1. **વક્ર $y = 2x^2 + 3\sin x$ ને $x = 0$ આગળ દોરેલ અભિલંબનો ઢાળ .... છે.**

(A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) -3 (D) $\frac{-1}{3}$

જવાબ (D) $\frac{-1}{3}$

➥ વક્રનું સમીકરણ : $y = 2x^2 + 3\sin x$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = 4x + 3\cos x$$

(x, y) બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ $= \frac{dy}{dx} = 4x + 3\cos x$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 4(0) + 3\cos 0 = 3$$

$\therefore$ વક્રનાં અભિલંબનો ઢાળ $= \frac{-1}{\text{સ્પર્શકનો ઢાળ}}$

$$= \frac{-1}{3}$$

2. **વક્ર $y^2 = 4x$ના .... બિંદુ આગળનો સ્પર્શક $y = x + 1$ છે.**

(A) (1, 2) (B) (2, 1) (C) (1, –2) (D) (–1, 2)

જવાબ (A) (1, 2)

➥ વક્રનું સમીકરણ $y^2 = 4x$

$$\therefore 2y\frac{dy}{dx} = 4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

$\therefore$ (x, y) બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$

પરંતુ રેખા $y = x + 1$ એ વક્રનો સ્પર્શક છે. જેનો ઢાળ 1 છે.

$$\therefore \frac{2}{y} = 1 \Rightarrow y = 2$$

હવે $y^2 = 4x$માં $y = 2$ લેતાં,

$4 = 4x \quad \therefore x = 1$

$\therefore$ સ્પર્શ બિંદુના યામ = (1, 2).

3. **વક્ર $y = 3x^4 - 4x$ ને $x = 4$ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ શોધો.**

➥ વક્રનું સમીકરણ : $y = 3x^4 - 4x$

વક્રનાં સ્પર્શકનો (x, y) બિંદુએ ઢાળ $= \frac{dy}{dx}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4 - 4x)$$
$$= 12x^3 - 4$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4} = 12(4)^3 - 4$$
$$= 764$$

$\therefore$ આપેલ વક્રનાં $x = 4$ બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ 764 છે.

4. વક્ર $y = \frac{x-1}{x-2}$, $x \neq 2$ ને $x = 10$ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ શોધો.

➡ વક્રનું સમીકરણ : $y = \frac{x-1}{x-2}, (x \neq 2)$

વક્રનાં સ્પર્શકનો (x, y) બિંદુએ ઢાળ $= \frac{dy}{dx}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$
$$= \frac{(x-2)(1)-(x-1)(1)}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{x-2-x+1}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{-1}{(x-2)^2}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=10} = \frac{-1}{(10-2)^2}$$
$$= -\frac{1}{64}$$

$\therefore$ આપેલ વક્રનો $x = 10$ બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ $-\frac{1}{64}$ છે.

5. વક્ર $y = x^3 - x + 1$ ના જે બિંદુનો x- યામ 2 હોય તે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ શોધો.

➡ વક્રનું સમીકરણ : $y = x^3 - x + 1$

વક્રનાં સ્પર્શકનો (x, y) બિંદુએ ઢાળ $= \frac{dy}{dx}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)$$
$$= 3x^2 - 1$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 3(2)^2 - 1$$
$$= 11$$

$\therefore$ આપેલ વક્રનાં $x = 2$ બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ 11 છે.

6. વક્ર $y = x^3 - 3x + 2$ ના જે બિંદુનો x- યામ 3 હોય તે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ શોધો.

➥ વક્રનું સમીકરણ : $y = x^3 - 3x + 2$

વક્રનાં સ્પર્શકનો (x, y) બિંદુએ ઢાળ $= \frac{dy}{dx}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x + 2)$$

$$= 3x^2 - 3$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = 3(3)^2 - 3$$

$$= 24$$

$\therefore$ આપેલ વક્રનાં $x = 3$ બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ 24 છે.

7. **$x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રને $\theta = \frac{\pi}{4}$ આગળના અભિલંબનો ઢાળ શોધો.**

➥ $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta, \ \theta = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta}$$

$$= -\tan\theta$$

વક્રનાં સ્પર્શકનો (x, y) બિંદુએ ઢાળ $= \frac{dy}{dx}$

$$\therefore \text{વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -\tan\frac{\pi}{4}$$

$$= -1$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} \text{ બિંદુએ અભિલંબનો ઢાળ} = \frac{-1}{\text{સ્પર્શકનો ઢાળ}}$$

$$= \frac{-1}{(-1)}$$

$$= 1$$

8. **$x = 1 - a\sin\theta, y = b\cos^2\theta$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રને $\theta = \frac{\pi}{2}$ આગળના અભિલંબનો ઢાળ શોધો.**

