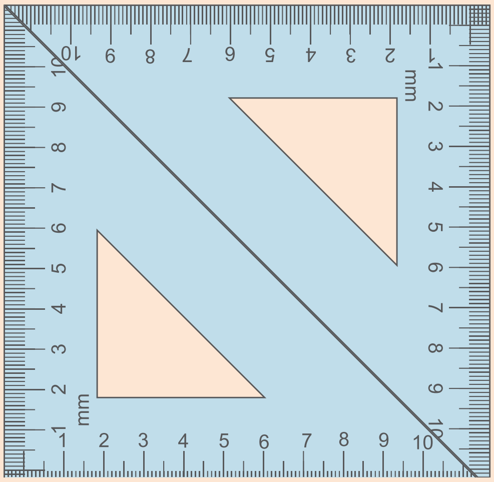
   (i) ఎటువంటి ఆకారము వచ్చును? అది సమాంతర చతుర్భుజము
   (ii) ఎదుటెదుటి భుజములు సమాంతరములా?
   (iii) ఎదుటెదుటి భుజములు సమానమా?
   (iv) కర్ణములు సమానమా?
   (v) వేరొక జత సమానమైన మూలమట్టములను ఉపయోగించి ఈ ఆకారం పొందగలమా?

2. ఈ కృత్యము చేయుటకు ఒక జత సమానమైన 30^0 – 60^0 – 90^0 మూలమట్టములు అవసరమగును. పటములో చూపిన విధంగా వాటిని ఉంచండి.



   (i) ఎటువంటి ఆకారము వచ్చును?
   (ii) అది సమాంతర చతుర్భుజమా?
   అది ఒక చతుర్భుజము. కాని అది ఒక దీర్ఘచతురస్రము. (ఎలా?)
   (iii) వాటి యొక్క భుజముల పొడవులు, కోణములు మరియు కర్ణములు గూర్చి ఏమి చెప్పవచ్చు?
   పట్టిక తయారుచేయుము. వాటి గూర్చి చర్చించుము.

3. ఇప్పుడు ఒకే జత సమానమైన 45^0 – 45^0 – 90^0 మూలమట్టాలను ఉపయోగించి పై కృత్యము వలె మరలా చేయుము.

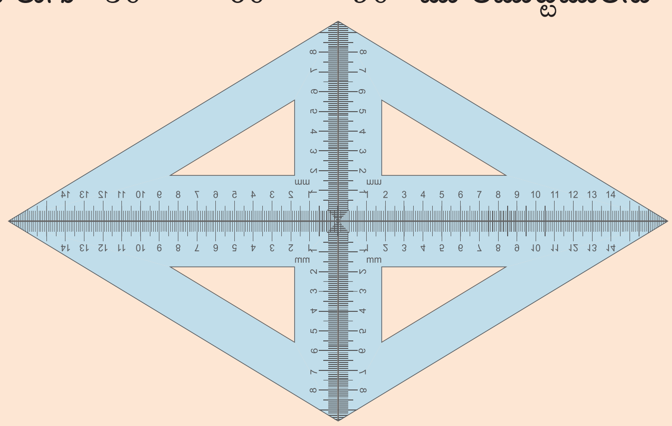


   (i) ఇప్పుడు ఈ పటము ఏ విధంగా మార్పు చెందింది? ఇది ఒక సమాంతర చతుర్భుజమా? చతురస్రముగా వచ్చింది. (ఎలా జరిగింది?)
   (ii) వాటి యొక్క భుజముల యొక్క పొడవులు, కోణములు మరియు కర్ణములు గూర్చి ఏమి చెప్పవచ్చును?
వాటి గూర్చి చర్చించి వ్రాయుము.
   (iii) మనము తయారుచేసిన దీర్ఘచతురస్రము పట్టిక నుండి ఇది ఏ విధముగా మార్పు చెందింది?

Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 61 10-01-2020 17:40:57

కృత్యము

4. ఈ కృత్యము చేయుటకు సమానమైన నాలుగు 30^0 - 60^0 - 90^0 మూలముట్టములను ఉపయోగించవలెను. ఒకదానితో మరొకటి ఏ విధంగా చేర్చవలెనో జాగ్రత్తగా గమనించుము.



(i) ఇప్పుడు సమాంతర చతుర్భుజము ఏర్పడినదా?

(ii) వాటి యొక్క భుజముల పొడవులు, కోణములు మరియు కర్ణములు గూర్చి ఏమి చెప్పగలము?

(iii) కర్ణముల యొక్క ప్రత్యేకతను తెల్పుము.

పై కృత్యములు ఫలితముల ఆధారముగా, పై చతుర్భుజముల యొక్క ధర్మాలను పట్టిక ఏర్పరచవచ్చును.

ప్రత్యేక చతుర్భుజములు	అన్ని భుజాలు	అన్ని కోణాలు	వ్యతిరేక భుజాలు		అన్ని కోణాలు	వ్యతిరేఖ కోణాలు	కర్ణములు	
	సమానము	సమానము	సమానము	సమాంతరము	90^o	సంపూరకం	ఒక దానికొకటి సమద్విఖండన	ఒక దానికొకటి లంబముగా ఖండించుట
(i) సమాంతర చతుర్భుజము	కొన్నిసార్లు	కొన్నిసార్లు	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	కొన్నిసార్లు	కొన్నిసార్లు	ఎల్లప్పుడూ	కొన్నిసార్లు
(ii) రాంబస్	ఎల్లప్పుడూ	కొన్నిసార్లు	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	కొన్నిసార్లు	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ
(iii) దీర్ఘచతురస్రము	కొన్నిసార్లు	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	కొన్నిసార్లు
(iv) చతురస్రము	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ

Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 62

10-01-2020 17:40:57

ప్రయత్నించుము

1. సత్యమా లేదా అసత్యమా తెలుపుము.:

(అ) చతురస్రము ఒక ప్రత్యేక దీర్ఘచతురస్రము

(ఆ) చతురస్రము ఒక సమాంతర చతుర్భుజము

(ఇ) చతురస్రము ఒక ప్రత్యేక రాంబస్

(ఈ) దీర్ఘచతురస్రము ఒక సమాంతర చతుర్భుజము

2. చతుర్భుజముల పేర్లను తెలుపుము.

(అ) కర్ణము ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకొనును.

(ఆ) కర్ణములు ఒకదానికొకటి లంబసమద్విఖండన చేసుకొనును.

(ఇ) కర్ణముల యొక్క పొడవులు వేర్వేరుగా ఉండును.

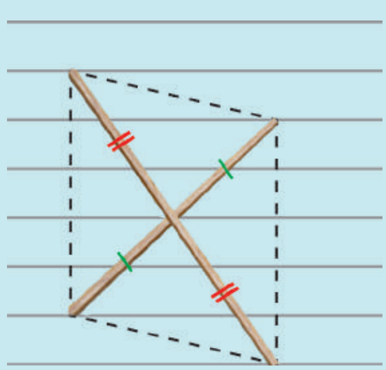
(ఈ) సమాన కర్ణములు కలిగియుండును.

(ఉ) వ్యతిరేక భుజములు సమాంతరముగా కలిగినది.

(ఊ) వ్యతిరేక కోణములు సమానముగా కలిగిది.

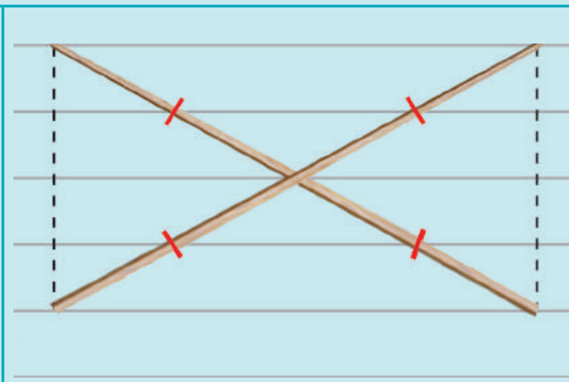
3. పటములో చూపిన విధముగా రెండు పుల్లలను గీతలు కలిగిన కాగితముపై ఉంచుము. నాలుగు మూలలను కలుపునట్లుగా పుల్లలను ఉంచిన ఏ పటము ఏర్పడును?

