દોરેલા સ્પર્શક વડે દર્શાવાતી બે શક્ય દિશાઓમાંથી વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશા સ્પષ્ટપણે દર્શાવી શકાય. ક્ષેત્ર રેખાઓ અવકાશ વક્ર છે એટલે કે ત્રિ-પરિમાણમાં વક્ર છે.

આકૃતિ 1.17 કેટલાક સાદા વિદ્યુતભાર વિતરણની આસપાસ ક્ષેત્ર રેખાઓ દર્શાવે છે. અગાઉ જણાવ્યું તેમ ક્ષેત્ર રેખાઓ ત્રિ-પારિમાણિક અવકાશમાં છે, જો કે આકૃતિ તેમને સમતલમાં જ દર્શાવે છે. એકલ (એકાકી) ધન વિદ્યુતભારની ક્ષેત્ર રેખાઓ ત્રિજ્યાવર્તી રેખા પર બહારની તરફ હોય છે જ્યારે એકલ ઋણ વિદ્યુતભારની ક્ષેત્ર રેખાઓ ત્રિજ્યાવર્તી રેખા પર અંદરની તરફ હોય છે. બે સમાન ધન વિદ્યુતભારો (q, q)ની આસપાસની ક્ષેત્રરેખાઓ તેમની વચ્ચેના અપાકર્ષણની સ્પષ્ટ ચિત્રાત્મક રજૂઆત દર્શાવે છે જ્યારે બે સમાન અને વિજાતિય વિદ્યુતભારો $(q, -q)$ (જેને ડાયપોલ કહે છે)ની આસપાસની ક્ષેત્ર રેખાઓ તેમની વચ્ચેનું આકર્ષણ સ્પષ્ટરૂપે દર્શાવે છે. ક્ષેત્ર રેખાઓ કેટલાક અગત્યના સામાન્ય ગુણધર્મો ધરાવે છે.

(i) ક્ષેત્ર રેખાઓ ધન વિદ્યુતભારથી શરૂ થઈ ઋણ વિદ્યુતભારમાં અંત પામે છે. જો એક વિદ્યુતભાર જ હોય તો તેઓ અનંતથી આરંભ કરે કે અંત પામે છે.

(ii) વિદ્યુતભાર-વિહિન વિસ્તારમાં વિદ્યુત ક્ષેત્ર રેખાઓ વચ્ચે તૂટ્યા વિના સતત વક્રો તરીકે લઈ શકાય છે.

(iii) બે ક્ષેત્ર રેખાઓ કદી એકબીજીને છેદતી નથી. (જો તેઓ છેદતી હોય તો છેદનબિંદુએ ક્ષેત્રને કોઈ એક ચોક્કસ દિશા ન હોત, જે અસંગત છે.)

(iv) સ્થિતવિદ્યુત ક્ષેત્ર રેખાઓ કોઈ બંધ ગાળો રચતી નથી. આ બાબત, વિદ્યુતક્ષેત્રના સંરક્ષી સ્વભાવ પરથી ફલિત થાય છે (પ્રકરણ-2).

1.10 વિદ્યુત ફ્લક્સ (Electric Flux)

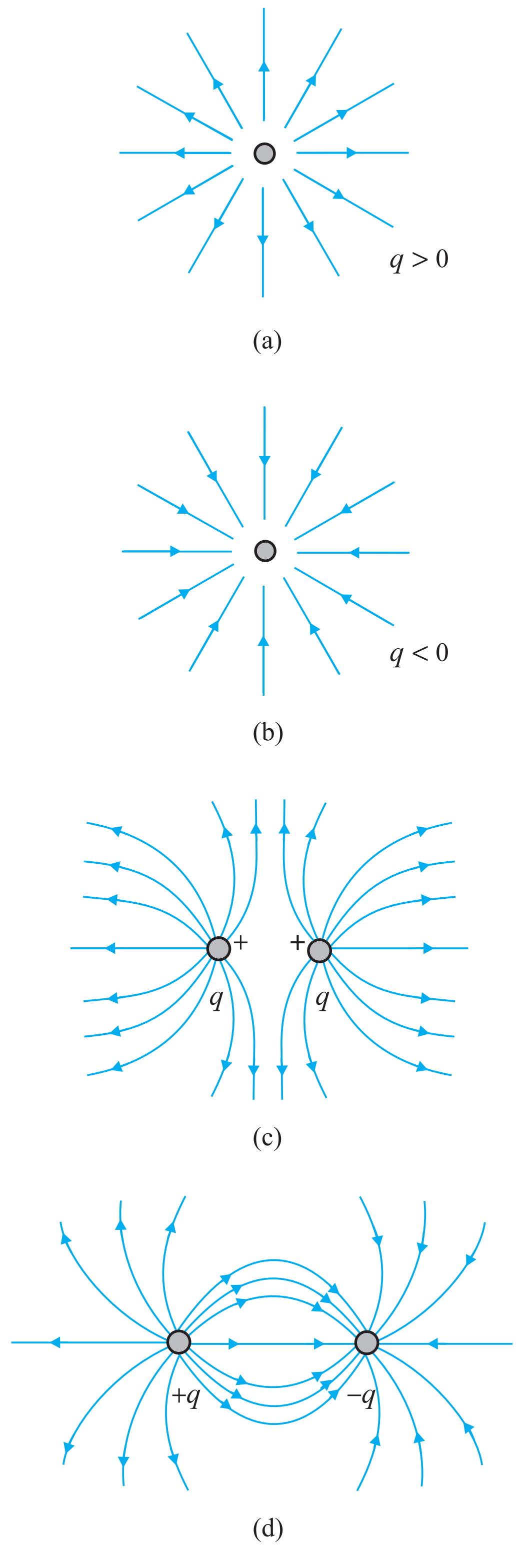
એક નાના સપાટ પૃષ્ઠ dS માંથી પૃષ્ઠને લંબરૂપે **υ** વેગથી વહન પામતા પ્રવાહીનો વિચાર કરો. પ્રવાહીના વહનનો દર, એકમ સમયમાં તે ક્ષેત્રફળમાંથી પસાર થતા કદ υ dS પરથી મળે છે અને તે સમતલમાંથી વહન પામતો પ્રવાહી ફ્લક્સ રજૂ કરે છે. જો પૃષ્ઠને દોરેલો લંબ પ્રવાહીના વહનની દિશાને, એટલે કે **υ**ને, લંબ ન હોય, પણ તેની સાથે ખૂણો θ બનાવતો હોય તો **υ**ને લંબ પ્રક્ષેપિત ક્ષેત્રફળ dS cosθ છે. આથી, પૃષ્ઠ dSમાંથી બહાર જતું ફ્લક્સ $\mathbf{\upsilon} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ dS છે.

વિદ્યુતક્ષેત્રના કિસ્સામાં, આપણે આના જેવી રાશિ વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ અને તેને *વિદ્યુત ફ્લક્સ* કહે છે.

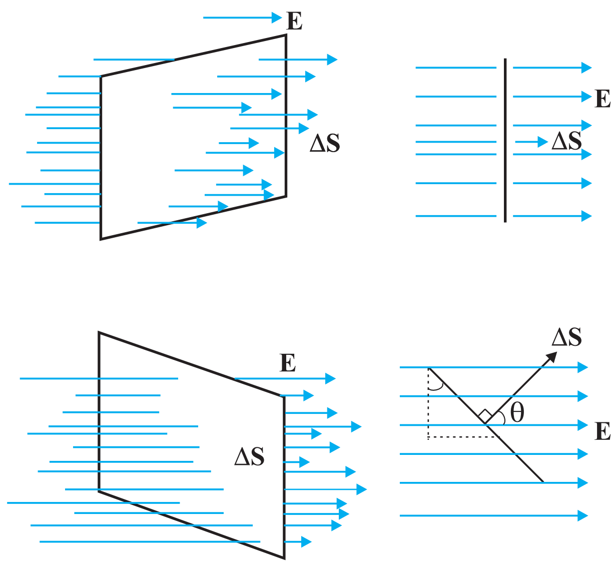
જો કે આપણે નોંધવું જોઈએ કે, પ્રવાહીના વહનથી વિપરિત એવું આ કિસ્સામાં કોઈ દશ્યમાન ભૌતિક રાશિનું *વહન* થતું નથી.

ઉપર જણાવેલ વિદ્યુતક્ષેત્ર રેખાઓના ચિત્રમાં, આપણે જોયું કે આપેલા બિંદુએ ક્ષેત્રને લંબ મૂકેલા એકમ ક્ષેત્રફળમાંથી પસાર થતી ક્ષેત્ર રેખાઓની સંખ્યા, તે બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની પ્રબળતાનું (તીવ્રતાનું) માપ છે. આનો અર્થ એ કે જો આપણે, આપેલા બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર **E**ને લંબ એક ΔS ક્ષેત્રફળનો નાનો સમતલ ખંડ મૂકીએ તો તેમાંથી પસાર થતી ક્ષેત્ર રેખાઓની સંખ્યા $E\,\Delta$Sને સમપ્રમાણમાં* છે. હવે ધારો કે આપણે ક્ષેત્રફળ ખંડને કોણ θ જેટલો નમાવીએ.

* ક્ષેત્ર રેખાઓની સંખ્યા E ΔS બરાબર છે એમ કહેવું યોગ્ય નથી. ક્ષેત્ર રેખાઓની સંખ્યા, છેવટે તો આપણે કેટલી ક્ષેત્ર રેખાઓ દોરવાનું પસંદ કરીએ તેની બાબત છે. ભૌતિક રીતે મહત્ત્વનું તો, આપેલ ક્ષેત્રફળને જુદા જુદા બિંદુએ રાખતાં તેમાંથી પસાર થતી ક્ષેત્ર રેખાઓની સાપેક્ષ સંખ્યા છે.



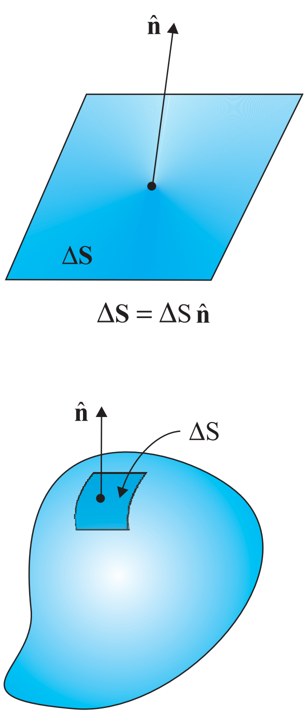
આકૃતિ 1.17 કેટલીક સાદી વિદ્યુતભાર ગોઠવણીને લીધે ક્ષેત્ર રેખાઓ



આકૃતિ 1.18 E અને $\hat{\mathbf{n}}$ વચ્ચેના કોણ θ પર ફ્લક્સનો આધાર

સ્પષ્ટ રીતે, હવે ક્ષેત્રફળ ખંડમાંથી પસાર થતી ક્ષેત્ર રેખાઓની સંખ્યા ઓછી થશે. ક્ષેત્રફળ ખંડનો **E**ને લંબ પ્રક્ષેપ $\Delta S \cos\theta$ છે. આમ, ΔSમાંથી પસાર થતી ક્ષેત્ર રેખાઓની સંખ્યા $E\,\Delta S \cos\theta$ છે. જ્યારે $\theta = 90$ હોય ત્યારે ક્ષેત્ર રેખાઓ $\Delta \mathbf{S}$ (સદિશ)ને સમાંતર હશે અને તેમાંથી બિલકુલ પસાર નહિ થાય (આકૃતિ 1.18).

ઘણા સંદર્ભમાં ક્ષેત્રફળ ખંડનું માત્ર માન જ નહિ પણ નમન (Orientation) પણ મહત્ત્વનું હોય છે. દાખલા તરીકે વહનમાં, કોઈ વલય (Ring) માંથી પસાર થતા પાણીનો જથ્થો તમે તે વલયને કેવી રીતે પકડી રાખેલ છે તેના પર આધાર રાખે છે. જો તમે તેને વહનને લંબરૂપે પકડી રાખો તો કોઈ ખૂણે રાખેલ હોય તે કરતાં તેમાંથી મહત્તમ જથ્થાનું પાણી પસાર થશે. આ દર્શાવે છે કે, ક્ષેત્રફળ ખંડને સદિશ તરીકે ગણવો જોઈએ. તેને માન હોય છે અને દિશા પણ હોય છે. સમતલના ક્ષેત્રફળની દિશા કેવી રીતે દર્શાવાય ? સ્પષ્ટ છે કે, સમતલને દોરેલો લંબ, તે સમતલનું નમન દર્શાવે છે. આમ, સમતલનો ક્ષેત્રફળ સદિશ તેને દોરેલા લંબની દિશામાં છે.



આકૃતિ 1.19 ΔS અને લંબ $\hat{\mathbf{n}}$ ને વ્યાખ્યાયિત કરવાની પ્રણાલિકા

કોઈ વક્ર સપાટીના ક્ષેત્રફળ સાથે સદિશને કેવી રીતે સાંકળવો ? આપણે સપાટીને ખૂબ મોટી સંખ્યાના, ખૂબ નાના નાના ક્ષેત્રફળ ખંડોમાં વિભાજિત કરેલો કલ્પીએ છીએ. દરેક નાનો ક્ષેત્રફળ ખંડ એક સમતલીય લઈ શકાય અને અગાઉ સમજાવ્યું તેમ તેની સાથે સદિશ જોડી શકાય.

અહીં, એક અસ્પષ્ટતા છે તે નોંધો. ક્ષેત્રફળ ખંડની દિશા તેને લંબ હોય છે. પણ લંબ બે દિશામાં હોઈ શકે છે. કઈ દિશા આપણે ક્ષેત્રફળ ખંડના સદિશ માટે પસંદ કરવી ? આ પ્રશ્નનું નિરાકરણ, આપેલ સંદર્ભને અનુરૂપ કોઈ પ્રણાલિકા (રૂઢિ) સ્વીકારીને કરવામાં આવે છે. બંધ સપાટી માટે આ પ્રણાલિકા બહુ સરળ છે. બંધ સપાટીના દરેક ક્ષેત્રફળ સાથે સંકળાયેલા સદિશની દિશા **બહાર તરફના** લંબની દિશામાં લેવાય છે. આકૃતિ 1.19માં આ પ્રણાલિકા વાપરેલ છે. આમ, બંધ સપાટી પર આપેલ બિંદુએ ક્ષેત્રફળ ખંડનો સદિશ $\Delta \mathbf{S}$, $\Delta S\,\hat{\mathbf{n}}$ બરાબર છે. જ્યાં, ΔS ક્ષેત્રફળ ખંડનું માન છે અને $\hat{\mathbf{n}}$ એ તે બિંદુએ બહાર તરફના લંબની દિશામાંનો એકમ સદિશ છે.

હવે આપણે વિદ્યુત ફ્લક્સની વ્યાખ્યા આપીએ. ક્ષેત્રફળ ખંડ $\Delta \mathbf{S}$માંથી પસાર થતા વિદ્યુત ફ્લક્સ $\Delta\phi$ને

$$\Delta\phi = \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{S} = E\Delta S\cos\theta \qquad (1.11)$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. તે અગાઉ જોયું તેમ, ક્ષેત્રફળ ખંડમાંથી પસાર થતી ક્ષેત્ર રેખાઓની સંખ્યાને સમપ્રમાણમાં છે. અહીં, ખૂણો θ એ **E** અને $\Delta\mathbf{S}$ વચ્ચેનો ખૂણો છે. બંધ સપાટી માટે હમણાં જ જણાવેલી પ્રણાલિકા મુજબ, θ એ **E** અને ક્ષેત્રફળ ખંડને બહારની તરફ દોરેલા લંબ વચ્ચેનો ખૂણો છે. અહીં $E\,\Delta S\cos\theta$ પદને આપણે બે રીતે જોઈ શકીએ છીએ : $E(\Delta S\cos\theta)$ એટલે કે, E ગુણ્યા ક્ષેત્રફળનો **E**ને લંબ દિશામાંનો પ્રક્ષેપ અથવા $E_{\perp}\Delta S$ એટલે કે **E**નો ક્ષેત્રફળ ખંડને લંબ દિશામાંનો ઘટક ગુણ્યા ક્ષેત્રફળ ખંડનું માન. વિદ્યુત ફલક્સનો એકમ $N\,C^{-1}\,m^2$ છે.

સિદ્ધાંતમાં, સમીકરણ (1.11) વડે આપેલી વિદ્યુત ફ્લક્સની મૂળભૂત વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને આપેલ કોઈ પણ સપાટીમાંથી કુલ ફ્લક્સ ગણી શકીએ છીએ. આપણે જે કરવાનું છે તે એ કે સપાટીને નાના ક્ષેત્રફળ ખંડમાં વિભાજિત કરવી, દરેક ખંડ માટે ફ્લક્સ ગણવું અને પછી તેમનો સરવાળો કરવો. આમ, સપાટી Sમાંથી કુલ ફ્લક્સ ϕ

$$\phi \simeq \Sigma\, \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S} \text{ છે.} \tag{1.12}$$

સંન્નિકટતાનું ચિહ્ન એટલા માટે મૂક્યું છે કે **E**ને નાના ક્ષેત્રફળ ખંડ પર અચળ લીધું છે. આ ગાણિતિક રીતે બરાબર ત્યારે બને કે જ્યારે $\Delta S \to 0$ લેવાય અને સમીકરણ (1.12)માંનો સરવાળો સંકલન તરીકે લખાય.

1.11 વિદ્યુત ડાયપોલ (દ્વિ-ધ્રુવી) (Electric Dipole)

એકબીજાથી અમુક $(2a)$ અંતરે રહેલા બે સમાન અને વિરુદ્ધ પ્રકારના વિદ્યુતભારો (q અને $-q$)ની જોડને *વિદ્યુત ડાયપોલ* (દ્વિ-ધ્રુવી) કહે છે. બે વિદ્યુતભારોને જોડતી રેખા અવકાશમાં એક દિશા નક્કી કરે છે. પ્રણાલિકા મુજબ $-q$ થી qની દિશાને ડાયપોલની દિશા કહે છે. $-q$ અને qના સ્થાનો વચ્ચેનાં મધ્યબિંદુને ડાયપોલનું કેન્દ્ર કહે છે.

વિદ્યુત ડાયપોલનો કુલ વિદ્યુતભાર સ્વાભાવિક રીતે જ શૂન્ય છે. આનો અર્થ એ નથી કે ડાયપોલનું ક્ષેત્ર શૂન્ય છે. q અને $-q$ વિદ્યુતભારો વચ્ચે કંઈક અંતર હોવાથી, તેમના વડે ઉદ્ભવતાં વિદ્યુતક્ષેત્રોનો જ્યારે સરવાળો કરવામાં આવે ત્યારે તેઓ પુરેપુરા નાબુદ થતા નથી. આથી, ડાયપોલથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર, મોટા અંતરે, $1/r^2$ કરતાં વધારે ઝડપથી ઘટતું જાય છે. (એકલ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર $1/r^2$ મુજબ ઘટે છે.) આ ગુણાત્મક ખ્યાલો નીચેની ગણતરી પરથી ફલિત થાય છે.

1.11.1 વિદ્યુત ડાયપોલ (દ્વિ-ધ્રુવી)નું ક્ષેત્ર (The Field of an Electric Dipole)

વિદ્યુતભારોની જોડ ($-q$ અને q)નું, અવકાશમાં કોઈ પણ બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર, કુલંબના નિયમ અને સંપાતપણાના સિદ્ધાંત પરથી શોધી શકાય છે. નીચેના બે કિસ્સાઓ માટે પરિણામો સરળ છે. (i) જ્યારે તે બિંદુ ડાયપોલની અક્ષ પર હોય (ii) જ્યારે તે ડાયપોલના વિષુવરેખીય સમતલમાં હોય એટલે કે ડાયપોલની અક્ષને લંબ અને તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતા સમતલ પર હોય. વ્યાપકરૂપે કોઈપણ બિંદુ P આગળનું વિદ્યુતક્ષેત્ર, $-q$ વિદ્યુતભારને લીધે વિદ્યુતક્ષેત્ર $\mathbf{E}_{-q}$ અને q વિદ્યુતભારને લીધે ક્ષેત્ર $\mathbf{E}_{+q}$ના સદિશોના સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણના નિયમ મુજબ સરવાળો કરવાથી મળે છે.

(i) અક્ષ પરના બિંદુઓ માટે

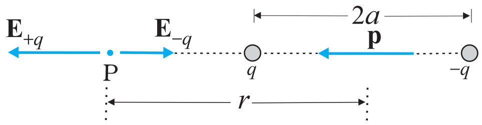
આકૃતિ 1.20(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે P બિંદુ, ડાયપોલના કેન્દ્રથી r અંતરે, q વિદ્યુતભારની બાજુએ આવેલું છે. તો

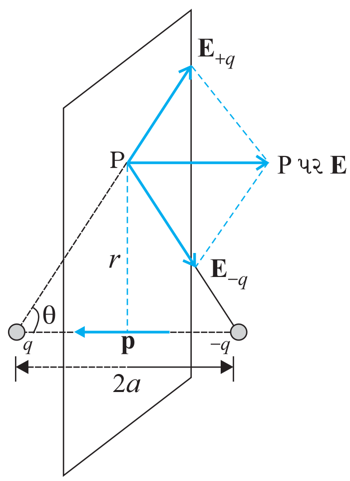
$$\mathbf{E}_{-q} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r+a)^2}\,\hat{\mathbf{p}} \tag{1.13(a)}$$

છે, જ્યાં $\hat{\mathbf{p}}$, ડાયપોલની અક્ષ પર ($-q$ થી q તરફ)નો એકમ સદિશ છે. ઉપરાંત

$$\mathbf{E}_{+q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r-a)^2}\,\hat{\mathbf{p}} \tag{1.13(b)}$$

P આગળનું કુલ ક્ષેત્ર





આકૃતિ 1.20 ડાયપોલનું વિદ્યુતક્ષેત્ર (a) અક્ષ પરના બિંદુએ (b) વિષુવરેખીય સમતલમાંના બિંદુએ. **p** ડાયપોલ ચાકમાત્રા સદિશ છે, તેનું માન $p = q \times 2a$ અને દિશા $-q$ થી $+q$ તરફ છે.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{+q} + \mathbf{E}_{-q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(r-a)^2} - \frac{1}{(r+a)^2}\right]\hat{\mathbf{p}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\,a\,r}{(r^2-a^2)^2}\,\hat{\mathbf{p}} \qquad (1.14)$$

$r >> a$ માટે,

$$\mathrm{E} = \frac{4\,q\,a}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\hat{\mathbf{p}} \qquad (r >> a) \qquad (1.15)$$

(ii) વિષુવરેખીય સમતલ પરનાં બિંદુઓ માટે

બે વિદ્યુતભારો $+q$ અને $-q$ને લીધે ઉદ્‌ભવતાં વિદ્યુતક્ષેત્રોનાં માન અનુક્રમે,

$$E_{+q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2+a^2} \qquad [1.16(a)]$$

$$\text{અને } E_{-q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2+a^2} \qquad [1.16(b)]$$

છે અને તેઓ સમાન છે.

$\mathbf{E}_{+q}$ અને $\mathbf{E}_{-q}$ સદિશની દિશાઓ આકૃતિ 1.20(b)માં દર્શાવ્યા મુજબની છે. એ સ્પષ્ટ છે કે ડાયપોલની અક્ષને લંબ ઘટકો નાબુદ થશે. ડાયપોલની અક્ષને સમાંતર ઘટકોનો સરવાળો થશે. કુલ વિદ્યુતક્ષેત્ર $\hat{\mathbf{p}}$ ની વિરૂદ્ધ દિશામાં છે. આથી, આપણને

$$\mathbf{E} = -(E_{+q} + E_{-q})\cos\theta\,\hat{\mathbf{p}}$$

$$= -\frac{2\,q\,a}{4\pi\varepsilon_0(r^2+a^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{p}} \qquad (1.17)$$

મળે છે. બહુ મોટા અંતર ($r >> a$) માટે આ પરથી,

$$\mathbf{E} = -\frac{2\,q\,a}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\hat{\mathbf{p}} \qquad (r >> a) \qquad (1.18)$$

સમીકરણો (1.15) અને (1.18) પરથી એ સ્પષ્ટ છે કે મોટા અંતરો માટે ડાયપોલના ક્ષેત્રમાં q અને a જુદા જુદા નથી આવતા પણ તેમના ગુણાકાર qa પર ક્ષેત્ર આધારિત છે. આ ડાયપોલ ચાકમાત્રા (Moment)ની વ્યાખ્યાનું સૂચન કરે છે. વિદ્યુત ડાયપોલની ડાયપોલ ચાકમાત્રા **p**, ને

$$\mathbf{p} = q \times 2a\,\hat{\mathbf{p}} \qquad (1.19)$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે. આમ તે એક સદિશ છે, જેનું માન વિદ્યુતભાર q ગુણ્યા બે વચ્ચેનું અંતર $2a$ (જોડીમાંના વિદ્યુતભારો q અને $-q$ વચ્ચેનું) છે અને તેની દિશા $-q$ થી $+q$ તરફની રેખા પર છે. **p**ના પદમાં, ડાયપોલનું વિદ્યુતક્ષેત્ર મોટા અંતરો માટે સાદા સ્વરૂપમાં મળે છે :

ડાયપોલની અક્ષ પરના બિંદુએ,

$$\mathbf{E} = \frac{2\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (r >> a) \qquad (1.20)$$

વિષુવરેખીય સમતલ પરના બિંદુએ

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (r >> a) \qquad (1.21)$$

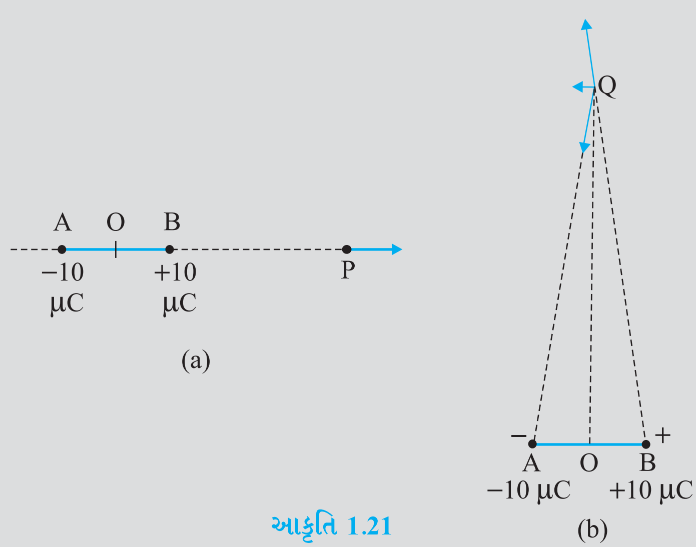
એક મહત્ત્વનો મુદ્દો નોંધીએ કે મોટા અંતરોએ ડાયપોલનું વિદ્યુતક્ષેત્ર $1/r^2$ તરીકે નહિ પણ $1/r^3$ મુજબ ઘટે છે. ઉપરાંત, ડાયપોલના વિદ્યુતક્ષેત્રનું માન અને દિશા માત્ર અંતર r પર જ આધારિત નથી પણ સ્થાન સદિશ **r** અને ડાયપોલ ચાકમાત્રા **p** વચ્ચેના *ખૂણા* પર પણ આધારિત છે.

