അധ്യായം 7

# ക്രമീകരണവും തെരഞ്ഞെടുക്കലും (PERMUTATIONS AND COMBINATIONS)

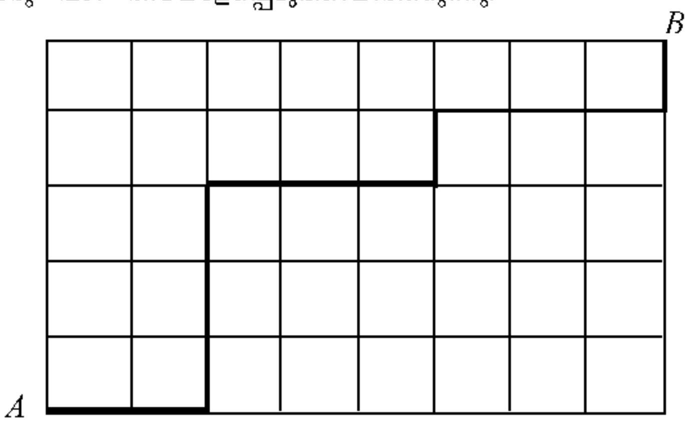
*❖ എല്ലാ കണ്ടുപിടുത്തങ്ങളും ഗണിതരൂപത്തിലാണ്, കാരണം നമുക്കു മറ്റൊരു വഴികാട്ടിയില്ല – ഡാർവിൻ ❖*

## 7.1 ആമുഖം

**ജേക്കബ് ബർണോലി (1654-1705)**

മനുഷ്യന്റെ അതിജീവന ചരിത്രത്തിലെ ഒരു സുപ്രധാന നാഴികക്കല്ലാണ് സംഖ്യകളുടെ കണ്ടുപിടുത്തം. അതോടെ വസ്തുക്കളെ എണ്ണിത്തിട്ടപ്പെടുത്തൽ എന്ന പ്രക്രിയ സുഗമമായി. ഗണിതത്തിന്റെ വളർച്ചയുടെ നാൾവഴികൾ എണ്ണൽ എളുപ്പമാക്കാനുള്ള മാർഗങ്ങൾ ചിന്തിച്ചതോടെ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ 'എണ്ണൽ തത്വങ്ങൾ' (counting principles) എന്ന ഒരു ശാഖ തന്നെ വളർന്നു വന്നു. ഈ അധ്യായത്തിൽ എണ്ണൽ തത്വങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ചില കാര്യങ്ങൾ പഠിക്കാം.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽ $A$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $B$ എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരത്തിൽ ഒരു 'വഴി' അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.



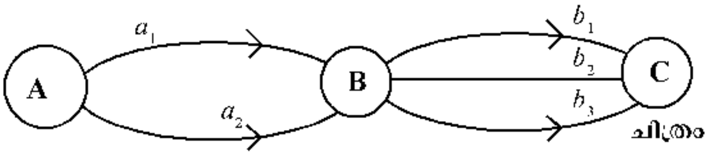

ചിത്രം 7.1

(എല്ലാ വരകളും തുല്യ അകലത്തിലാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക.)

ഇതുപോലെ $A$ യിൽ നിന്ന് $B$ യിലേക്ക് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരമുള്ള എത്ര വഴികൾ ഉണ്ടെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാമോ? ധാരാളം വഴികൾ നിർദേശിക്കാൻ നിങ്ങൾക്കറിയാമെങ്കിലും 'എത്ര' വഴികൾ എന്ന ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം പറയുക അത്ര എളുപ്പമല്ല. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിലാണ് എണ്ണി നോക്കാതെ എണ്ണം പറയാൻ പറ്റുന്ന "എണ്ണൽ സൂത്രങ്ങൾ" വികസിപ്പിക്കേണ്ടി വന്നത്. മേൽപ്പറഞ്ഞ ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം കണ്ടെത്താനാകും വിധം എണ്ണം കണ്ടെത്തുന്നതിനുള്ള മാർഗങ്ങളാണ് ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്.

## 7.2 എണ്ണലിന്റെ അടിസ്ഥാന തത്വം (Fundamental Principle of Counting)

$A$, $B$, $C$ എന്നിവ മൂന്നു സ്ഥലങ്ങൾ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. $A$ യിൽ നിന്ന് $B$ യിലേക്കെത്താൻ രണ്ടു വഴികളുണ്ട്. $B$ യിൽ നിന്ന് $C$ യിലേക്കെത്താൻ 3 വഴികളുണ്ട്. $A$ യിൽ നിന്ന് $C$ യിലേക്ക് എത്ര വ്യത്യസ്ത വഴികൾ സാധ്യമാകും? ഈ പ്രശ്നത്തെ വിശകലനം ചെയ്തു നോക്കാം.




ചിത്രം 7.2

$A$ യിൽ നിന്ന് $B$ യിലേക്കുള്ള വഴികൾ $a_1$, $a_2$ എന്നിവയാണ്. $B$ യിൽ നിന്ന് $C$ യിലേക്കുള്ള വഴികൾ $b_1, b_2, b_3$ എന്നിവയും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. $A$ യിൽ നിന്ന് $B$ യിലേക്ക് $a_1$, എന്ന വഴിയിലൂടെ വന്നാൽ $B$ യിൽ $C$ നിന്ന് യിലേക്ക് മൂന്ന് വഴികൾ സാധ്യമാണ്. അതായത് $A$ യിൽ നിന്ന് $a_1 b_1$, $a_1 b_2$, $a_1 b_3$ എന്നിങ്ങനെ മൂന്ന് വഴികളിലൂടെ $C$ യിൽ എത്താം. ഇനി $A$ യിൽ നിന്ന് B യിലേക്ക് $a_2$ എന്ന വഴിയാണ് തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നതെങ്കിലും $A$ യിൽ നിന്ന് $C$ യിലേക്ക് 3 വഴികൾ തന്നെ സാധ്യമാണ്. $a_2 b_1$, $a_2 b_2$, $a_2 b_3$ എന്നിവ. അപ്പോൾ $A$ യിൽ നിന്ന് $C$ യിലെത്താൻ ആകെ സാധ്യമായ വഴികൾ $3 + 3 = 6$ ആയിരിക്കും.

ഇനി B യിൽ നിന്ന് $C$ യിലേക്ക് 4 വ്യത്യസ്ത വഴികൾ ഉണ്ടായിരുന്നെങ്കിലോ? $a_1$ന്റെ തുടർച്ചയായി 4 വഴികളും $a_2$ വിന്റെ തുടർച്ചയായി 4 വഴികളും കിട്ടും. അങ്ങനെ $A$ യിൽ നിന്ന് $C$ യിലേക്ക് $4 + 4 = 8$ വഴികൾ ഉണ്ടാകും.

അപ്പോൾ $A$ യിൽ നിന്ന് $B$ യിലേക്ക് $m$ വഴികളും $B$ യിൽ നിന്ന് $C$ യിലേക്ക് $n$ വഴികളും ഉണ്ടായിരുന്നെങ്കിൽ $A$ യിൽ നിന്ന് $C$ യിലേക്കുള്ള ആകെ വഴികളുടെ എണ്ണം കിട്ടാൻ $n$ എന്ന സംഖ്യയെ $m$ തവണ കൂട്ടേണ്ടി വരില്ലേ?

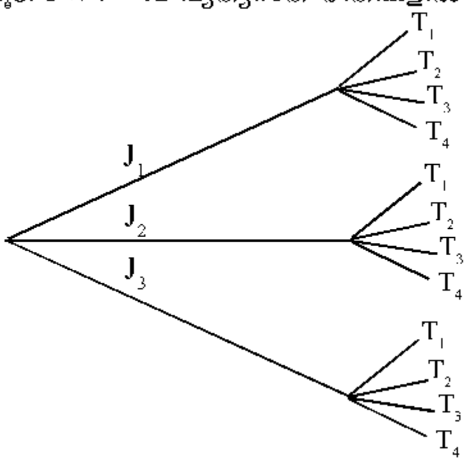
$A$ യിൽ നിന്ന് $C$ യിലേക്കുള്ള വഴികളുടെ എണ്ണം.

$$= n + n + n \; ...... \; (m \text{ തവണ})$$

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ $A$ യിൽ നിന്ന് $B$ യിലേക്ക് $m$ വഴികളും $B$ യിൽ നിന്ന് $C$ യിലേക്ക് $n$ വഴികളും ഉണ്ടെങ്കിൽ $A$ യിൽ നിന്ന് $C$ യിലേക്ക് $m \times n$ വഴികൾ ഉണ്ടാകും. വഴിയുടെ കാര്യത്തിൽ മാത്രമാണോ ഇത് ശരിയാകുക?

നിങ്ങൾക്ക് 4 ടീഷർട്ടും 3 ജീൻസുമുണ്ടെന്ന് കരുതുക. എത്ര വ്യത്യസ്ത രീതിയിൽ ഇവ ധരിക്കാൻ പറ്റും?

ഓരോ ജീൻസ് ധരിക്കുമ്പോഴും 4 ടീഷർട്ടുകളിൽ ഏതു വേണമെങ്കിലും ധരിക്കാം. അതായത് ഒരു ജീൻസിന്റെ കൂടെ 4 ടീ ഷർട്ട് എന്ന തോതിൽ 3 ജീൻസും 4 ടീഷർട്ടും കൂടി $3 \times 4 = 12$ വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ ധരിക്കാൻ കഴിയും.



ചിത്രം 7.3

$J_1, J_2, J_3$ ജീൻസുകളും $T_1, T_2, T_3, T_4$ ടീഷർട്ടുകളുമാണെങ്കിൽ

$$\left.\begin{array}{l} J_1T_1,\ J_1T_2,\ J_1T_3,\ J_1T_4 \\ J_2T_1,\ J_2T_2,\ J_2T_3,\ J_2T_4 \\ J_3T_1,\ J_3T_2,\ J_3T_3,\ J_3T_4 \end{array}\right\} 3 \times 4 = 12$$

ഇതിനെ സാമാന്യവത്കരിച്ചാൽ എണ്ണലിന്റെ അടിസ്ഥാനതത്ത്വത്തിൽ എത്താം. അതായത്,

**കുറിപ്പ്**

ഒരു പ്രവൃത്തി $m$ വ്യത്യസ്ത രീതികളിലും അതിനെത്തുടർന്ന് മറ്റൊരു പ്രവൃത്തി $n$ വ്യത്യസ്ത രീതികളിലും ചെയ്യാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ രണ്ടും കൂടി ഒരുമിച്ച് $mn$ വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ ചെയ്യാം.

ഇത് എണ്ണലിന്റെ അടിസ്ഥാനതത്ത്വം അല്ലെങ്കിൽ ഗുണനതത്ത്വം എന്നറിയപ്പെടുന്നു. ലളിതമായ ചില ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ നമുക്ക് ഈ തത്ത്വത്തെ കൂടുതൽ മനസ്സിലാക്കാം.