(అ)



రెండు అసమాన పుల్లలు తీసుకొని వాటి మధ్యబిందువులు కలిసేవిధముగా ఉంచుము.

(ఆ)

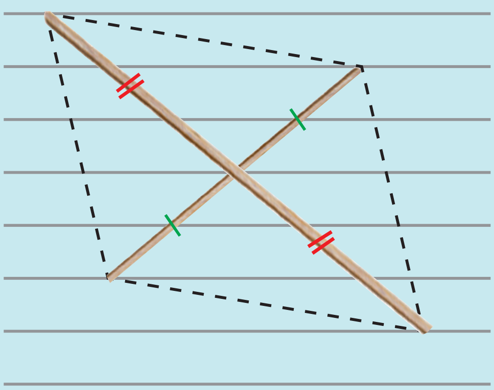


రెండు సమాన పుల్లలు తీసుకొని వాటి మధ్యబిందువులు కలిసే విధముగా ఉంచుము.

Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 63 10-01-2020 17:40:57

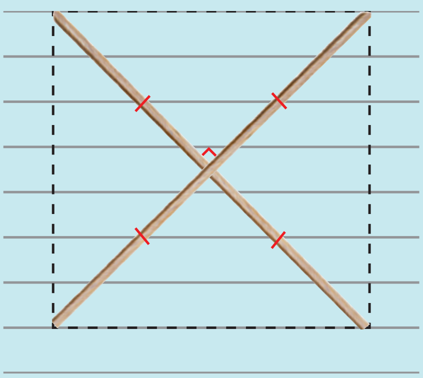
ప్రయత్నించుము

(ఇ)



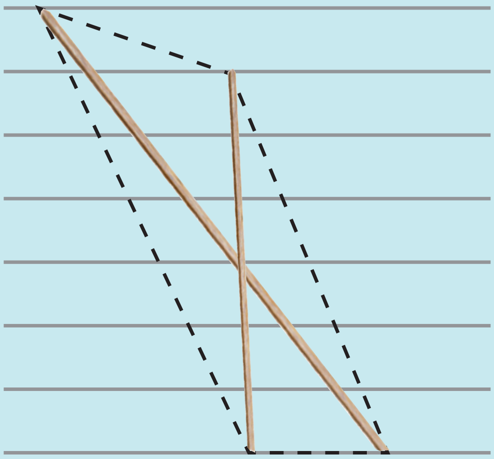
రెండు అసమాన పుల్లలు తీసుకొని వాటి మధ్య బిందువులు లంబముగా ఖండించుకొనేలా ఉంచుము.

(ఈ)



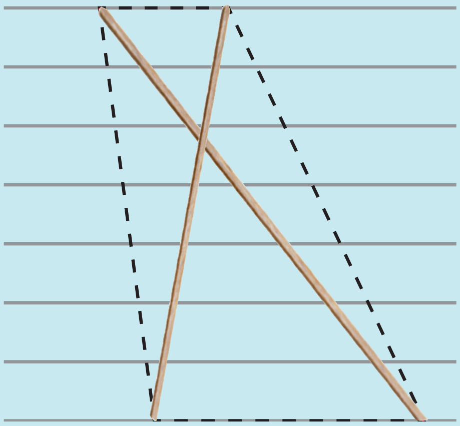
రెండు సమాన పుల్లలు తీసుకొని వాటి మధ్యబిందువులు లంబముగా ఖండించుకొనేలా ఉంచుము.