➥ $x = 1 - a\sin\theta, \quad y = b\cos^2\theta, \ \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = -a\cos\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = -2b\cos\theta\sin\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-2b\cos\theta\sin\theta}{-a\cos\theta}$$

$$= \frac{2b\sin\theta}{a}$$

વક્રનાં સ્પર્શકનો (x, y) બિંદુએ ઢાળ $= \frac{dy}{dx}$

$\therefore$ વક્રનાં સ્પર્શકનો $\theta = \frac{\pi}{2}$ બિંદુએ ઢાળ $= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta = \frac{\pi}{2}}$

$$= \frac{2b \sin\frac{\pi}{2}}{a}$$

$$= \frac{2b}{a}$$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$ બિંદુએ અભિલંબનો ઢાળ $= \frac{-1}{\text{સ્પર્શકનો ઢાળ}}$

$$= \frac{-1}{\frac{2b}{a}}$$

$$= \frac{-a}{2b}$$

9. વક્ર $y = (x - 2)^2$નો સ્પર્શક વક્ર પરનાં બિંદુઓ (2, 0) અને (4, 4)ને જોડતી જીવાને સમાંતર છે, તો વક્ર પરનું તે સ્પર્શબિંદુ શોધો.

➡ વક્રનું સમીકરણ : $y = (x - 2)^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x - 2)^2$

$= 2(x - 2)$

બિંદુઓ A(2, 0) તથા B(4, 4) ને જોડતી જીવાનો ઢાળ

$= \frac{4 - 0}{4 - 2}$

$= 2$

$\therefore$ વક્રનો સ્પર્શક એ જીવા $\overline{AB}$ ને સમાંતર છે.

$\therefore$ વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx} = 2$

$\therefore 2(x - 2) = 2$

$\therefore x - 2 = 1$

$\therefore x = 3$

$y = (x - 2)^2$

$x = 3$ મૂકતાં,

$\therefore y = (3 - 2)^2 = 1$

$\therefore$ (3, 1) બિંદુએ દોરેલ વક્ર $y = (x - 2)^2$ નો સ્પર્શક એ બિંદુઓ (2, 0) અને (4, 4) બિંદુઓને જોડતી જીવાને સમાંતર છે.

10. વક્ર $y = \frac{1}{x - 3}, x \neq 3$ ને 2 ઢાળવાળા તમામ સ્પર્શકોનાં સમીકરણ શોધો.

➡ વક્રનું સમીકરણ : $y = \frac{1}{x - 3}, x \neq 3$

આપેલ વક્રનાં (x, y) બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x - 3}\right) = \frac{-1}{(x - 3)^2}$$

પરંતુ ઢાળ = 2

$\therefore \dfrac{-1}{(x-3)^2} = 2$

$\therefore (x-3)^2 = -\dfrac{1}{2}$ જે શક્ય નથી.કારણ કે $(x-3)^2 > 0$

$\therefore$ વક્ર $y = \dfrac{1}{x-3}$ને 2 ઢાળવાળો કોઈ સ્પર્શક ન મળે.

11. $y^2 = 16x$નાં $4x - y = 1$ને સમાંતર સ્પર્શકનું સમીકરણ મેળવો.

➡ $y = 4x + 1$

12. $y^2 = 8x$નાં $2x - y - 1 = 0$ને લંબ અભિલંબનું સમીકરણ મેળવો.

➡ $2x + 4y = 9$

13. વક્ર $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ ને જે બિંદુઓ આગળના સ્પર્શકો X- અક્ષને સમાંતર હોય તે બિંદુઓ શોધો.

➡ વક્રનું સમીકરણ : $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 - 9x + 7)$

$= 3x^2 - 6x - 9$

$= 3(x^2 - 2x - 3)$

$= 3(x - 3)(x + 1)$

વક્રનાં સ્પર્શકનો (x, y) બિંદુએ ઢાળ $= \dfrac{dy}{dx}$

આપેલ છે કે વક્રનો સ્પર્શક X- અક્ષને સમાંતર છે.

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore 3(x-3)(x+1) = 0$

$\therefore x = 3, x = -1$

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

$x = 3 \quad \therefore y = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 7 = -20$

$x = -1 \quad \therefore y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 7 = 12$

$\therefore$ બિંદુઓ $(3, -20)$ અને $(-1, 12)$ બિંદુએ દોરેલ સ્પર્શક X- અક્ષને સમાંતર છે.

14. વક્ર $y = x^3 - 11x + 5$ના કોઈ બિંદુ આગળનો સ્પર્શક $y = x - 11$ હોય, તો વક્ર પરનું તે બિંદુ શોધો.

➡ વક્રનું સમીકરણ : $y = x^3 - 11x + 5$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^3 - 11x + 5)$

$= 3x^2 - 11$

વક્રનો સ્પર્શક $y = x - 11$ છે. જેનો ઢાળ 1 છે.