എത്ര രണ്ടക്ക സംഖ്യകളുമുണ്ട്? ഉത്തരം എളുപ്പമാണ് എണ്ണി നോക്കാതെ തന്നെ പറയാം, 90.

എത്ര മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുണ്ട് എന്നാണ് ചോദ്യമെങ്കിലോ? അപ്പോഴും ബുദ്ധിമുട്ടി ല്ലാതെ ഉത്തരം പറയാം, 900

ഇനി ആദ്യത്തെ ചോദ്യത്തിൽ ഒരല്പം മാറ്റം വരുത്തി, അക്കങ്ങൾ ആവർത്തി ക്കാത്ത എത്ര രണ്ടക്ക സംഖ്യകളുണ്ടെന്നാക്കിയാലോ?

അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുന്ന രണ്ടക്ക സംഖ്യകൾ അറിയാമല്ലോ. 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. ഇവയെ ഒഴിവാക്കിയാൽ അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാത്ത രണ്ടക്ക സംഖ്യകൾ കിട്ടും.

അതായത് 90–9 =81 രണ്ടക്ക സംഖ്യകൾ.

ഇത്തരത്തിൽ മാറ്റുന്നത് രണ്ടാമത്തെ ചോദ്യത്തിലാണെങ്കിലോ?

ഒരു അക്കം പോലും ആവർത്തിക്കാത്ത എത്ര മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുണ്ട്?

ഇതിനുത്തരം കണ്ടെത്തുക അത്ര എളുപ്പമല്ല. അങ്ങനെയെങ്കിൽ ഈ ചോദ്യത്തെ മറ്റൊരു രീതിയിൽ നോക്കിക്കാണാം.

ഒരു മൂന്നക്ക സംഖ്യ എഴുതുക എന്നത്, ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനത്തും പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തും നൂറിന്റെ സ്ഥാനത്തും ഓരോ അക്കം എഴുതുക എന്ന മൂന്നു കാര്യങ്ങളുടെ ചേർച്ച യാണ്.

മൂന്ന് സ്ഥാനവിലകളെ മൂന്ന് പെട്ടികളാക്കിയെടുത്താൽ നൂറിന്റെ സ്ഥാനത്ത്, അതാ യത് ആദ്യത്തെ കള്ളിയിൽ 1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള ഒൻപത് അക്കങ്ങളിൽ ഏത് വേണമെങ്കിലും എഴുതാം. (പൂജ്യമെഴുതിയാൽ അത് രണ്ടക്ക സംഖ്യയായിത്തീ രും)

രണ്ടാമത്തെ കളത്തിൽ 0 മുതൽ 9 വരെയുള്ള 10 അക്കങ്ങളിൽ, ഒന്നാമത്തെ കളത്തിൽ അക്കം ഒഴികെ ഏതക്കവും എഴുതാം. (അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചു കൂടല്ലോ) മൂന്നാ മത്തെ കളത്തിൽ ആദ്യത്തെ രണ്ടു കളങ്ങളിൽ എഴുതിയ അക്കങ്ങൾ ഒഴികെ ഏത ക്കവും എഴുതാം.

അതായത്, ആദ്യത്തെ അക്കം 9 രീതിയിൽ, രണ്ടാമത്തെ അക്കം 9 രീതിയിൽ, മൂന്നാമത്തെ അക്കം 8 രീതിയിൽ

മൂന്നും ഒന്നിനു പുറകെ ഒന്നായി ചെയ്യേണ്ടി വരുമ്പോൾ ഗുണന തത്വപ്രകാരം വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ സംഖ്യകൾ എഴുതാം.

അതായത് $9 \times 9 \times 8 = 648$ മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ, ഒരു അക്കം പോലും ആവർത്തിക്കാതെ എഴുതാൻ കഴിയും.

**ഉദാഹരണം : 1**

1, 2, 3, 4, 5 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാത്ത എത്ര രണ്ടക്ക സംഖ്യകൾ എഴുതാം?

**പരിഹാരം**

| | |
|---|---|
| 5 | 4 |

ആദ്യത്തെ കളത്തിൽ തന്നിട്ടുള്ള 5 അക്കങ്ങളിൽ ഏത് വേണമെങ്കിലും എഴുതാം. ആവർത്തിക്കാൻ പാടില്ലാത്തതിനാൽ അടുത്ത കളത്തിൽ 4 അക്കങ്ങളിൽ ഏതു വേണമെങ്കിലും ഉപയോഗിക്കാം.

ആകെ രണ്ടക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $= 5 \times 4 = 20$

**ഉദാഹരണം : 2**

1, 2, 3, 4, 5 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്, എത്ര രണ്ടക്ക ഇരട്ടസംഖ്യകൾ എഴുതാം? അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാവുന്നതാണ്.

**പരിഹാരം**

| | |
|---|---|
| | |

ഇരട്ടസംഖ്യ ആവണമെന്നതുകൊണ്ട് ഒന്നുകളുടെ സ്ഥാനത്ത് 2 അല്ലെങ്കിൽ 4 തന്നെ വരണമല്ലോ. അതായത് 2 സംഖ്യകൾ മാത്രമേ ആ കള്ളിയിൽ എഴുതാനാകൂ. അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുന്നതിന് തടസ്സമില്ലാത്തതിനാൽ രണ്ടാമത്തെ കളത്തിൽ 5 അക്കങ്ങളിൽ ഏതു വേണമെങ്കിലും ഉപയോഗിക്കാം.

ആകെ രണ്ടക്ക ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $= 5 \times 2 = 10$

**ഉദാഹരണം : 3**

'ROSE' എന്ന ഇംഗ്ലീഷ് വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ അർത്ഥമുള്ളതോ ഇല്ലാത്തതോ ആയ 4 അക്ഷരമുള്ള എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

**പരിഹാരം**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |

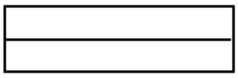
ആദ്യത്തെ കളത്തിൽ 4 അക്ഷരങ്ങളിൽ ഏതു വേണമെങ്കിലും ഉപയോഗിക്കാം. തുടർന്ന് 3, 2, 1 എന്ന ക്രമത്തിൽ കളങ്ങൾ നിറയ്ക്കാം.

ആകെ വാക്കുകൾ $= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

**ഉദാഹരണം : 4**

രണ്ടു വ്യത്യസ്ത നിറത്തിലുള്ള പതാകകൾ ഒന്നിനു താഴെ മറ്റൊന്ന് ചേർത്ത് വെച്ച് ഒരു അടയാളം (സിഗ്നൽ) ഉണ്ടാക്കുന്നു. 4 വ്യത്യസ്ത നിറത്തിലുള്ള പതാക കൾ ലഭ്യമാണെങ്കിൽ എത്ര അടയാളങ്ങൾ രൂപീകരിക്കാം?

**പരിഹാരം**



ഒരു അടയാളം ഉണ്ടാക്കുന്നതിന് രണ്ടു പതാകകൾ മുകളിലും താഴെയുമായി ചേർത്തു വെയ്ക്കണം.

മുകളിലെ പതാക നാല് നിറങ്ങളിൽ ഏതുമാവാം. താഴത്തെ പതാകയ്ക്ക് പിന്നെ മൂന്നു സാധ്യതകളേയുള്ളൂ.

ആകെ രൂപീകരിക്കാവുന്ന അടയാളങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 4 \times 3 = 12$

**ഉദാഹരണം : 5**

അഞ്ചു വ്യത്യസ്ത നിറങ്ങളിലുള്ള പതാകകൾ ലഭ്യമാണ്. ചുരുങ്ങിയത് രണ്ടു പതാകകളെങ്കിലും ഒന്നിന് താഴെ മറ്റൊന്ന് ചേർത്തു വെച്ച് എത്ര വ്യത്യസ്ത അട യാളങ്ങൾ രൂപീകരിക്കാം?

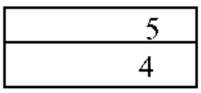
**പരിഹാരം**

ചുരുങ്ങിയത് രണ്ടു പതാകകളെങ്കിലും ഉപയോഗിച്ചാണ് അടയാളങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കേ ണ്ടത്.

ആയതിനാൽ 2 പതാകകൾ, 3 പതാകകൾ, 4 പതാകകൾ, 5 പതാകകൾ ഇങ്ങനെ ഉപയോഗിച്ച് 4 വ്യത്യസ്ത തരം അടയാളങ്ങൾ സാധ്യമാണ്.

ആകെ അടയാളങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണാൻ ഇവയുടെ തുക കണ്ടെത്തണം.

രണ്ടു പതാകകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള അടയാളങ്ങളുടെ എണ്ണം



$5 \times 4 = 20$

മൂന്ന് പതാകകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള അടയാളങ്ങളുടെ എണ്ണം

| |
|---|
| 5 |
| 4 |
| 3 |

$5 \times 4 \times 3 = 60$

നാല് പതാകകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള അടയാളങ്ങളുടെ എണ്ണം

| |
|---|
| 5 |
| 4 |
| 3 |
| 2 |

$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

അഞ്ച് പതാകകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള അടയാളങ്ങളുടെ എണ്ണം

| |
|---|
| 5 |
| 4 |
| 3 |
| 2 |
| 1 |

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

ആകെ അടയാളങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 20 + 60 + 120 + 120$

$= 320$

## പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 7.1

1. 1, 2, 3, 4, 5 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ നിർമിക്കാം?
   (i) അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചുപയോഗിച്ചാൽ
   (ii) അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചുപയോഗിക്കാതിരുന്നാൽ
2. അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചുപയോഗിക്കാമെങ്കിൽ 1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര മൂന്നക്ക ഇരട്ടസംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം?
3. ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ ആദ്യത്തെ 10 അക്ഷരങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ ഉപയോഗിച്ച് 4 അക്ഷരങ്ങളുടെ എത്ര കോഡുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?
4. അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ 0 മുതൽ 9 വരെയുള്ളവ ഉപയോഗിച്ച് 67 ൽ തുടങ്ങുന്ന എത്ര അഞ്ചക്ക സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

5. ഒരു നാണയം 3 തവണ ടോസ്സ് ചെയ്ത് പരിണിതഫലം രേഖപ്പെടുത്തുന്നു, എത്ര പരിണിതഫലങ്ങൾ സാധ്യമാവും?

6. വ്യത്യസ്ത നിറങ്ങളിലുള്ള 5 പതാകകളിൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ടെണ്ണം ഒന്നിനു താഴെ മറ്റൊന്ന് ചേർത്ത് വച്ച് എത്ര അടയാളങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം?