આપણે ડાયપોલનું પરિમાણ $2a$ શૂન્ય તરફ ગતિ કરે અને વિદ્યુતભાર q અનંત તરફ ગતિ કરે ,જેથી $p = q \times 2a$ ગુણાકાર સીમિત (Finite) રહે તેવા લક્ષ (Limit)નો વિચાર કરી શકીએ. આવા ડાયપોલને **બિંદુ ડાયપોલ** કહે છે. બિંદુ ડાયપોલ માટે સમીકરણો (1.20) અને (1.21) કોઈ પણ અંતર માટે યથાર્થ છે.

1.11.2 ડાયપોલ (દ્વિ-ધ્રુવી)નું ભૌતિક મહત્ત્વ (Physical Significance of Dipoles)

મોટા ભાગના અણુઓ માટે ધન વિદ્યુતભારનું કેન્દ્ર* અને ઋણ વિદ્યુતભારનું કેન્દ્ર એક જ સ્થાને હોય છે. તેથી તેમની ડાયપોલ (દ્વિ-ધ્રુવી) ચાકમાત્રા શૂન્ય છે. CO_2 અને CH_4 આ પ્રકારના અણુઓ છે. આમ છતાં, જ્યારે વિદ્યુતક્ષેત્ર લગાડવામાં આવે ત્યારે તેઓમાં ડાયપોલ ચાકમાત્રા ઉત્પન્ન થાય છે. પરંતુ કેટલાક અણુઓમાં ધન અને ઋણ વિદ્યુતભારોનાં કેન્દ્રો સંપાત થતાં નથી. તેથી વિદ્યુતક્ષેત્રની ગેરહાજરીમાં પણ તેઓ કાયમી વિદ્યુત ડાયપોલ ચાકમાત્રા ધરાવે છે. આવા અણુઓને *ધ્રુવીય અણુઓ* કહે છે. પાણીનો અણુ H_2O, આ પ્રકારનું ઉદાહરણ છે. વિવિધ દ્રવ્યો વિદ્યુતક્ષેત્રની હાજરી કે ગેરહાજરીમાં રસપ્રદ ગુણધર્મો અને અગત્યના ઉપયોગો ધરાવે છે.

ઉદાહરણ 1.10 બે વિદ્યુતભારો ±10 μC એકબીજાથી 5.0 mm અંતરે મૂકેલા છે. (a) આકૃતિ 1.21(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ ડાયપોલની અક્ષ પરના, તેના કેન્દ્રથી 15 cm દૂર ધન વિદ્યુતભાર બાજુ આવેલા P બિંદુએ અને (b) આકૃતિ 1.21(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ Oમાંથી પસાર થતી અને અક્ષને લંબ રેખા પર O થી 15 cm દૂર રહેલા Q બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધો.



આકૃતિ 1.21

ઉદાહરણ 1.10

* બિંદુરૂપ ધન વિદ્યુતભારોના સમૂહનું કેન્દ્ર, દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની જેમજ વ્યાખ્યાયિત કરાય છે :

$$\mathbf{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{\sum_i q_i \mathbf{r}_i}{\sum_i q_i}$$

ઉકેલ (a) $+10\ \mu C$ વિદ્યુતભારને લીધે વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$= \frac{10^{-5}\ C}{4\pi(8.854\times10^{-12}\ C^2\ N^{-1}\ m^{-2})} \times \frac{1}{(15-0.25)^2\times10^{-4}\ m^2}$$

$= 4.13\times10^6\ N\,C^{-1}$, BP દિશામાં

$-10\ \mu C$ વિદ્યુતભારને લીધે P આગળનું વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$= \frac{10^{-5}\ C}{4\pi(8.854\times10^{-12}\ C^2\ N^{-1}\ m^{-2})} \times \frac{1}{(15+0.25)^2\times10^{-4}\ m^2}$$

$= 3.86\times10^6\ N\,C^{-1}$, PA દિશામાં

A અને B આગળના બે વિદ્યુતભારોને લીધે P આગળનું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર $= 2.7\ \times10^5\ N\,C^{-1}$, BP દિશામાં.

આ ઉદાહરણમાં, OP/OB ગુણોત્તર ઘણો મોટો (= 60) છે. આમ, આપણે ડાયપોલની અક્ષ પરના ખૂબ દૂરના બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર માટેનું સૂત્ર સીધું વાપરીએ તો પણ લગભગ ઉપરનું પરિણામ જ મળે. એકબીજાથી $2a$ અંતરે રહેલા $\pm q$ વિદ્યુતભારોથી બનતા ડાયપોલની અક્ષ પરના બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રનું માન

$$E = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad (r/a >> 1)$$ પરથી મળે છે.

જ્યાં, $p = 2aq$ ડાયપોલ ચાકમાત્રાનું માન છે.

ડાયપોલની અક્ષ પર વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશા હંમેશાં ડાયપોલ ચાકમાત્રાના સદિશની દિશામાં ($-q$ થી $+q$ તરફ) હોય છે. અહીં $p = 10^{-5}\ C\times5\times10^{-3}\ m = 5\times10^{-8}\ C\,m$

તેથી,

$$E = \frac{2\times5\times10^{-8}\ C\ m}{4\pi(8.854\times10^{-12}\ C^2\ N^{-1}\ m^{-2})} \times \frac{1}{(15)^3\times10^{-6}\ m^3} = 2.6\times10^5\ N\,C^{-1}$$

અને તે ડાયપોલ ચાકમાત્રાની દિશા ABની દિશામાં છે. જે અગાઉ મેળવેલ પરિણામની નજીક છે. (b) B આગળના વિદ્યુતભાર $+10\ \mu C$ને લીધે Q બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$= \frac{10^{-5}\ C}{4\pi(8.85\times10^{-12}\ C^2\ N^{-1}\ m^{-2})} \times \frac{1}{[15^2+(0.25)^2]\times10^{-4}\ m^2}$$

$= 3.99\times10^6\ N\,C^{-1}$, BQ દિશામાં.

A આગળના વિદ્યુતભાર $-10\ \mu C$ને લીધે Q બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$= \frac{10^{-5}\ C}{4\pi(8.854\times10^{-12}\ C^2\ N^{-1}\ m^{-2})} \times \frac{1}{[15^2+(0.25)^2]\times10^{-4}\ m^2}$$

$= 3.99\times10^6\ N\,C^{-1}$, QA દિશામાં

અત્રે સ્પષ્ટ છે કે આ બે સમાન મૂલ્યનાં બળોના OQ રેખા પરના ઘટકો નાબુદ થશે અને BA રેખાને સમાંતર ઘટકોનો સરવાળો થશે. આથી A અને B આગળના બે વિદ્યુતભારોને લીધે Q આગળનું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$= 2\times\frac{0.25}{\sqrt{15^2+(0.25)^2}}\times3.99\times10^6\ N\,C^{-1}$$, BA દિશામાં

$= 1.33\times10^5\ N\,C^{-1}$, BA દિશામાં.

કિસ્સા (a)ની જેમજ, ડાયપોલની અક્ષને લંબ રેખા પરના ઘણે દૂરના બિંદુ આગળના વિદ્યુતક્ષેત્ર માટેના સૂત્રનો સીધો ઉપયોગ કરતાં લગભગ આ જ પરિણામ મળે તે અપેક્ષિત છે.

ઉદાહરણ 1.10

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (r/a >> 1)$$

$$= \frac{5\times10^{-8}\ \text{C m}}{4\pi(8.854\times10^{-12}\ \text{C}^2\ \text{N}^{-1}\ \text{m}^{-2})} \times \frac{1}{(15)^3\times10^{-6}\ \text{m}^3}$$

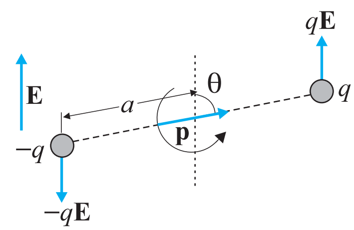
$$= 1.33\times10^5\ \text{N C}^{-1}$$

આ કિસ્સામાં વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશા ડાયપોલ ચાકમાત્રાના સદિશની વિરુદ્ધ દિશામાં છે. આ પરિણામ પણ અગાઉ મેળવેલ પરિણામ સાથે સુસંગત છે.

ઉદાહરણ 1.10

1.12 સમાન બાહ્યક્ષેત્રમાં મૂકેલ ડાયપોલ (દ્વિ-ધ્રુવી) (Dipole in a Uniform External Field)

આકૃતિ 1.22માં દર્શાવ્યા મુજબ સમાન બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર **E**માં મૂકેલા **p** ડાયપોલ ચાકમાત્રા ધરાવતા કાયમી ડાયપોલ (દ્વિ-ધ્રુવી)નો વિચાર કરો. (કાયમી ડાયપોલ એટલે, તે **E** વડે ઉત્પન્ન થયેલું નથી પણ **E** હોય કે ન હોય તો પણ **p** અસ્તિત્વ ધરાવે છે).



આકૃતિ 1.22 એક સમાન વિદ્યુત ક્ષેત્રમાં ડાયપોલ

q પર લાગતું બળ $q\mathbf{E}$ અને $-q$ પર લાગતું બળ $-q\mathbf{E}$ છે. ડાયપોલ પરનું કુલ બળ શૂન્ય છે, કારણ કે **E** સમાન છે. આમ છતાં, વિદ્યુતભારો વચ્ચે અંતર છે, તેથી બળો જુદા જુદા બિંદુએ લાગે છે, પરિણામે ડાયપોલ પર ટોર્ક લાગે છે. જ્યારે કુલ બળ શૂન્ય હોય ત્યારે ટોર્ક (બળયુગ્મ) ઉગમબિંદુ પર આધારિત નથી. ટોર્કનું માન, દરેક બળ અને બળયુગ્મના ભૂજ (તે બે પ્રતિસમાંતર બળો વચ્ચેનું લંબ અંતર)ના ગુણાકાર જેટલું છે.

ટોર્કનું માન $= q\,E \times 2\,a \sin\theta$

$= 2\,q\,a\,E \sin\theta = p\,E \sin\theta$

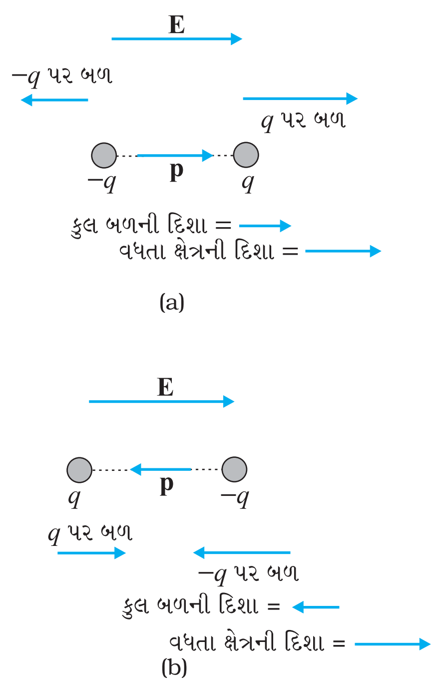
તેની દિશા પુસ્તકના પૃષ્ઠને લંબ, બહાર તરફની દિશામાં છે.

$\mathbf{p}\times\mathbf{E}$નું માન પણ $p\,E\sin\theta$ છે અને તેની દિશા પુસ્તકના પૃષ્ઠને લંબ બહારની તરફ છે. આમ,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}\times\mathbf{E} \qquad (1.22)$$

આ ટોર્ક, ડાયપોલને ક્ષેત્ર **E**ને સમાંતર બનાવવાનો પ્રયત્ન કરે છે. જ્યારે **p**, **E**ને સમાંતર બને છે ત્યારે ટોર્ક શૂન્ય બને છે.

જો વિદ્યુતક્ષેત્ર સમાન ન હોય તો શું થાય ? સ્પષ્ટ છે કે તે કિસ્સામાં પરિણામી બળ, શૂન્ય નહિ હોય. તે ઉપરાંત, સામાન્ય રીતે તંત્ર પર અગાઉની જેમ ટોર્ક લાગતું હશે. આપણે એક સરળ પરિસ્થિતિ કે જેમાં **p**, **E**ને સમાંતર કે પ્રતિસમાંતર હોય તેનો વિચાર કરીએ. આ બંને કિસ્સામાં કુલ (Net) ટોર્ક શૂન્ય છે, પણ જો **E** સમાન ન હોય તો કુલ (Net) બળ શૂન્ય નથી.



આકૃતિ 1.23 ડાયપોલ પરનું વિદ્યુત બળ (a) **E, p**ને સમાંતર (b) **E, p**ને પ્રતિસમાંતર

આકૃતિ 1.23 સ્વયં સ્પષ્ટ છે. એ જોઈ શકાય છે કે જ્યારે **p**, **E**ને સમાંતર હોય છે ત્યારે ડાયપોલ પર વધતા ક્ષેત્રની દિશામાં બળ લાગે છે. જ્યારે **p**, **E**ને પ્રતિસમાંતર હોય ત્યારે ડાયપોલ પર ઘટતા ક્ષેત્રની દિશામાં બળ લાગે છે. વ્યાપકરૂપે, બળ **p**ના **E**ની સાપેક્ષે નમન (Orientation) પર આધાર રાખે છે.

આ બાબત આપણને ઘર્ષણવિદ્યુતના સામાન્ય અવલોકનમાં જણાય છે. સૂકા વાળમાં ઘસેલો કાંસકો કાગળના ટુકડાઓને આકર્ષે છે. પરંતુ કાગળ કંઈ વિદ્યુતભારિત નથી. તો પછી આકર્ષણ બળ કેવી રીતે સમજાવી શકાય ? ઉપરની ચર્ચા પરથી કંઈક ઈશારો મળે છે. વિદ્યુતભારિત કાંસકો કાગળના ટુકડાનું ધ્રુવીભવન કરે છે એટલે કે વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશામાં પરિણામી ડાયપોલ ચાકમાત્રા પ્રેરિત કરે છે. ઉપરાંત કાંસકાનું

વિદ્યુતક્ષેત્ર સમાન નથી. આ પરિસ્થિતિમાં એવું સરળતાથી જોઈ શકાય છે કે કાગળ, કાંસકા તરફ ખસવો જોઈએ.

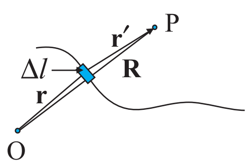
1.13 સતત વિદ્યુતભાર વિતરણ (Continuous Charge Distribution)

અત્યાર સુધી આપણે અલગ અલગ (Discrete) વહેંચાયેલા વિદ્યુતભારો $q_1, q_2, ..., q_n$ સાથે કામ કર્યું. આપણે શા માટે માત્ર અલગ અલગ વિદ્યુતભારો પૂરતી મર્યાદામાં આમ કર્યું તેનું એક કારણ એ છે કે તેનું ગણિત સરળ છે અને તેમાં કલનશાસ્ત્રની જરૂર નથી. પરંતુ કેટલાક હેતુઓ માટે અલગ અલગ વિદ્યુતભારોના પદમાં કામ કરવાનું અવ્યવહારૂ છે અને આપણે સતત (Continuous) વિદ્યુતભાર વિતરણ સાથે કામ કરવાની જરૂર પડે છે. દાખલા તરીકે, વિદ્યુતભારિત સુવાહકની સપાટી પર વિદ્યુતભાર વિતરણને, સૂક્ષ્મ વિદ્યુતભારિત ઘટકોના સ્થાનના પદમાં દર્શાવવાનું અવ્યવહારૂ છે. સુવાહકની સપાટી પર ક્ષેત્રફળ ખંડ ΔS (જે સ્થૂળ માપક્રમ પર ઘણો નાનો છે પણ ઘણી મોટી સંખ્યાના ઈલેક્ટ્રૉનનો સમાવેશ કરી શકે તેટલો મોટો છે)નો વિચાર કરવાનું અને તે ખંડ પર વિદ્યુતભાર ΔQ દર્શાવવાનું સુગમ છે. આ પરથી આપણે ક્ષેત્રફળ ખંડ પર *વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા* σ ને

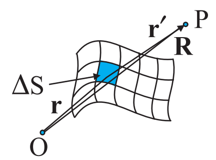
$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S} \tag{1.23}$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ

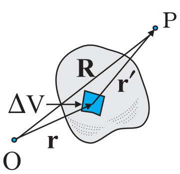
આવું આપણે સુવાહકના જુદા જુદા બિંદુઓએ કરી શકીએ અને વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠ ઘનતા નામનું એક સતત વિધેય σ મળી શકે. આ રીતે વ્યાખ્યાયિત કરેલ વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠ ઘનતા σ, વિદ્યુતભારના ક્વૉન્ટમીકરણને અને વિદ્યુતભાર વિતરણમાં સૂક્ષ્મ સ્તરે* રહેલી અસતતતાને અવગણે છે. σ સ્થૂળ સ્તરે વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠ ઘનતા દર્શાવે છે, જે એક અર્થમાં તો, સૂક્ષ્મ સ્તરે વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠ ઘનતાની, ΔS પૃષ્ઠ ખંડ, જે અગાઉ જણાવ્યું તેમ સૂક્ષ્મ સ્તરે વિચારતાં મોટું અને સ્થૂળ સ્તરે વિચારતાં નાનું છે, તેના પરની સરેરાશ દર્શાવે છે. σનો એકમ C/m^2 છે.



રેખીય વિદ્યુતભાર $\Delta Q = \lambda\ \Delta l$



પૃષ્ઠ વિદ્યુતભાર $\Delta Q = \sigma\ \Delta S$



કદ વિદ્યુતભાર $\Delta Q = \rho\ \Delta V$

આકૃતિ 1.24 રેખીય, પૃષ્ઠ અને કદ વિદ્યુતભાર ઘનતાઓની વ્યાખ્યા. દરેક કિસ્સામાં પસંદ કરેલ ખંડ (Δl, ΔS, ΔV) સ્થૂળ માપક્રમ પર નાનો છે પણ મોટી સંખ્યાના સૂક્ષ્મ ઘટકો ધરાવે છે.

રેખીય વિદ્યુતભાર વિતરણ અને કદ વિદ્યુતભાર વિતરણ માટે પણ આવી વિચારણા લાગુ પડે છે. કોઈ તારની *રેખીય વિદ્યુતભાર ઘનતા* λ ને

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta l} \tag{1.24}$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે. જ્યાં, Δl એ તાર પર સ્થૂળ સ્તરે નાનો લંબાઈ ખંડ છે કે જે ઘણી મોટી સંખ્યાના સૂક્ષ્મ વિદ્યુતભારિત ઘટકો ધરાવે છે અને ΔQ તે રેખાખંડમાં રહેલો વિદ્યુતભાર છે. λનો એકમ C/m છે. કદ વિદ્યુતભાર ઘનતા (ઘણી વખત વિદ્યુતભાર ઘનતા કહેવાય છે)ને એવી જ રીતે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે :

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \tag{1.25}$$

જ્યાં ΔQ, સ્થૂળ સ્તરે નાના કદ ખંડ ΔVમાં જે સૂક્ષ્મ સ્તરે તો ઘણા વિદ્યુતભારિત ઘટકો ધરાવે છે તેમાં રહેલો વિદ્યુતભાર છે. ρનો એકમ C/m^3 છે.

વિદ્યુતભારના સતત વિતરણનો ખ્યાલ યંત્રશાસ્ત્રમાં આપણે દળના સતત વિતરણના લીધેલા ખ્યાલ જેવો છે. જ્યારે આપણે પ્રવાહીની ઘનતાની વાત કરીએ છીએ ત્યારે આપણે તેની સ્થૂળ ઘનતાની વાત કરીએ છીએ. આપણે તેને સતત પ્રવાહી તરીકે ગણીએ છીએ અને તેના અલગ અલગ આણ્વિય બંધારણને અવગણીએ છીએ.

* સૂક્ષ્મ અંતરે વિદ્યુતભાર વિતરણ અસતત છે, કારણ કે તેઓ અલગ અલગ સ્થાનો પરના વિદ્યુતભારો છે જેમની વચ્ચે અવકાશ છે જ્યાં કોઈ વિદ્યુતભાર નથી.

સતત વિદ્યુતભાર વિતરણને લીધે ઉદ્ભવતું ક્ષેત્ર, અલગ-અલગ વિદ્યુતભારોના તંત્રને લીધે શોધ્યું (સમીકરણ 1.10) તે જ રીતે શોધી શકાય છે. ધારો કે અવકાશમાં સતત વિદ્યુતભાર વિતરણની વિદ્યુતભાર ઘનતા ρ છે. કોઈ સુગમભર્યું બિંદુ Oને ઉદ્ગમબિંદુ તરીકે લો અને વિદ્યુતભાર વિતરણમાં કોઈ બિંદુનો સ્થાન સદિશ $\mathbf{r}$ દર્શાવો. વિદ્યુતભાર ઘનતા બિંદુએ બિંદુએ બદલાઈ પણ શકે છે, એટલે કે તે $\mathbf{r}$નું વિધેય છે. વિદ્યુતભાર વિતરણને ΔV માપના નાના કદ ખંડોમાં વિભાજિત કરો. ΔV કદખંડમાં રહેલો વિદ્યુતભાર $\rho\Delta V$ છે.

હવે કોઈ એક બિંદુ (વિદ્યુતભાર વિતરણની અંદર અથવા બહાર) P લો, જેનો સ્થાન સદિશ $\mathbf{R}$ છે (આકૃતિ 1.24). $\rho\Delta V$ વિદ્યુતભારને લીધે P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર કુલંબના નિયમ પરથી,

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\Delta V}{r'^2}\,\hat{\mathbf{r}}' \qquad (1.26)$$

મળે છે. જ્યાં, r' એ વિદ્યુતભાર ખંડ અને P વચ્ચેનું અંતર છે અને $\hat{\mathbf{r}}'$ વિદ્યુતભાર ખંડથી P તરફનો એકમ સદિશ છે. સંપાતપણાના સિદ્ધાંત પરથી વિદ્યુતભાર વિતરણને લીધે કુલ વિદ્યુતક્ષેત્ર જુદા જુદા કદ ખંડોને લીધે ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રોનો સરવાળો કરવાથી મળે છે :

$$\mathbf{E} \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\text{બધા }\Delta V}\frac{\rho\Delta V}{r'^2}\,\hat{\mathbf{r}}' \qquad (1.27)$$

એ નોંધો કે ρ, r', $\hat{\mathbf{r}}'$ એ બધા બિંદુએ બિંદુએ બદલાઈ શકે છે. તદ્દન ગાણિતીક રીતમાં આપણે $\Delta V \rightarrow 0$ લક્ષ લઈને સરવાળાને સંકલન તરીકે લેવું જોઈએ, પરંતુ સરળતા ખાતર આપણે તે ચર્ચા છોડી દઈએ છીએ. ટૂંકમાં કુલંબનો નિયમ અને સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત વાપરીને અલગ-અલગ અથવા સતત અથવા અંશતઃ અલગ અલગ અને અંશતઃ સતત એવા કોઈ પણ વિદ્યુતભાર વિતરણ માટે વિદ્યુતક્ષેત્ર મેળવી શકાય છે.

1.14 ગૉસનો નિયમ (Gauss's Law)

વિદ્યુત ફ્લક્સના ખ્યાલના એક સરળ ઉપયોગ તરીકે, આપણે કેન્દ્ર પર રહેલા બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર qને ઘેરતા r ત્રિજ્યાના ગોળામાંથી પસાર થતું ફ્લક્સ વિચારીએ. આકૃતિ 1.25માં દર્શાવ્યા મુજબ ગોળાને નાના-નાના ક્ષેત્રફળ ખંડોમાં વિભાજિત કરો.