$\therefore (x, y)$ બિંદુએ વક્રને દોરેલ સ્પર્શકનો ઢાળ $\dfrac{dy}{dx} = 1$.

$\therefore 3x^2 - 11 = 1$

$\therefore x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$y = x^3 - 11x + 5$

$x = 2 \quad \therefore y = (2)^3 - 11(2) + 5 = -9$

$x = -2 \quad \therefore y = (-2)^3 - 11(-2) + 5 = 19$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુઓ $(2, -9)$ તથા $(-2, 19)$ છે.

15. **વક્ર $y = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$ને -1 ઢાળવાળા તમામ સ્પર્શકોનાં સમીકરણ શોધો.**

➡ વક્રનું સમીકરણ : $y = \frac{1}{x-1}, x \neq 1$

આપેલ વક્રનાં (x, y) બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

પરંતુ ઢાળ $= -1$

$$\therefore \frac{-1}{(x-1)^2} = -1 \therefore (x-1)^2 = 1$$

$$\therefore x - 1 = \pm 1$$
$$\therefore x = 0, 2$$

$$y = \frac{1}{x-1}$$

$x = 0 \Rightarrow y = -1$ અને $x = 2 \Rightarrow y = 1$

$\therefore$ $(0, -1)$ તથા $(2, 1)$ બિંદુઓમાંથી પસાર થતાં તથા -1 ઢાળવાળા સ્પર્શકોનાં સમીકરણો :

$(0, -1)$માંથી પસાર થતાં સ્પર્શકનું સમીકરણ

$y + 1 = -1\ (x - 0)$

$\therefore\ x + y + 1 = 0$

$(2, 1)$ માંથી પસાર થતાં સ્પર્શકનું સમીકરણ

$y - 1 = -1\ (x - 2)$

$\therefore\ x + y - 3 = 0$

$\therefore$ માંગેલ સ્પર્શક રેખાઓનાં સમીકરણો :

$x + y + 1 = 0$ અને $x + y - 3 = 0$.

16. **વક્ર $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$ ને 0 ઢાળવાળા તમામ સ્પર્શકોનાં સમીકરણ શોધો.**

➡ વક્રનું સમીકરણ : $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2 - 2x + 3}\right)$$

$$= \frac{-1}{(x^2 - 2x + 3)^2} \cdot (2x - 2)$$

$$= \frac{-2(x-1)}{(x^2 - 2x + 3)^2}$$

પરંતુ ઢાળ $= 0$

$$\therefore \frac{-2(x-1)}{(x^2 - 2x + 3)^2} = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$$

1 1

$$x = 1 \therefore \; y = \frac{}{(1)^2 - 2(1) + 3} = \frac{}{2}$$

$\therefore \left(1, \frac{1}{2}\right)$ બિંદુએ 0 ઢાળવાળી રેખાનું સમીકરણ,

$$y - \frac{1}{2} = 0\,(x - 1)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}$$

17. વક્ર $y = x^2 - 2x + 7$ ના (a) રેખા $2x - y + 9 = 0$ને સમાંતર તથા (b) રેખા $5y - 15x = 13$ને લંબ સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.

➥ વક્રનું સમીકરણ : $y = x^2 - 2x + 7$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 2$$

(a) વક્રનો સ્પર્શક રેખા $2x - y + 9 = 0$ને સમાંતર છે.

રેખા $2x - y + 9 = 0$નો ઢાળ $= 2$

$\therefore$ સ્પર્શકનો ઢાળ $= 2$

$\therefore 2x - 2 = 2 \Rightarrow x = 2$

$y = x^2 - 2x + 7$

$x = 2 \therefore y = (2)^2 - 2(2) + 7 = 7$

$\therefore$ રેખા $2x - y + 9 = 0$ને સમાંતર વક્રનાં સ્પર્શકનું સમીકરણ અર્થાત્ (2, 7) બિંદુએ 2 ઢાળવાળી રેખાનું સમીકરણ,

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore y - 7 = 2\,(x - 2)$

$\therefore 2x - y + 3 = 0$

(b) વક્રનો સ્પર્શક રેખા $5y - 15x = 13$ને લંબ હોય.

રેખા $5y - 15x = 13$

$$\therefore y = 3x + \frac{13}{5}$$

$\therefore$ રેખાનો ઢાળ $= 3$

(સમીકરણને $y = mx + c$ સાથે સરખાવતાં)

સ્પર્શક રેખા એ રેખાને લંબ છે.

$$\therefore \text{સ્પર્શકનો ઢાળ} = \frac{-1}{\text{રેખાનો ઢાળ}} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore 2x - 2 = -\frac{1}{3} \qquad \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

$y = x^2 - 2x + 7$

$$x = \frac{5}{6} \therefore y = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{6}\right) + 7$$

$$= \frac{25}{36} - \frac{10}{6} + 7 = \frac{217}{36} \Rightarrow y = \frac{217}{36}$$

➥ વક્રનું સમીકરણ : $y = x^2 - 2x + 7$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 2$$

(a) વક્રનો સ્પર્શક રેખા $2x - y + 9 = 0$ને સમાંતર છે.