## 7.3 ക്രമീകരണങ്ങൾ (Permutations)

ചർച്ച ചെയ്ത ഉദാഹരണങ്ങളുടെ വെളിച്ചത്തിൽ ചിന്തിച്ചാൽ ഏതൊരു മൂന്നക്ക സംഖ്യയും 0 മുതൽ 9 വരെയുള്ള അക്കങ്ങളുടെ വ്യത്യസ്ത ക്രമീകരണങ്ങൾ ആണ ല്ലോ. അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചുപയോഗിച്ചും അല്ലാതെയും ഇത്തരം സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം. ഇവിടെ സംഖ്യകളെ പരസ്പരം വ്യത്യസ്തമാക്കുന്നത് അവയിലോ രോന്നിലും അക്കങ്ങളുടെ സ്ഥാനത്തിലുള്ള വ്യത്യാസമാണ്. ഉദാഹരണത്തിന് 123, 321 എന്നീ സംഖ്യകളെയും ഒരേ അക്കങ്ങൾ ആണെങ്കിലും അവയെ ക്രമീകരിച്ചിരി ക്കുന്നത് വ്യത്യസ്ത സ്ഥാനങ്ങളിലാണ്. അതുകൊണ്ട് തന്നെ സംഖ്യകൾ വ്യത്യ സ്തമാകുകയും ചെയ്യുന്നു. അതായത് ക്രമീകരണം പ്രധാനമാണെന്ന് സാരം.

### 7.3.1 നിർവചനം :

ഒരു നിശ്ചിത എണ്ണം വസ്തുക്കളിൽ മുഴുവനും, അല്ലെങ്കിൽ ചിലതിനെ നിശ്ചിത രീതിയിൽ എഴുതുന്നതിനെ ഒരു ക്രമീകരണം (Permutation) എന്നു പറയുന്നു.

### 7.3.2 പരിഗണിക്കുന്ന എല്ലാ വസ്തുക്കളെയും ഒരുമിച്ചെടുത്തുള്ള ക്രമീകരണം

1, 2, 3, 4 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ എത്ര നാലക്ക സംഖ്യകൾ എഴുതാം എന്ന പ്രശ്നം പരിഗണിക്കുക.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |

ആദ്യ കളത്തിൽ 4, രണ്ടാമത്തേതിൽ 3 എന്ന ക്രമത്തിൽ, അക്കങ്ങൾ ഉൾപ്പെടു ത്തുന്ന സാധ്യത പരിഗണിച്ച് $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ നാലക്ക സംഖ്യകൾ സാധ്യമാകും എന്നു പറയാം. ഇതേപോലെ 5 അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് അക്കങ്ങൾ ആവർത്തി ക്കാതെ അഞ്ചക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം കാണുന്നതിന് $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ കണ ക്കാക്കിയാൽ മതി. അതായത് $n$ വസ്തുക്കൾ ഒരുമിച്ചെടുത്തുള്ള ക്രമീകരണങ്ങ ളുടെ എണ്ണം കാണാൻ 1 മുതൽ $n$ വരെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടു പിടിച്ചാൽ മതി.

### 7.3.2 ക്രമഗുണിതം

1 മുതൽ $n$ വരെയുള്ള സംഖ്യകളെ തമ്മിൽ ക്രമമായി ഗുണിച്ചെഴുതുന്ന വിലയ്ക്ക് സൗകര്യാർത്ഥം “ക്രമഗുണിതം $n$” എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $n\,!$ എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം.‘ ‘ക്രമഗുണിതം $n$’ എന്നതിനെ $\underline{|n}$ എന്നും സൂചിപ്പിക്കാം.

$$
\begin{aligned}
1 &= 1! \\
1 \times 2 &= 2! \\
1 \times 2 \times 3 &= 3! \\
1 \times 2 \times 3 \times 4 &= 4! \\
n\,! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots\ldots (n-1)n
\end{aligned}
$$

**കുറിപ്പ്**

$$
\begin{aligned}
n\,! &= (1 \times 2 \times \text{----------} \times (n-1)) \times n \\
&= (n-1)!n \\
&= (n-2)! \times (n-1) \times n
\end{aligned}
$$

**ഉദാഹരണം : 6**

വില കാണുക.

(i) $5\,!$ (ii) $7\,!$ (iii) $7\,! - 5\,!$

**പരിഹാരം**

(i) $5\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

(ii) $7\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$

(iii) $7\,! - 5\,! = 5040 - 120 = 4920$

**ഉദാഹരണം : 7**

വില കാണുക:

(i) $\dfrac{7!}{5!}$ (ii) $\dfrac{12!}{(10!)(2!)}$

**പരിഹാരം**

(i) $\dfrac{7!}{5!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$

(ii) $\dfrac{12!}{(10!)(2!)} = \dfrac{12 \times 11 \times 10!}{10! \times 2} = 11 \times 6 = 66$

**ഉദാഹരണം : 8**

$n - 5$ ഉം r $- 2$ ഉം ആണെങ്കിൽ $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ ന്റെ വില കണക്കാക്കുക.

**പരിഹാരം**

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\times 3!} = \frac{4\times 5}{2} = 10$$

**ഉദാഹരണം : 9**

$\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = \frac{1}{9!}$ ആയാൽ $x$ ന്റെ വില കണക്കാക്കുക.

**പരിഹാരം**

$$\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = \frac{x}{10!}$$

$$\frac{1}{8!} + \frac{1}{8!\times 9} = \frac{x}{10!}$$

$$\frac{1}{8!}\left(1+\frac{1}{9}\right) = \frac{x}{10!}$$

$$\frac{10}{8!\times 9} = \frac{x}{10!}$$

$$\frac{10}{8!\times 9} = \frac{x}{10\times 9\times 8!}$$

$$x = 100$$

## പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 7.2

1. വില കാണുക.

   (i) $8\,!$ (ii) $4! - 3!$

2. $3\,! + 4\,! = 7!$ ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

3. $\frac{8!}{6! \times 2!}$ ന്റെ വില കാണുക.

4. $\frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = \frac{x}{8!}$ ആയാൽ $x$ ന്റെ വില കാണുക.

5. $\frac{n!}{(n-r)!}$ ന്റെ വില കാണുക.

   (i) $n = 6,\ r = 2$ (ii) $n = 9,\ r = 5$

## 7.4 പരിഗണിക്കുന്ന വസ്തുക്കളിൽ ഒരു നിശ്ചിത എണ്ണം ഒരുമിച്ചെടുത്തുള്ള ക്രമീകരണം.

1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാവുന്ന മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണമെത്ര എന്ന പ്രശ്നം നാം കണ്ടതാണല്ലോ.

$5 \times 4 \times 3 = 60$ വ്യത്യസ്ത സംഖ്യകൾ സാധ്യമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം. ഒരു അഞ്ചക്ക സംഖ്യയാണ് എഴുതണമെങ്കിൽ 5 അക്കങ്ങളും ഒരുമിച്ച് ഉപയോഗിക്കണം. ഇത്തരത്തിൽ എഴുതാവുന്ന അഞ്ചക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $5!$ ആണെന്നും അറിയാം.

മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം കാണുന്ന പ്രശ്നത്തെ ക്രമഗുണിതം ഉപയോഗിച്ച് പറയാൻ സാധിച്ചാൽ ഇത്തരം പ്രശ്നങ്ങളുടെ സാമാന്യവത്ക്കരണം എളുപ്പമായിരിക്കില്ലേ? മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $5 \times 4 \times 3$ ആണല്ലോ. ഇതിനെ

$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$ എന്നെഴുതിയാലോ?

അപ്പോൾ $\frac{5!}{2!}$ എന്നു കിട്ടില്ലേ?

ഇത്തരത്തിൽ 10 വസ്തുക്കളിൽ 4 എണ്ണം ഒരുമിച്ചെടുത്തുള്ള ക്രമീകരണമാണെങ്കിലോ? മേൽപറഞ്ഞ രീതിയിൽ ചിന്തിച്ചാൽ $\frac{10!}{6!}$ എന്ന് ഉത്തരം കിട്ടില്ലേ?

(4 എണ്ണത്തിന്റെ ക്രമീകരണമാണ് വേണ്ടത്. ആദ്യത്തെ സ്ഥാനത്തിന് 10, അടുത്തതിന് 9 എന്ന ക്രമത്തിൽ $10\times9\times8\times7$ ക്രമീകരണങ്ങൾ സാധ്യമാവും. അതിനെ $\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$ എന്നും $\frac{10!}{6!}$ എന്നും മാറ്റിയെഴുതാം.)

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ

$n$ വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് $r$ വസ്തുക്കൾ ഒരുമിച്ചെടുത്തുള്ള ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $\frac{n!}{(n-r)!}$ ആയിരിക്കും. ഇതിനെ നമുക്ക് $^np_r$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

അതായത് $^np_r = \frac{n!}{(n-r)!}\ 0 \le r \le n$

ഈ സൂത്രവാക്യപ്രകാരം, $n$ വസ്തുക്കളെ മുഴുവൻ ഒരുമിച്ചെടുത്തുള്ള ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം എത്രയായിരിക്കും?

$$^np_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

$0! = 1$ എന്നാണ് നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത്.

അപ്പോൾ $^np_n - n!$

$$^np_o = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

**സിദ്ധാന്തം : 1**

$n$ വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് $r$ എണ്ണം എടുത്തുള്ള ക്രമീകരണത്തിൽ ആവർത്തനം അനുവദിച്ചാൽ $n^r$ ക്രമീകരണങ്ങൾ സാധ്യമാകും. (തെളിവ് കണ്ടെത്തുക)

**ഉദാഹരണം 10**

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ $n$ ന്റെ വില കണക്കാക്കുക :

(i) $\quad {}^{n}p_5 = 42\ {}^{n}p_3\ ,\ n > 4 \qquad$ (ii) $\quad \dfrac{{}^{n}p_4}{{}^{(n-1)}p_4} = \dfrac{5}{3},\ n > 4$

**പരിഹാരം**

(i)
$$ {}^{n}p_5 = 42\ {}^{n}p_3 $$

$$ \frac{n!}{(n-5)!} = 42\frac{n!}{(n-3)!} $$

$$ \frac{1}{(n-5)!} = 42\ \frac{1}{(n-3)\ (n-4)(n-5)!} $$

$$ (n-3)(n-4) = 42 $$
$$ n^2 - 7n - 30 = 0 $$
$$ (n-10)(n+3) = 0 $$

$n = 10$ അല്ലെങ്കിൽ $n = -3$

$n = -3$ സാധ്യമല്ലാത്തതിനാൽ $n = 10$.

(ii)
$$ \frac{{}^{n}p_4}{{}^{(n-1)}p_4} = \frac{5}{3},\ n > 4 $$

$$ \frac{\dfrac{n!}{(n-4)!}}{\dfrac{(n-1)!}{((n-1)-4)!}} = \frac{5}{3} $$

$$ \frac{n}{n-4} = \frac{5}{3} $$
$$ 3n = 5\ (n - 4) $$
$$ n = 10 $$

**ഉദാഹരണം 11**

$5 \times 4p_r = 6 \times 5p_{r-1}$ ആയാൽ $r$ ന്റെ വില കണക്കാക്കുക.