ક્ષેત્રફળ ખંડ $\Delta\mathbf{S}$માંથી પસાર થતું ફ્લક્સ,

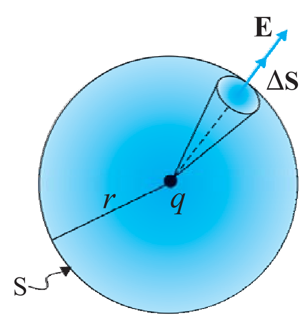
$$\Delta\phi = \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\Delta\mathbf{S} \qquad (1.28)$$

જ્યાં, આપણે એકલ વિદ્યુતભાર qને લીધે ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે કુલંબના નિયમનો ઉપયોગ કર્યો છે. એકમ સદિશ $\hat{\mathbf{r}}$ કેન્દ્રથી ક્ષેત્રફળ ખંડ તરફના ત્રિજ્યા સદિશની દિશામાં છે, ક્ષેત્રફળ ખંડ $\Delta\mathbf{S}$ અને $\hat{\mathbf{r}}$ ની દિશા એક જ છે. તેથી,

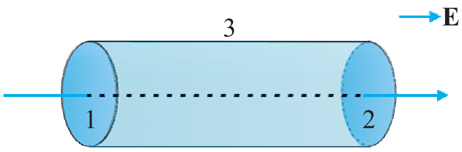
$$\Delta\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\Delta S \qquad (1.29)$$

કારણ કે એકમ સદિશનું માન 1 છે.

ગોળામાંથી પસાર થતું કુલ ફ્લક્સ જુદા જુદા ક્ષેત્રફળ ખંડોને લીધે મળતા ફ્લક્સનો સરવાળો કરવાથી મળે છે :



આકૃતિ 1.25 કેન્દ્ર પરના બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર q ને ઘેરતા ગોળામાંથી પસાર થતું ફ્લક્સ



આકૃતિ 1.26 નળાકારની સપાટીમાંથી પસાર થતા સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રના ફ્લક્સની ગણતરી

$$\phi = \sum_{\text{બધા } \Delta S} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Delta S$$

ગોળાનો દરેક ક્ષેત્રફળ ખંડ, વિદ્યુતભારથી સમાન r અંતરે આવેલ હોવાથી,

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sum_{\text{બધા } \Delta S} \Delta S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} S$$

હવે, ગોળાનું કુલ ક્ષેત્રફળ $S = 4\pi r^2$ છે. આમ,

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{1.30}$$

સમીકરણ (1.30) એ સ્થિતવિદ્યુતશાસ્ત્રના એક વ્યાપક પરિણામની સરળ રજૂઆત છે અને તેને *ગૉસનો નિયમ* કહે છે. આપણે *ગૉસના નિયમ*નું સાબિતી વિના કથન આપીએ :

બંધ સપાટી S માંથી પસાર થતું વિદ્યુત ફ્લક્સ

$$= q/\varepsilon_0 \tag{1.31}$$

છે, જ્યાં, q = S વડે ઘેરાયેલો કુલ વિદ્યુતભાર.

આ નિયમ એવું સૂચવે છે કે, બંધ સપાટીમાંથી પસાર થતું કુલ વિદ્યુત ફ્લક્સ શૂન્ય છે, જો સપાટી વડે કોઈ વિદ્યુતભાર ઘેરાતો ન હોય તો. આ બાબત આપણે આકૃતિ 1.26ની પરિસ્થિતિમાં સ્પષ્ટપણે જોઈ શકીએ છીએ.

અત્રે વિદ્યુતક્ષેત્ર સમાન છે અને આપણે બંધ નળાકાર સપાટી વિચારીએ છીએ, જેની અક્ષ સમાન ક્ષેત્ર **E**ને સમાંતર છે. સપાટીમાંથી કુલ ફ્લક્સ $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$ છે. જ્યાં ϕ_1 અને ϕ_2 નળાકારની સપાટીઓ 1 અને 2 (વર્તુળાકાર આડછેદની)માંથી પસાર થતું ફ્લક્સ દર્શાવે છે અને ϕ_3 બંધ સપાટીના વક્ર નળાકાર ભાગમાંથી ફ્લક્સ દર્શાવે છે. સપાટી 3ને દરેક બિંદુએ લંબ, વિદ્યુતક્ષેત્ર **E**ને લંબ છે, તેથી વ્યાખ્યા મુજબ ફ્લક્સ $\phi_3 = 0$. ઉપરાંત, 2ને બહાર તરફનો લંબ **E**ને સમાંતર છે અને 1ને બહાર તરફનો લંબ **E**ની વિરૂદ્ધ દિશામાં છે. તેથી

$$\phi_1 = -ES_1, \qquad \phi_2 = +ES_2$$

$$S_1 = S_2 = S$$

જ્યાં S, વર્તુળાકાર આડછેદનું ક્ષેત્રફળ છે. આમ, કુલ ફ્લક્સ શૂન્ય છે, જે ગૉસના નિયમ મુજબ અપેક્ષિત હતું. આમ, જ્યારે પણ આપણને બંધ સપાટીનું કુલ ફ્લક્સ શૂન્ય જણાય ત્યારે આપણે એવો નિષ્કર્ષ તારવીએ કે બંધ સપાટીમાં રહેલો કુલ વિદ્યુતભાર શૂન્ય છે.

ગૉસના નિયમ (સમીકરણ 1.31)ની મોટી સાર્થકતા એ છે કે તે આપણે અહીં વિચારેલા સરળ કિસ્સાઓ માટે જ નહિ પણ વ્યાપકપણે સત્ય છે. આ નિયમ અંગેના કેટલાક અગત્યના મુદ્દાઓ આપણે નોંધીએ :

(i) ગૉસનો નિયમ કોઈ પણ બંધ સપાટી માટે સત્ય છે, તેના આકાર કે પરિમાણ ગમે તે હોય તો પણ.

(ii) ગૉસના નિયમના સમીકરણ (1.31)માં જમણી બાજુનું પદ q, સપાટી વડે ઘેરાયેલા બધા વિદ્યુતભારોને સમાવે છે. વિદ્યુતભારો સપાટીની અંદર ગમે તે સ્થાનોએ રહેલા હોઈ શકે છે.

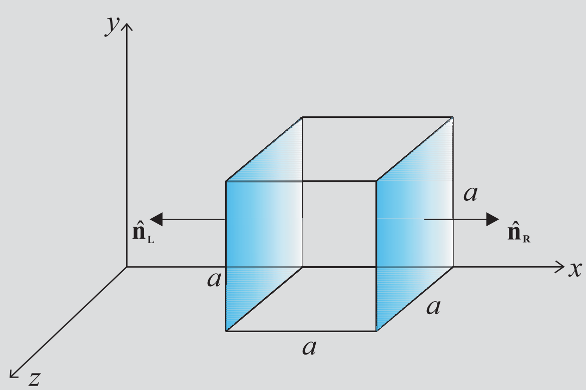
(iii) જે પરિસ્થિતિમાં સપાટી એવી પસંદ કરવામાં આવી હોય કે કેટલાક વિદ્યુતભારો અંદર અને કેટલાક બહાર હોય તો, વિદ્યુતક્ષેત્ર (જેનું ફ્લક્સ સમીકરણ 1.31ની ડાબી બાજુએ આવે છે) તો Sની અંદરના અને બહારના એમ બધા વિદ્યુતભારોને લીધે છે. પણ ગૉસના નિયમની જમણી બાજુનું પદ q, Sની માત્ર અંદરના વિદ્યુતભારો જ દર્શાવે છે.

(iv) ગૉસનો નિયમ લગાડવા માટે આપણે જે સપાટી પસંદ કરીએ તેને ગૉસિયન સપાટી કહે છે. તમે ગમે તે ગૉસિયન સપાટી પસંદ કરી શકો અને ગૉસનો નિયમ લગાડી શકો છો. તેમ છતાં, ગૉસિયન સપાટી કોઈ અલગ વિદ્યુતભારમાંથી પસાર ન થતી હોય તેની કાળજી રાખવી જોઈએ, કારણ કે અલગ-અલગ વિદ્યુતભારોના તંત્રનું વિદ્યુતક્ષેત્ર તે વિદ્યુતભારના સ્થાને સ્પષ્ટ રીતે વ્યાખ્યાયિત થયેલ નથી. (તમે જેમ વિદ્યુતભારની નજીક જાઓ તેમ વિદ્યુતક્ષેત્ર કોઈ બંધન વિના વધતું જાય છે.) જો કે ગૉસિયન સપાટી સતત વિદ્યુતભાર વિતરણમાંથી પસાર થઈ શકે છે.

(v) **જ્યારે તંત્રને કંઈક સંમિતિ હોય છે** ત્યારે ગૉસનો નિયમ વિદ્યુતક્ષેત્રની વધુ સરળતાથી ગણતરી કરવા માટે ઉપયોગી છે. આવું ગૉસિયન સપાટીની યોગ્ય પસંદગી દ્વારા થઈ શકે છે.

(vi) અંતે, કુલંબના નિયમમાં રહેલા અંતરના વ્યસ્ત વર્ગના નિયમ પર ગૉસનો નિયમ આધારિત છે. જો ગૉસના નિયમનું ખંડન થતું હોય તો તે વ્યસ્ત વર્ગના નિયમથી કંઈક જુદું પડવાનું સૂચવે છે.

ઉદાહરણ 1.11 આકૃતિ 1.27માં વિદ્યુતક્ષેત્રના ઘટકો $E_x = \alpha x^{1/2}$, $E_y = E_z = 0$ છે. જ્યાં, $\alpha = 800$ N/C m$^{1/2}$ (a) ઘનમાંથી ફ્લક્સ અને (b) ઘનની અંદરના વિદ્યુતભારની ગણતરી કરો. $a = 0.1$ m ધારો.



આકૃતિ 1.27

ઉકેલ

(a) વિદ્યુતક્ષેત્રને માત્ર x ઘટક હોવાથી, x-દિશાને લંબ બાજુઓ માટે **E** અને **ΔS** સદિશો વચ્ચેનો કોણ $\pm\pi/2$ છે. આથી, છાયાંકિત કરેલ બે બાજુઓ સિવાયની દરેક બાજુ માટે $\phi = \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{S}$ અલગ અલગથી શૂન્ય બનશે. ડાબી તરફની બાજુ આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રનું માન

$E_L = \alpha x^{1/2} = \alpha a^{1/2}$

(ડાબી સપાટી આગળ $x = a$)

જમણી તરફની સપાટી આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રનું માન

$E_R = \alpha\ x^{1/2} = \alpha\,(2a)^{1/2}$

(જમણી સપાટી આગળ $x = 2a$)

અનુરૂપ ફ્લક્સ આ પ્રમાણે છે :

$\phi_L = \mathbf{E}_L\cdot\Delta\mathbf{S} = \Delta S\,\mathbf{E}_L\cdot\hat{\mathbf{n}}_L = E_L\,\Delta S\cos\theta = -E_L\,\Delta S$, કારણ કે $\theta = 180^\circ$

$\phi_L = -E_L a^2$

$\phi_R = \mathbf{E}_R\cdot\Delta\mathbf{S} = E_R\Delta S\cos\theta = E_R\,\Delta S$, કારણ કે $\theta = 0^\circ$

$= E_R\,a^2$

ઉદાહરણ 1.11

ઘનમાંથી કુલ ફ્લક્સ

$= \phi_R + \phi_L = E_R a^2 - E_L a^2 = a^2(E_R - E_L) = \alpha a^2[(2a)^{1/2} - a^{1/2}]$

$= \alpha a^{5/2}(\sqrt{2} - 1)$

$= 800(0.1)^{5/2}(\sqrt{2} - 1)$

$= 1.05\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-1}$

(b) ઘનની અંદરનો વિદ્યુતભાર શોધવા માટે આપણે ગૉસના નિયમનો ઉપયોગ કરી શકીએ. આમ, આપણને

$\phi = q/\varepsilon_0$ પરથી $q = \phi\,\varepsilon_0$ મળે. તેથી,

$q = 1.05 \times 8.854 \times 10^{-12}\ \text{C} = 9.27 \times 10^{-12}\ \text{C}$

ઉદાહરણ 1.12 એક વિદ્યુતક્ષેત્ર ધન x માટે ધન x-દિશામાં અને સમાન છે તેમજ ઋણ x માટે તેટલા જ મૂલ્યનું સમાન અને ઋણ x-દિશામાં છે. $x > 0$ માટે $\mathbf{E} = 200\ \hat{\mathbf{i}}$ N/C અને $x < 0$ માટે $\mathbf{E} = -200\ \hat{\mathbf{i}}$ N/C આપેલ છે. 20 cm લંબાઈ અને 5 cm ત્રિજ્યાના નળાકારનું કેન્દ્ર ઉગમબિંદુ પર અને અક્ષ x-દિશામાં છે, જેથી એક સપાટી $x = +10$ cm અને બીજી $x = -10$ cm આગળ છે (આકૃતિ 1.28). (a) દરેક સપાટ બાજુઓમાંથી બહાર આવતું કુલ ફ્લક્સ કેટલું છે ? (b) નળાકારની વક્ર બાજુમાંથી ફ્લક્સ કેટલું છે ? (c) નળાકારમાંથી બહાર આવતું કુલ ફ્લક્સ કેટલું છે ? (d) નળાકારની અંદર કુલ વિદ્યુતભાર કેટલો છે ?

ઉકેલ

(a) આકૃતિ પરથી આપણે જોઈ શકીએ કે ડાબી સપાટી પર **E** અને **S** સમાંતર છે. તેથી બહાર તરફનું ફ્લક્સ

$\phi_L = \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{S} = -200\ \hat{\mathbf{i}}\cdot\Delta\mathbf{S}$

$= +200\ \Delta S$, કારણ કે $\hat{\mathbf{i}}\cdot\Delta\mathbf{S} = -\Delta S$

$= +200 \times \pi\ (0.05)^2 = +1.57\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-1}$

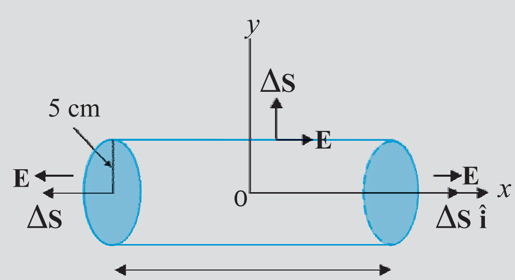
જમણી સપાટી પર **E** અને **ΔS** સમાંતર છે અને તેથી

$\phi_R = \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{S} = +\ 1.57\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-1}$

(b) નળાકારની બાજુ પરના કોઈ પણ બિંદુ માટે **E**, **ΔS**ને લંબ છે અને તેથી $\mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{S} = 0$. તેથી નળાકારની વક્ર બાજુમાંથી ફ્લક્સ શૂન્ય છે.

નળાકારમાંથી કુલ બહાર તરફનું ફ્લક્સ

$\phi = 1.57 + 1.57 + 0 = 3.14\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-1}$



આકૃતિ 1.28

(d) નળાકારની અંદરનો કુલ વિદ્યુતભાર ગૉસના નિયમ પરથી મેળવી શકાય છે.

$q = \varepsilon_0 \phi$

$= 8.854 \times 3.14 \times 10^{-12}\ \text{C}$

$= 2.78 \times 10^{-11}\ \text{C}$

1.15 ગૉસના નિયમના ઉપયોગો (Applications of Gauss's Law)

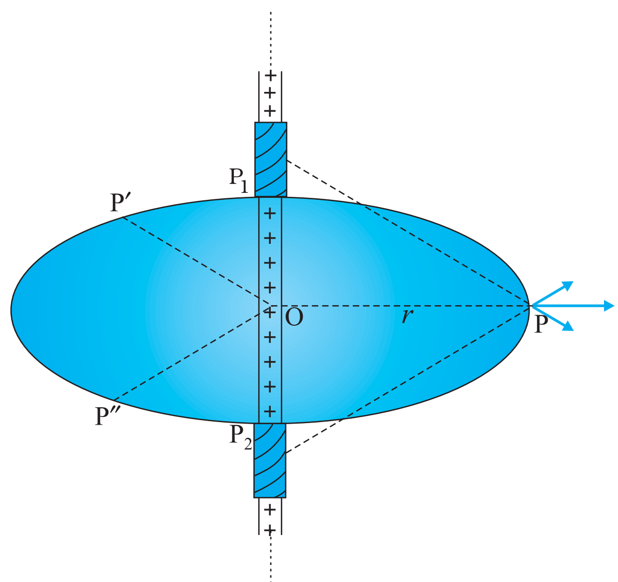
ઉપર જોયું તેમ વ્યાપક વિદ્યુતભાર વિતરણને લીધે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર સમીકરણ (1.27) પરથી મળે છે. વ્યવહારમાં, કેટલાક ખાસ કિસ્સાઓ સિવાય સમીકરણમાં આવતો સરવાળો (કે સંકલન) અવકાશમાં દરેક બિંદુએ ક્ષેત્ર મેળવવા માટે કરી શકાતો નથી. આમ છતાં, કેટલાક સંમિત (Symmetric) વિદ્યુતભાર વિતરણ માટે, ગૉસના નિયમની મદદથી વિદ્યુતક્ષેત્ર મેળવવાનું શક્ય છે. આ બાબત કેટલાક ઉદાહરણ દ્વારા સારી રીતે સમજી શકાય છે.

1.15.1 અનંત લંબાઈના, સીધા, સમાન રીતે વિદ્યુતભારિત તારને લીધે ક્ષેત્ર (Field Due to an Infinitely Long Straight Uniformly Charged Wire)

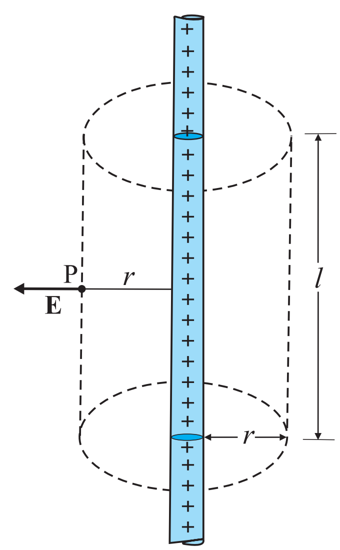
સમાન રેખીય વિદ્યુતભાર ઘનતા λ ધરાવતા એક અનંત લંબાઈના પાતળા સીધા તારનો વિચાર કરો. સ્વાભાવિક રીતે જ તાર સંમિતિની અક્ષ છે. ધારો કે આપણે Oથી Pનો ત્રિજ્યા સદિશ લઈ તેને તારની આસપાસ ઘૂમાવીએ છીએ. આ રીતે મળતાં બિંદુઓ P, P′, P″, વિદ્યુતભારિત તારની સાપેક્ષે સમતુલ્ય છે. આનો અર્થ એ કે આ બિંદુઓએ વિદ્યુતક્ષેત્રનું માન સમાન છે. દરેક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશા ત્રિજ્યાવર્તી ($\lambda > 0$ માટે બહારની તરફ, $\lambda < 0$ માટે અંદરની તરફ) હશે. આકૃતિ 1.29 પરથી આ સ્પષ્ટ છે.

તાર પર આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ રેખાખંડો P_1 અને P_2ની જોડનો વિચાર કરો. આ જોડના બંને ઘટકો વડે ઉદ્ભવતાં ક્ષેત્રોનો સરવાળો કરીએ તો પરિણામી ક્ષેત્ર ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં મળે છે. (ત્રિજ્યા સદિશને લંબ દિશામાંના ઘટકો નાબૂદ થશે.) આ બાબત આવી કોઈ પણ જોડ માટે સત્ય છે તેથી P આગળનું ક્ષેત્ર ત્રિજ્યાવર્તી છે. અંતે, તાર અનંત લંબાઈનો હોવાથી વિદ્યુતક્ષેત્ર તારની લંબાઈ પર Pના સ્થાન પર આધારિત નથી. ટૂંકમાં, વિદ્યુતક્ષેત્ર તારને લંબરૂપે છેદતા સમતલમાં ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં છે અને તેનું માન ફક્ત ત્રિજ્યાવર્તી અંતર r પર આધારિત છે.

ક્ષેત્રની ગણતરી કરવા માટે આકૃતિ 1.29(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ એક નળાકાર ગૉસિયન સપાટી કલ્પો. દરેક બિંદુએ ક્ષેત્ર ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં હોવાથી, નળાકાર ગૉસિયન સપાટીના બે છેડાઓમાંથી ફ્લક્સ શૂન્ય છે. નળાકારની વક્રસપાટીએ **E** દરેક બિંદુએ લંબ છે અને તેનું મૂલ્ય સમાન છે, કારણ કે તે ફક્ત r પર આધારિત છે. વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $2\pi rl$ છે, જ્યાં l નળાકારની લંબાઈ છે.



(a)



(b)

આકૃતિ 1.29 (a) અનંત લંબાઈના, પાતળા, સીધા તારને લીધે વિદ્યુતક્ષેત્ર ત્રિજ્યાવર્તી છે (b) લાંબા, પાતળા, સમાન રેખીય વિદ્યુતભાર ઘનતા ધરાવતા તાર માટે ગૉસિયન સપાટી

ગૉસિયન સપાટીમાંથી ફ્લક્સ

= નળાકારની વક્રસપાટીમાંથી ફ્લક્સ

$= E \times 2\pi rl$

આ સપાટી વડે ઘેરાયેલો વિદ્યુતભાર $\lambda\, l$ છે. આથી ગૉસના નિયમ મુજબ

$$E \times 2\pi rl = \lambda l/\varepsilon_0$$

એટલે કે $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

અને કોઈ પણ બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર સદિશ સ્વરૂપમાં

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\ \hat{\mathbf{n}} \qquad (1.32)$$

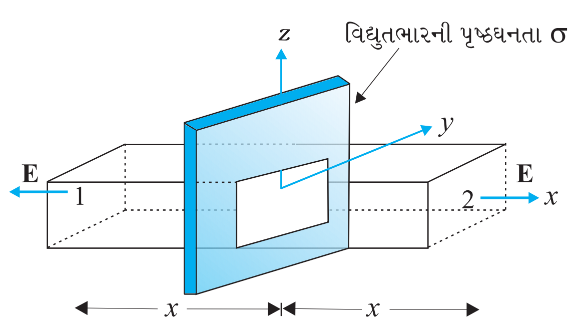
પરથી મળે છે. જ્યાં, $\hat{\mathbf{n}}$ એ તે બિંદુમાંથી પસાર થતા અને તારને લંબ એવા સમતલમાંનો ત્રિજ્યાવર્તી એકમ સદિશ છે. જો λ ધન હોય તો **E**ની દિશા બહાર તરફની છે અને જો λ ઋણ હોય તો **E**ની દિશા અંદર તરફની છે.

એ નોંધો કે, જ્યારે આપણે સદિશ **A**ને અદિશ ગુણ્યા એકમ સદિશ એટલે કે $\mathbf{A} = A\ \hat{\mathbf{a}}$ તરીકે લખીએ છીએ ત્યારે અદિશ A એ બૈજિક સંખ્યા છે. તે ધન કે ઋણ હોઈ શકે છે. જો $A > 0$ હશે તો **A**ની દિશા, એકમ સદિશની દિશામાં હશે અને જો $A < 0$ હશે તો **A**ની દિશા એકમ સદિશની દિશાથી વિરૂદ્ધ હશે. જ્યારે આપણે અ-ઋણ (non-negative) સંખ્યાનો જ ઉલ્લેખ કરવો હોય ત્યારે આપણે પ્રતિક $|\mathbf{A}|$નો ઉપયોગ કરીશું અને તેને **A**નો માનાંક કહીશું. આમ, $|\mathbf{A}| \geq 0$.

એ પણ નોંધો કે સપાટી વડે ઘેરાયેલો વિદ્યુતભાર જ ઉપરના સૂત્રોમાં સમાવિષ્ટ હોવા છતાં વિદ્યુતક્ષેત્ર સમગ્ર તાર પરના વિદ્યુતભારને લીધે છે. ઉપરાંત, તાર અનંત લંબાઈનો હોવાની ધારણા પણ અત્યંત મહત્ત્વની (નિર્ણાયક) છે. આ ધારણા વિના આપણે વિદ્યુતક્ષેત્રને ગૉસિયન સપાટીના વક્ર ભાગે લંબ લઈ શકીએ નહિ. આમ છતાં, સમીકરણ (1.32), લાંબા તારના મધ્યભાગની આસપાસના - જ્યાં છેડાઓની અસરો અવગણી શકાય છે ત્યાંના - વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે સંન્નિકટ રીતે સત્ય છે,

1.15.2 સમાન રીતે વિદ્યુતભારિત અનંત સમતલ વડે ક્ષેત્ર (Field Due to a Uniformly Charged Infinite Plane Sheet)

સમાન રીતે વિદ્યુતભારિત એવા અનંત સમતલ પર ધારો કે વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા σ છે (આકૃતિ 1.30). આપણે આપેલા સમતલને લંબરૂપે x-અક્ષ લઈએ. સંમિતિ પરથી કહી શકાય કે વિદ્યુતક્ષેત્ર y અને z યામો પર આધારિત નથી અને દરેક બિંદુએ તેની દિશા x-દિશાને સમાંતર હોવી જ જોઈએ.



આકૃતિ 1.30 સમાન રીતે વિદ્યુતભારિત અનંત સમતલ માટે ગૉસિયન સપાટી

ગૉસિયન સપાટી તરીકે આપણે આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A ધરાવતો લંબ સમાંતરબાજુ ચતુષ્ફલક (લંબ ઘન) લઈ શકીએ. (નળાકાર સપાટી પણ ચાલી શકે.) આકૃતિ પરથી જોઈ શકાય છે કે ફક્ત બે બાજુઓ 1 અને 2 વડે જ ફ્લક્સ મળી શકશે. બીજી સપાટીઓ વિદ્યુતક્ષેત્ર રેખાઓને સમાંતર છે તેથી તેઓ ફ્લક્સમાં કોઈ ફાળો આપશે નહિ.