(ఉ)



రెండు అసమాన పుల్లలు తీసుకొని వాటి మధ్యబిందువులు కలవకుండా ఉండేలా ఉంచాలి. అంతేకాకుండా రెండు పుల్లల యొక్క పై చివరలు ఒకే గీతపై ఉండకూడదు మరియు క్రింద చివరలు ఒకే గీతపై ఉండేలా ఉంచాలి.

(ఊ)



రెండు అసమాన పుల్లలు తీసుకొని వాటి యొక్క మధ్యబిందువులు కలవకుండా ఉండేలా ఉంచాలి. అంతేకాకుండా రెండు పుల్లలపై చివరలు ఒకే గీతపై మరియు క్రింద చివరలు ఒకే గీతపై ఉండేలా ఉంచాలి.

3.7 రాంబసు (సమబాహు చతుర్భుజము) నిర్మాణము (Construction of a rhombus)

ఇచ్చిన కొలతలతో సమబాహు చతుర్భుజము (రాంబసు)ను నిర్మించుట

(i) ఒక భుజము మరియు ఒక కర్ణము

(ii) ఒక భుజము మరియు ఒక కోణము

(iii) రెండు కర్ణములు

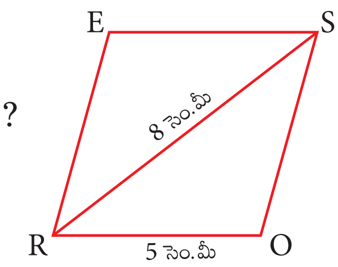
(iv) ఒక కర్ణము మరియు ఒక కోణము

Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 64 10-01-2020 17:40:58

3.7.1 ఒక భుజము మరియు ఒక కర్ణము ఇచ్చినప్పుడు (సమబాహు చతుర్భుజము) రాంబసును నిర్మించుట:

ఉదాహరణ 3.8

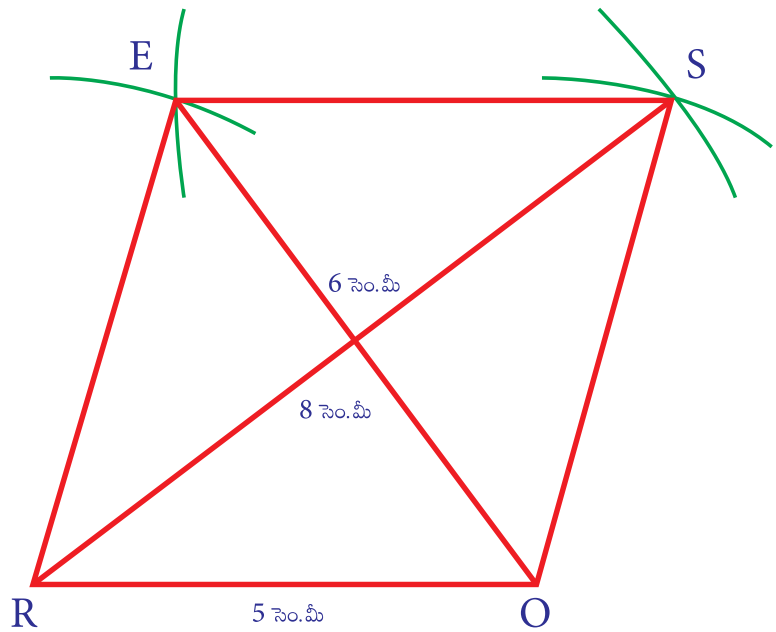
RO = 5 సెం.మీ మరియు RS = 8 సెం.మీ ఉండునట్లు ROSE అను సమబాహు చతుర్భుజమును నిర్మింపుము మరియు వైశాల్యమును కనుగొనుము?



చిత్తు పటము

సాధన:

ఇవ్వబడినవి: RO = 5 సెం.మీ మరియు RS = 8 సెం.మీ



సోపానములు:

(i) RO = 5 సెం.మీ రేఖాఖండమును గీయుము.

(ii) R మరియు 'O' ను కేంద్రముగా చేసుకొని క్రమముగా 8 సెం.మీ మరియు 5సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో చాపరేఖలను గీయుము. వాని ఖండన బిందువు 'S' అగును.