રેખા $2x - y + 9 = 0$નો ઢાળ $= 2$

$\therefore$ સ્પર્શકનો ઢાળ $= 2$

$\therefore 2x - 2 = 2 \Rightarrow x = 2$

$y = x^2 - 2x + 7$

$x = 2 \therefore y = (2)^2 - 2(2) + 7 = 7$

$\therefore$ રેખા $2x - y + 9 = 0$ને સમાંતર વક્રનાં સ્પર્શકનું સમીકરણ અર્થાત્ (2, 7) બિંદુએ 2 ઢાળવાળી રેખાનું સમીકરણ,

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore y - 7 = 2(x - 2)$

$\therefore 2x - y + 3 = 0$

(b) વક્રનો સ્પર્શક રેખા $5y - 15x = 13$ને લંબ હોય.

રેખા $5y - 15x = 13$

$\therefore y = 3x + \frac{13}{5}$

$\therefore$ રેખાનો ઢાળ $= 3$

(સમીકરણને $y = mx + c$ સાથે સરખાવતાં)

સ્પર્શક રેખા એ રેખાને લંબ છે.

$\therefore$ સ્પર્શકનો ઢાળ $= \frac{-1}{\text{રેખાનો ઢાળ}} = -\frac{1}{3}$

$\therefore 2x - 2 = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow x = \frac{5}{6}$

$y = x^2 - 2x + 7$

$x = \frac{5}{6} \therefore y = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{6}\right) + 7$

$= \frac{25}{36} - \frac{10}{6} + 7 = \frac{217}{36} \Rightarrow y = \frac{217}{36}$

18. વક્ર $y = 7x^3 + 11$ના $x = 2$ તથા $x = -2$ આગળના સ્પર્શકો પરસ્પર સમાંતર છે તેમ સાબિત કરો.

➡ વક્રનું સમીકરણ : $y = 7x^3 + 11$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 21x^2$

$x = 2$ બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ,

$= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 21(2)^2 = 84$

$x = 2$ બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ,

$= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = 21(-2)^2 = 84$

$\therefore$ ($x = 2$ બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ) =

($x = -2$ બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ)

$\therefore x = 2$ અને $x = -2$ બિંદુએ વક્ર $y = 7x^3 + 11$ને દોરેલ સ્પર્શકો સમાંતર છે.

19. વક્ર $y = x^3$ના જે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ તે બિંદુના y- યામ જેટલો હોય, તે બિંદુઓ શોધો.

➡ $y = x^3$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2$

વક્રનાં સ્પર્શકનો (x, y) બિંદુએ ઢાળ $= \frac{dy}{dx}$

આપેલ છે કે $\frac{dy}{dx} = y$

$\therefore\ 3x^2 = y$ પરંતુ $y = x^3$

$\therefore\ 3x^2 = x^3 \Rightarrow x = 0, 3$

$x = 0$ હોય ત્યારે $y = (0)^3 = 0$

$x = 3$ હોય ત્યારે $y = (3)^3 = 27$

$\therefore$ માગેલ બિંદુઓ (0, 0) અને (3, 27) છે.

20. વક્ર $y = 4x^3 - 2x^5$ માટે, ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતા સ્પર્શકોનાં સ્પર્શબિંદુઓ શોધો.

➡ વક્રનું સમીકરણ : $y = 4x^3 - 2x^5$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 12x^2 - 10x^4$$

ધારો કે બિંદુ (a, b)માંથી વક્રને દોરેલ સ્પર્શક ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

(a, b) બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(a,b)} = 12a^2 - 10a^4$

(a, b) બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ,

$y - b = (12a^2 - 10a^4)(x - a)$

પરંતુ આ સ્પર્શક ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

$\therefore\ x = y = 0$ લેતાં,

$0 - b = (12a^2 - 10a^4)(0 - a)$

$\therefore\ b = 2a^3(6 - 5a^2)$ ....(i)

પરંતુ બિંદુ (a, b) એ વક્ર પરનું બિંદુ છે.