**പരിഹാരം**

$$5 \times 4p_r = 6 \times 5p_{r-1}$$

$$5 \times \frac{4!}{(4-r)!} = 6 \times \frac{5!}{(5-(r-1))!}$$

$$\frac{1}{(4-r)!} = \frac{6}{(6-r)!}$$

$$\frac{1}{(4-r)!} = \frac{6}{(6-r)(5-r)(4-r)!}$$

$$(6-r)(5-r) = 6$$

$$30 - 11r + r^2 = 6$$

$$r^2 - 11r + 24 = 0$$

അതുകൊണ്ട് $$(r-8)(r-3) = 0$$

$r = 8$ അല്ലെങ്കിൽ $r = 3$

$r \le n$ ആകേണ്ടതിനാൽ $r \ne 8$

$$r = 3$$

## 7.5 വ്യത്യസ്തമല്ലാത്ത വസ്തുക്കളുടെ ക്രമീകരണം

അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ 1, 2, 3 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഉണ്ടാക്കാവുന്ന മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $3 \times 2 \times 1 = 6$ ആണെന്ന് നമുക്കറിയാം.

ഇതിൽ 3 ന് പകരം 2 തന്നെ ആയിരുന്നെങ്കിലോ? 1, 2, 2 എന്നീ മൂന്ന് അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ ഉണ്ടാക്കുന്ന മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം എത്രയായിരിക്കും?

ഇതൊരു ലളിതമായ പ്രശ്നം ആയതുകൊണ്ട് നമുക്ക് ഈ രണ്ടു പ്രശ്നത്തിനും എഴുതാവുന്ന എല്ലാ മൂന്നക്ക സംഖ്യകളും എഴുതി നോക്കാം.

| 1, 2, 3 ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാവുന്ന മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ | 1, 2, 2 ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാവുന്ന മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ |
|---|---|
| 123 | 122 |
| 132 | 212 |
| 213 | 221 |
| 231 | |
| 312 | |
| 321 | |

അക്കങ്ങളുടെ എണ്ണം രണ്ട് പ്രശ്നത്തിലും തുല്യമായിരുന്നു. എന്നാൽ എഴുതാവുന്ന മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം തുല്യമല്ല. ഇതെന്തുകൊണ്ട് സംഭവിച്ചു? രണ്ട് അക്കങ്ങൾ സമാനമായപ്പോൾ ആകെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം രണ്ടിലൊന്നായി (പകുതിയായി) കുറഞ്ഞു. ഇനി മേൽപ്രശ്നത്തിലെ 1 എന്ന അക്കം കൂടി മാറ്റി 2 ആക്കിയാൽ മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാൻ ശ്രമിച്ചാലോ? അതായത് 2, 2, 2 എന്നീ മൂന്ന് അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം? 222 എന്ന ഒരു സംഖ്യമാത്രം. മൂന്നു അക്കങ്ങളും ഒരുപോലെയായപ്പോൾ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം ആദ്യം ഉണ്ടായിരുന്നതിന്റെ ആറിലൊന്ന് ആയികുറഞ്ഞു. 3 അക്കങ്ങൾ പല വിധത്തിൽ ക്രമീകരിച്ചാണല്ലോ സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നത്. 3 ക്രമീകരണങ്ങൾ സാധ്യമാണ് താനും. അക്കങ്ങൾ തിരിച്ചറിയാനാവാതെ ആയപ്പോൾ ഈ ക്രമീകരണങ്ങൾ എല്ലാം ഒരുപോലെ (വേർതിരിച്ചറിയാൻ പറ്റാത്തവിധം) ആയിത്തീർന്നു. അതിനാൽ $3!$ ക്രമീകരണങ്ങളിൽ നിന്ന് ഒരു മൂന്നക്ക സംഖ്യ മാത്രമേ എഴുതാൻ സാധിക്കൂ. അതായത്

3 വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളുടെ ക്രമീകരണം – $3! = 6$ രീതിയിൽ

3 വസ്തുക്കളിൽ 2 എണ്ണം സമാനമായാൽ ക്രമീകരണം $\frac{3!}{2!} = 3$

3 വസ്തുക്കളിൽ 3 എണ്ണവും സമാനമായാൽ ക്രമീകരണം $\frac{3!}{3!} = 1$

ഇതിനെ സാമാന്യവത്ക്കരിച്ച് പറഞ്ഞാൽ വസ്തുക്കൾ ഒരുമിച്ചെടുത്തുള്ള ക്രമീകരണത്തിൽ $p$ വസ്തുക്കൾ സമാനമായാൽ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $\frac{n!}{p!}$ ആയിരിക്കും.

**ഉദാഹരണം 12**

ROOT എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഉണ്ടാക്കാവുന്ന അർത്ഥമുള്ളതോ ഇല്ലാത്തതോ ആയ നാലക്ഷരമുള്ള വാക്കുകളുടെ എണ്ണമെത്ര?

**പരിഹാരം**

4 അക്ഷരങ്ങളിൽ 2 എണ്ണം സമാനമായ അക്ഷരങ്ങളാണ്. ആയതിനാൽ

ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= \dfrac{4!}{2!} = 12$

വാക്കുകളുടെ എണ്ണം $= 12$

**കുറിപ്പ്**

$n$ വസ്തുക്കളിൽ $p_1$ വസ്തുക്കൾ ഒരുതരം, $p_2$ വസ്തുക്കൾ മറ്റൊരു തരം .... അങ്ങനെ $p_k$ വസ്തുക്കൾ വേറൊരു തരം ആയാൽ വസ്തുക്കളുടെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $\dfrac{n!}{P_1!\times P_2!\ldots P_k!}$ ആയിരിക്കും.

**ഉദാഹരണം : 13**

"ALLAHABAD' എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക.

**പരിഹാരം**

ആകെ അക്ഷരങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 9$

ആവർത്തിക്കുന്ന അക്ഷരങ്ങൾ A - 4, L - 2

ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= \dfrac{9!}{4!2!} = \dfrac{5\times 6\times 7\times 8\times 9}{2}$

$= 7560$

**ഉദാഹരണം : 14**

1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര നാലക്ക സംഖ്യകൾ എഴുതാം?

പരിഹാരം

1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള അക്കങ്ങളിൽ 4 എണ്ണം ഒരുമിച്ചെടുത്തുള്ള ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണമാണ് നാലക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം.

$\therefore$ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം = $^{9}P_{4}$

$$= \frac{9!}{(9-4)!} = 3024$$

ഉദാഹരണം : 15

0, 1, 2, 3, 4, 5 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ ഉപയോഗിച്ച് 100 നും 1000 നും ഇടയ്ക്കുള്ള എത്ര സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

പരിഹാരം

100 നും 1000 നും ഇടയിലുള്ള സംഖ്യകൾ എല്ലാം മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ ആണല്ലോ.

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 5 | 4 |

100 ന്റെ സ്ഥാനത്ത് 0 വന്നാൽ അത് രണ്ടക്ക സംഖ്യയായിത്തീരും. ആ സ്ഥാനത്ത് 0 ഒഴികെ 5 സാധ്യതകൾ. 10 ന്റെ സ്ഥാനത്ത് വീണ്ടും 5, ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്ത് 4.

ആകെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 5 \times 5 \times 4$

$= 100$

ഉദാഹരണം : 16

'DAUGHTER' എന്ന വാക്കിന്റെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്

(i) എല്ലാ സ്വരാക്ഷരങ്ങളും ഒരുമിച്ച് വരുംവിധം 8 അക്ഷരങ്ങളുള്ള എത്ര വാക്കുകൾ രൂപീകരിക്കാം?

(ii) എല്ലാ സ്വരാക്ഷരങ്ങളും ഒരുമിച്ച് വരാത്ത വിധത്തിൽ 8 അക്ഷരങ്ങളുള്ള വാക്കുകൾ രൂപീകരിക്കാം?

പരിഹാരം

(i) 8 വ്യത്യസ്ത അക്ഷരങ്ങളാണ് DAUGHTER എന്ന വാക്കിൽ ഉള്ളത്. അതിൽ A, U, E എന്നിങ്ങനെ മൂന്ന് സ്വരാക്ഷരങ്ങളും. ഇവ മൂന്നും ഒരുമിച്ച് വരേണ്ടതിനാൽ ഇവയെ ഒറ്റ വസ്തുവായി പരിഗണിക്കുക (AUE). ഇതും ബാക്കി 5 അക്ഷരങ്ങളും ചേർന്ന് 6 അക്ഷരങ്ങളുടെ ക്രമീകരണം $6!$ രീതിയിൽ ചെയ്യാം. A, U, E എന്നീ സ്വരാക്ഷരങ്ങളെ വീണ്ടും $3!$ രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം. ഗുണനതത്വം ഉപയോഗിച്ചാൽ ആകെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $6! \times 3! = 4320$.

(ii) സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒരുമിച്ചു വരാത്ത ക്രമീകരണങ്ങലുടെ എണ്ണം കാണാൻ ആകെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിൽ നിന്ന് സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒരുമിച്ച് വരുന്ന ക്രമീ കരണങ്ങളുടെ എണ്ണം കുറച്ചാൽ മതിയാകുമല്ലോ.

ആകെ 8 അക്ഷരങ്ങളുടെ ക്രമീകരണങ്ങൾ $= 8!$

സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒരുമിച്ച് വരുന്ന ക്രമീകരണങ്ങൾ $= 6\,! \times 3\,!$

സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒരുമിച്ച് വരാത്ത ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 8! - 6\,! \times 3\,!$

$$= 6\,!\,(7 \times 8 - 6)$$

$$= 50 \times 6! = 50 \times 720 = 36{,}000$$

**ഉദാഹരണം : 17**

4 ചുവന്ന ഡിസ്കുകളും, 3 മഞ്ഞ ഡിസ്കുകളും 2 പച്ച ഡിസ്കുകളും ഒരു വരിയിൽ ക്രമീകരിക്കണം. ഒരേ നിറമുള്ള ഡിസ്കുകളെ പരസ്പരം തിരിച്ചറിയാനാവില്ല. ഇങ്ങനെ എത്ര രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം?

**പരിഹാരം**

ആകെ ഡിസ്ക്കുകളുടെ എണ്ണം $= 4 + 3 + 2 = 9$

ആകെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= \dfrac{9!}{4! \times 3! \times 2!}$

$$= 1260$$

**ഉദാഹരണം : 18**

INDEPENDENCE എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഈ ക്രമീകരണങ്ങളിൽ എത്ര എണ്ണം.

(i) $P$ എന്ന അക്ഷരത്തിൽ ആരംഭിക്കുന്നു?

(ii) എല്ലാ സ്വരാക്ഷരങ്ങളും ഒരുമിച്ച് വരുന്നു?

(iii) സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒരുമിച്ച് വരുന്നില്ല?

(iv) I ൽ തുടങ്ങി $P$ യിൽ അവസാനിക്കുന്നു?

**പരിഹാരം**

ഈ വാക്കിൽ ആകെ 12 അക്ഷരങ്ങളുണ്ട്. ഇതിൽ $N$ മൂന്ന് തവണയും $E$ നാലു തവ ണയും $D$ രണ്ടു തവണയും ആവർത്തിച്ചു വരുന്നു.