સપાટી 1ને લંબ એકમ સદિશ $-x$ દિશામાં છે જ્યારે સપાટી 2ને લંબ એકમ સદિશ $+x$ દિશામાં છે. આથી, બંને સપાટીઓમાંથી ફ્લક્સ $\mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{S}$ સમાન છે અને તેમનો સરવાળો થશે. તેથી ગૉસિયન સપાટીમાંથી કુલ (Net) ફ્લક્સ 2 EA છે. બંધ સપાટી વડે ઘેરાતો વિદ્યુતભાર σA છે. તેથી ગૉસના નિયમ મુજબ,

$2EA = \sigma A/\varepsilon_0$

અથવા $E = \sigma/2\varepsilon_0$

સદિશ રૂપમાં,

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}} \qquad (1.33)$$

જ્યાં, $\hat{\mathbf{n}}$ સમતલને લંબ અને સમતલથી દૂર તરફ જતો એકમ સદિશ છે.

જો σ ધન હોય તો **E**ની દિશા સમતલથી દૂર તરફ અને σ ઋણ હોય તો **E**ની દિશા સમતલ તરફ હોય છે. ઉપરની ચર્ચામાં ગૉસના નિયમના ઉપયોગથી એક વધારાની હકીકત બહાર આવે છે કે E, x પર પણ આધારિત નથી.

એક મોટા સીમિત સમતલ માટે, સમતલના છેડાઓથી દૂર એટલે કે સમતલના મધ્યભાગમાં સમીકરણ (1.33) સંન્નિકટ રીતે સાચું છે.

1.15.3 સમાન રીતે વિદ્યુતભારિત પાતળી ગોળાકાર કવચને લીધે ક્ષેત્ર (Field Due to a Uniformaly Charged Thin Spherical Shell)

ધારો કે, R ત્રિજ્યાની પાતળી ગોળાકાર કવચ (આકૃતિ 1.31) પર વિદ્યુતભારની સમાન પૃષ્ઠઘનતા σ છે. અહીં, સ્વાભાવિક રીતે જ ગોળીય સંમિતિ જણાય છે. અંદરના કે બહારના કોઈ પણ બિંદુ P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર માત્ર r (કવચના કેન્દ્રથી તે બિંદુ સુધીના ત્રિજ્યાવર્તી અંતર) પર જ આધાર રાખી શકે અને તે ત્રિજ્યાવર્તી (એટલે કે ત્રિજ્યા સદિશ પર જ) હોવું જોઈએ.

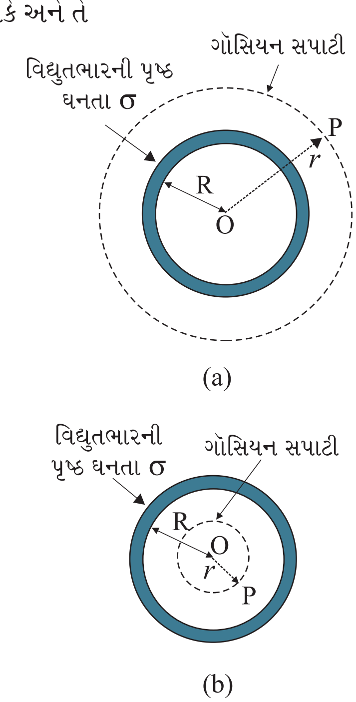
(i) કવચની બહારના બિંદુએ ક્ષેત્ર : કવચની બહારના અને ત્રિજ્યા સદિશ **r** ધરાવતા બિંદુ Pનો વિચાર કરો. P આગળનું વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવા માટે, r ત્રિજ્યાના અને Pમાંથી પસાર થતા ગોળાને આપણે ગૉસિયન સપાટી તરીકે લઈશું. આપેલા વિદ્યુતભાર વિતરણની સાપેક્ષે આ ગોળા પરના બધા બિંદુઓ સમતુલ્ય છે. (ગોળીય સંમિતિનો આ જ અર્થ છે.) આથી ગૉસિયન સપાટી પરના દરેક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર Eનું માન સમાન છે અને દરેક બિંદુએ ત્રિજ્યા સદિશ પર છે. આમ, **E** અને Δ**S** દરેક બિંદુએ સમાંતર છે અને તેથી દરેક નાના ખંડ માટે ફ્લક્સ $E\Delta S$ છે. બધાં ΔS માટે સરવાળો કરતાં ગૉસિયન સપાટીમાંથી ફ્લક્સ $E \times 4\pi r^2$ છે. આ સપાટી વડે ઘેરાયેલો વિદ્યુતભાર $\sigma \times 4\pi R^2$ છે. ગૉસના નિયમ પરથી,

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} 4\pi R^2$$

અથવા $$E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

જ્યાં $q = 4\pi R^2\sigma$ ગોળાકાર કવચ પરનો કુલ વિદ્યુતભાર છે.

સદિશ સ્વરૂપે, $$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (1.34)$$



આકૃતિ 1.31 (a) $r > R$ (b) $r < R$, બિંદુઓ માટે ગૉસિયન સપાટીઓ

જો $q > 0$ હોય તો વિદ્યુતક્ષેત્ર બહાર તરફની દિશામાં અને જો $q < 0$ હોય તો વિદ્યુતક્ષેત્ર અંદર તરફની દિશામાં છે. જો કે, આ ક્ષેત્ર વિદ્યુતભાર qને કેન્દ્ર O પર મૂકવાથી મળતા વિદ્યુતક્ષેત્ર જેટલું જ છે. આમ, કવચની બહારના બિંદુઓ માટે સમાન રીતે વિદ્યુતભારિત કવચને લીધે મળતું ક્ષેત્ર, જાણે કે કવચનો સમગ્ર વિદ્યુતભાર તેના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલો હોય ત્યારે મળતા ક્ષેત્ર જેટલું છે.

(ii) કવચની અંદર ક્ષેત્ર : આકૃતિ 1.31(b)માં બિંદુ P કવચની અંદર છે. અહીં ફરીથી ગૉસિયન સપાટી, O કેન્દ્ર ધરાવતો અને Pમાંથી પસાર થતો ગોળો છે. ગૉસિયન સપાટીમાંથી ફ્લક્સ,

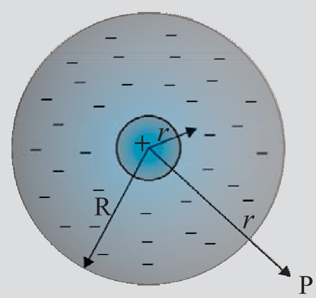
આગળ ગણતરી કરી તે મુજબ $E \times 4\pi r^2$ છે. પરંતુ આ કિસ્સામાં ગૉસિયન સપાટી વડે કોઈ વિદ્યુતભાર ઘેરાતો નથી. આથી, ગૉસના નિયમ મુજબ

$E \times 4\pi r^2 = 0$

એટલે કે $E = 0 \quad (r < R)$ (1.35)

આમ, સમાન રીતે વિદ્યુતભારિત પાતળી ગોળાકાર કવચને લીધે કવચની અંદરના* બધા બિંદુઓએ વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય છે. આ અગત્યનું પરિણામ કુલંબના નિયમ પરથી મળેલા ગૉસના નિયમ પરથી સીધું મળે છે. આ પરિણામની પ્રાયોગિક ચકાસણી કુલંબના નિયમમાંના $1/r^2$ અવલંબનને સમર્થન આપે છે.

ઉદાહરણ 1.13 પરમાણુ માટેના પ્રારંભિક મોડેલમાં, Ze વિદ્યુતભાર ધરાવતું ધન વિદ્યુતભારિત બિંદુવત્ ન્યુક્લિયસ તેની આસપાસ R ત્રિજ્યા સુધી નિયમિત ઘનતાના ઋણ વિદ્યુતભાર વડે ઘેરાયેલું છે. સમગ્રપણે પરમાણુ તટસ્થ છે. આ મૉડેલ માટે ન્યુક્લિયસથી r અંતરે વિદ્યુતક્ષેત્ર કેટલું હશે ?



આકૃતિ 1.32

ઉકેલ આ મૉડેલ માટે વિદ્યુતભાર વિતરણ આકૃતિ 1.32માં દર્શાવ્યા મુજબનું છે. નિયમિત ગોળાકાર વિદ્યુતભાર વિતરણમાં કુલ વિદ્યુતભાર $-Ze$ હોવો જોઈએ, કારણ કે પરમાણુ (Ze વિદ્યુતભારનું ન્યુક્લિયસ + ઋણ વિદ્યુતભાર) તટસ્થ છે. આ પરથી ઋણ વિદ્યુતભાર ઘનતા ρ મળી શકે કારણ કે,

$\frac{4\pi R^3}{3}\rho = 0 - Ze$ થવું જોઈએ.

અથવા $\rho = -\frac{3\,Ze}{4\pi R^3}$

ન્યુક્લિયસથી r અંતરે રહેલા P બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ શોધવા માટે, આપણે ગૉસના નિયમનો ઉપયોગ કરીએ. $\mathbf{r}$ની દિશા ગમે તે હોય તો પણ વિદ્યુતભાર વિતરણની ગોળીય સંમિતિને લીધે વિદ્યુતક્ષેત્ર $\mathbf{E}(\mathbf{r})$નું માન માત્ર ત્રિજ્યાવર્તી અંતર r પર આધારિત છે. તેની દિશા ઉદ્ગમથી P તરફના ત્રિજ્યા સદિશ $\mathbf{r}$ની દિશામાં (અથવા તેની વિરૂદ્ધ દિશામાં) છે. સ્વાભાવિક રીતે ગોસિયન સપાટી કેન્દ્ર તરીકે ન્યુક્લિયસની આસપાસ ગોળાકાર સપાટી છે. આપણે બે પરિસ્થિતિઓનો વિચાર કરીએ, $r < R$ અને $r > R$.

(i) $r < R$: ગોળાકાર સપાટીનું વિદ્યુત ફ્લક્સ

$\phi = E(r) \times 4\pi r^2$

જ્યાં $E(r)$ એ r આગળના વિદ્યુતક્ષેત્રનું માન છે. આનું કારણ એ છે કે ગોળાકાર ગૉસિયન

ઉદાહરણ 1.13

* આને ધોરણ XI, ભૌતિકવિજ્ઞાન પાઠ્યપુસ્તકમાં પરિચ્છેદ 8.5માં ચર્ચેલ સમાન દળ કવચ સાથે સરખાવો.

સપાટી પરના કોઈ પણ બિંદુએ ક્ષેત્રની દિશા સપાટીને લંબની દિશામાં છે અને સપાટી પરના બધાં બિંદુએ સમાન મૂલ્ય ધરાવે છે. ગૉસિયન સપાટી વડે ઘેરાયેલો વિદ્યુતભાર q, ન્યુક્લિયસનો ધન વિદ્યુતભાર અને r ત્રિજ્યાની અંદરનો ઋણ વિદ્યુતભાર છે.

એટલે કે, $q = Ze + \dfrac{4\pi r^3}{3}\rho$

અગાઉ મેળવેલ વિદ્યુતભાર ઘનતા ρને અવેજ કરતાં,

$$q = Ze - Ze\frac{r^3}{R^3}$$

આ પરથી ગૉસના નિયમ મુજબ,

$$E(r) = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right) \quad ; \quad r < R$$

વિદ્યુતક્ષેત્ર ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં બહારની તરફ છે.

(ii) $r > R$: આ કિસ્સામાં ગૉસિયન સપાટી વડે ઘેરાયેલો કુલ વિદ્યુતભાર શૂન્ય છે, કારણ કે પરમાણુ તટસ્થ છે. આમ, ગોસના નિયમ પરથી

$E(r) \times 4\pi r^2 = 0$ અથવા $E(r) = 0$; $r > R$ માટે.

$r = R$ માટે બંને કિસ્સા એકસમાન પરિણામ આપે છે : $E = 0$

ઉદાહરણ 1.13

સંમિતિ સંક્રિયાઓ વિષે

ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં, આપણે ઘણીવાર વિવિધ સંમિતિઓ ધરાવતા તંત્રો સાથે કામ કરવાનું આવે છે. આવી સંમિતિઓનો વિચાર કરવાથી આપણને બીજી રીતો કરતાં બહુ ઝડપથી સીધી ગણતરી દ્વારા પરિણામ મળે છે. ઉદાહરણ તરીકે (વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠ ઘનતા σ ધરાવતા) y-z સમતલને સમાંતર વિદ્યુતભારના એક અનંત સમતલનો વિચાર કરો. (a) જો તંત્રને ગમે તે દિશામાં y-z સમતલને સમાંતર સ્થાનાંતરિત કરવામાં આવે (b) x-અક્ષની આસપાસ અમુક કોણે ભ્રમણ આપવામાં આવે, તો તંત્રમાં કોઈ ફેર પડતો નથી. આવી સંમિતિ સંક્રિયા હેઠળ તંત્ર અફર રહેતું હોવાથી તેના ગુણધર્મો પણ અફર રહે છે. ખાસ કરીને આ ઉદાહરણમાં, વિદ્યુતક્ષેત્ર **E** અફર રહેવું જોઈએ.

y-અક્ષની દિશામાં સ્થાનાંતર સંમિતિ એમ દર્શાવે છે કે $(0, y_1, 0)$ અને $(0, y_2, 0)$ આગળનાં વિદ્યુતક્ષેત્રો સમાન જ હોવાં જોઈએ. તેવી જ રીતે z-અક્ષ દિશામાં સ્થાનાંતર સંમિતિ દર્શાવે છે કે બે બિંદુઓ $(0, 0, z_1)$ અને $(0, 0, z_2)$ આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રો સમાન જ હોવાં જોઈએ. x-અક્ષની આસપાસની ચક્રિય સંમિતિ પરથી આપણે એવો નિષ્કર્ષ તારવી શકીએ કે **E**, y-z સમતલને લંબ હોવું જોઈએ, એટલે કે, તે x-દિશાને સમાંતર હોવું જોઈએ.

હવે તમે એવી સંમિતિ અંગે વિચાર કરવાનો પ્રયત્ન કરો કે જે એમ દર્શાવતી હોય કે વિદ્યુતક્ષેત્રનું માન x-યામથી સ્વતંત્ર અને અચળ છે. આમ એવું પરિણામ મળે છે કે સમાન રીતે વિદ્યુતભારિત અનંત સમતલને લીધે વિદ્યુતક્ષેત્ર, અવકાશમાં બધા બિંદુઓ આગળ એકસમાન છે. જો કે સમતલની વિરૂદ્ધ બાજુઓ પર તેમની દિશાઓ એકબીજાથી વિરૂદ્ધ છે.

કુલંબના નિયમ પરથી સીધી ગણતરી દ્વારા આ પરિણામ પર આવવા માટે જે પ્રયત્નોની જરૂર પડી તેને આની સાથે સરખાવો.

સારાંશ

1. વિદ્યુત અને ચુંબકીય બળો પરમાણુઓના, અણુઓના અને સ્થૂળ દ્રવ્યના ગુણધર્મો નક્કી કરે છે.
2. ઘર્ષણ વિદ્યુતના સાદા પ્રયોગો પરથી એવો નિષ્કર્ષ મળે છે કે કુદરતમાં બે પ્રકારના વિદ્યુતભારો છે અને સજાતિય વિદ્યુતભારો એકબીજાને અપાકર્ષે છે અને વિજાતિય વિદ્યુતભારો એકબીજાને આકર્ષે છે. પ્રણાલિકા મુજબ રેશમ સાથે ઘસેલા કાચના સળિયા પરનો વિદ્યુતભાર ધન છે અને ફર સાથે ઘસેલા પ્લાસ્ટીકના સળિયા પરનો વિદ્યુતભાર ઋણ છે.
3. સુવાહકો તેમનામાં થઈને વિદ્યુતભારોની ગતિ થવા દે છે પણ અવાહકો થવા દેતા નથી. ધાતુઓમાં ગતિશીલ વિદ્યુતભારો મુક્ત ઇલેક્ટ્રૉન છે, વિદ્યુત દ્રાવણમાં ધન અને ઋણ બંને પ્રકારના આયનો ગતિશીલ છે.
4. વિદ્યુતભારને ત્રણ મૂળભૂત ગુણધર્મો છે : ક્વૉન્ટમીકરણ, સરવાળો (ઉમેરો) થઈ શકે છે, સંરક્ષણ થાય છે.

   વિદ્યુતભારના ક્વૉન્ટમીકરણનો અર્થ એ છે કે, પદાર્થનો કુલ વિદ્યુતભાર (q), હંમેશા એક મૂળભૂત વિદ્યુતભાર જથ્થા (e)ના પૂર્ણાંક ગુણાંક જેટલો જ હોય છે. એટલે કે $q = ne$, જ્યાં $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3$, ... પ્રોટોન અને ઇલેક્ટ્રૉન પરના વિદ્યુતભારો અનુક્રમે $+e$, $-e$ છે. સ્થૂળ વિદ્યુતભારો કે જેમના માટે n ખૂબ મોટી સંખ્યા છે તેમને માટે વિદ્યુતભારનું ક્વૉન્ટમીકરણ અવગણી શકાય છે.

   વિદ્યુતભારોનો સરવાળો થાય છે એનો અર્થ એ કે તંત્રનો કુલ વિદ્યુતભાર તંત્રમાંના બધા વ્યક્તિગત વિદ્યુતભારોના બૈજિક સરવાળા (એટલે કે યોગ્ય ચિહ્‌ન સાથેનો સરવાળો) જેટલો છે. વિદ્યુતભારોનું સંરક્ષણ થાય છે એનો અર્થ એ કે અલગ કરેલા તંત્રનો કુલ વિદ્યુતભાર સમય સાથે અફર રહે છે. આનો અર્થ એ કે જ્યારે પદાર્થોને ઘર્ષણથી વિદ્યુતભારિત કરવામાં આવે છે ત્યારે એક પદાર્થ પરથી વિદ્યુતભાર બીજા પદાર્થ પર સ્થાનાંતર પામે છે પણ વિદ્યુતભારનું સર્જન કે વિનાશ થતો નથી.
5. કુલંબનો નિયમ : બે વિદ્યુતભારો q_1 અને q_2 વચ્ચેનુ પરસ્પર સ્થિતવિદ્યુત બળ, q_1q_2 ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં અને તેમની વચ્ચેના અંતર r_{21}ના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે. ગાણિતીક રીતે,

   $$\mathbf{F}_{21} = q_2 \text{ પર } q_1 \text{ ને લીધે બળ} = \frac{k(q_1q_2)}{r_{21}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{21}$$

   જ્યાં, $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ એ q_1થી q_2ની દિશામાંનો એકમ સદિશ છે અને $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ સપ્રમાણતાનો અચળાંક છે.

   SI એકમોમાં, વિદ્યુતભારનો એકમ coulomb છે. અચળાંક ε_0નું પ્રાયોગિક મૂલ્ય

   $$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}} \text{ છે.}$$

   kનું સંન્નિકટ મૂલ્ય

   $$k = 9 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \text{ છે.}$$
6. પ્રોટોન અને ઇલેક્ટ્રૉન વચ્ચે વિદ્યુતબળ અને ગુરુત્વબળનો ગુણોત્તર

   $$\frac{k\,e^2}{G\,m_e m_p} \cong 2.4 \times 10^{39} \text{ છે.}$$
7. સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત : આ સિદ્ધાંત એ ગુણધર્મ પર રચાયેલ છે કે બે વિદ્યુતભારો એકબીજા પર જે આકર્ષણ કે અપાકર્ષણનું બળ લગાડે તે કોઈ ત્રીજા (કે વધારે) વધારાના વિદ્યુતભારોની હાજરીથી અસર પામતું નથી. q_1, q_2, q_3, ... વિદ્યુતભારોના સમૂહ માટે

કોઈ પણ વિદ્યુતભાર q_1 પર લાગતું બળ, q_1 પર q_2ને લીધે લાગતા બળ, q_1 પર q_3ને લીધે લાગતા બળ...વગેરેના સદિશ સરવાળા જેટલું છે. દરેક જોડી માટે બળ, બે વિદ્યુતભારો માટેના અગાઉ જણાવેલા કુલંબના નિયમ પરથી મળે છે.

8. વિદ્યુતભાર સંરચનાને લીધે કોઈ બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર **E**, ત્યાં મૂકેલા નાના ધન પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર પર લાગતા બળ ભાગ્યા વિદ્યુતભારના માન જેટલું હોય છે. બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર qને લીધે વિદ્યુતક્ષેત્રનું માન $|q| / 4\pi\varepsilon_0 r^2$ છે. જો q ધન હોય તો તે qથી ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં બહાર તરફ અને જો q ઋણ હોય તો તે qથી ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં અંદર તરફ હોય છે. કુલંબ બળની જેમ વિદ્યુતક્ષેત્ર પણ સંપાતપણાના સિદ્ધાંતનું પાલન કરે છે.

9. વિદ્યુતક્ષેત્ર રેખા એ એવો વક્ર છે કે જેના દરેક બિંદુએ દોરેલો સ્પર્શક, તે બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશા આપે છે. ક્ષેત્ર રેખાઓની સાપેક્ષ ગીચતા જુદા જુદા બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની પ્રબળતાનો નિર્દેશ કરે છે. પ્રબળ ક્ષેત્રના વિસ્તારમાં તેઓ એકબીજાની નજીક ટોળે વળે છે અને જ્યાં ક્ષેત્ર નિર્બળ હોય ત્યાં એકબીજાથી છૂટી છૂટી હોય છે. અચળ વિદ્યુતક્ષેત્રના વિસ્તારમાં ક્ષેત્ર રેખાઓ સમાન અંતરે રહેલી સમાંતર સુરેખાઓ છે.

10. ક્ષેત્ર રેખાઓના કેટલાક અગત્યના ગુણધર્મો આ પ્રમાણે છે :
   (i) ક્ષેત્ર રેખાઓ કોઈ પણ ભંગાણ વગર સતત વક્રો છે.
   (ii) બે ક્ષેત્ર રેખાઓ એકબીજીને છેદતી નથી.
   (iii) સ્થિતવિદ્યુત ક્ષેત્ર રેખાઓ ધન વિદ્યુતભારથી શરૂ થાય છે અને ઋણ વિદ્યુતભારમાં અંત પામે છે. તેઓ બંધ ગાળો રચી શકતી નથી.

11. વિદ્યુત ડાયપોલ (દ્વિ-ધ્રુવી)એ એકબીજાથી $2a$ અંતરે રહેલા બે સમાન અને વિરૂદ્ધ વિદ્યુતભારો q અને $-q$ની જોડ છે. તેના ડાયપોલ ચાકમાત્રા સદિશ **p**નું માન $2qa$ છે અને તેની દિશા $-q$ થી $+q$ તરફ ડાયપોલ અક્ષની દિશામાં છે.

12. વિદ્યુત ડાયપોલ વડે તેના વિષુવરેખીય સમતલમાં (એટલે કે તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતા અને અક્ષને લંબ સમતલમાં) કેન્દ્રથી r અંતરે વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\mathbf{E} = \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(a^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\cong \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad r>>a \text{ માટે}$$

ડાયપોલને લીધે તેની અક્ષ પર કેન્દ્રથી r અંતરે વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$\mathbf{E} = \frac{2\mathbf{p}\,r}{4\pi\varepsilon_0 (r^2-a^2)^2}$$

$$\cong \frac{2\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad r>>a \text{ માટે}$$

બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર $1/r^2$ પર આધારિત છે તેનાથી અલગ આ ડાયપોલનું વિદ્યુતક્ષેત્ર $1/r^3$ પર આધારિત છે તે નોંધો.

13. સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર **E**માં, ડાયપોલ વડે અનુભવાતું ટોર્ક τ,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

પરથી મળે છે, પણ તેના પર કુલ બળ શૂન્ય છે.

14. નાના ક્ષેત્રફળ ખંડ $\Delta\mathbf{S}$માંથી વિદ્યુતક્ષેત્ર **E**નું ફ્લક્સ

$$\Delta\phi = \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{S}$$

પરથી મળે છે. સદિશ ક્ષેત્રફળ ખંડ $\Delta\mathbf{S}$,

$$\Delta\mathbf{S} = \Delta S\,\hat{\mathbf{n}}$$

છે. જ્યાં, ΔS ક્ષેત્રફળ ખંડનું માન છે અને $\hat{\mathbf{n}}$ નાના ΔS માટે સમતલ તરીકે ગણી શકાતા ક્ષેત્રફળ ખંડને લંબ છે. બંધ સપાટી માટેના ક્ષેત્રફળ ખંડ માટે $\hat{\mathbf{n}}$ ની દિશા, પ્રણાલિકા મુજબ, બહાર તરફના લંબની દિશા લેવાય છે.

15. *ગૉસનો નિયમ* : કોઈ પણ બંધ સપાટી S માંથી વિદ્યુતક્ષેત્રનું ફ્લક્સ, $1/\varepsilon_0$ ગુણ્યા S વડે ઘેરાતા વિદ્યુતભાર જેટલું છે. આ નિયમ ખાસ કરીને, જ્યારે ઉદ્ગમના વિતરણમાં સરળ સંમિતિ હોય ત્યારે વિદ્યુતક્ષેત્ર નક્કી કરવા માટે ઉપયોગી છે.