$\therefore\ b = 4a^3 - 2a^5$ ....(ii)

(i) અને (ii) ઉપરથી,

$4a^3 - 2a^5 = 2a^3(6 - 5a^2)$

$\therefore\ 2a^3(2 - a^2) = 2a^3(6 - 5a^2)$ $(a \neq 0)$

$\therefore\ 2 - a^2 = 6 - 5a^2$

$\therefore\ 4a^2 = 4$

$\therefore\ a^2 = 1$

$\therefore\ a = \pm 1$

(ii) $\Rightarrow b = 4a^3 - 2a^5$

$a = 1$ હોય ત્યારે $b = 4 - 2 = 2$

$a = -1$ હોય ત્યારે $b = -4 + 2 = -2$

જો $a = 0$ તો $b = 0$

$\therefore$ માગેલ બિંદુઓ (1, 2), (–1, –2) તથા (0, 0) છે.

21. વક્ર $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$નાં જે બિંદુ આગળના સ્પર્શકો X- અક્ષને સમાંતર હોય, તે બિંદુઓ મેળવો.

➡ વક્રનું સમીકરણ : $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

xને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2 = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1 - x}{y}$$

વક્રનો સ્પર્શક X- અક્ષને સમાંતર છે.

$\therefore$ સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \dfrac{1-x}{y} = 0$

$\therefore\ x = 1$

વક્રનાં સમીકરણ $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ માં $x = 1$ મૂકતાં,

$1 + y^2 - 2 - 3 = 0$

$\therefore\ y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$\therefore$ માગેલ બિંદુઓ (1, 2) તથા (1, –2) છે.

22. વક્ર $ay^2 = x^3$ ના (am^2, am^3) બિંદુ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ મેળવો.

➡ વક્રનું સમીકરણ : $ay^2 = x^3$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$2ay\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2ay}$$

(am^2, am^3) બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(am^2, am^3)} = \frac{3(am^2)^2}{2a(am^3)} = \frac{3m}{2}$$

$\therefore$ (am^2, am^3) બિંદુએ અભિલંબનો ઢાળ $= \dfrac{-2}{3m}$

$\therefore$ (am^2, am^3) બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ,

$$y - am^3 = \frac{-2}{3m}(x - am^2)$$

$\therefore\ 3my - 3am^4 = -2x + 2am^2$

$\therefore\ 2x + 3my - am^2(3m^2 + 2) = 0$

23. $y = x^3 + 2x + 6$ના રેખા $x + 14y + 4 = 0$ ને સમાંતર અભિલંબનાં સમીકરણ શોધો.

➡ વક્રનું સમીકરણ : $y = x^3 + 2x + 6$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2$$

$\therefore$ (x, y) બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 2$

$\therefore$ (x, y) બિંદુએ વક્રનાં અભિલંબનો ઢાળ $= \dfrac{-1}{3x^2 + 2}$

વક્રનો અભિલંબ એ રેખા $x + 14y + 4 = 0$ને સમાંતર છે.

રેખા $x + 14y = 4 = 0$નો ઢાળ $= -\dfrac{1}{14}$ છે.

$\therefore$ અભિલંબનો ઢાળ $= -\dfrac{1}{14}$

$$\therefore \frac{-1}{3x^2 + 2} = \frac{-1}{14}$$

$\therefore\ 3x^2 + 2 = 14$

$\therefore\ x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$y = x^3 + 2x + 6$

$x = 2 \quad \therefore\ y = (2)^3 + 2(2) + 6 = 18$

$x = -2 \quad \therefore\ y = (-2)^3 + 2(-2) + 6 = -6$

$\therefore$ (2, 18) બિંદુએ વક્રનાં અભિલંબનું સમીકરણ :

$$y - 18 = -\frac{1}{14}(x - 2)$$

$\therefore\ 14y - 252 = -x + 2$

$\therefore\ x + 14y - 254 = 0$

$\therefore$ (–2, –6) બિંદુએ વક્રનાં અભિલંબનું સમીકરણ :

$$y - (-6) = -\frac{1}{14}(x - (-2))$$

$\therefore\ 14y + 84 = -x - 2$

$\therefore\ x + 14y + 86 = 0$

$\therefore$ માંગેલ અભિલંબનાં સમીકરણો :

$x + 14y - 254 = 0$ તથા $x + 14y + 86 = 0$.

24. પરવલય $y^2 = 4ax$ના $(at^2, 2at)$ બિંદુ આગળ સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણ શોધો.

➡ પરવલયનું સમીકરણ $y^2 = 4ax$

$$\therefore 2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4a}{2y} = \frac{2a}{y}$$

$(at^2, 2at)$ બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(at^2, 2at)} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

$(at^2, 2at)$ બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ,

$$y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$$

$\therefore\ ty - 2at^2 = x - at^2$

$\therefore\ ty = x + at^2$

$$(at^2, 2at) \text{ બિંદુએ અભિલંબનો ઢાળ } = \frac{-1}{\text{સ્પર્શક ઢાળ}} = -t$$

$\therefore$ $(at^2, 2at)$ બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ,

$y - 2at = -t(x - at^2)$

$\therefore\ y - 2at = -tx + at^3$

$\therefore\ y = -tx + 2at + at^3$

25. જો બે વક્રોના છેદબિંદુ આગળના સ્પર્શકો પરસ્પર લંબ હોય, તો તે બે વક્રો લંબચ્છેદી છે તેમ કહેવાય. જો $8k^2 = 1$ હોય, તો વક્રો $y^2 = x$ તથા $xy = k$ લંબચ્છેદી છે, તેમ સાબિત કરો.