ആയതിനാൽ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= \dfrac{12!}{3!.\,4!.\,2!} = 1663200$

(i) ഏറ്റവും ഇടത്തായി $P$ എന്ന അക്ഷരത്തെ ഉറപ്പിച്ചാൽ ബാക്കി 11 അക്ഷരങ്ങളുടെ ക്രമീകരണം കണക്കാക്കിയാൽ മതി. അതായത് ക്രമീകരണങ്ങളുടെ

എണ്ണം $= \dfrac{11!}{3!.4!.2!}$

$= 138600$

(ii) ഈ വാക്കിൽ ആകെ 5 സ്വരാക്ഷരങ്ങളാണുള്ളത്. അതിൽ 4 തവണ $E$ ആവർത്തിച്ചു വരുന്നു.

$\boxed{EEEEI}$ ഒറ്റ വസ്തു ആയി പരിഗണിച്ചാൽ ആകെ 8 വസ്തുക്കളുടെ ക്രമീകരണമാണ് കണക്കാക്കേണ്ടത്. അതിൽ $3\ N$ ഉം $2\ D$ യും ഉണ്ട്. ആയതിനാൽ

അവയെ $\dfrac{8!}{3! \times 2!}$ രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം.

ഇതിലെ ഓരോ ക്രമീകരണത്തിലും $\boxed{EEEEI}$ ലെ അക്ഷരങ്ങളെ $\dfrac{5!}{4!}$ രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം.

ആയതിനാൽ ആകെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= \dfrac{8!}{3! \times 2!} \times \dfrac{5!}{4!} = 16{,}800$

(iii) ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം = ആകെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം – സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒരുമിച്ചു വരുന്ന ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം.

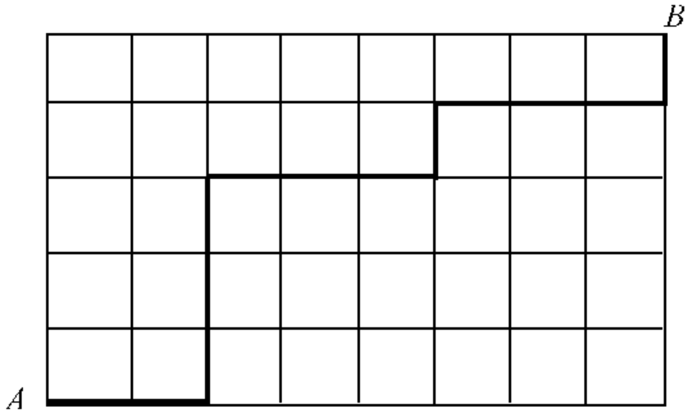
$= 1663200 - 16800 = 1646400$

(iv) $I$ ഇടത്തേ അറ്റത്തും $P$ വലത്തേ അറ്റത്തും ഉറപ്പിച്ചാൽ ബാക്കി 10 അക്ഷരങ്ങളുടെ ക്രമീകരണം കണക്കാക്കിയാൽ മതി.

ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= \dfrac{10!}{3!.2!.4!}$

$= 12{,}600$

ഇത്രയും ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ കടന്നു പോയതിന്റെ വെളിച്ചത്തിൽ, ഈ പാഠം തുടങ്ങുന്നിടത്ത് നമ്മൾ ഉന്നയിച്ച പ്രശ്നത്തിലേക്ക് ഒന്ന് തിരിച്ചുപോയാലോ? $A$ യിൽ നിന്ന് $B$ യിലേക്കുള്ള ഏറ്റവും ചെറിയ ദൂരത്തിലുള്ള വഴികളുടെ എണ്ണമെത്ര എന്നായിരുന്നു ചോദ്യം.




ഏതെങ്കിലും ഒരു വഴി നമുക്ക് എഴുതാൻ ശ്രമിക്കാം. വലത്തേക്ക് 1 യൂണിറ്റിന് $R$ എന്നും മുകളിലേക്ക് ഒരു യൂണിറ്റിന് $U$ എന്നും എഴുതിയാൽ ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ വഴിയെ $RRUUURRRURRRU$ എന്ന് എഴുതാം. ഇതിൽ കൗതുകകരമായ വസ്തുത ഏത് വഴി തിരഞ്ഞെടുത്താലും അതിൽ $8R$ ഉം $5U$ ഉം ഉണ്ടാകും എന്നതാണ്. മറ്റേതൊരു വഴി എഴുതിയാലും അത്, മേൽ എഴുതിയ വഴിയുടെ ഒരു ക്രമീകരണം തന്നെയായിരിക്കും. അപ്പോൾ വഴികളുടെ എണ്ണം എന്നത് $RRUUURRRURRRU$ എന്ന വാക്കിന്റെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന് തുല്യമാണ്. ഈ വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളെ എത്ര വിധത്തിൽ ക്രമീകരിക്കാം?

13 അക്ഷരങ്ങളിൽ $8R$ ഉം $5U$ ഉം ഉണ്ട്.

ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം = $\dfrac{13!}{8! \times 5!}$

അതായത് $A$ യിൽ നിന്ന് $B$ യിലേക്കുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരത്തിലുള്ള വഴികളുടെ എണ്ണം = $\dfrac{13!}{8! \times 5!}$

## പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 7.3

1. 1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ എത്ര മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ എഴുതാം?
2. ഒരു അക്കം പോലും ആവർത്തിക്കാത്ത എത്ര നാലക്ക സംഖ്യകളുണ്ട്?
3. 1, 2, 3, 4, 6, 7 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ ഉണ്ടാക്കാവുന്ന നാലക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം കാണുക. ഇവയിൽ എത്ര ഇരട്ടസംഖ്യകൾ ഉണ്ട്?

4. 1, 2, 3, 4, 5 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ ഉണ്ടാക്കാവുന്ന നാലക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം കാണുക. ഇവയിൽ ഇരട്ടസംഖ്യകൾ എത്ര?

5. 8 പേരുള്ള ഒരു സമിതിയിൽ നിന്ന് ചെയർമാനെയും വൈസ് ചെയർമാനെയും തെരഞ്ഞെടുക്കണം. ഒരാൾ ഒന്നിൽ കൂടുതൽ സ്ഥാനങ്ങൾ വഹിക്കാൻ പാടില്ല. ഇവരെ എത്ര രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

6. ${}^{(n-1)}P_3 : {}^{n}P_4 = 1 : 9$ ആയാൽ $n$ കണ്ടുപിടിക്കുക

7. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ $r$ കണ്ടുപിടിക്കുക

   (i) ${}^{5}P_r = 2.{}^{6}P_{r-1}$

   (ii) ${}^{5}P_r = {}^{6}P_{r-1}$

8. EQUATION എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ അർത്ഥമുള്ളതോ, ഇല്ലാത്തതോ ആയ എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

9. MONDAY എന്ന വാക്ക് പരിഗണിക്കുക.

   (i) ഈ വാക്കിൽ നിന്നും 4 അക്ഷരങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ അർത്ഥമുള്ളതോ ഇല്ലാത്തതോ ആയ എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

   (ii) എല്ലാ അക്ഷരങ്ങളും ആവർത്തിക്കാതെ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

   (iii) എല്ലാ അക്ഷരങ്ങളും ഉപയോഗിക്കുകയും. സ്വരാക്ഷരത്തിൽ തുടങ്ങുകയും ചെയ്യുന്ന എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

10. MISSISSIPPI എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചും നാലു '$I$' കളും ഒരുമിച്ചു വരാതെ എത്ര ക്രമീകരണങ്ങൾ ഉണ്ട്?

11. PERMUTATIONS എന്ന വാക്കിന്റെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ക്രമീകരണത്തിൽ, താഴെ പറയും വിധമുള്ള എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാകും എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

    (i) $P$ യിൽ തുടങ്ങി $S$ ൽ അവസാനിക്കുന്നവ

    (ii) സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒരുമിച്ച് വരുന്നവ

    (iii) $P$ ക്കും $S$ നും ഇടയിൽ എല്ലായ്പ്പോഴും 4 അക്ഷരങ്ങൾ വരുന്ന വിധം.

## 7.6 തെരഞ്ഞെടുക്കൽ (Combinations)

$A, B, C$ എന്നീ മൂന്നു കുട്ടികളിൽ നിന്ന് രണ്ടുപേരെ ഒരു സമിതിയിലേക്ക് തെരഞ്ഞെടുക്കണമെന്ന് കരുതുക. എത്ര രീതിയിൽ ഇത് ചെയ്യാം? $A, B; A, C; B, C.$

ഇങ്ങനെ മൂന്ന് രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം. ഇവിടെ ക്രമത്തിന് പ്രാധാന്യമില്ല എന്നത് വ്യക്തമാണല്ലോ. ഈ വ്യത്യസ്ത തെരഞ്ഞെടുപ്പുകളെ നമുക്ക് തെരഞ്ഞെടുക്കൽ (combination) എന്നു പറയാം. അതായത് 3 വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് 2 വസ്തുക്കളടങ്ങുന്ന മൂന്ന് തെരഞ്ഞെടുക്കലുകൾ ലഭിക്കും. ഈ തെരഞ്ഞെടുക്കളിലൂടെ എണ്ണത്തെ $^3C_2$ അല്ലെങ്കിൽ $C$ (3, 2) എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചാൽ

$\boxed{^3C_2 = 3}$ എന്നെഴുതാം.

A, B, C എന്നീ കുട്ടികളിൽ നിന്ന് ഒരു കുട്ടിയെയയാണ് വേണ്ടതെങ്കിലോ? A ഒരു തെരഞ്ഞെടുക്കലാണ്. അതേപോലെ B, C ഇവയും കിട്ടും.

അതായത് $\boxed{^3C_1 = 3}$ ആണ്.

മൂന്നു കുട്ടികളടങ്ങുന്ന സമിതിയെയാണ് തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നതെങ്കിലോ? ഒരു തെരഞ്ഞെടുക്കൽ മാത്രമല്ലേ കിട്ടൂ (ABC). അതിനർത്ഥം $\boxed{^3C_3 = 1}$ എന്നല്ലേ?

$A, B, C, D$ എന്നീ 4 കുട്ടികളിൽ നിന്ന് 2 പേരെയാണ് സമിതിയിലേക്ക് തിരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടതെങ്കിലോ?

$AB, AC, AD, BC, BD, CD$ എന്നിങ്ങനെ 6 തെരഞ്ഞെടുക്കലുകൾ ലഭ്യമാകും അതായത്

$^4C_2 = 6$ ആയിരിക്കും.

$^4C_1$, $^4C_2$, $^4C_3$, $^4C_4$, എന്നിവയുടെ വിലകൾ എന്തായിരിക്കും? $^4C_5$ കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയുമോ? സാധ്യമല്ല കാരണം 4 വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് 5 എണ്ണത്തെ തെരഞ്ഞെടുക്കാനാവില്ലല്ലോ.