(iii) RS మరియు OS ను కలుపుము.

(iv) R మరియు S కేంద్రముగా, తలా 5 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో చాపములు గీయుము, వాని ఖండన బిందువు 'E' అగును.

(v) RE మరియు SE లను కలుపుము.

(vi) ROSE మనకు కావలసిన సమబాహు చతుర్భుజము అగును.

వైశాల్యము గణన:

ROSE సమబాహు చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ చ.ప్ర

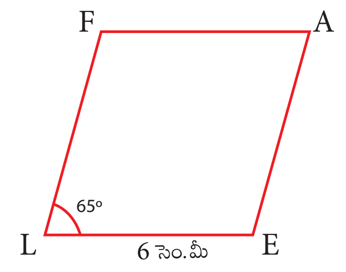
$= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24.$ చ.ప్ర

Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 65 10-01-2020 17:40:58

3.7.2 ఒక భుజము మరియు ఒక కోణము ఇచ్చిన సమబాహు చతుర్భుజమును నిర్మించుట:

ఉదాహరణ 3.9

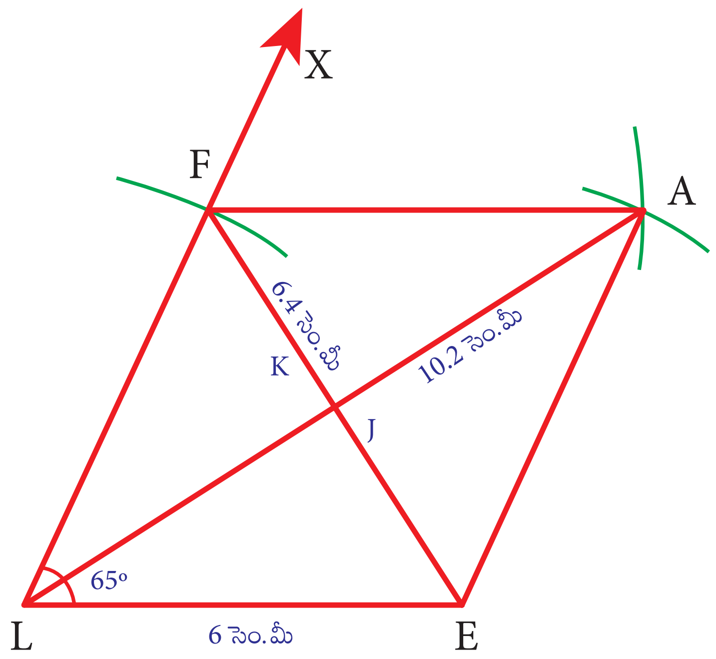
LE = 6సెం.మీ మరియు $\angle L = 65°$ తో LEAF అను సమబాహు చతుర్భుజమును నిర్మింపుము.



చిత్తు పటము

సాధన:

ఇవ్వబడినవి: LE = 6 సెం.మీ మరియు $\angle L = 65°$



సోపానములు:

(i) LE = 6 సెం.మీ రేఖాఖండమును గీయుము.

(ii) LE పై L వద్ద, $\angle ELX = 65°$ ను గుర్తించుము.

(iii) 6 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో L కేంద్రముగా చాపరేఖను గీయుము. అది LX ను F వద్ద ఖండించును.

(iv) 6సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో E మరియు F కేంద్రముగా చాపరేఖలు గీయుము. వాటి ఖండన బిందువు A అగును.

(v) EA మరియు AF లను కలుపుము

(vi) LEAF కావలసిన సమబాహు చతుర్భుజము అగును.

వైశాల్యము గణన:

LEAF సమబాహు చతుర్భుజము వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ చ.ప్ర

$= \frac{1}{2} \times 6.4 \times 10.2 = 32.64$ చ.ప్ర

Unit 3 - Geometry_TELUGU.indd 66 10-01-2020 17:41:00