➡ વક્રનાં સમીકરણો :

$x = y^2$ તથા $xy = k$

$$\therefore 1 = 2y\frac{dy}{dx} \qquad \therefore y + x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

(x_1, y_1) બિંદુએ,

$$x = y^2 \text{ વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ } m_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1\, y_1)} = \frac{1}{2y_1}$$

$xy = K$ વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ $m_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1\ y_1)} = \frac{-y_1}{x_1}$

$$m_1 m_2 = \frac{1}{2y_1}\left(\frac{-y_1}{x_1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2x_1}$$

બંને વક્રો એકબીજાને કાટખૂણે મળે છે.

$$\therefore m_1 m_2 = -1 \quad \therefore -\frac{1}{2x_1} = -1$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2}$$

(x_1, y_1) વક્ર $x = y^2$ પરંતુ બિંદુ હોવાથી,

$$y_1^2 = x_1 \therefore y_1^2 = \frac{1}{2}$$

(x_1, y_1) વક્ર $xy = k$ પરંતુ બિંદુ હોવાથી,

$$x_1\ y_1 = k$$

$$\therefore x_1^2\ y_1^2 = k^2$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = k^2 \qquad \left(\because x_1 = \frac{1}{2}, y_1^2 = \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{8} = k^2$$

$$\therefore 8k^2 = 1$$

26. અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ના (x_0, y_0) બિંદુ આગળના સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણ મેળવો.

➡ અતિવલયનું સમીકરણ : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\therefore \frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

(x_0, y_0) બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0\ y_0)} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$

(x_0, y_0) બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ,

$$y - y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$$

$$\frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{xx_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2}$$

$$\therefore \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$$

$$\therefore \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

($\because$ (x_0, y_0) એ અતિવલયનું બિંદુ હોવાથી $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$)

(x_0, y_0) બિંદુએ અભિલંબનો ઢાળ $= \frac{-1}{\text{સ્પર્શકનો ઢાળ}}$

$$= -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}$$

$\therefore$ (x_0, y_0) બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ,

$$y - y_0 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0)$$

$$\therefore \frac{y - y_0}{a^2 y_0} + \frac{x - x_0}{b^2 x_0} = 0$$

27. વક્ર $y = \sqrt{3x - 2}$ ના રેખા $4x - 2y + 5 = 0$ ને સમાંતર સ્પર્શકોનાં સમીકરણ શોધો.

➡ વક્રનું સમીકરણ : $y = \sqrt{3x - 2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{3x-2}} \times 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$$

રેખા $4x - 2y + 5 = 0$નો ઢાળ $= 2$

(રેખા $ax + by + c = 0$નો ઢાળ $= -\frac{a}{b}$)

વક્રનો સ્પર્શક એ રેખા $4x - 2y + 5 = 0$ રેખાને સમાંતર છે.

$\therefore$ વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx} = 2$

$$\therefore 2 = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$$

$$\therefore 4\sqrt{3x-2} = 3$$

બંને બાજુ વર્ગ કરતાં, $16(3x - 2) = 9$

$$\therefore 48x - 32 = 9$$

$$\therefore x = \frac{41}{48}$$

હવે $y = \sqrt{3x - 2}$ માં,

$x = \frac{41}{48}$ લેતાં, $y = \sqrt{3\left(\frac{41}{48}\right) - 2} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

$\therefore$ વક્રનું સ્પર્શબિંદુ $\left(\frac{41}{48}, \frac{3}{4}\right)$ છે.

$\therefore$ બિંદુ $\left(\frac{41}{48}, \frac{3}{4}\right)$માંથી પસાર થતાં 2 ઢાળવાળા સ્પર્શકનું સમીકરણ :

$$y - \frac{3}{4} = 2\left(x - \frac{41}{48}\right)$$

$$\therefore \frac{4y - 3}{4} = \frac{48x - 41}{24}$$

$$\therefore 24y - 18 = 48x - 41$$

$$\therefore 48x - 24y = 23$$

$\therefore$ માગેલ સ્પર્શકનું સમીકરણ $48x - 24y = 23$ છે.

28. સાબિત કરો કે, $x^2 + y^2 = ax$ તથા $x^2 + y^2 = by$ લંબચ્છેદી છે.