നമുക്ക് $n$ വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് $r$ വസ്തുക്കൾ ഉൾപ്പെടുന്ന തെരഞ്ഞെടുക്കലിനെ പൊതുവായി $^nc_r$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

$r \leq n$ ആയിരിക്കണം എന്നത് വ്യക്തമാണല്ലോ. ഇതിന് മുൻപ് പഠിച്ച ക്രമീകരണവുമായി തെരഞ്ഞെടുക്കലിന്റെ വ്യത്യാസം എന്താണെന്ന് ചിന്തിച്ചു നോക്കൂ.

$A, B, C$ എന്നീ മൂന്നു കുട്ടികളെ രണ്ടു കസേരകളിൽ എങ്ങനെയൊക്കെ ഇരുത്താം എന്ന പ്രശ്നത്തിൽ $AB$ എന്ന ക്രമീകരണം $BA$ എന്ന ക്രമീകരണത്തിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്തമാണല്ലോ. പക്ഷേ ഒരു സമിതിയിലേക്കുള്ള തെരഞ്ഞെടുപ്പാവുമ്പോൾ $AB$ യും $BA$ യും ഒന്നു തന്നെയാണ്. ഇവരിൽ ഒന്ന് മാത്രം പരിഗണിച്ചാൽ മതി. അതായത് തിരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്ന വസ്തുക്കളുടെ ക്രമീകരണത്തിന്റെ എണ്ണം പരിഗണിക്കേണ്ടതില്ല എന്ന് സാരം.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ A, B, C എന്നീ മൂന്നു കുട്ടികളിൽ നിന്നും രണ്ടുപേരെ ഒരു സമയം തെരഞ്ഞെടുത്താൽ AB, BC, AC എന്നിങ്ങനെ $^3C_2$ തെരഞ്ഞെടുപ്പുകൾ

ലഭിക്കുന്നു. ഇതിൽ ഒരു തെരഞ്ഞെടുപ്പിനെ 2! വിധത്തിൽ ക്രമീകരിക്കാമല്ലോ. *AB, BA, BC, CB, AC, CA* ആകെ $^3P_2$ ക്രമീകരണം ലഭിക്കുന്നു. അതായത് $^3C_2 \times 2! = {}^3P_2$ ആയിരിക്കാം.

*n* വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് *r* വസ്തുക്കളെ തെരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടി വരുമ്പോൾ *r* വസ്തുക്കൾ തമ്മിലുള്ള ക്രമീകരണത്തിൽ നിന്ന് (*r!*) ഒരെണ്ണം മാത്രമേ തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടേണ്ടതുള്ളൂ. അതായത് $\frac{n!}{(n-r)!}$ രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കപ്പെടുന്ന വസ്തുക്കളിൽ $\frac{n!}{(n-r)!} \div r!$ തെരഞ്ഞെടുപ്പ് മാത്രമേ സാധ്യമാവു.

ആയതിനാൽ *n* വസ്തുക്കളിൽ നിന്നും *r* വസ്തുക്കളുടെ തെരഞ്ഞെടുക്കൽ $\frac{n!}{(n-r)!\ r!}$ ആയിരിക്കും.

അതായത് $$\boxed{{}^nc_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

തിരിച്ച് $$ {}^np_r = r! \times \frac{n!}{r!(n-r)!}$$ എന്ന് പരിഗണിച്ചാൽ

$$\boxed{{}^np_r = r! \times {}^nc_r}$$ ആയിരിക്കും.

$$\boxed{{}^nc_n - \frac{n!}{n!\,o!} - 1}$$

$$\boxed{{}^nc_o - \frac{n!}{o!\,n!} - 1}$$

ഒരു ക്ലാസിലെ 60 കുട്ടികളിൽ നിന്ന് 50 പേരെ തെരഞ്ഞെടുക്കണമെങ്കിൽ, 50 പേരെ തെരഞ്ഞെടുക്കാനുള്ള എളുപ്പവഴി 10 പേരെ തെരഞ്ഞെടുത്ത് ഒഴിവാക്കുന്നതല്ലേ? അതായത് 60 പേരിൽ നിന്ന് 50 പേരുടെ തെരഞ്ഞെടുക്കലുകളുടെ എണ്ണവും 60 പേരിൽ നിന്ന് 10 പേരുടെ തെരഞ്ഞെടുക്കലുകളുടെ എണ്ണവും തുല്യമാണ്. അതിനാൽ $^{60}C_{50} = {}^{60}C_{10}$ ആയിരിക്കും.

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ

$$\boxed{{}^nc_r = {}^nc_{n\ r}}$$ ആയിരിക്കും.

**കുറിപ്പ്**

$$^{n}c_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\left[n-(n-r)\right]!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!(r)!}$$

$$= nc_r$$

**സിദ്ധാന്തം 2 :** $^{n}C_r + {^{n}C_{r-1}} = {^{n+1}C_r}$

**തെളിവ് :** $$^{n}C_r + {^{n}C_{r-1}} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{r\times(r-1)!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\times\frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = {^{n+1}C_r}$$

**ഉദാഹരണം 19**

$^{n}C_9 = {^{n}C_8}$ ആയാൽ $^{n}C_{17}$ കണക്കാക്കുക

**പരിഹാരം**

$$^{n}C_9 = {^{n}C_8}$$

$$\frac{n!}{9!(n-9)!} = \frac{n!}{(n-8)!\,8!}$$

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{n-8}\ ,\ n=17$$

$$^{n}C_{17}={}^{17}C_{17}=1$$

**ഉദാഹരണം : 20**

2 പുരുഷന്മാരും 3 സ്ത്രീകളും ഉണ്ട്. ഇവരിൽ നിന്നും 3 ആളുകളുടെ ഒരു സമിതിയെ തെരഞ്ഞെടുക്കണം. ഇത് എത്ര വിധത്തിൽ ചെയ്യാം? ഇങ്ങനെ തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്ന സമിതികളിൽ എത്രയെണ്ണത്തിൽ 1 പുരുഷനും 2 സത്രീകളും ഉണ്ടായിരിക്കും?

**പരിഹാരം**

5 പേരിൽ നിന്ന് 3 പേരെ $^{5}C_{3}=\frac{5!}{3!\,2!}=\frac{4\times 5}{2}=10$ വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം. രണ്ടു പുരുഷന്മാരിൽ നിന്ന് ഒരാളെ $^{2}C_{1}$ രീതിയിലും 3 സ്ത്രീകളിൽ നിന്ന് 2 സ്ത്രീകളെ $^{3}C_{2}$ രീതിയിലും തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

1 പുരുഷനും 2 സ്ത്രീകളും ഉൾപ്പെടുന്ന സമിതി

$^{2}C_{1}\times {}^{3}C_{2}$ രീതികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

$= 2\times 3 = 6$ രീതികൾ

**ഉദാഹരണം : 21**

52 ചീട്ടുകളുള്ള ഒരു പെട്ടിയിൽ നിന്നും 4 ചീട്ടുകൾ എത്ര വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം? ഇവയിൽ എത്രയെണ്ണത്തിൽ

(i) നാലും ഒരേ ഇനം ആവും?

(ii) നാലും വ്യത്യസ്ത ഇനം ആവും?

(iii) നാലും മുഖമുള്ള ചീട്ടുകൾ ആവും?

(iv) രണ്ടെണ്ണം ചുവപ്പും രണ്ടെണ്ണം കറുപ്പും ആവും?

(v) നാലും ഒരേ നിറമുള്ളതാവും?

**പരിഹാരം**

52 ചീട്ടുകളിൽ നിന്ന് 4 ചീട്ടുകൾ $^{52}C_{4}$ രീതികളിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

$$^{52}C_{4}=\frac{52!}{4!\ 48!}=\frac{49\times 50\times 51\times 52}{2\times 3\times 4}$$

$$=270725$$

(i) ചീട്ടുകൾ നാല് ഇനമാണുള്ളത്. സ്പേഡ്, ഡയമണ്ട്, ഹാർട്ട്സ്, ക്ലബ്ബ്. ഓരോന്നിലും 13 ചീട്ട് വീതമായിരിക്കും ഉണ്ടായിരിക്കുക നാലു ചീട്ടും ഒരേ ഇനമാവാൻ നാലും സ്പേഡ് അല്ലെങ്കിൽ നാലും ഡയമണ്ട് അല്ലെങ്കിൽ നാലും ഹാർട്ട് അല്ലെങ്കിൽ നാലും ക്ലബ്ബ് ആവണം.

ഇത്തരത്തിൽ ${}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4$ രീതികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

$$4 \times \frac{13!}{4!\ 9!} = 2860$$

(ii) ഓരോ ചീട്ടും ഓരോ ഇനമാവണം. അതായത് ഒരുതരത്തിൽ നിന്ന് ഒരു ചീട്ട്, അടുത്ത തരത്തിൽ നിന്ന് അടുത്ത ഒന്ന് എന്നിങ്ങനെ

ഇത് ${}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 = (13)^4$ രീതിയിൽ ചെയ്യാം.

(iii) മുഖമുള്ള ചീട്ടുകൾ ആകെ 12 എണ്ണമാണുള്ളത്. ഇതിൽ നിന്നും 4 എണ്ണം എടുക്കണമെങ്കിൽ അത് ${}^{12}C_4$ രീതിയിൽ ചെയ്യാം.

$${}^{12}C_4 = \frac{12!}{4!\ 8!} = 495$$

(iv) 26 ചുവപ്പ് ചീട്ടുകളും 26 കറുപ്പ് ചീട്ടുകളുമാണുള്ളത്. രണ്ടെണ്ണം വീതം ${}^{26}C_2 \times {}^{26}C_2$ രീതിയിൽ എടുക്കാം.

$$= \left(\frac{26!}{2!\ 24!}\right)^2 = (325)^2 = 105625$$

(v) ഒരേ നിറമുള്ള ചീട്ടുകൾ കിട്ടാൻ ഒന്നുകിൽ 4 ചീട്ടുകളും കറുപ്പാവണം. അല്ലെങ്കിൽ നാലും ചുവപ്പാകണം.

തെരഞ്ഞെടുപ്പിന്റെ എണ്ണം $= {}^{26}C_4 + {}^{26}C_4$

$= 29900$

## പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 7.4

1. ${}^{n}C_8 = {}^{n}C_2$ ആയാൽ ${}^{n}C_2$ കണ്ടു പിടിക്കുക.

2. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളിൽ $n$ ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

   (i) ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_3 = 12 : 1$

   (ii) ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_3 = 11 : 1$

3. ഒരു വൃത്തത്തിൽ 21 ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഇവ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര ഞാണുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

4. 5 ആൺ കുട്ടികളും 4 പെൺകുട്ടികളുമുള്ള ഒരു സംഘത്തിൽ നിന്ന് 3 ആൺകുട്ടികളും 3 പെൺകുട്ടികളും ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു ടീമിനെ എത്ര തരത്തിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

5. ഒരു ബാഗിൽ 6 ചുവന്ന പന്തുകളും 5 വെളുത്ത പന്തുകളും 5 നീല പന്തുകളുമുണ്ട്. ഓരോ നിറത്തിൽ നിന്നും 3 പന്തുകൾ വീതം ഉൾപ്പെടും വിധം 9 പന്തുകൾ എത്ര രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

6. 52 ചീട്ടുകളുള്ള ഒരു പെട്ടിയിൽ നിന്നും കൃത്യം ഒരു എയ്സ് ഉൾപ്പെടുന്ന വിധം, 5 ചീട്ടുകൾ എത്ര രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

7. 17 ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാരിൽ നിന്ന് 11 പേരുടെ ഒരു ടീം തെരഞ്ഞെടുക്കണം. 17 പേരിൽ 5 പേർക്ക് മാത്രമാണ് പന്തെറിയാനറിയാവുന്നത്. പന്തെറിയാനറിയാവുന്ന കൃത്യം 4 പേരെ ഉൾപ്പെടുത്തിക്കൊണ്ട് 11 പേരുടെ ഒരു ടീം എത്ര രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.?

8. ഒരു ബാഗിൽ 5 കറുത്ത പന്തുകളും 6 ചുവന്ന പന്തുകളും ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്ന് 2 കറുത്ത പന്തുകളും 3 ചുവന്ന പന്തുകളും എത്ര രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

9. 9 കോഴ്സുകളിൽ നിന്ന് 5 കോഴ്സുകൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു പാഠ്യപദ്ധതി ഒരു കുട്ടിക്ക് തെരഞ്ഞെടുക്കണം. ഇതിൽ 2 പ്രത്യേക കോഴ്സുകൾ നിർബന്ധമായും പഠിക്കേണ്ടതാണ്. എന്നാൽ കുട്ടിക്ക് ഈ പാഠ്യപദ്ധതി എത്ര രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

## കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

### ഉദാഹരണം 22

'INVOLUTE' എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് മൂന്നു സ്വരാക്ഷരങ്ങളും രണ്ട് വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളും വരുന്ന വിധം, അർത്ഥമുള്ളതോ ഇല്ലാത്തതോ ആയ എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

### പരിഹാരം

' INVOLUTE' എന്ന വാക്കിൽ E,I,O,U എന്നീ നാല് സ്വരാക്ഷരങ്ങളും N, V, L, T എന്നിങ്ങനെ നാല് വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളുമാണുള്ളത്.

3 സ്വരാക്ഷരങ്ങളെ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നവിധം $= {}^4C_3 = 4.$

2 വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളെ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നിവിധം $= {}^4C_2 = 6$

3 സ്വരാക്ഷരങ്ങളെയും 2 വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളെയും തെരഞ്ഞെടുക്കാനുള്ള ആകെ വഴികൾ $= 4 \times 6 = 24$

ഇങ്ങനെ 24 വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്ന 5 അക്ഷരങ്ങളുടെ 5! ക്രമീകരണങ്ങൾ സാധ്യമാണ്.

ആയതിനാൽ ആകെ, $24 \times 5\,! = 2880$ വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം.

**ഉദാഹരണം : 23**

ഒരു സംഘത്തിൽ 4 പെൺകുട്ടികളും 7 ആൺകുട്ടികളുമുണ്ട്. ഇവരിൽ നിന്നും 5 അംഗങ്ങളുള്ള എത്ര ടീമുകളെ ചുവടെ പറയും വിധം തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

(i) ഒറ്റ പെൺകുട്ടി പോലുമില്ലാത്ത ടീം

(ii) ചുരുങ്ങിയത് ഒരു ആൺകുട്ടിയും ഒരു പെൺകുട്ടിയും

(iii) ചുരുങ്ങിയത് 3 പെൺകുട്ടികൾ

**പരിഹാരം**

(i) പെൺകുട്ടികളെ ഉൾപ്പെടുത്താത്ത ടീം ആയതുകൊണ്ട് 7 ആൺകുട്ടികളിൽ നിന്നു തന്നെ 5 പേരെ തെരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടി വരും.

ഇത് ${}^7C_5$ രീതിയിൽ ചെയ്യാം

$${}^7C_5 = \frac{7!}{5!\ 2!} = 21$$

(ii) ചുരുങ്ങിയത് ഒരാൺകുട്ടിയും ഒരു പെൺകുട്ടിയും ടീമിൽ ഉൾപ്പെടണമെങ്കിൽ ചുവടെ പറയും വിധം കുട്ടികളെ ഉൾപ്പെടുത്താം.

a. 1 ആൺകുട്ടി 4 പെൺകുട്ടി (${}^7C_1 \times {}^4C_4$ രീതികൾ)

b. 2 ആൺകുട്ടി 3 പെൺകുട്ടി (${}^7C_2 \times {}^4C_3$ രീതികൾ)

c. 3 ആൺകുട്ടി 2 പെൺകുട്ടി (${}^7C_3 \times {}^4C_2$ രീതികൾ)

d. 4 ആൺകുട്ടി 1 പെൺകുട്ടി (${}^7C_4 \times {}^4C_1$ രീതികൾ)

തെരഞ്ഞെടുക്കാവുന്ന ടീമുകളുടെ എണ്ണം.

$$= {}^7C_1 \times {}^4C_4 + {}^7C_2 \times {}^4C_3 + {}^7C_3 \times {}^4C_2 + {}^7C_4 \times {}^4C_1$$

$$= 7 + 84 + 210 + 140 = 441$$

(iii) ചുരുങ്ങിയത് 3 പെൺകുട്ടികൾ ടീമിൽ ഉൾപ്പെടണമെങ്കിൽ ടീമിൽ

a. 3 പെൺകുട്ടി 2 ആൺകുട്ടി (${}^4C_3 \times {}^7C_2$ രീതിയിൽ)

b. 4 പെൺകുട്ടി 1 ആൺകുട്ടി (${}^4C_4 \times {}^7C_1$ രീതിയിൽ)

തെരഞ്ഞെടുക്കാവുന്ന ടീമുകളുടെ എണ്ണം.

$$= {}^4C_3 + {}^7C_2 + {}^4C_4 + {}^7C_1$$

$$= 84 + 7$$

$= 91$ രീതികൾ

### ഉദാഹരണം : 24

AGAIN എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് അർത്ഥമുള്ളതോ ഇല്ലാത്തതോ ആയ എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം? ഈ വാക്കുകളെ ഒരു നിഘണ്ടുവിലെ ക്രമത്തിൽ എഴുതിയാൽ 50-ാമത്തെ വാക്ക് ഏതായിരിക്കും?

### പരിഹാരം

AGAIN എന്ന വാക്കിൽ 5 അക്ഷരങ്ങളാണുള്ളത്. അതിൽ A രണ്ടു തവണ വരുന്നു.

$$\text{ഉണ്ടാക്കാവുന്ന വാക്കുകളുടെ എണ്ണം} = \frac{5!}{2!} = 60$$

നിഘണ്ടു ക്രമത്തിലെഴുതാനായി AGAIN എന്ന വാക്കിനെ അക്ഷരമാലാ ക്രമത്തിൽ എഴുതിയാൽ AAGIN എന്നു കിട്ടും.

A യിൽ തുടങ്ങുന്ന ആകെ വാക്കുകളുടെ എണ്ണം $= 4\,! = 24$

G യിൽ തുടങ്ങുന്ന വാക്കുകളുടെ എണ്ണം $= \dfrac{4!}{2!} = 12$

I യിൽ തുടങ്ങുന്ന വാക്കുകളുടെ എണ്ണം $= \dfrac{4!}{2!} = 12$

I യിൽ തുടങ്ങുന്ന വാക്കുകൾ വരെ എഴുതിക്കഴിയുമ്പോൾ ആകെ $24 + 12 + 12 = 48$ വാക്കുകൾ ആയി.

49- ാം വാക്ക് = NAAGI

50 ാം വാക്ക് = NAAIG

### ഉദാഹരണം - 25

1, 2, 0, 2, 4, 2, 4 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്, 1000000 ത്തിൽ കൂടിയ എത്ര സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

### പരിഹാരം

1000000 ഒരു ഏഴക്ക സംഖ്യയാണ്. തന്നിരിക്കുന്ന അക്കങ്ങളുടെ എണ്ണവും 7 തന്നെയാണല്ലോ. ആയതിനാൽ 1000000 ത്തിൽ കൂടിയ ഏഴക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണമാണ് കണ്ടെത്തേണ്ടത്. ഈ സംഖ്യകൾ 1,2 അല്ലെങ്കിൽ 4 ൽ തുടങ്ങിയേ പറ്റൂ.

1 ൽ തുടങ്ങുന്ന സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $= \dfrac{6!}{3!\,2!} = 60$

(ഒന്നിനെ ഇടത്തെ അറ്റത്ത് ഉറപ്പിച്ചാൽ അവശേഷിക്കുന്ന ആറക്കങ്ങളിൽ മൂന്ന് 2 ഉം രണ്ട് 4 ഉം ഉണ്ട്)

2 ൽ തുടങ്ങുന്ന സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $= \frac{6!}{2!\ 2!} = 180$

4 ൽ തുടങ്ങുന്ന സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $= \frac{6!}{3!} = 120$

ആകെ ഉണ്ടാക്കാവുന്ന സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $= 60 + 180 + 120$

$= 360$

**ഉദാഹരണം : 26**

5 പെൺകുട്ടികളും 3 ആൺകുട്ടികളും ഉണ്ട്. ഒരു വരിയിൽ, രണ്ടു ആൺകുട്ടികൾ അടുത്തടുത്ത് വരാത്ത വിധത്തിൽ എത്ര രീതിയിൽ ഇവരെ ഇരുത്താം?

**പരിഹാരം**

ആദ്യം 5 പെൺകുട്ടികളെ ഒന്നിടവിട്ട കസേരകളിൽ ഇരുത്തുക.

$$\times\ G \times G \times G \times G \times G\ \times$$

ഇത് 5! രീതിയിൽ ചെയ്യാം.

$\times$ അടയാളം ഇട്ട സ്ഥലങ്ങളിൽ മാത്രം ആൺകുട്ടികളെ ഇരുത്തുകയാണെങ്കിൽ, 6 കസേരകളിലായി 3 പേരെ ക്രമീകരിക്കണം. ഇത് ${}^6P_3$ രീതിയിൽ ചെയ്യാം.

ആകെ ക്രമീകരണങ്ങൾ $= 5! \times {}^6p_3$

$$= 5! \times \frac{6!}{3!}$$

$$= 14400$$

## കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. DAUGHTER എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് രണ്ട് സ്വരാക്ഷരങ്ങളും 3 വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളും വരുന്നവിധം അർത്ഥമുള്ളതോ ഇല്ലാത്തതോ ആയ എത്ര വാക്കുകൾ എഴുതാൻ കഴിയും?