(i) પાતળા અનંત લંબાઈના સીધા તાર પર સમાન રેખીય વિદ્યુતભાર ઘનતા λ હોય, ત્યારે

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\ \hat{\mathbf{n}}$$

જ્યાં, r તારથી તે બિંદુનું લંબ અંતર છે. $\hat{\mathbf{n}}$ તારને લંબ અને તે બિંદુમાંથી પસાર થતા સમતલમાંનો ત્રિજ્યાવર્તી એકમ સદિશ છે.

(ii) પાતળા અનંત વિસ્તારના સમતલ પર વિદ્યુતભારની સમાન પૃષ્ઠઘનતા σ હોય, ત્યારે

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ \hat{\mathbf{n}}$$

જ્યાં, $\hat{\mathbf{n}}$ દરેક બાજુએ સમતલને બહારની તરફ લંબ એકમ સદિશ છે.

(iii) પાતળા ગોળાકાર કવચ પર વિદ્યુતભારની સમાન પૃષ્ઠઘનતા σ હોય, ત્યારે

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{\mathbf{r}} \qquad (r \ge R)$$

$$\mathbf{E} = 0 \qquad (r < R)$$

જ્યાં, r કવચના કેન્દ્રથી તે બિંદુનું અંતર અને R કવચની ત્રિજ્યા છે. q કવચ પરનો કુલ વિદ્યુતભાર છે : $q = 4\pi R^2\sigma$. કવચની બહારના બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર, જાણે કવચનો બધો વિદ્યુતભાર તેના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયો હોય તેમ ગણીને મળતા વિદ્યુતક્ષેત્ર જેટલું છે. સમાન વિદ્યુતભાર ઘનતા ધરાવતા નક્કર ગોળા માટે પણ તે સાચું છે. કવચની અંદરના બધા બિંદુઓએ વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય છે.

ભૌતિકરાશિ	પ્રતિક	પરિમાણ	એકમ	નોંધ
સદિશ ક્ષેત્રફળ ખંડ	$\Delta \mathbf{S}$	$[L^2]$	m^2	$\Delta \mathbf{S} = \Delta S\ \hat{\mathbf{n}}$
વિદ્યુતક્ષેત્ર	$\mathbf{E}$	$[MLT^{-3}A^{-1}]$	$V\ m^{-1}$	
વિદ્યુત ફ્લક્સ	ϕ	$[ML^3T^{-3}A^{-1}]$	V m	$\Delta\phi = \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{S}$
ડાયપોલ (દ્વિ-ધ્રુવી) ચાકમાત્રા	$\mathbf{p}$	[LTA]	C m	ઋણથી ધન વિદ્યુતભાર તરફનો સદિશ
વિદ્યુતભાર ઘનતા :				
રેખીય	λ	$[L^{-1}\ TA]$	$C\ m^{-1}$	વિદ્યુતભાર/લંબાઈ
પૃષ્ઠ	σ	$[L^{-2}\ TA]$	$C\ m^{-2}$	વિદ્યુતભાર/ક્ષેત્રફળ
કદ	ρ	$[L^{-3}\ TA]$	$C\ m^{-3}$	વિદ્યુતભાર/કદ

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ

1. તમને કદાચ નવાઈ લાગશે કે બધા પ્રોટોન ધન વિદ્યુતભાર ધરાવતા હોવા છતાં ન્યુક્લિયસમાં ખીચોખીચ એકસાથે શા માટે રહેલાં છે ? તેઓ એકબીજાથી દૂર કેમ ભાગી જતા નથી ? તમે આગળ ઉપર શીખશો કે એક ત્રીજા પ્રકારનું મૂળભૂત બળ હોય છે જેને પ્રબળ બળ કહે છે, તે તેમને એકસાથે ભેગાં જકડી રાખે છે. આ બળ અંતરના જે વિસ્તારોમાં અસરકારક છે તે અત્યંત નાનું $\sim 10^{-14}$m છે અને ન્યુક્લિયસનું પરિમાણ પણ બરાબર આટલું જ છે. વળી ઇલેક્ટ્રૉનને પ્રોટોનની ઉપર એટલે કે ન્યુક્લિયસની અંદર, ક્વૉન્ટમ યંત્રશાસ્ત્રના નિયમોને લીધે બેસવા દેવામાં આવતા નથી. આ બાબત પરમાણુઓ કુદરતમાં જે બંધારણમાં અસ્તિત્વ ધરાવે છે તે દર્શાવે છે.
2. કુલંબ બળ અને ગુરુત્વ બળ એકસમાન વ્યસ્ત વર્ગનો નિયમ અનુસરે છે. પણ ગુરુત્વ બળને માત્ર એક જ ચિહ્ન જ (હંમેશા આકર્ષક) હોય છે, જ્યારે કુલંબ બળ બંને ચિહ્નો (આકર્ષી અને અપાકર્ષી)વાળું હોઈ શકે છે, આ કારણથી વિદ્યુતબળો એકબીજાને નાબૂદ કરી શકે છે. આ રીતે, ગુરુત્વાકર્ષણ ખૂબ નબળું બળ હોવા છતાં કુદરતમાં વર્ચસ્વ ધરાવનારું અને સર્વવ્યાપી હોઈ શકે છે.
3. જો વિદ્યુતભારનો એકમ કુલંબના નિયમ પરથી વ્યાખ્યાયિત કરવાનો હોય તો, કુલંબના નિયમમાં અચળાંક *k*, પસંદગીની બાબત છે. જો કે SI એકમોમાં, વિદ્યુતપ્રવાહ (A)ને તેની ચુંબકીય અસરો મારફતે (ઍમ્પિયરનો નિયમ) વ્યાખ્યાયિત કરાય છે અને વિદ્યુતભારનો એકમ માત્ર $1\,C = 1\,A\,s$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય છે. આ કિસ્સામાં *k*નું મૂલ્ય યાદચ્છિક લઈ શકાય નહિ. તે લગભગ $9 \times 10^9\,N\,m^2\,C^{-2}$ છે.
4. વિદ્યુત અસરોની દૃષ્ટિએ *k*નું મોટું મૂલ્ય એટલે કે વિદ્યુતભારના એકમ (1C)નું મોટું માપ એ કારણથી જણાય છે કે (ઉપરના મુદ્દા-3માં જણાવ્યા મુજબ) વિદ્યુતભારનો એકમ ચુંબકીય બળો (વિદ્યુતપ્રવાહ ધારિત તારો વચ્ચે લાગતાં બળ)ના પદમાં વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે, આ ચુંબકીય બળો વિદ્યુતબળો કરતાં ઘણાં નબળાં હોય છે. આમ, ચુંબકીય અસરો માટે 1A એ વાજબી (Reasonable) માપનો એકમ છે, જ્યારે $1\,C = 1\,A\,s$ એ વિદ્યુત અસરો માટે બહુ મોટો એકમ છે.
5. વિદ્યુતભારનો ઉમેરો થવાનો ગુણધર્મ એ 'સ્વાભાવિક/સાહજિક' ગુણધર્મ નથી. તે એ હકીકત સાથે સંબંધ ધરાવે છે કે વિદ્યુતભાર સાથે કોઈ દિશા સંકળાયેલ નથી. વિદ્યુતભાર અદિશ છે.
6. વિદ્યુતભાર માત્ર ભ્રમણગતિ હેઠળ અદિશ (અથવા અફર) જ નથી પણ તે નિર્દેશ ફ્રેમની સાપેક્ષ ગતિમાં પણ અફર છે. દરેક અદિશ માટે આ હંમેશાં સાચું નથી હોતું. ઉદાહરણ તરીકે, ગતિઊર્જા ભ્રમણ ગતિ હેઠળ અફર અદિશ છે પણ સાપેક્ષ ગતિમાં રહેલ નિર્દેશ ફ્રેમ માટે અફર નથી.
7. અલગ કરેલાં તંત્રના કુલ વિદ્યુતભારનું સંરક્ષણ એ ઉપર મુદ્દા-6માં નોંધેલ વિદ્યુતભારના અદિશ સ્વરૂપથી સ્વતંત્ર એવો ગુણધર્મ છે. સંરક્ષણ, આપેલ નિર્દેશ ફ્રેમમાં સમય સાથેની અફરતાનો નિર્દેશ છે. કોઈક રાશિ અદિશ હોવા છતાં પણ સંરક્ષણ ન થતું હોય (ઉદાહરણ તરીકે અસ્થિતિ સ્થાપક સંઘાતમાં ગતિઊર્જા) એવું બની શકે છે. બીજી બાજુ, આપણને સંરક્ષણ પામતી સદિશ રાશિ (દા.ત., અલગ કરેલા તંત્રનું કોણીય વેગમાન) મળી શકે છે.
8. વિદ્યુતભારનું ક્વૉન્ટમીકરણ એ કુદરતનો (ન સમજાવાયેલો) મૂળભૂત નિયમ છે, એ નોંધવું રસપ્રદ છે કે દળના ક્વૉન્ટમીકરણ અંગે આવો કોઈ નિયમ નથી.
9. સંપાતપણાના સિદ્ધાંતને સાહજિક (સ્વાભાવિક) ગણી લેવો ન જોઈએ અથવા સદિશોના સરવાળાના નિયમ સાથે સરખાવવો ન જોઈએ. તે બે બાબતો જણાવે છે : એક વિદ્યુતભાર પર બીજા વિદ્યુતભારને લીધે લાગતું બળ, અન્ય વિદ્યુતભારોની હાજરીથી અસર પામતું નથી અને જ્યારે બે કરતાં વધુ જ વિદ્યુતભારો હોય ત્યારે કોઈ ત્રણ પદાર્થો માટેના કે ચાર પદાર્થો માટેના વગેરે જેવા વધારાના બળો ઉદ્ભવતાં નથી.

10. અલગ-અલગ (Discrete) વિદ્યુતભારોની સંરચનાને લીધે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર તે વિદ્યુતભારોનાં સ્થાનોએ વ્યાખ્યાયિત થયેલ નથી. સતત વિદ્યુતભાર વિતરણ માટે તે વિતરણમાંના ગમે તે બિંદુએ વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે. સપાટી પરના વિદ્યુતભાર વિતરણ માટે સપાટીને આરપાર વિદ્યુતક્ષેત્ર અસતત છે.
11. કુલ વિદ્યુતભાર શૂન્ય ધરાવતી વિદ્યુતભાર સંરચનાને લીધે વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય નથી. પરંતુ સંરચનાના માપ (પરિમાણ)ની સરખામણીએ મોટા અંતરો માટે તેનું ક્ષેત્ર $1/r^2$ કરતાં વધુ ઝડપથી ઘટતું જાય છે. એકલ વિદ્યુતભારનું ક્ષેત્ર તો $1/r^2$ મુજબ ઘટતું જાય છે. વિદ્યુત ડાયપોલ આ હકીકતનું સૌથી સાદું ઉદાહરણ છે.

સ્વાધ્યાય

1.1 2×10^{-7}C અને 3×10^{-7}C વિદ્યુતભાર ધરાવતા અને એકબીજાથી હવામાં 30 cm અંતરે રહેલા બે વિદ્યુતભારિત ગોળાઓ વચ્ચે કેટલું બળ લાગે ?

1.2 0.4 μC વિદ્યુતભાર ધરાવતા એક નાના ગોળા પર બીજા –0.8 μC વિદ્યુતભાર ધરાવતા નાના ગોળા વડે હવામાં લાગતું સ્થિતવિદ્યુત બળ 0.2 N છે.
(a) બે વિદ્યુતભારો વચ્ચેનું અંતર કેટલું હશે ?
(b) બીજા ગોળા પર પ્રથમ ગોળાને લીધે લાગતું બળ કેટલું હશે ?

1.3 $ke^2/G\, m_e m_p$ ગુણોત્તર પરિમાણરહિત છે તેમ ચકાસો. ભૌતિક અચળાંકો ધરાવતા કોષ્ટકમાં જુઓ અને આ ગુણોત્તરનું મૂલ્ય શોધો. આ ગુણોત્તર શું સૂચવે છે ?

1.4 (a) 'પદાર્થનો વિદ્યુતભાર ક્વૉન્ટમિત (Quantised) થયેલો છે.' – એ કથનનો અર્થ સમજાવો.
(b) સ્થૂળ એટલે કે મોટા માપક્રમ પર વિદ્યુતભારો સાથે કામ કરતી વખતે આપણે વિદ્યુતભારનું ક્વૉન્ટમીકરણ શા માટે અવગણી શકીએ છીએ ?

1.5 જ્યારે કાચના સળિયાને રેશમી કાપડ સાથે ઘસવામાં આવે છે ત્યારે, વિદ્યુતભાર બંને પર દેખા દે છે. આવી ઘટના પદાર્થોની અન્ય જોડીઓ માટે પણ જણાય છે. વિદ્યુતભાર સંરક્ષણના નિયમ સાથે આ બાબત કેવી રીતે સુસંગત છે તે સમજાવો.

1.6 ચાર બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો $q_A = 2$μC, $q_B = -5$ μC, $q_C = 2$ μC અને $q_D = -5$ μC, એક 10 cmની બાજુવાળા ચોરસ ABCDના શિરોબિંદુઓ પર અનુક્રમે રહેલા છે. ચોરસના કેન્દ્ર પર મૂકેલા 1 μC વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ શોધો.

1.7 (a) સ્થિત વિદ્યુત ક્ષેત્ર રેખા એ સળંગ વક્ર છે. એટલે કે ક્ષેત્ર રેખાને અચાનક ભંગાણો (ગાબડાં, વિચ્છેદ) ન હોઈ શકે. આવું શા માટે ?
(b) બે ક્ષેત્ર રેખાઓ કોઈ બિંદુએ એકબીજાને શા માટે છેદતી નથી તે સમજાવો.

1.8 બે બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો $q_A = 3$ μC અને $q_B = -3$ μC એકબીજાથી શૂન્યાવકાશમાં 20 cm દૂર રહેલા છે.
(a) બે વિદ્યુતભારોને જોડતી રેખાના મધ્યબિંદુ O આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર કેટલું હશે ?
(b) જો 1.5×10^{-9} C માન ધરાવતો એક ઋણ પરિક્ષણ વિદ્યુતભાર આ બિંદુએ મૂકવામાં આવે તો તેના પર લાગતું બળ કેટલું હશે ?

1.9 એક તંત્રમાં બે વિદ્યુતભારો $q_A = 2.5 \times 10^{-7}$ C અને $q_B = -2.5 \times 10^{-7}$ C અનુક્રમે A : (0, 0, –15 cm) અને B : (0, 0, +15 cm) બિંદુઓએ રહેલા છે. તંત્રનો કુલ વિદ્યુતભાર અને વિદ્યુત ડાયપોલ ચાકમાત્રા શોધો.

1.10 4×10^{-9} C mની ડાયપોલ ચાકમાત્રા ધરાવતી એક વિદ્યુત ડાયપોલ 5×10^4 N C^{-1}નું માન ધરાવતા સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર સાથે 30°ના કોણે રહેલી છે. આ ડાયપોલ પર લાગતા ટોર્કનું માન શોધો.

1.11 ઊન સાથે ઘસેલા એક પોલીથીન ટુકડા પર 3×10^{-7}C ઋણ વિદ્યુતભાર છે.
(a) સ્થાનાંતરિત થયેલા ઈલેક્ટ્રૉનની સંખ્યા શોધો. તેઓ શાના પરથી શાના પર સ્થાનાંતરિત થયા છે ?
(b) ઊનથી પોલીથીન તરફ દળનું સ્થાનાંતર થયેલ છે ?

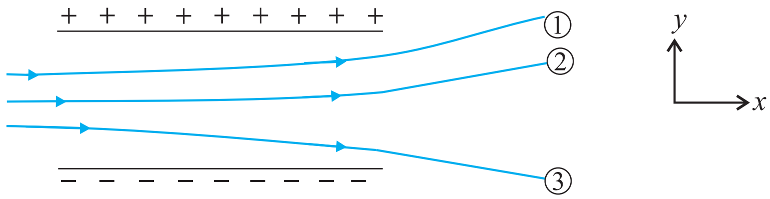
1.12 (a) કૉપરના અલગ કરેલા બે ગોળાઓ A અને Bનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર 50 cm છે. જો દરેક પરનો વિદ્યુતભાર 6.5×10^{-7}C હોય તો તેમની વચ્ચે પરસ્પર લાગતું અપાકર્ષણનું બળ

કેટલું હશે ? A અને B વચ્ચેના અંતરની સરખામણીએ તેમની ત્રિજ્યાઓ અવગણી શકાય તેવી છે.

(b) જો આ દરેક ગોળા પરનો વિદ્યુતભાર બમણો કરવામાં આવે અને તેમની વચ્ચેનું અંતર અડધું કરવામાં આવે તો કેટલું અપાકર્ષણ બળ લાગશે ?

1.13 ધારોકે સ્વાધ્યાય 1.12માંના બંને ગોળાઓ એકસમાન માપના છે. ત્રીજો તેમના જેવો જ પણ વિદ્યુતભારરહિત ગોળો પ્રથમ ગોળા સાથે સંપર્કમાં લાવી ત્યારબાદ બીજા ગોળા સાથે સંપર્કમાં લાવી તે બંનેથી દૂર કરવામાં આવે છે. હવે A અને B વચ્ચેનું નવું અપાકર્ષણ બળ કેટલું હશે ?

1.14 આકૃતિ 1.33 સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં ત્રણ વિદ્યુતભારોનાં ગતિપથ દર્શાવે છે. ત્રણ વિદ્યુતભારોનાં ચિહ્ન આપો. કયા કણ માટે વિદ્યુતભાર અને દળનો ગુણોત્તર મહત્તમ હશે ?



આકૃતિ 1.33

1.15 એકસમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર $\mathbf{E} = 3 \times 10^3\ \hat{\mathbf{i}}$ N/Cનો વિચાર કરો.

(a) *yz* સમતલને સમાંતરે જેનું સમતલ હોય તેવા 10 cmની બાજુવાળા ચોરસમાંથી આ ક્ષેત્રનું ફ્લક્સ કેટલું હશે ?

(b) જો આ જ ચોરસના સમતલને દોરેલો લંબ *x*-અક્ષ સાથે 60°નો કોણ બનાવે તો તેમાંથી ફ્લક્સ કેટલું હશે ?

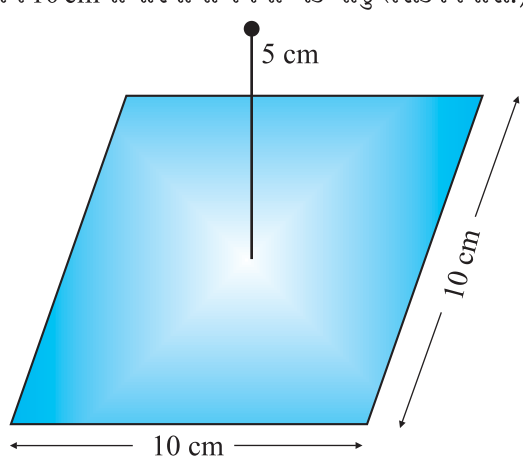
1.16 20 cmની બાજુવાળા એક ઘન કે જેની બાજુઓ યામ સમતલોને સમાંતર રાખેલ હોય તેમાંથી સ્વાધ્યાય 1.15માં દર્શાવેલ વિદ્યુતક્ષેત્રનું ફ્લક્સ કેટલું હશે ?

1.17 એક બ્લૅક બૉક્સની સપાટી આગળના વિદ્યુતક્ષેત્રની કાળજીપૂર્વકની માપણી દર્શાવે છે કે બૉક્સની સપાટીમાંથી બહારની તરફનું કુલ ફ્લક્સ $8.0 \times 10^3\ \mathrm{Nm^2/C}$ છે.

(a) બૉક્સની અંદરનો કુલ વિદ્યુતભાર કેટલો હશે ?

(b) જો બૉક્સની સપાટીમાંથી બહારની તરફનું કુલ (Net) ફ્લક્સ શૂન્ય હોત તો તમે એવો નિષ્કર્ષ તારવી શક્યા હોત કે બૉક્સમાં કોઈ વિદ્યુતભાર નથી ? આવું હોય તો કેમ અથવા ન હોય તો પણ કેમ ?

1.18 આકૃતિ 1.34માં દર્શાવ્યા મુજબ 10 cm બાજુવાળા એક ચોરસના કેન્દ્રથી બરાબર ઉપર 5 cm અંતરે +10 μC બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર રહેલો છે. ચોરસમાંથી વિદ્યુત ફ્લક્સનું મૂલ્ય કેટલું હશે ? (સૂચન : ચોરસને 10 cmની ધારવાળા ઘનની એક બાજુ તરીકે વિચારો.)



આકૃતિ 1.34

1.19 9.0 cmની ધારવાળા એક ઘનાકાર ગૉસિયન સપાટીના કેન્દ્ર પર 2.0 μC વિદ્યુતભાર રહેલો છે. આ સપાટીમાંથી કુલ વિદ્યુત ફ્લક્સ કેટલું હશે ?

1.20 10.0 cm ત્રિજ્યા ધરાવતી ગોળાકાર ગૉસિયન સપાટીના કેન્દ્ર પર મૂકેલા બિંદુવત વિદ્યુતભારને લીધે તે સપાટીમાંથી -1.0×10^3 Nm^2/Cનું ફ્લક્સ પસાર થાય છે.
(a) જો ગૉસિયન સપાટીની ત્રિજ્યા બમણી કરવામાં આવી હોત તો સપાટીમાંથી કેટલું ફ્લક્સ પસાર થતું હોત ?
(b) બિંદુવત્ વિદ્યુતભારનું મૂલ્ય કેટલું હશે ?

1.21 10 cm ત્રિજ્યાના એક વાહક ગોળા પર અજ્ઞાત વિદ્યુતભાર છે. ગોળાના કેન્દ્રથી 20 cm દૂરના બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર -1.5×10^3 N/C ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં અંદરની તરફ હોય તો ગોળા પરનો કુલ વિદ્યુતભાર કેટલો હશે ?

1.22 2.4 mનો વ્યાસ ધરાવતા એક સમાન વિદ્યુતભારિત ગોળા પર વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠ ઘનતા 80.0 μC/m^2 છે.
(a) ગોળા પરનો વિદ્યુતભાર શોધો.
(b) ગોળાની સપાટીમાંથી બહાર જતું કુલ વિદ્યુત ફ્લક્સ કેટલું હશે ?

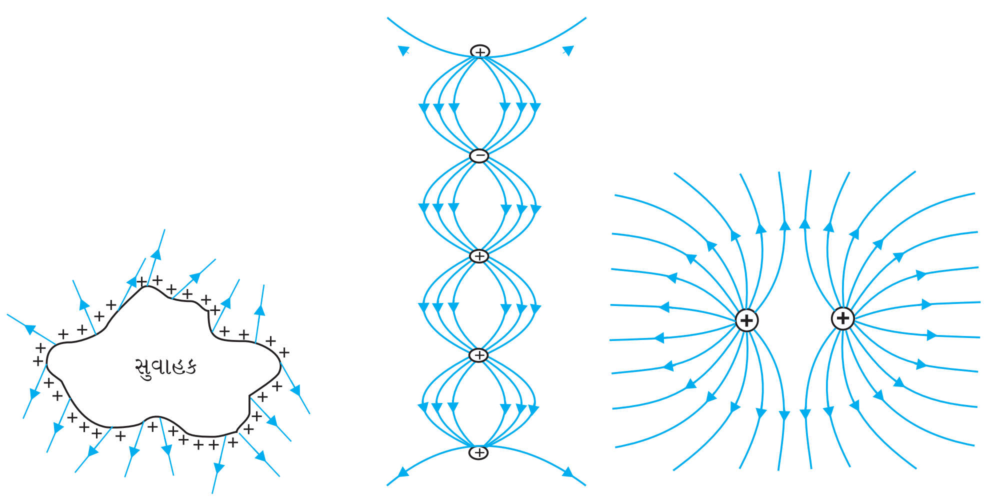
1.23 એક અનંત લંબાઈનો રેખીય વિદ્યુતભાર 2 cm અંતરે 9×10^4 N/C વિદ્યુતક્ષેત્ર ઉત્પન્ન કરે છે. રેખીય વિદ્યુતભાર ઘનતા ગણો.

1.24 બે મોટી, પાતળી ધાતુની પ્લેટો એકબીજાની નજીક અને સમાંતર છે. તેમની અંદરની બાજુઓ પર વિરૂદ્ધ ચિહ્નો ધરાવતી અને 17.0×10^{-22} C/m^2 મૂલ્યની વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠ ઘનતા છે.
(a) પ્રથમ પ્લેટની બહારના વિસ્તારમાં
(b) બીજી પ્લેટની બહારના વિસ્તારમાં અને
(c) બંને પ્લેટોની વચ્ચેના વિસ્તારમાં, વિદ્યુતક્ષેત્ર **E** શોધો.

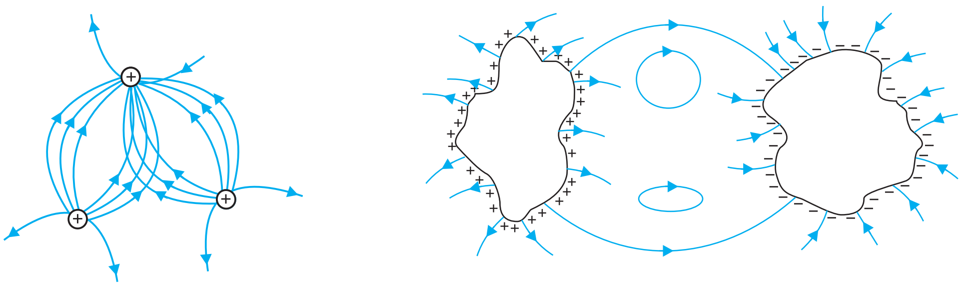
વધારાના સ્વાધ્યાય

1.25 મિલિકનના ઑઇલ ડ્રોપ પ્રયોગમાં 12 વધારાના ઇલેક્ટ્રૉન ધરાવતું એક ઑઇલ ડ્રોપ 2.55×10^4N C^{-1}ના સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રની અસર હેઠળ સ્થિર રાખવામાં આવ્યું છે. જો ઑઇલની ઘનતા 1.26 g cm^{-3} હોય તો તે ડ્રોપની ત્રિજ્યા શોધો. (g = 9.81 m s^{-2}, $e = 1.60 \times 10^{-19}$ c)

1.26 આકૃતિ 1.35માં દર્શાવેલ વક્રો પૈકી કયો/કયા વક્ર સ્થિતવિદ્યુત ક્ષેત્ર રેખાઓ રજૂ કરી શકશે નહિ ?