➡ **સ્વપ્રયત્ને**

29. વક્ર $y^2(a + x) = x^2(3a - x)$નાં $x = a$ આગળ સ્પર્શક અને અભિલંબનાં સમીકરણ મેળવો.

➡ **સ્પર્શક : $2y - x = a$, $x + 2y + a = 0$ અને અભિલંબ : $y + 2x = 3a$, $2x - y - 3a = 0$.**

30. બતાવો કે, વક્ર $5x^5 - 10x^3 + x + 2y + 6 = 0$ને P(0, –3) આગળ દોરેલ અભિલંબ વક્રને ફરીથી બે બિંદુઓમાં મળે છે. આ બિંદુઓ શોધો.

➡ **(1, –1), (–1, –5)**

31. સાબિત કરો કે, વર્તુળનો અભિલંબ એ વર્તુળની ત્રિજ્યાને સમાવતી રેખા છે.

➡ સ્વપ્રયત્ને

32. બતાવો કે રેખા $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ વક્ર $y = be^{-\frac{x}{a}}$ ને જે બિંદુએ સ્પર્શે છે. તે બિંદુ Y- અક્ષ પર છે.

➡ સ્વપ્રયત્ને

33. જો રેખા $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$ એ વક્ર $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ને સ્પર્શે તો સાબિત કરો કે, $a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = P^2$.

➡ સ્વપ્રયત્ને

34. $y = \cos(x + y)$નાં $x + 2y = 0$ને સમાંતર સ્પર્શકોનાં સમીકરણ શોધો.

➡ $x + 2y = (4K + 1)\frac{\pi}{2},\ K \in Z.$

35. $x^2y^2 + xy = 2$ પરના જે બિંદુઓએ સ્પર્શકોનો ઢાળ -1 હોય તેવા બિંદુઓ શોધો.

➡ $(1, 1)$ તથા $(-1, -1)$

36. $xy + ax + by = 2$ પરના $(1, 1)$ બિંદુ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ 2 છે. તો a અને b શોધો.

➡ $a = 5,\ b = -4$

37. સાબિત કરો કે, વક્ર $y^2 = 4a\left[x + a\sin\left(\frac{x}{a}\right)\right]$નાં બધાં જ બિંદુઓ કે જેમાંથી દોરેલ સ્પર્શકો X-અક્ષને સમાંતર છે તે પરવલય $y^2 = 4ax$ પર આવેલાં છે.

➡ સ્વપ્રયત્ને

38. $y = (1 + x)^y + \sin^{-1}(\sin 2x)$નાં $x = 0$ આગળ અભિલંબનું સમીકરણ મેળવો.

➡ $x + y = 1$

39. જો વક્રો $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$ અને $y^3 = 16x$ લંબચ્છેદી હોય તો સાબિત કરો કે $a^2 = \frac{4}{3}$.

➡ સ્વપ્રયત્ને

40. વક્ર $y^2 - 2x^3 - 4y + 8 = 0$ ને બિંદુ $(1, 2)$માંથી દોરેલ સ્પર્શકોનાં સમીકરણ મેળવો.

➡ $y - (2 + 2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}(x - 2),\ y - (2 - \sqrt{3}) = -2\sqrt{3}(x - 2).$

41. વક્ર $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ના જે બિંદુ આગળના સ્પર્શકો

(i) X- અક્ષને સમાંતર હોય,

(ii) Y- અક્ષને સમાંતર હોય તે બિંદુઓ શોધો.

➡ વક્રનું સમીકરણ : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

$$\therefore \frac{2x}{9}+\frac{2y}{16}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{16x}{9y}$$

$\therefore$ (x, y) બિંદુએ સ્પર્શકોનો ઢાળ $\frac{dy}{dx}=\frac{-16x}{9y}$

(a) વક્રનો સ્પર્શક X- અક્ષને સમાંતર હોય.

$\therefore$ સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{-16x}{9y} = 0 \Rightarrow x = 0$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

$x = 0 \therefore y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$

$\therefore$ (0, 4) તથા (0, –4) બિંદુએ દોરેલ સ્પર્શક X- અક્ષને સમાંતર છે.

(b) વક્રનો સ્પર્શક Y- અક્ષને સમાંતર હોય.

$\therefore$ અભિલંબનો ઢાળ $\frac{-1}{\frac{dy}{dx}} = 0$

$\therefore \frac{dx}{dy} = 0$

$\therefore -\frac{9y}{16x} = 0 \Rightarrow y = 0$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

$y = 0 \therefore x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$\therefore$ (3, 0) અને (–3, 0) બિંદુએ દોરેલ સ્પર્શક એ Y- અક્ષને સમાંતર છે.

42. નીચે આપેલ વક્રોને દર્શાવેલ બિંદુ આગળ સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણો શોધો :

(i) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$**ને (0, 5) બિંદુ આગળ**

(ii) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$**ને (1, 3) બિંદુ આગળ**

(iii) $y = x^3$ **at (1, 1) બિંદુ આગળ**

(iv) $y = x^2$ **at (0, 0) બિંદુ આગળ**

(v) $x = \cos t, y = \sin t$ **ને** $t = \frac{\pi}{4}$ **આગળ**

➡ **(i)** $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$, (0, 5) બિંદુએ

$y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$, (0, 5)

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 10$

$\therefore$ (0, 5) બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,5)} = 4(0)^3 - 18(0)^2 + 26(0) - 10 = -10$

$\therefore$ (0, 5) બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનું સમીકરણ,

$y - 5 = -10 (x - 0)$

$\therefore 10x + y - 5 = 0$

(0, 5) બિંદુએ અભિલંબનો ઢાળ $= \frac{-1}{\text{સ્પર્શકનો ઢાળ}}$

$= \frac{-1}{-10}$

$= \frac{1}{10}$

$\therefore$ (0, 5) બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ :

$y - 5 = \frac{1}{10}(x - 0)$

$\therefore x - 10y + 50 = 0$

➡ **(ii)** $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$; (1, 3) બિંદુએ

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 10$

$\therefore$ (1, 3) બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,3)} = 4(1)^3 - 18(1)^2 + 26(1) - 10 = 2$

$\therefore$ (1, 3) બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનું સમીકરણ,

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore \; y - 3 = 2(x - 1)$

$\therefore \; y = 2x + 1$

(1, 3) બિંદુએ વક્રનાં અભિલંબનો ઢાળ

$= \frac{-1}{\text{સ્પર્શકનો ઢાળ}} = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ (1, 3) બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ :

$y - 3 = \frac{-1}{2}(x - 1)$

➡ **(i)** $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$, (0, 5) બિંદુએ

$y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$, (0, 5)

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 10$

$\therefore$ (0, 5) બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,5)} = 4(0)^3 - 18(0)^2 + 26(0) - 10 = -10$

$\therefore$ (0, 5) બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનું સમીકરણ,

$y - 5 = -10\,(x - 0)$

$\therefore \; 10x + y - 5 = 0$

(0, 5) બિંદુએ અભિલંબનો ઢાળ $= \frac{-1}{\text{સ્પર્શકનો ઢાળ}}$

$= \frac{-1}{-10}$

$= \frac{1}{10}$

$\therefore$ (0, 5) બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ :

$y - 5 = \frac{1}{10}(x - 0)$

$\therefore \; x - 10y + 50 = 0$

➡ **(ii)** $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$; (1, 3) બિંદુએ

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 10$

$\therefore$ (1, 3) બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,3)} = 4(1)^3 - 18(1)^2 + 26(1) - 10 = 2$

$\therefore$ (1, 3) બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનું સમીકરણ,

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore \; y - 3 = 2(x - 1)$

$\therefore \; y = 2x + 1$

(1, 3) બિંદુએ વક્રનાં અભિલંબનો ઢાળ

$= \frac{-1}{\text{સ્પર્શકનો ઢાળ}} = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ (1, 3) બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ :

$$y - 3 = \frac{-1}{2}(x - 1)$$

➥ **(i)** $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$, (0, 5) બિંદુએ

$y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$, (0, 5)

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 10$

$\therefore$ (0, 5) બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,5)} = 4(0)^3 - 18(0)^2 + 26(0) - 10 = -10$$

$\therefore$ (0, 5) બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનું સમીકરણ,

$y - 5 = -10\ (x - 0)$

$\therefore\ 10x + y - 5 = 0$

(0, 5) બિંદુએ અભિલંબનો ઢાળ $= \frac{-1}{\text{સ્પર્શકનો ઢાળ}}$

$= \frac{-1}{-10}$

$= \frac{1}{10}$

$\therefore$ (0, 5) બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ :

$$y - 5 = \frac{1}{10}(x - 0)$$

$\therefore\ x - 10y + 50 = 0$

➥ **(ii)** $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$; (1, 3) બિંદુએ

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 10$

$\therefore$ (1, 3) બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,3)} = 4(1)^3 - 18(1)^2 + 26(1) - 10 = 2$$

$\therefore$ (1, 3) બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનું સમીકરણ,

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore\ y - 3 = 2(x - 1)$

$\therefore\ y = 2x + 1$

(1, 3) બિંદુએ વક્રનાં અભિલંબનો ઢાળ

$= \frac{-1}{\text{સ્પર્શકનો ઢાળ}} = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ (1, 3) બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ :

$$y - 3 = \frac{-1}{2}(x - 1)$$