(a) (b) (c)



(d) (e)

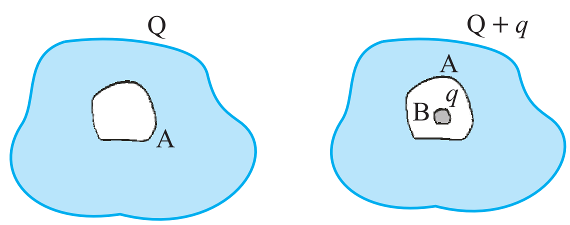
આકૃતિ 1.35

1.27 અવકાશના અમુક વિસ્તારમાં બધે વિદ્યુતક્ષેત્ર z-દિશામાં છે. જો કે, વિદ્યુતક્ષેત્રનું માન અચળ નથી પણ ધન z-દિશામાં નિયમિત રીતે દર મીટરે 10^5 N C^{-1}ના દરથી વધે છે. ઋણ z-દિશામાં 10^{-7} C m કુલ ડાયપોલ ચાકમાત્રા ધરાવતા તંત્ર વડે અનુભવાતા બળ અને ટોર્ક કેટલાં હશે ?

1.28 (a) આકૃતિ 1.36(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ એક બખોલ (Cavity) ધરાવતા સુવાહક Aને Q વિદ્યુતભાર આપેલ છે. દર્શાવો કે સમગ્ર વિદ્યુતભાર સુવાહકની બહારની સપાટી પર જ દશ્યમાન થશે.

(b) q વિદ્યુતભાર ધરાવતો બીજો સુવાહક, કેવીટી (બખોલ)ની અંદર Aથી અલગ રહે તેમ દાખલ કરેલ છે. દર્શાવો કે Aની બહારની સપાટી પરનો કુલ વિદ્યુતભાર $Q + q$ (આકૃતિ 1.36(b)) છે.

(c) એક સંવેદી ઉપકરણને તેના પરિસરમાંના (આસપાસના) પ્રબળ સ્થિતવિદ્યુત ક્ષેત્રોથી બચાવવું (Shield કરવું) છે. આ માટે એક શક્ય ઉપાય સૂચવો.



(a) (b)

આકૃતિ 1.36

1.29 એક પોલા વિદ્યુતભારિત સુવાહકની સપાટી પર એક નાનું છિદ્ર કાપેલ છે. દર્શાવો કે તે છિદ્રમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર $(\sigma/2\varepsilon_0)\,\hat{\mathbf{n}}$ છે. જ્યાં, $\hat{\mathbf{n}}$ બહાર તરફની લંબ દિશામાંનો એકમ સદિશ છે અને σ છિદ્રની નજીક વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા છે.

1.30 ગૉસના નિયમનો ઉપયોગ કર્યા સિવાય વિદ્યુતભારની સમાન રેખીય ઘનતા λ ધરાવતા લાંબા પાતળા તારને લીધે ઉદ્‌ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રનું સૂત્ર મેળવો. (સૂચન : કુલંબના નિયમનો સીધો ઉપયોગ કરો અને જરૂરી સંકલનની ગણતરી કરો.)

1.31 હવે એવું માનવામાં આવે છે કે પ્રોટોન અને ન્યૂટ્રૉન (જે સામાન્ય દ્રવ્યના ન્યુક્લિયસોની રચના કરે છે.) પોતે પણ ક્વાર્ક્સ તરીકે ઓળખાતા વધારે પ્રાથમિક એકમોના બનેલા છે. એક પ્રોટોન અને એક ન્યૂટ્રૉન દરેક, ત્રણ ક્વાર્ક્સના બનેલા છે. (u વડે દર્શાવાતા) કહેવાતા *up* ક્વાર્ક જેનો વિદ્યુતભાર $+(2/3)e$ છે અને (d વડે દર્શાવાતા) કહેવાતા down ક્વાર્ક જેનો વિદ્યુતભાર $(-1/3)e$ છે અને ઇલેક્ટ્રૉન એ બધા ભેગાં મળીને સામાન્ય દ્રવ્ય બનાવે છે. (બીજા પ્રકારના ક્વાર્ક પણ શોધાયા છે જેઓ દ્રવ્યના વિવિધ અસામાન્ય પ્રકાર ઉપજાવે છે.) પ્રોટોન અને ન્યૂટ્રૉન માટે શક્ય ક્વાર્ક બંધારણનું સૂચન કરો.

1.32 (a) એક યાદચ્છિક સ્થિત વિદ્યુત ક્ષેત્ર સંરચનાનો વિચાર કરો. આ સંરચનાના તટસ્થબિંદુ (એટલે કે જ્યાં $\mathbf{E} = 0$ હોય) એ એક નાનો પરિક્ષણ વિદ્યુતભાર મૂકેલ છે. દર્શાવો કે વિદ્યુતભારનું સંતુલન અસ્થાયી જ છે.

(b) બે સમાન ચિહ્ન અને મૂલ્ય ધરાવતા અને એકબીજાથી અમુક અંતરે મૂકેલા બે વિદ્યુતભારોની સાદી સંરચના માટે આ પરિણામ ચકાસો.

1.33 m દળ અને $(-q)$ વિદ્યુતભાર ધરાવતો એક કણ બે વિદ્યુતભારિત પ્લેટોની વચ્ચે υ_x વેગથી પ્રારંભમાં x-અક્ષને સમાંતરે દાખલ થાય છે (આકૃતિ 1.33માં કણ-1ની જેમ). દરેક પ્લેટની લંબાઈ L છે અને પ્લેટો વચ્ચે સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર જાળવી રાખવામાં આવે છે. દર્શાવો કે પ્લેટના દૂરના છેડે કણનું શિરોલંબ વિચલન $q\mathrm{EL}^2/2m\,\upsilon_x^2$ છે.

ધોરણ XI, ભૌતિકવિજ્ઞાન પાઠ્યપુસ્તકના પરિચ્છેદ 4.10માં ચર્ચેલ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની ગુરુત્વીય ક્ષેત્રમાંની ગતિ સાથે આ ગતિને સરખાવો.

1.34 ધારોકે સ્વાધ્યાય 1.33માંનો કણ $\upsilon_x = 2.0 \times 10^6$ m s^{-1} વેગથી પ્રક્ષિપ્ત કરેલો ઇલેક્ટ્રૉન છે. 0.5 cmનું અંતર ધરાવતી પ્લેટો વચ્ચેનું E, જો 9.1×10^2 N/C હોય તો ઇલેક્ટ્રૉન ઉપરની પ્લેટને ક્યાં અથડાશે ? ($|e| = 1.6 \times 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg)

પ્રકરણ બે

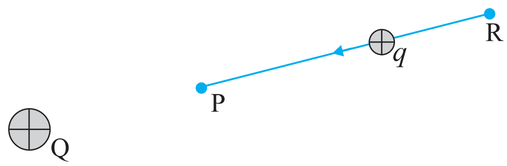
સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિમાન અને કેપેસીટન્સ (ELECTROSTATIC POTENTIAL AND CAPACITANCE)

2.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

ધોરણ XIમાં પ્રકરણ-6 અને 8માં સ્થિતિઊર્જાનો ખ્યાલ દાખલ કરેલ હતો. સ્પ્રિંગબળ અથવા ગુરુત્વબળ જેવા બળની વિરુદ્ધમાં જ્યારે કોઈ બાહ્યબળ પદાર્થને એક બિંદુથી બીજા બિંદુએ લઈ જવા માટે કાર્ય કરે છે, ત્યારે તે કાર્ય, તે પદાર્થની સ્થિતિઊર્જા રૂપે સંગ્રહ પામે છે. જ્યારે બાહ્યબળ દૂર કરવામાં આવે છે ત્યારે પદાર્થ ગતિમાં આવીને ગતિઊર્જા પ્રાપ્ત કરે છે અને એટલા જ (સમાન) મૂલ્યની સ્થિતિઊર્જા ગુમાવે છે. આમ, ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જાનો સરવાળો અચળ (સંરક્ષિત) રહે છે. આ પ્રકારના બળોને સંરક્ષી (Conservative) બળો કહે છે. સ્પ્રિંગબળ અને ગુરુત્વબળ સંરક્ષી બળોનાં ઉદાહરણ છે.

ગુરુત્વબળની જેમ બે (સ્થિર) વિદ્યુતભારો વચ્ચેનું કુલંબ બળ પણ સંરક્ષી બળ છે. આમાં કંઈ નવાઈ નથી. કારણ કે, બંને અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણ પર આધારિત છે અને મુખ્યત્વે સપ્રમાણતાના અચળાંકની બાબતમાં જુદા પડે છે. વળી, ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમમાં દળના સ્થાને કુલંબના નિયમમાં વિદ્યુતભાર આવે છે. આમ, ગુરુત્વક્ષેત્રમાં દળની સ્થિતિઊર્જાની જેમ આપણે સ્થિતવિદ્યુત ક્ષેત્રમાં વિદ્યુતભારની સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિઊર્જાને વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ.

કોઈ વિદ્યુતભાર સંરચનાને લીધે મળતા વિદ્યુતક્ષેત્ર **E**નો વિચાર કરો. પ્રારંભમાં સરળતા માટે, ઉગમબિંદુએ મૂકેલા Q વિદ્યુતભારને લીધે વિદ્યુતક્ષેત્ર **E**નો વિચાર કરો. હવે એક પરિક્ષણ વિદ્યુતભાર qને આપણે R બિંદુથી P બિંદુ સુધી તેની પર Qને લીધે લાગતા અપાકર્ષણ બળની વિરુદ્ધમાં લાવીએ તેવી કલ્પના કરો. આકૃતિ 2.1ના સંદર્ભમાં આવું ત્યારે બનશે કે જ્યારે Q અને q બંને ધન અથવા બંને ઋણ હશે. નિશ્ચિતતા માટે આપણે Q, $q > 0$ લઈએ. અત્રે બે નોંધ કરી શકાય. એક તો એ કે, આપણે એમ



આકૃતિ 2.1 ઉગમબિંદુએ મૂકેલ વિદ્યુતભાર Q(> 0)ને લીધે લાગતા અપાકર્ષણબળની વિરૂદ્ધમાં પરિક્ષણ વિદ્યુતભાર q(> 0)ને R બિંદુથી P બિંદુએ લાવવામાં આવે છે.

ધારી લઈએ કે પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર q એટલો બધો નાનો છે કે તે મૂળ સંરચનાને એટલે કે ઉગમબિંદુએ રહેલા વિદ્યુતભાર Qને ખલેલ પહોંચાડતો નથી. (અથવા બીજી રીતે આપણે Qને ઉગમબિંદુએ કોઈક ન જણાવેલ બળ દ્વારા જકડી રાખેલ છે.) બીજું કે વિદ્યુતભાર qને R થી P સુધી લાવવામાં આપણે લગાડેલું બાહ્યબળ $\mathbf{F}_{ext}$ અપાકર્ષણ બળ $\mathbf{F}_E$નો બરાબર સામનો કરે (Counter) તેટલું જ છે (એટલે કે $\mathbf{F}_{ext} = -\mathbf{F}_E$). આનો અર્થ એ કે જ્યારે વિદ્યુતભાર qને Rથી P પર લાવવામાં આવે છે ત્યારે તેના પર કોઈ ચોખ્ખું (Net) બળ નથી અને તેને પ્રવેગ નથી, એટલે કે તેને ખૂબ નાની પરંતુ અચળ ઝડપથી લાવવામાં આવે છે. આ પરિસ્થિતિમાં, બાહ્યબળ વડે થયેલું કાર્ય વિદ્યુતબળ વડે થતા કાર્યના ઋણ જેટલું છે અને તે વિદ્યુતભાર qની સ્થિતિઊર્જાના રૂપમાં પૂરેપૂરું સંગ્રહ પામે છે. જો P પર પહોંચીને બાહ્યબળ દૂર કરવામાં આવે તો વિદ્યુતબળ તે વિદ્યુતભારને Qથી દૂર લઈ જાય છે. P આગળ સંગ્રહ પામેલી ઊર્જા (સ્થિતિ ઊર્જા) વિદ્યુતભાર qને ગતિઊર્જા આપવામાં એવી રીતે વપરાય છે કે ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જાનો સરવાળો અચળ (સંરક્ષિત) રહે છે.

આમ, વિદ્યુતભાર qને Rથી P સુધી લઈ જવામાં બાહ્યબળ વડે થયેલું કાર્ય,

$$W_{RP} = \int_R^P \mathbf{F}_{ext} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= -\int_R^P \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{r} \tag{2.1}$$

આ કાર્ય સ્થિતવિદ્યુત અપાકર્ષણ બળની વિરુદ્ધમાં થયેલ છે અને તે સ્થિતિઊર્જા રૂપે સંગ્રહ પામે છે.

વિદ્યુતક્ષેત્રમાં દરેક બિંદુએ q વિદ્યુતભાર ધરાવતો કણ અમુક સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિઊર્જા ધરાવે છે, તેના પર કરેલું કાર્ય તેની સ્થિતિઊર્જામાં, R અને P બિંદુઓ વચ્ચેની સ્થિતિઊર્જાના તફાવત જેટલો વધારો કરે છે.

આમ, સ્થિતિઊર્જાનો તફાવત

$$\Delta U = U_P - U_R = W_{RP} \tag{2.2}$$

(નોંધો કે, આ સ્થાનાંતર વિદ્યુતબળની વિરૂદ્ધ દિશામાં છે તેથી વિદ્યુતબળ વડે થયેલું કાર્ય ઋણ એટલે કે $-W_{RP}$ છે.)

આથી, આપણે કોઈ પણ યાદચ્છિક વિદ્યુતભાર સંરચનાના વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે, બે બિંદુઓ વચ્ચેના વિદ્યુતસ્થિતિ ઊર્જાના તફાવતને, આપેલ વિદ્યુતભાર qને એક બિંદુથી બીજા બિંદુ પર (પ્રવેગરહિત ગતિથી) લઈ જવા માટે બાહ્યબળ વડે કરવા પડતા કાર્ય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ છીએ.

આ તબક્કે બે અગત્યના મુદ્દાઓનો ઉલ્લેખ કરીએ :

(i) સમીકરણ (2.2)ની જમણી બાજુ વિદ્યુતભારના માત્ર પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થાનો પર જ આધારિત છે. આનો અર્થ એ છે કે એક વિદ્યુતભારને એકથી બીજા બિંદુએ લઈ જવા માટે વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થયેલું કાર્ય માત્ર પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થાનો પર જ આધાર રાખે છે અને એકથી બીજા બિંદુએ જવા માટે લીધેલા માર્ગ પર આધારિત નથી. સંરક્ષીબળની આ મૂળભૂત લાક્ષણિકતા છે. જો આવું કાર્ય માર્ગ પર આધાર રાખતું હોત તો સ્થિતિઊર્જાનો ખ્યાલ અર્થપૂર્ણ હોત જ નહિ. વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય માર્ગ-આધારિત નથી એમ કુલંબના નિયમની મદદથી સાબિત થઈ શકે છે. આપણે અહીં એ સાબિતી છોડી દઈએ છીએ.

(ii) સમીકરણ (2.2) સ્થિતિઊર્જાના તફાવતને ભૌતિક દૃષ્ટિએ અર્થપૂર્ણ રાશિ કાર્યના પદમાં વ્યાખ્યાયિત કરે છે. એ તો સ્પષ્ટ છે કે આ રીતે વ્યાખ્યાયિત થયેલી સ્થિતિઊર્જા સરવાળામાં આવતા અચળાંક પુરતી અનિશ્ચિત છે. આનો અર્થ એ છે કે સ્થિતિઊર્જાના ખરેખરા મૂલ્યનો ભૌતિક રીતે કોઈ અર્થ નથી, માત્ર સ્થિતિઊર્જાના તફાવતને જ કંઈક અર્થ છે. દરેક બિંદુ આગળની સ્થિતિઊર્જામાં આપણે હંમેશાં કોઈ યાદચ્છિક અચળાંક α ઉમેરી શકીએ, કારણ કે આમ કરવાથી સ્થિતિઊર્જાના તફાવતમાં કોઈ ફેર પડતો નથી.

$$(U_P + \alpha) - (U_R + \alpha) = U_P - U_R$$

આને જુદી રીતે કહીએ તો, જ્યાં સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય છે તેવા બિંદુની પસંદગીમાં આપણને સ્વતંત્રતા છે. એક સગવડભરી પસંદગી એ છે કે અનંત અંતરે સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય લઈએ. આ પસંદગી સાથે જો આપણે બિંદુ Rને અનંત અંતરે લઈએ તો સમીકરણ (2.2) પરથી,

$$W_{\infty P} = U_P - U_\infty = U_P \qquad (2.3)$$

બિંદુ P યાદચ્છિક હોવાથી સમીકરણ (2.3) પરથી આપણને કોઈ પણ બિંદુએ વિદ્યુતભાર qની સ્થિતિઊર્જાની વ્યાખ્યા મળે છે. કોઈ પણ બિંદુએ વિદ્યુતભાર qની સ્થિતિઊર્જા (કોઈ પણ વિદ્યુતભાર ગોઠવણીને લીધે ઉદ્ભવતા ક્ષેત્રની હાજરીમાં) એ તે વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી તે બિંદુએ લાવવા માટે બાહ્યબળ (વિદ્યુતબળ જેટલા જ અને વિરૂદ્ધ દિશામાંના) વડે થતું કાર્ય જ છે.

2.2 સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિમાન (ELECTROSTATIC POTENTIAL)

કોઈ એક વ્યાપક સ્થાયી વિદ્યુતભાર ગોઠવણ (સંરચના) વિચારો. પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર qની સ્થિતિઊર્જાને આપણે તે વિદ્યુતભાર q પર કરેલા કાર્યના પદમાં વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે. સ્વાભાવિક રીતે જ આ કાર્ય qના સમપ્રમાણમાં છે, કારણ કે કોઈ પણ બિંદુએ બળ $q\mathbf{E}$ છે, જ્યાં, $\mathbf{E}$ આપેલ વિદ્યુતભાર ગોઠવણને લીધે તે બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર છે. આથી કાર્યને વિદ્યુતભાર q વડે ભાગવાનું સુગમભર્યું છે, જેથી પરિણમતી રાશિ q પર આધારિત નહિ હોય. બીજા શબ્દોમાં એકમ પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર દીઠ કરેલું કાર્ય, તે વિદ્યુતભાર ગોઠવણથી ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રની લાક્ષણિકતા છે. આ બાબત આપેલા વિદ્યુતભાર ગોઠવણને લીધે ઉદ્ભવતા સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિમાનના ખ્યાલ તરફ દોરી જાય છે. સમીકરણ (2.1) પરથી આપણને :

એકમ ધન વિદ્યુતભારને R થી P બિંદુએ લઈ જવા માટે બાહ્યબળ વડે કરાતું કાર્ય

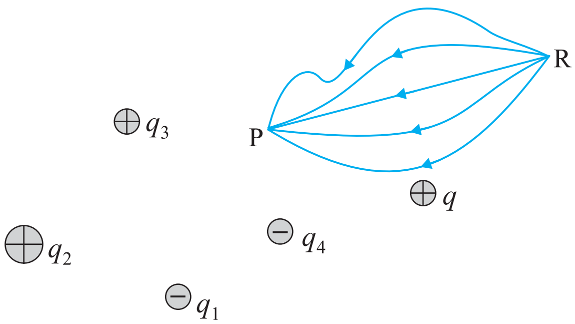
$$= V_P - V_R = \left(\frac{U_P - U_R}{q}\right) \qquad (2.4)$$

જેટલું મળે છે. જ્યાં, V_P અને V_R અનુક્રમે P અને R બિંદુએ સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિમાન છે. અગાઉની જેમ એ નોંધો કે સ્થિતિમાનના ખરેખરા મૂલ્યનો ભૌતિક દૃષ્ટિએ કોઈ અર્થ નથી પણ માત્ર સ્થિતિમાનનો તફાવત જ ભૌતિક રીતે અર્થપૂર્ણ છે. જો અગાઉની જેમ જ આપણે અનંત અંતરે સ્થિતિમાનને શૂન્ય તરીકે પસંદ કરીએ તો, સમીકરણ (2.4) દર્શાવે છે કે :

એકમ ધન વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી આપેલા બિંદુએ (પ્રવેગ રહિત) લાવવા માટે બાહ્યબળ વડે કરવું પડતું કાર્ય = તે બિંદુએ સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિમાન (V)

કાઉન્ટ અલેઝાન્ડ્રો વોલ્ટા (1745-1827) : તે ઇટાલિયન ભૌતિકવિજ્ઞાની અને પેવીઆ ખાતે પ્રોફેસર હતો. વોલ્ટાએ એમ સ્થાપિત કર્યું કે લુઈગી ગેલ્વેની (1737-1798)ને દેડકાની સ્નાયુ પેશીને બે જુદી-જુદી ધાતુઓની પ્લેટોના સંપર્કમાં રાખવાથી જોવા મળેલી **પ્રાણીજ વિદ્યુત**, પ્રાણીના સ્નાયુના કોઈ વિશિષ્ટ ગુણધર્મને લીધે નથી પરંતુ બે જુદી જુદી ધાતુઓની વચ્ચે કોઈ ભીના દ્રવ્યને રાખવાથી પણ હંમેશાં ઉત્પન્ન થાય છે. આ પરથી તેણે સર્વપ્રથમ **વોલ્ટેક પાઈલ** અથવા બૅટરી બનાવી જે ધાતુની તકતીઓ (ઇલેક્ટ્રૉડ્સ) વચ્ચે સેન્ડવિચ કરેલી કાર્ડબોર્ડની ભીની તકતીઓ (ઇલેક્ટ્રૉલાઇટ)ની મોટી થપ્પીની બનેલી હતી.

કાઉન્ટ અલેઝાન્ડ્રો વોલ્ટા (1745-1827)



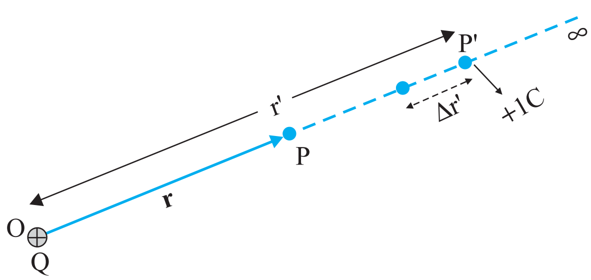
આકૃતિ 2.2 કોઈ આપેલ વિદ્યુતભાર ગોઠવણને લીધે ઉદ્‌ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે પરિક્ષણ વિદ્યુતભાર q પર થતું કાર્ય માર્ગથી સ્વતંત્ર છે અને માત્ર પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થાનો પર જ આધારિત છે.

બીજા શબ્દોમાં, સ્થિત વિદ્યુતક્ષેત્રના વિસ્તારમાં કોઈ પણ બિંદુએ વિદ્યુત સ્થિતિમાન (V), એકમ ધન વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી તે બિંદુએ (પ્રવેગરહિત) લાવવા માટે બાહ્યબળે કરેલું કાર્ય છે.

અગાઉ જણાવેલી શરતો આ સ્થિતિમાનની વ્યાખ્યાને પણ લાગુ પડે છે. એકમ ધન પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર પર થતું કાર્ય મેળવવા માટે આપણે સૂક્ષ્મ વિદ્યુતભાર δq લેવો જોઈએ, તેને અનંત અંતરેથી તે બિંદુએ લાવવા માટેનું કાર્ય δW મેળવવું જોઈએ અને તે પરથી ગુણોત્તર $\delta W/\delta q$ શોધવું જોઈએ. વળી સમગ્ર માર્ગ પર દરેક બિંદુએ બાહ્યબળ, તે બિંદુએ પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર પર લાગતા વિદ્યુતબળ જેટલું અને વિરૂદ્ધ દિશામાં હોવું જોઈએ.

2.3 બિંદુવત્ વિદ્યુતભારને લીધે સ્થિતિમાન (Potential due to a Point Charge)

ઉગમબિંદુએ રહેલા એક વિદ્યુતભાર Qનો વિચાર કરો (આકૃતિ 2.3). ચોક્કસતા માટે Qને ધન ગણીએ. ઉગમબિંદુથી સ્થાનસદિશ **r** ધરાવતા કોઈ પણ P બિંદુએ આપણે સ્થિતિમાન શોધવા માગીએ છીએ. તે માટે આપણે એકમ ધન પરીક્ષણ વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી P' બિંદુએ લાવવા માટે બાહ્યબળે પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર પર કરેલું કાર્ય ગણવું પડે. Q > 0 માટે અપાકર્ષણ બળની વિરૂદ્ધમાં બાહ્યબળે કરેલું કાર્ય ધન છે. આ કાર્ય માર્ગ પર આધારિત ન હોવાથી આપણે એક સગવડભર્યો માર્ગ અનંત અંતરેથી P સુધી ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં પસંદ કરીએ.



આકૃતિ 2.3 એકમ ધન પરિક્ષણ વિદ્યુતભારને Q(Q > 0) વિદ્યુતભારના અપાકર્ષણ વિરૂદ્ધ, અનંત અંતરેથી P બિંદુએ લાવવા કરેલું કાર્ય, એ Qને લીધે P બિંદુએ સ્થિતિમાન છે.

માર્ગ પરના વચ્ચેના કોઈ બિંદુ P' આગળ એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ,

$$\frac{Q \times 1}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\hat{\mathbf{r}}' \tag{2.5}$$

છે. જ્યાં, $\hat{\mathbf{r}}'$, OP' દિશામાંનો એકમ સદિશ છે. **r'**થી **r'** + Δ**r'** સુધીમાં આ બળની વિરૂદ્ધ થતું કાર્ય

$$\Delta W = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\Delta r' \tag{2.6}$$

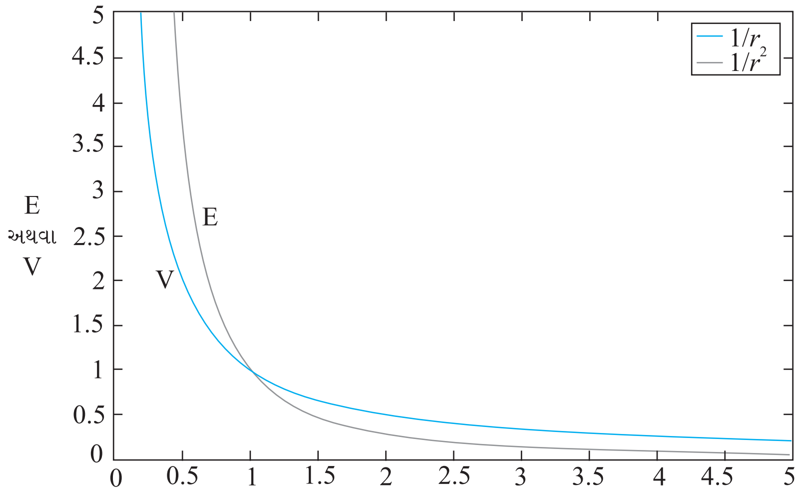
છે. અહીં, ઋણ નિશાની એટલા માટે આવે છે કે $\Delta r' < 0$, ΔW ધન છે. બાહ્યબળે કરેલું કુલ કાર્ય (W) સમીકરણ (2.6)નું $r' = \infty$ થી $r' = r$ સુધી સંકલન કરવાથી મળે છે.

$$W = -\int_{\infty}^{r}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}dr' = \left.\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'}\right|_{\infty}^{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.7}$$

વ્યાખ્યા મુજબ, આ વિદ્યુતભાર Qને લીધે P આગળનું સ્થિતિમાન છે.

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.8}$$

જો કે આપણે સમીકરણ (2.8)ને સાબિત કરવામાં $Q > 0$ ગણેલું છે પણ તે Qના કોઈ પણ ચિહ્‌ન માટે સાચું છે. $Q < 0$ માટે $V < 0$, એટલે કે એકમ ધન પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર દીઠ (બાહ્યબળ વડે) તેને અનંત અંતરેથી આપેલા બિંદુએ લાવવા માટે કરેલું કાર્ય ઋણ છે. આને સમતુલ્ય રીતે એમ પણ કહી શકાય કે સ્થિત વિદ્યુતબળ વડે એકમ ધન વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી P બિંદુએ લાવવા માટે કરેલું કાર્ય ધન છે. (આ આમ હોવું જ જોઈએ કારણ કે $Q < 0$ માટે એકમ ધન પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ આકર્ષી છે અને તેથી બળ અને સ્થાનાંતર (અનંત અંતરેથી P સુધી) એક જ દિશામાં છે. અંતમાં, આપણે એ નોંધીએ કે સમીકરણ (2.8), અનંત અંતરે સ્થિતિમાન શૂન્ય લેવાની આપણી પસંદગી સાથે સુસંગત છે.



આકૃતિ 2.4 બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર Q માટે અંતર r સાથે સ્થિતિમાનનો ફેરફાર $(Q/4\pi\varepsilon_0)m^{-1}$ના એકમો (ભૂરો વક્ર) અને અંતર r સાથે ક્ષેત્રનો ફેરફાર $(Q/4\pi\varepsilon_0)m^{-2}$ના એકમોમાં (કાળો વક્ર)

આકૃતિ (2.4), સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિમાન ($\propto 1/r$) અને સ્થિત વિદ્યુતક્ષેત્ર ($\propto 1/r^2$) અંતર r સાથે કેવી રીતે બદલાય છે તે દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 2.1

(a) 4×10^{-7}C વિદ્યુતભારથી 9 cm દૂર આવેલા P બિંદુએ સ્થિતિમાનની ગણતરી કરો.

(b) તે પરથી 2×10^{-9}C વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી P બિંદુએ લાવવા માટે કરેલા કાર્યની ગણતરી કરો. શું જવાબ વિદ્યુતભારને જે માર્ગે લાવવામાં આવે છે તેના પર આધારિત છે ?

ઉકેલ

$$(a)\ V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = 9 \times 10^9\ \text{Nm}^2\ \text{C}^{-2} \times \frac{4 \times 10^{-7}\text{C}}{0.09\ \text{m}}$$
$$= 4 \times 10^4\ \text{V}$$

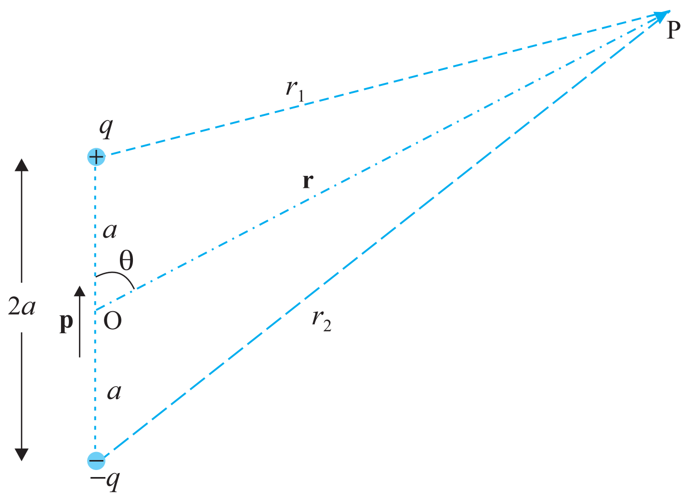
$$(b)\ W = qV = 2 \times 10^{-9}\ \text{C} \times 4 \times 10^4 \text{V}$$
$$= 8 \times 10^{-5}\ \text{J}$$

ના, અત્રે કરવામાં આવેલું કાર્ય માર્ગથી સ્વતંત્ર છે. કોઈ પણ યાદચ્છિક સૂક્ષ્મ માર્ગને બે પરસ્પર લંબ એવા સ્થાનાંતરોમાં વિભાજિત કરી શકાય : એક rને સમાંતર અને બીજું rને લંબ. આમાંથી rને લંબ સ્થાનાંતરને અનુરૂપ કરેલું કાર્ય શૂન્ય બનશે.

ઉદાહરણ 2.1

2.4 વિદ્યુત ડાયપોલ (દ્વિ-ધ્રુવી)ને લીધે સ્થિતિમાન (Potential due to an Electric Dipole)

ગયા પ્રકરણમાં આપણે જોયું કે વિદ્યુત ડાયપોલ (દ્વિ-ધ્રુવી) એકબીજાથી (નાના) $2a$ અંતરે રહેલા બે વિદ્યુતભારો q અને $-q$ની બનેલી છે. તેનો કુલ વિદ્યુતભાર શૂન્ય છે. તેની લાક્ષણિકતા ડાયપોલ ચાકમાત્રા સદિશ **p** દ્વારા દર્શાવાય છે, જેનું માન $q \times 2a$ છે અને તે $-q$થી qની દિશામાં છે (આકૃતિ 2.5). આપણે એ પણ જોયું કે સ્થાનસદિશ **r** ધરાવતા બિંદુએ ડાયપોલનું વિદ્યુતક્ષેત્ર તેના માન r પર જ આધાર રાખતું નથી, પરંતુ **r** અને **p** વચ્ચેના ખૂણા પર પણ આધાર રાખે છે. ઉપરાંત, મોટા અંતરે ક્ષેત્ર $1/r^2$



આકૃતિ 2.5 ડાયપોલથી ઉદ્‌ભવતા સ્થિતિમાનની ગણતરીમાં સંકળાયેલી રાશિઓ

(જે એકલ વિદ્યુતભારના ક્ષેત્રની લાક્ષણિકતા છે) મુજબ ઘટતું નથી પરંતુ $1/r^3$ મુજબ ઘટે છે. હવે આપણે ડાયપોલને લીધે ઉદ્‌ભવતું સ્થિતિમાન શોધીએ અને એકલ વિદ્યુતભારથી ઉદ્‌ભવતા સ્થિતિમાન કરતાં કેવી રીતે જુદું પડે છે તે જોઈએ.

અગાઉની જેમ આપણે ઉગમબિંદુ ડાયપોલના કેન્દ્ર પર લઈએ છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે વિદ્યુતક્ષેત્ર સંપાતપણાના સિદ્ધાંતને અનુસરે છે. સ્થિતિમાન ક્ષેત્ર વડે થતા કાર્ય સાથે સંબંધ ધરાવતું હોવાથી સ્થિતવિદ્યુત સ્થિતિમાન પણ સંપાતપણાના સિદ્ધાંતને અનુસરે છે. આમ, ડાયપોલને લીધે સ્થિતિમાન q અને $-q$ને લીધે મળતા સ્થિતિમાનોના સરવાળા જેટલું છે.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) \tag{2.9}$$

જ્યાં, r_1 અને r_2 અનુક્રમે q અને $-q$થી P બિંદુનાં અંતરો છે.

હવે, ભૂમિતિ પરથી,

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta$$

$$r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta \tag{2.10}$$

આપણે rને a કરતાં ઘણું મોટું ($r >> a$) લઈએ અને a/rના પ્રથમ ઘાત સુધીના પદોને જ રાખીએ (બીજા અવગણીએ) તો,

$$r_1^2 = r^2\left(1 - \frac{2a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\cong r^2\left(1 - \frac{2a\cos\theta}{r}\right) \tag{2.11}$$

તે જ રીતે,

$$r_2^2 \cong r^2\left(1 + \frac{2a\cos\theta}{r}\right) \tag{2.12}$$

દ્વિપદી પ્રમેય વાપરતાં અને a/rમાં પ્રથમ ઘાતના પદોને જ રાખતાં,

$$\frac{1}{r_1} \cong \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2a\cos\theta}{r}\right)^{-1/2} \cong \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a\cos\theta}{r}\right) \quad [2.13(a)]$$

$$\frac{1}{r_2} \cong \frac{1}{r}\left(1 + \frac{2a\cos\theta}{r}\right)^{-1/2} \cong \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta\right) \quad [2.13(b)]$$

સમીકરણો (2.9) અને (2.13) અને $p = 2qa$ પરથી

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2a\cos\theta}{r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2.14}$$

વળી, $p\cos\theta = \mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}$

જ્યાં $\hat{\mathbf{r}}$ સ્થાનસદિશ OPની દિશામાંનો એકમ સદિશ છે.

આ પરથી ડાયપોલનું સ્થિતિમાન

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \; ; (r >> a) \tag{2.15}$$

મળે છે.

અગાઉ જણાવ્યું તેમ સમીકરણ (2.15) ડાયપોલના માપ (પરિમાણ)ની સરખામણીએ મોટાં અંતરો માટે જ સંન્નિકટ રીતે સાચું છે કે જેને માટે a/rમાં ઊંચી ઘાતનાં પદો અવગણ્ય છે. જો કે ઉગમબિંદુ આગળના બિંદુ ડાયપોલ માટે સમીકરણ (2.15) પૂરેપૂરું સત્ય છે.

સમીકરણ (2.15) પરથી, ડાયપોલની અક્ષ $(\theta = 0, \pi)$ પર સ્થિતિમાન

$$V = \pm\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2} \tag{2.16}$$

($\theta = 0$ માટે ધન ચિહ્ન, $\theta = \pi$ માટે ઋણ ચિહ્ન). વિષુવરેખીય સમતલ ($\theta = \pi/2$)માં સ્થિતિમાન શૂન્ય છે.)

ડાયપોલનું વિદ્યુતસ્થિતિમાન અને એકલ (એકાકી) વિદ્યુતભારના વિદ્યુતસ્થિતિમાન વચ્ચેના તફાવતના મહત્વના મુદ્દાઓ સમીકરણો (2.8) અને (2.15) પરથી સ્પષ્ટ છે :

(i) ડાયપોલને લીધે સ્થિતિમાન માત્ર r પર જ આધાર રાખતું નથી પણ સ્થાન સદિશ $\mathbf{r}$ અને ડાયપોલ ચાકમાત્રા સદિશ $\mathbf{p}$ વચ્ચેના કોણ વચ્ચે પણ આધાર રાખે છે. (જો કે તે $\mathbf{p}$ની આસપાસ અક્ષીય રીતે સંમિત છે. એટલે કે, જો તમે સ્થાન સદિશ $\mathbf{r}$ને $\mathbf{p}$ની આસપાસ θ અચળ રાખીને ઘુમાવો (ભ્રમણ આપો) તો આ રીતે ઉદ્‌ભવતા શંકુ પર Pને અનુરૂપ બિંદુઓએ સ્થિતિમાન, P આગળ હતું તેટલું જ હશે.

(ii) વિદ્યુત ડાયપોલનું સ્થિતિમાન મોટા અંતરે $1/r^2$ મુજબ ઘટે છે, એકલ વિદ્યુતભાર માટે લાક્ષણિક રીતે સ્થિતિમાન $1/r$ મુજબ ઘટતું હોય, તે રીતે નહિ. (તમે આકૃતિ 2.4માં બીજા સંદર્ભમાં દોરાયેલા $1/r^2$ વિરૂદ્ધ r અને $1/r$ વિરૂદ્ધ rના આલેખોનો સંદર્ભ લઈ શકો છો.)

2.5 વિદ્યુતભારોના તંત્રને લીધે સ્થિતિમાન (Potential due to a System of Charges)

કોઈ ઉગમબિંદુની સાપેક્ષે $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots.. \mathbf{r}_n$ સ્થાન સદિશો ધરાવતા વિદ્યુતભારો અનુક્રમે $q_1, q_2, \ldots.. q_n$ના તંત્રનો વિચાર કરો (આકૃતિ 2.6). P આગળ વિદ્યુતભાર q_1ને લીધે સ્થિતિમાન V_1

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1P}}$$

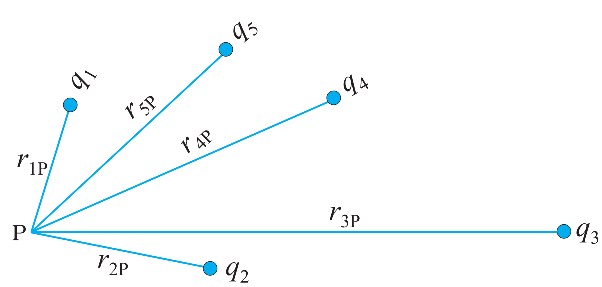
છે, જ્યાં r_{1P} એ q_1 અને P વચ્ચેનું અંતર છે.

તેવી જ રીતે, P આગળ q_2ને લીધે સ્થિતિમાન V_2 અને q_3ને લીધે સ્થિતિમાન V_3 પણ

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{2P}}, \; V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_{3P}}$$

પરથી મળે છે. જ્યાં r_{2P} અને r_{3P} એ P બિંદુનાં અનુક્રમે q_2 અને q_3 વિદ્યુતભારોથી અંતરો છે. આ જ રીતે બીજા વિદ્યુતભારોથી સ્થિતિમાન મળે. સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ સમગ્ર વિદ્યુતભાર ગોઠવણી (સંરચના)ને લીધે P આગળનું સ્થિતિમાન, વ્યક્તિગત વિદ્યુતભારોથી મળતા સ્થિતિમાનોનો બૈજિક સરવાળો છે.

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n \tag{2.17}$$



આકૃતિ 2.6 વિદ્યુતભારોના તંત્રને લીધે કોઈ બિંદુએ સ્થિતિમાન, વ્યક્તિગત વિદ્યુતભારોને લીધે મળતા સ્થિતિમાનોનો સરવાળો છે

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{1P}}+\frac{q_2}{r_{2P}}+.....+\frac{q_n}{r_{nP}}\right) \qquad (2.18)$$

જો આપણી પાસે કોઈ સતત વિદ્યુતભાર વિતરણ એવું હોય કે જેમાં વિદ્યુતભાર ઘનતા $\rho(\mathbf{r})$ હોય, તો અગાઉની જેમ, આપણે તેને દરેક Δv માપના નાના કદ ખંડોમાં વિભાજિત કરીએ. તે દરેકમાં $\rho\Delta v$ વિદ્યુતભાર રહેલો હશે. પછી આપણે દરેક કદ ખંડ વડે સ્થિતિમાન શોધી આવા બધા પદોનો સરવાળો (વધુ ચોક્કસપણે સંકલન) કરીએ અને આમ સમગ્ર વિતરણને લીધે સ્થિતિમાન મેળવીએ.

પ્રકરણ-1માં આપણે જોયું છે કે સમાન રીતે વિદ્યુતભારિત ગોળાકાર કવચ માટે કવચની બહાર વિદ્યુતક્ષેત્ર જાણે કે બધો વિદ્યુતભાર કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલો હોય તે પરથી જે ક્ષેત્ર મળે તેટલું જ હોય છે. આમ, કવચની બહાર સ્થિતિમાન

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad (r \geq R) \qquad [2.19(a)]$$

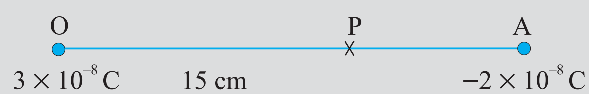
જ્યાં q કવચ પરનો કુલ વિદ્યુતભાર અને R કવચની ત્રિજ્યા છે. કવચની અંદર વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય છે. આનો અર્થ એ (પરિચ્છેદ 2.6) કે કવચની અંદર સ્થિતિમાન અચળ છે (કારણ કે વિદ્યુતભારને કવચની અંદર ગતિ કરાવવા માટે કોઈ કાર્ય કરવું પડતું નથી) અને તેથી, સપાટી પરના મૂલ્ય બરાબર જ છે, જે

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \qquad [2.19(b)]$$

છે.

ઉદાહરણ 2.2 બે વિદ્યુતભારો 3×10^{-8} C અને -2×10^{-8} C એકબીજાથી 15 cm અંતરે રહેલા છે. બે વિદ્યુતભારોને જોડતી રેખા પરના કયા બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન શૂન્ય હશે ? અનંત અંતરે સ્થિતિમાન શૂન્ય લો.

ઉકેલ આપણે ધન વિદ્યુતભારના સ્થાન પર ઉગમબિંદુ O લઈએ. બે વિદ્યુતભારોને જોડતી રેખા x-અક્ષ તરીકે લીધેલ છે. ઋણ વિદ્યુતભારને ઉગમબિંદુની જમણી બાજુ લીધેલ છે (આકૃતિ 2.7)



આકૃતિ 2.7

ધારો કે P એ x અક્ષ પર માંગેલ બિંદુ છે, જ્યાં, સ્થિતિમાન શૂન્ય છે. જો x એ Pનો x-યામ હોય તો સ્વાભાવિક છે કે x ધન હોવું જોઈએ. ($x < 0$ માટે બે વિદ્યુતભારોને લીધે સ્થિતિમાનોનો સરવાળો શૂન્ય થાય તેવી કોઈ શક્યતા નથી). જો x, O અને Aની વચ્ચે હોય તો,

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\times10^{-8}}{x\times10^{-2}} - \frac{2\times10^{-8}}{(15-x)\times10^{-2}}\right] = 0$$

જ્યાં, x cmમાં છે. એટલે કે,

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{15-x} = 0$$

આ પરથી $x = 9$ cm

જો x, લંબાવેલી OA રેખા પર હોય તો, જરૂરી શરત

$\frac{3}{x} - \frac{2}{x-15} = 0$ બને.

ઉદાહરણ 2.2

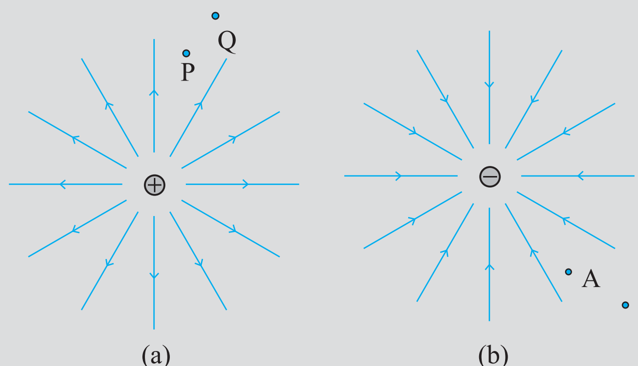
તે પરથી

$x = 45$ cm

આમ, શૂન્ય વિદ્યુત સ્થિતિમાન, ધન વિદ્યુતભારથી 9 cm અને 45 cm અંતરોએ ઋણ વિદ્યુતભાર તરફ મળે. એ નોંધો કે ગણતરીમાં વાપરેલ સૂત્ર માટે અનંત અંતરે શૂન્ય સ્થિતિમાન પસંદ કરવાની જરૂર છે.

ઉદાહરણ 2.2

ઉદાહરણ 2.3 આકૃતિઓ 2.8(a) અને (b) અનુક્રમે ધન અને ઋણ વિદ્યુતભારોની ક્ષેત્રરેખાઓ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 2.8

(a) સ્થિતિમાન તફાવત $V_P - V_Q$, $V_B - V_A$નાં ચિહ્ન જણાવો.
(b) એક નાના ઋણ વિદ્યુતભારની Q અને P તથા A અને B બિંદુઓ વચ્ચેની સ્થિતિ-ઊર્જાના તફાવતનાં ચિહ્ન જણાવો.
(c) એક નાના ધન વિદ્યુતભારને Q થી P લઈ જવામાં ક્ષેત્ર વડે થતા કાર્યનું ચિહ્ન જણાવો.
(d) એક નાના ઋણ વિદ્યુતભારને Bથી A લઈ જવામાં બાહ્યબળ વડે થતા કાર્યનું ચિહ્ન જણાવો.
(e) Bથી A જવામાં નાના ઋણ વિદ્યુતભારની ગતિઊર્જા વધે કે ઘટે ?

ઉકેલ (a) $V \propto \frac{1}{r}$ હોવાથી $V_P > V_Q$. આમ, $V_P - V_Q$ ધન છે. વળી, V_B, V_A કરતાંઓછું ઋણ છે.
આમ, $V_B > V_A$ અથવા $V_B - V_A$ ધન છે.

(b) નાનો ઋણ વિદ્યુતભાર ધન વિદ્યુતભાર તરફ આકર્ષાય છે. ઋણ વિદ્યુતભાર ઊંચી સ્થિતિઊર્જાથી નીચી સ્થિતિઊર્જા તરફ ગતિ કરે છે. તેથી Q અને P વચ્ચે સ્થિતિઊર્જાતફાવતની નિશાની ધન છે. આવી જ રીતે, (સ્થિ.ઊ.)$_A$ > (સ્થિ.ઊ.)$_B$. આથી, સ્થિતિઊર્જાના તફાવતની નિશાની ધન છે.

(c) એક નાના ધન વિદ્યુતભારને Qથી P પર લઈ જવામાં બાહ્ય પરિબળને વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરૂદ્ધમાં કાર્ય કરવું પડે છે. તેથી ક્ષેત્રએ કરેલું કાર્ય ઋણ છે.

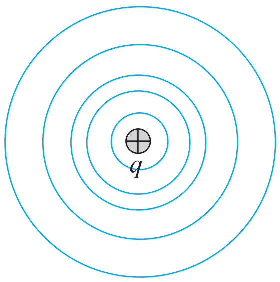
(d) નાના ઋણ વિદ્યુતભારને Bથી A પર લઈ જવામાં બાહ્ય પરિબળને કાર્ય કરવું પડે છે. તે ધન છે.

(e) ઋણ વિદ્યુતભાર પરના અપાકર્ષણ બળને લીધે વેગ ઘટે છે અને તેથી Bથી A પર જવામાં ગતિઊર્જા ઘટે છે.

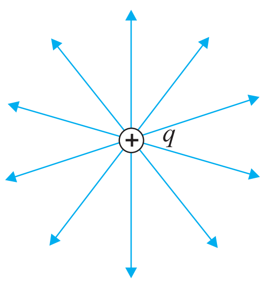
ઉદાહરણ 2.3

PHYSICS

Electric potential, equipotential surfaces:
http://video.mit.edu/watch/4-electrostatic-potential-elctric-energy-ev-conservative-field-equipotential-sufaces-12584/



(a)



(b)

આકૃતિ 2.9 એકલ વિદ્યુતભાર q માટે (a) સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો વિદ્યુતભાર પર કેન્દ્ર ધરાવતી ગોળાકાર સપાટીઓ છે (b) જો $q > 0$ હોય તો વિદ્યુતક્ષેત્ર રેખાઓ qમાંથી શરૂ થતી અને ત્રિજ્યાવર્તી છે.

2.6 સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો (EQUIPOTENTIAL SURFACES)

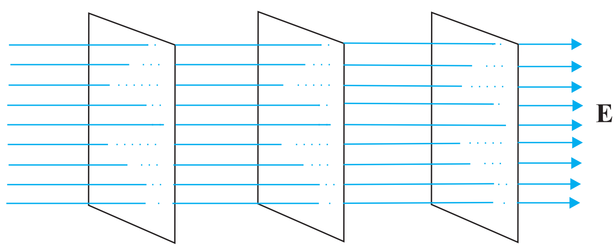
સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠ એ એવું પૃષ્ઠ (સપાટી) છે કે જે પૃષ્ઠ પરનાં બધાં બિંદુઓએ સ્થિતિમાન સમાન છે. એકલ વિદ્યુતભાર q માટે સ્થિતિમાન, સમીકરણ (2.8) પરથી,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

મળે છે. આ દર્શાવે છે કે, જો r અચળ હોય તો V અચળ છે. આમ, એકલ વિદ્યુતભારનાં સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો, વિદ્યુતભાર પર કેન્દ્ર ધરાવતી ગોળાકાર સપાટીઓ છે.

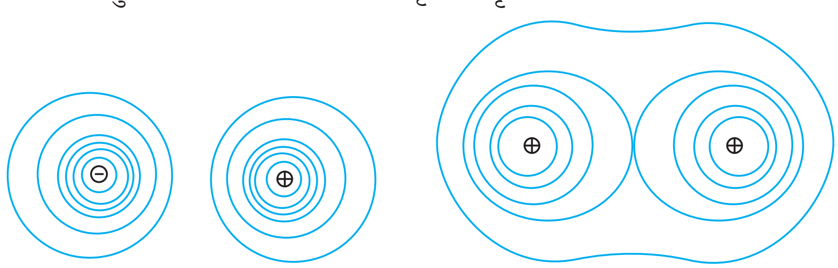
હવે, એકલ વિદ્યુતભારની વિદ્યુતક્ષેત્ર રેખાઓ, વિદ્યુતભારથી શરૂ થતી અથવા વિદ્યુતભારમાં અંત પામતી ત્રિજ્યાવર્તી રેખાઓ છે, જે વિદ્યુતભાર ધન છે કે ઋણ છે તેના પર આધાર રાખે છે. એ સ્પષ્ટ છે કે ક્ષેત્રરેખા દરેક બિંદુએ તે બિંદુમાંથી પસાર થતા સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને લંબ છે. આ વ્યાપક રીતે સાચું છે : કોઈ પણ વિદ્યુતભાર સંરચના (ગોઠવણી) માટે, કોઈ બિંદુમાંથી પસાર થતું સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠ, તે બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રને લંબ છે. આ વિધાનની સાબિતી સરળ છે.

જો ક્ષેત્ર સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને લંબ ન હોત તો તેને પૃષ્ઠને સમાંતર અશૂન્ય ઘટક હોત. એકમ પરીક્ષણ વિદ્યુતભારને, ક્ષેત્રના ઘટકની વિરૂદ્ધમાં ગતિ કરાવવા કાર્ય કરવું પડ્યું હોત. પરંતુ આ તો સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠની વ્યાખ્યા કરતાં વિરૂદ્ધ છે : આ સપાટી પર કોઈ બે બિંદુઓ વચ્ચે કોઈ સ્થિતિમાન તફાવત નથી અને પરીક્ષણ વિદ્યુતભારને સપાટી પર ગતિ કરાવવા કોઈ કાર્ય કરવું પડતું નથી. આથી, વિદ્યુતક્ષેત્ર સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને દરેક બિંદુએ લંબ હોવું જ જોઈએ. વિદ્યુતભાર વિતરણ (સંરચના)ની આસપાસ વિદ્યુતક્ષેત્ર રેખાઓના ચિત્ર ઉપરાંત આ સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો એક વધારાનું વૈકલ્પિક દૃશ્ય ચિત્ર પુરૂં પાડે છે.



આકૃતિ 2.10 સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો

સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર **E** ધારો કે x-અક્ષની દિશામાં છે, તેને માટે સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો x-અક્ષને લંબ છે એટલે કે y-z સમતલને સમાંતર સમતલો છે. (આકૃતિ 2.10). (a) ડાયપોલ માટેનાં અને (b) બે સમાન ધન વિદ્યુતભારો માટેનાં સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો આકૃતિ 2.11માં દર્શાવ્યાં છે.

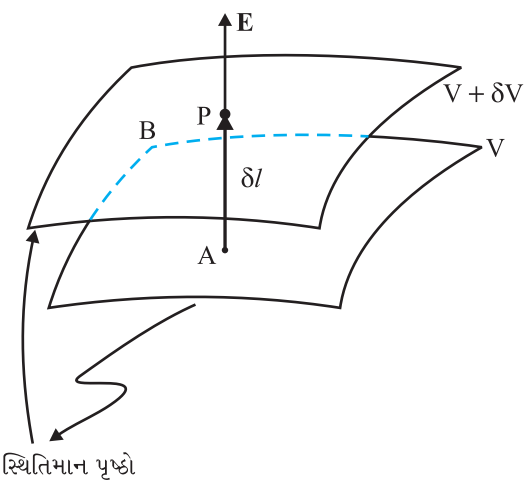


(a) (b)

આકૃતિ 2.11 (a) ડાયપોલ
(b) બે સમાન ધન વિદ્યુતભારો માટેનાં કેટલાંક સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો

2.6.1 ક્ષેત્ર અને સ્થિતિમાન વચ્ચેનો સંબંધ (Relation between Field and Potential)

એકબીજાની ખૂબ નજીકની બે સમસ્થિતિમાન સપાટીઓ A અને B (આકૃતિ 2.12). જેમના પર સ્થિતિમાનનાં મૂલ્યો અનુક્રમે V અને V + δV છે, તેમનો વિચાર કરો. અહીં δV એ વિદ્યુતક્ષેત્ર **E**ની દિશામાંનો Vનો ફેરફાર છે. B સપાટી પર એક બિંદુ P છે. સપાટી Aનું Pથી લંબ અંતર δl છે. એકમ ધન વિદ્યુતભારને સપાટી B પરથી સપાટી A સુધી આ લંબરેખા પર, વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરૂદ્ધમાં ગતિ કરાવવાનો વિચાર કરો. આ પ્રક્રિયામાં કરેલું કાર્ય $|\mathbf{E}|\,\delta l$ છે.



આકૃતિ 2.12 સ્થિતિમાન પરથી ક્ષેત્ર

આ કાર્ય સ્થિતિમાન તફાવત $V_A - V_B$ને બરાબર છે.

આમ,

$$|\mathbf{E}|\,\delta l = V - (V + \delta V) = -\delta V$$

એટલે કે, $$|\mathbf{E}| = -\frac{\delta V}{\delta l} \qquad (2.20)$$

δV ઋણ હોવાથી, $\delta V = -|\delta V|$ સમીકરણ (2.20)ને આપણે

$$|\mathbf{E}| = -\frac{\delta V}{\delta l} = +\frac{|\delta V|}{\delta l} \qquad (2.21)$$

તરીકે લખી શકીએ. આમ, આપણે વિદ્યુતક્ષેત્ર અને સ્થિતિમાન વચ્ચેના સંબંધ અંગે બે મહત્વના નિષ્કર્ષો પર પહોંચીએ છીએ :

(i) જે દિશામાં (અંતર સાથે) સ્થિતિમાનનો ઘટાડો સૌથી વધારે ઝડપી થતો હોય તે દિશામાં વિદ્યુતક્ષેત્ર હોય છે.

(ii) કોઈ બિંદુએ આ વિદ્યુતક્ષેત્રનું માન સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને લંબ દિશામાં એકમ સ્થાનાંતર દીઠ સ્થિતિમાનના ફેરફારના માન જેટલું હોય છે.

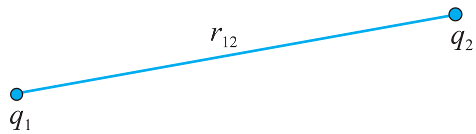
2.7 વિદ્યુતભારોના તંત્રની સ્થિતિઊર્જા (Potential Energy of a System of Charges)

પ્રારંભમાં, કોઈ ઉગમબિંદુની સાપેક્ષે સ્થાનસદિશો $\mathbf{r}_1$ અને $\mathbf{r}_2$ ધરાવતા બે વિદ્યુતભારો અનુક્રમે q_1 અને q_2ના બનેલા તંત્રનો વિચાર કરો. આપણે આ ગોઠવણી રચવા માટે (બહારથી) કરવા પડતા કાર્યની ગણતરી કરીશું. આનો અર્થ એ છે કે આપણે q_1 અને q_2 વિદ્યુતભારોને પ્રારંભમાં અનંત અંતરે ધારીને બાહ્ય પરિબળ દ્વારા તેમને આપેલાં સ્થાનોએ લાવવા માટે કરેલું કાર્ય શોધીશું. ધારોકે સૌપ્રથમ વિદ્યુતભાર q_1ને અનંત અંતરેથી $\mathbf{r}_1$ બિંદુએ લાવવામાં આવે છે. જેની વિરૂદ્ધમાં કાર્ય કરવું પડે તેવું કોઈ બાહ્યક્ષેત્ર હાજર નથી તેથી q_1ને અનંત અંતરેથી $\mathbf{r}_1$ પર લાવવા માટે કરેલું કાર્ય શૂન્ય છે, આ વિદ્યુતભાર અવકાશમાં સ્થિતિમાન

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1P}}$$

ઉત્પન્ન કરે છે. જ્યાં, r_{1P} એ અવકાશમાંના કોઈ બિંદુ Pનું q_1ના સ્થાનથી અંતર છે. સ્થિતિમાનની વ્યાખ્યા પરથી વિદ્યુતભાર q_2ને અનંત અંતરેથી $\mathbf{r}_2$ બિંદુએ લાવવા માટે બાહ્યબળે કરેલું કાર્ય, q_2 ગુણ્યા $\mathbf{r}_2$ પર q_1ને લીધે સ્થિતિમાન જેટલું છે :

$$q_2 \text{ પર કરેલું કાર્ય} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$



આકૃતિ 2.13 q_1 અને q_2 વિદ્યુતભારોના તંત્રની સ્થિતિઊર્જા તેમના ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં અને તેમની વચ્ચેના અંતરના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે.

જ્યાં r_{12}, 1 અને 2 બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર છે.

સ્થિતવિદ્યુતબળ એ સંરક્ષી (Conservative) બળ હોવાથી આ કાર્ય તંત્રની સ્થિતિઊર્જા રૂપે સંગ્રહ પામે છે. આમ, બે વિદ્યુતભારો q_1 અને q_2ના તંત્રની સ્થિતિઊર્જા

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \tag{2.22}$$

છે. એ સ્વાભાવિક છે કે, પહેલા q_2ને તેના હાલના સ્થાને લાવ્યા હોત અને q_1ને પછીથી લાવ્યા હોત તો પણ સ્થિતિઊર્જા U સમાન જ હોત. વધુ વ્યાપક સ્વરૂપે, તે બે વિદ્યુતભારોને ગમે તે રીતે તેમનાં નિશ્ચિત સ્થાનો પર લાવવામાં આવે તો પણ સ્થિતિઊર્જાનું સૂત્ર (2.22) બદલાતું નથી, આનું કારણ એ છે કે સ્થિતવિદ્યુતબળ માટે કાર્ય માર્ગ પર આધારિત નથી.

સમીકરણ (2.22) q_1 અને q_2ના કોઈપણ ચિહ્ન માટે સાચું છે. જો $q_1q_2 > 0$ હોય તો સ્થિતિઊર્જા ધન છે. આ અપેક્ષા મુજબનું જ છે, કારણ કે સજાતિય વિદ્યુતભારો માટે ($q_1q_2 > 0$), વિદ્યુતબળ અપાકર્ષી છે અને વિદ્યુતભારોને અનંત અંતરેથી સીમિત અંતરે લાવવા માટે તે બળની વિરૂદ્ધમાં ધન કાર્ય જરૂરી છે. વિજાતિય વિદ્યુતભારો માટે ($q_1q_2 < 0$), વિદ્યુતબળ આકર્ષી છે. તે કિસ્સામાં, વિદ્યુતભારોને આપેલા સ્થાનોથી અનંત અંતરે લઈ જવા માટે આ બળની વિરૂદ્ધમાં ધન કાર્ય કરવું પડે છે. બીજા શબ્દોમાં, ઉલટા માર્ગ (અનંત અંતરેથી હાલના સ્થાનો સુધી) માટે ઋણ કાર્ય જરૂરી બને છે, તેથી સ્થિતિઊર્જા ઋણ છે.

સમીકરણ (2.22)ને ગમે તેટલી સંખ્યાના બિંદુ વિદ્યુતભારોના તંત્ર માટે, સહેલાઈથી વ્યાપકરૂપે લાગુ પાડી શકાય છે. હવે આપણે $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ પર રહેલા વિદ્યુતભારો અનુક્રમે q_1, q_2, q_3ના તંત્રની સ્થિતિઊર્જા ગણીએ. q_1ને અનંત અંતરેથી $\mathbf{r}_1$ પર લાવવા માટે કોઈ કાર્ય જરૂરી નથી. પછી આપણે q_2ને અનંત અંતરેથી $\mathbf{r}_2$ પર લાવીએ. અગાઉ જોયું તેમ આ પગલામાં કરેલું કાર્ય છે.

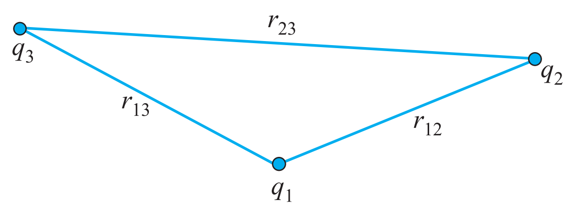
$$q_2 V_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \tag{2.23}$$

q_1 અને q_2 વિદ્યુતભારો સ્થિતિમાન ઉત્પન્ન કરે છે. જે કોઈપણ P બિંદુએ

$$V_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{1P}} + \frac{q_2}{r_{2P}}\right) \tag{2.24}$$

પરથી મળે છે. હવે પછી, q_3ને અનંત અંતરેથી $\mathbf{r}_3$ બિંદુએ લાવવા માટે કરેલું કાર્ય q_3 ગુણ્યા $\mathbf{r}_3$ બિંદુએ $V_{1,2}$ જેટલું છે.

$$q_3 V_{1,2}(\mathbf{r}_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) \tag{2.25}$$



આકૃતિ 2.14 ત્રણ વિદ્યુતભારોના તંત્રની સ્થિતિઊર્જા આકૃતિમાં દર્શાવેલ સંજ્ઞાઓ સાથે સમીકરણ (2.26) દ્વારા અપાય છે.

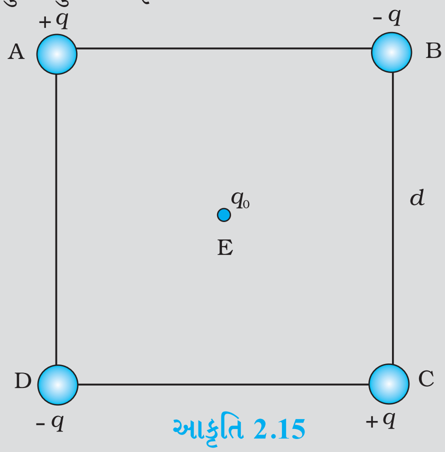
વિદ્યુતભારોને આપેલા સ્થાનોએ એકઠા કરવા માટે કરવું પડતું કુલ કાર્ય, વિવિધ પગલાંમાં કરેલા કાર્ય [સમીકરણ (2.23) અને સમીકરણ (2.25)]ના સરવાળાથી મળે છે.

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) \tag{2.26}$$

ફરીથી, વિદ્યુતબળ સંરક્ષી બળ હોવાને કારણે (અથવા સમતુલ્ય રીતે કહીએ તો કાર્ય માર્ગથી સ્વતંત્ર હોવાને લીધે), U માટેનું અંતિમ સૂત્ર, સમીકરણ (2.26), વિદ્યુતભારોને એકઠા કરવાની પદ્ધતિ પર

આધારિત નથી. સ્થિતિઊર્જા, ગોઠવણીની હાલની સ્થિતિ માટે લાક્ષણિક છે અને આ સ્થિતિ કેવી રીતે પ્રાપ્ત કરી તે પદ્ધતિ પર આધારિત નથી.

ઉદાહરણ 2.4 આકૃતિ 2.15માં દર્શાવ્યા મુજબ d બાજુવાળા ચોરસ ABCDના શિરોબિંદુઓ પર ચાર વિદ્યુતભારો ગોઠવેલ છે. (a) આ ગોઠવણી પ્રાપ્ત કરવા માટે જરૂરી કાર્ય શોધો. (b) ચાર વિદ્યુતભારોને તે શિરોબિંદુઓ પર જકડી રાખીને વિદ્યુતભાર q_0ને ચોરસના કેન્દ્ર પર લાવવામાં આવે છે. આ માટે વધારાનું કેટલું કાર્ય જરૂરી છે ?



આકૃતિ 2.15

ઉકેલ

(a) અત્રે કરવામાં આવતું કાર્ય માત્ર વિદ્યુતભારોની અંતિમ ગોઠવણી પર જ આધાર રાખે છે નહિ કે કેવી રીતે તેમને લાવ્યા છીએ તેના પર. આથી, આપણે A, B, C અને D પર વિદ્યુતભારો લાવવાની એક રીતે થયેલું કાર્ય ગણીશું. ધારો કે સૌપ્રથમ વિદ્યુતભાર $+q$ને A પર લાવવામાં આવે છે અને પછી B, C, D પર $-q$, $+q$ અને $-q$ વિદ્યુતભારોને અનુક્રમે લાવવામાં આવે છે. આ માટે જરૂરી કાર્ય આ મુજબ ગણી શકાય :

(i) બીજે ક્યાંય કોઈ વિદ્યુતભાર હાજર ન હોય ત્યારે $+q$ વિદ્યુતભારને A પર લાવવા માટે જરૂરી કાર્ય : આ શૂન્ય છે.

(ii) A પર $+q$ હાજર હોય ત્યારે B પર $-q$ને લાવવા માટે જરૂરી કાર્ય :
આ કાર્ય = (B પરનો વિદ્યુતભાર) × (A પરના $+q$ વિદ્યુતભારને લીધે B આગળ વિદ્યુતસ્થિતિમાન)

$$= -q \times \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}\right) = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

(iii) A પર $+q$ હોય અને B પર $-q$ હોય ત્યારે $+q$ને C પર લાવવા માટે જરૂરી કાર્ય :
આ કાર્ય = (C પરનો વિદ્યુતભાર) × (A અને B પરના વિદ્યુતભારોને લીધે C આગળ વિદ્યુતસ્થિતિમાન)

$$= +q\left(\frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 d\sqrt{2}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 d}\right)$$

$$= \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(iv) A પર $+q$, B પર $-q$ અને C પર $+q$ હાજર હોય ત્યારે $-q$ને D પર લાવવા માટે જરૂરી કાર્ય :

આ કાર્ય = (D પરનો વિદ્યુતભાર) × (A, B અને C પરના વિદ્યુતભારોને લીધે D આગળ સ્થિતિમાન)

$$= -q\left(\frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 d\sqrt{2}} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}\right)$$

$$= \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(i)(ii), (iii) અને (iv) પદોમાં કરેલા કાર્યનો સરવાળો કરો. જરૂરી કુલ કાર્ય

$$= \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left\{(0) + (1) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$= \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(4 - \sqrt{2}\right)$$

કરેલું આ કાર્ય માત્ર વિદ્યુતભારોની ગોઠવણી પર આધારિત છે, તેમને કેવી રીતે એકઠા કર્યા તેના પર નહિ. વ્યાખ્યા મુજબ, આ સૂત્ર વિદ્યુતભારોના તંત્રની કુલ સ્થિતિઊર્જા દર્શાવે છે.

(વિદ્યાર્થીઓ તેમને ગમે તેવા બીજા કોઈ ક્રમમાં વિદ્યુતભારોને લાવીને જરૂરી કાર્યની ગણતરી કરીને પોતે ખાતરી કરી શકે છે કે ઊર્જા એકસમાન જ છે.)

(b) જ્યારે A, B, C અને D પર વિદ્યુતભારો $+q$, $-q$, $+q$ અને $-q$ હાજર હોય ત્યારે q_0 વિદ્યુતભારને E બિંદુએ લાવવા માટે જરૂરી કાર્ય, $q_0 \times$ (E આગળ A, B, C અને D પરના વિદ્યુતભારોથી ઉદ્ભવતું સ્થિતિમાન) છે. એ સ્પષ્ટ છે કે E આગળનું વિદ્યુત સ્થિતિમાન શૂન્ય છે. કારણ કે, A અને Cને લીધે ઉદ્ભવતું સ્થિતિમાન B અને Dને લીધે મળતા સ્થિતિમાન વડે નાબૂદ થાય છે. આથી, કોઈ પણ વિદ્યુતભારને E પર લાવવા માટે કોઈ કાર્ય જરૂરી નથી.

ઉદાહરણ 2.4

2.8 બાહ્ય ક્ષેત્રમાં સ્થિતિઊર્જા (Potential Energy in an External Field)

2.8.1 એકલ (એકાકી, Single) વિદ્યુતભારની સ્થિતિઊર્જા (Potential Energy of a Single Charge)

પરિચ્છેદ 2.7માં વિદ્યુતક્ષેત્રનું ઉદ્ગમ (સ્રોત) - વિદ્યુતભારો અને તેમનાં સ્થાનો - જાણીતું હતું અને તે વિદ્યુતભારોના તંત્રની સ્થિતિઊર્જા શોધી હતી. આ પરિચ્છેદમાં આપણે એક જુદો જ પણ તેને સંબંધિત પ્રશ્ન પૂછીએ છીએ. આપેલા કોઈ ક્ષેત્રમાં વિદ્યુતભાર qની સ્થિતિઊર્જા કેટલી હશે ? ખરેખર તો આ પ્રશ્ન સ્થિતિવિદ્યુત સ્થિતિમાનના ખ્યાલ તરફ દોરી જતું આરંભ બિંદુ હતું (પરિચ્છેદ 2.1 અને 2.2). પરંતુ અહીં આપણે આ પ્રશ્નને ફરીથી હલ કરીશું અને એ સ્પષ્ટ કરીશું કે પરિચ્છેદ 2.7માંની ચર્ચા કરતાં તે કઈ રીતે અલગ છે.

મુખ્ય તફાવત એ છે કે આપણને હવે વિદ્યુતભાર (કે વિદ્યુતભારો)ની બાહ્ય ક્ષેત્રમાં સ્થિતિઊર્જા સાથે સંબંધ છે. આ બાહ્યક્ષેત્ર **E**, આપણે જેમની સ્થિતિઊર્જા શોધવી છે તે આપેલા વિદ્યુતભારો વડે ઉત્પન્ન થયેલું નથી. પરંતુ **E**, આપેલા વિદ્યુતભારો સિવાય અન્ય સ્રોતથી ઉત્પન્ન થયેલું છે. અન્ય સ્રોત જાણીતા હોઈ શકે છે, પરંતુ ઘણીવાર તેઓ અજ્ઞાત કે અનિશ્ચિત હોય છે, નિશ્ચિત તો અન્ય સ્રોતથી ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્ર **E** અથવા વિદ્યુત સ્થિતિમાન V હોય છે. આપણે એવું ધારી લઈએ છીએ કે વિદ્યુતભાર, બાહ્યક્ષેત્ર ઉત્પન્ન કરતા અન્ય સ્રોતને ખાસ કંઈ અસર કરતા નથી. જો q ખૂબ નાનો હોય અથવા સ્રોતને અન્ય અજ્ઞાત બળો દ્વારા જકડી રાખેલા હોય તો આ સાચું છે. જો ખૂબ દૂર અનંત અંતરે રહેલા બહુ પ્રબળ સ્રોતને કારણે, આપણને રસ છે તે વિસ્તારમાં, નિશ્ચિત વિદ્યુતક્ષેત્ર **E** ઉત્પન્ન થયેલ હોય તો q નિશ્ચિત હોવા છતાં તેની બાહ્યક્ષેત્ર પરની અસરને અવગણી શકાય છે. એ બરાબર નોંધો કે આપણને આપેલ વિદ્યુતભાર qની (અને પછી વિદ્યુતભારોના તંત્રની) બાહ્યક્ષેત્રમાં સ્થિતિઊર્જા શોધવામાં રસ છે, આપણને આ બાહ્યક્ષેત્ર ઉત્પન્ન કરનારા સ્રોતની સ્થિતિઊર્જા શોધવામાં રસ નથી.

બાહ્ય ક્ષેત્ર **E** અને તેને અનુરૂપ બાહ્ય સ્થિતિમાન V, બિંદુએ બિંદુએ બદલાઈ શકે છે. વ્યાખ્યા મુજબ, P બિંદુએ V, એ એકમ ધન વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી P બિંદુએ લાવવામાં કરેલું કાર્ય છે (આપણે અનંત અંતરે સ્થિતિમાન શૂન્ય લીધું છે). આમ, વિદ્યુતભાર qને અનંત અંતરેથી બાહ્ય ક્ષેત્રમાંના P બિંદુએ લાવવામાં થતું કાર્ય qV છે. આ કાર્ય qની સ્થિતિઊર્જા રૂપે સંગ્રહ પામે છે. જો બિંદુ Pનો સ્થાન સદિશ કોઈ ઉગમબિંદુની સાપેક્ષે **r** હોય તો આપણે,