2. സ്വരാക്ഷരങ്ങളെല്ലാം ഒരുമിച്ചും വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളെല്ലാം ഒരുമിച്ചും വരുന്ന വിധം EQUATION എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് അർത്ഥമുള്ളതോ ഇല്ലാത്തതോ ആയ എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

3. 9 ആൺകുട്ടികളും 4 പെൺകുട്ടികളും ഉള്ള ഒരു സംഘത്തിൽ നിന്ന് 7 അംഗങ്ങളുടെ ഒരു സമിതി രൂപീകരിക്കണം. താഴെപറയുന്ന നിബന്ധനകൾ പാലിക്കുന്ന എത്ര സമിതികൾ രൂപീകരിക്കാം?

   (i) കൃത്യം 3 പെൺകുട്ടികൾ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കണം

   (ii) 3 പെൺകുട്ടികളെങ്കിലും ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കണം

   (iii) പരമാവധി 3 പെൺകുട്ടികൾ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കണം.

4. EXAMINATION എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളെ ക്രമീകരിച്ചുണ്ടാക്കിയ വാക്കുകളെ നിഘണ്ടു ക്രമത്തിൽ എഴുതിയാൽ E യിൽ തുടങ്ങുന്ന ആദ്യത്തെ വാക്കിന് മുൻപ് എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും?

5. 0, 1, 3, 5, 7, 9 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ ഉപയോഗിച്ച് 10 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ എത്ര ആറക്ക സംഖ്യകൾ എഴുതാം?

6. ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിൽ 21 വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളും 5 സ്വരാക്ഷരങ്ങളുമുണ്ട്. രണ്ടു വ്യത്യസ്ത സ്വരാക്ഷരങ്ങളും രണ്ടു വ്യത്യസ്ത വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളും ഉൾപ്പെടുന്ന എത്ര വാക്കുകൾ എഴുതാം?

7. ഒരു പരീക്ഷക്ക്, ഒന്നും രണ്ടും ഭാഗങ്ങളായി തിരിച്ച 12 ചോദ്യങ്ങളുള്ള ചോദ്യപേപ്പർ ആണുള്ളത്. ആദ്യഭാഗത്ത് 5 ചോദ്യങ്ങളും രണ്ടാമത്തെ ഭാഗത്ത് 7 ചോദ്യങ്ങളുമുണ്ട്. ഒരു കുട്ടി ഓരോ ഭാഗത്തുനിന്നും ചുരുങ്ങിയത് 3 ചോദ്യങ്ങളെങ്കിലും ഉൾപ്പെടുത്തി 8 ചോദ്യങ്ങൾക്കാണ് ഉത്തരം എഴുതേണ്ടത്. എത്ര രീതിയിൽ കുട്ടിക്ക് ചോദ്യങ്ങൾ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

8. 52 ചീട്ടുകളുള്ള ഒരു പെട്ടിയിൽ നിന്നും കൃത്യം ഒരു രാജാവ് ഉൾപ്പെടുന്ന വിധം എത്ര തരത്തിൽ 5 ചീട്ടുകൾ തിരഞ്ഞെടുക്കാം?

9. 5 പുരുഷൻമാരെയും 4 സ്ത്രീകളെയും ഒരു വരിയിൽ ഇരുത്തണം. സ്ത്രീകൾ ഇരട്ടസംഖ്യാസ്ഥാനങ്ങളിൽ (2, 4, 6.... തുടങ്ങിയ സ്ഥാനങ്ങളിൽ) വരത്തക്ക വിധം എത്ര രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം?

10. 25 കുട്ടികളിൽ നിന്നും 10 പേരെ ഒരു വിനോദയാത്രാ സംഘത്തിലേക്ക് തിരഞ്ഞെടുക്കണം. ഇതിൽ മൂന്ന് പേർ ഒന്നുകിൽ ഒരുമിച്ച് വിനോദയാത്രയിൽ പങ്കെടുക്കും, അല്ലെങ്കിൽ മാറിനിൽക്കും എന്ന് തീരുമാനിക്കുന്നു. എത്ര വിധത്തിൽ വിനോദയാത്രാ സംഘത്തെ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

11. ASSASSINATION എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എല്ലാ 'S' കളും ഒരുമിച്ച് വരുന്നവധം എത്ര ക്രമീകരണങ്ങൾ സാധ്യമാണ്?

## സംഗ്രഹം

- എണ്ണലിന്റെ അടിസ്ഥാന തത്വം: ഒരു കാര്യം $m$ വ്യത്യസ്ത രീതികളിലും തുടർന്നു മറ്റൊരു കാര്യം $n$ വ്യത്യസ്ത രീതികളിലും സംഭവിച്ചാൽ രണ്ടും കൂടി ഒരുമിച്ച് ആകെ $m \times n$ രീതികളിൽ സംഭവിക്കും.
- $n$ വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് ഒരു സമയം $r$ വീതം എടുത്തു ആവർത്തനം ഇല്ലാതെയുള്ള ക്രമീകരണത്തിന്റെ എണ്ണം $^nP_r$ എന്നു സൂചി പ്പിക്കുന്നു. $^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$, ഇവിടെ $0 \le r \le n$.
- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$
- $n! = n \times (n-1)!$
- $n$ വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് ഒരു സമയം $r$ വീതം എടുത്ത് ആവർത്തനം അനുവദിച്ചുള്ള ക്രമീകരണത്തിന്റെ എണ്ണം $n^r$ ആയിരിക്കും.
- $n$ വസ്തുക്കളിൽ $p_1$ വസ്തുക്കൾ ഒരു തരം $p_2$ വസ്തുക്കൾ മറ്റൊരു തരം.... അങ്ങനെ $p_k$ വസ്തുക്കൾ വേറൊരു തരം ആയാൽ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $\frac{n!}{p_1!\, p_2! \ldots p_k!}$ ആയിരിക്കും.
- $n$ വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് ഒരു സമയം '$r$' വീതം തെരഞ്ഞെടുത്താൽ ആകെ തെരഞ്ഞെടുക്കലുകളുടെ എണ്ണം $^nC_r$ ആയിരിക്കും.

$$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!},\ 0 \le r \le n.$$

## ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

ജൈനമതത്തിന്റെ ആവിർഭാവത്തിനോ ഒരു പക്ഷേ അതിനു മുൻപോ ഭാരത ത്തിൽ ക്രമീകരണത്തിന്റെയും തെരഞ്ഞെടുക്കലിന്റെയും ആശയം ഉണ്ടായി രുന്നതായി കാണാം. 'വികല്പം' എന്ന പേരിൽ ഇത് ഒരു പ്രത്യേക വിഷയ മായി പഠിച്ചതിന്റെ ഖ്യാതി ജൈനർക്ക് അവകാശപ്പെട്ടതാണ്.

ക്രമീകരണത്തിനും തെരഞ്ഞെടുക്കലിനുമുള്ള പൊതുസൂത്രവാക്യം രേഖപ്പെ ടുത്തിയ ലോകത്തെ ആദ്യ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർക്കുള്ള അംഗീകാരം 850 നോടടുത്തു ജീവിച്ചിരുന്ന ജൈനമതസ്ഥനായ മഹാവീരന് അവകാശപ്പെ ട്ടതാണ്.

ആറു വ്യത്യസ്ത രുചികളിൽ നിന്ന് ഒരു സമയം ഒന്ന്, രണ്ട് എന്നിങ്ങനെയെ ടുത്ത് 63 വിധത്തിലുള്ള രുചിക്കൂട്ടുകൾ തയാറാക്കാമെന്ന് ബി.സി ആറാം

നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന സുശ്രുതൻ മരുന്നുകളെപ്പറ്റിയുള്ള തന്റെ സുപ്രസിദ്ധ ഗ്രന്ഥമായ 'സുശ്രുതസംഹിത'യിൽ പ്രതിപാദിക്കുന്നു. ഏതാനും അക്ഷരങ്ങളിൽ നിന്ന് ഒരു സമയം ഒന്ന്, രണ്ട്, എന്നിങ്ങനെ അക്ഷരങ്ങളെടുത്താൽ എത്ര തരത്തിലുള്ള തെരഞ്ഞെടുക്കലുകളാകാമെന്ന് ബി.സി. മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടിനോടടുത്ത് പിംഗളൻ തന്റെ 'ഛന്ദസൂത്രം' എന്ന കൃതിയിൽ വെളിപ്പെടുത്തുന്നു.

1114 ൽ ജനിച്ച ഭാസ്കരാചാര്യൻ തന്റെ പ്രസിദ്ധമായ 'ലീലാവതി'യിൽ ക്രമീകരണത്തേയും തെരഞ്ഞെടുക്കലിന്റെയും അങ്ക് പാഷ എന്ന പേരിൽ വിവരിക്കുന്നുണ്ട്. മഹാവീരൻ നേരത്തെ തന്നെ തെളിയിച്ചിരുന്ന ${}^nC_r$, ${}^nP_r$ എന്നിവയ്ക്കുള്ള പൊതുസൂത്രവാക്യങ്ങൾക്കു പുറമേ ഭാസ്കരാചാര്യർ നിരവധി സിദ്ധാന്തങ്ങളും ഫലങ്ങളും തെളിയിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ഭാരതത്തിനുവെളിയിൽ ക്രമീകരണങ്ങളേയും തെരഞ്ഞെടുക്കലിനേയും പറ്റിയുള്ള പഠനത്തിനു തുടക്കം കുറിച്ചത് ചൈനയിൽ രചിക്കപ്പെട്ട ഇ-ചിങ് (മാറ്റത്തിന്റെ പുസ്തകം) എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിലാണ്. ഈ ഗ്രന്ഥത്തിന്റെ ഏകദേശ കാലം നിർണയിക്കാൻ പ്രയാസമാണ്, കാരണം ബി.സി. 213 ൽ രാജ്യത്തെ എല്ലാ ഗ്രന്ഥങ്ങളും കൈയെഴുത്ത് പ്രതികളും കത്തിച്ചുകളയാൻ ഒരു ചക്രവർത്തി ഉത്തരവിട്ടു. ഭാഗ്യവശാൽ ആ ഉത്തരവ് പൂർണമായി നടപ്പായില്ല. ഗ്രീസുകാരും ലാറ്റിൻ എഴുത്തുകാരും അങ്ങിങ്ങായി ചില കണ്ടുപിടുത്തങ്ങൾ ക്രമീകരണങ്ങളേയും തെരഞ്ഞെടുക്കലിനേയും പറ്റി നടത്തിയിട്ടുണ്ട്.

അറബി, ഹീബ്രു എഴുത്തുകാർ ജ്യോതിശാസ്ത്ര പഠനത്തിന് ക്രമീകരണത്തിന്റെയും തെരഞ്ഞെടുക്കലിന്റെയും ആശയം ഉപയോഗിച്ചു. ഉദാഹരണത്തിന്, അറിയപ്പെടുന്ന ഗ്രന്ഥങ്ങളെ രണ്ട്, മൂന്ന് എന്നിങ്ങനെ ഒരു സമയം എടുത്താൽ എത്ര തെരഞ്ഞെടുക്കലുണ്ടാവുമെന്ന് റബി ബെൻ എസ്ര കണക്കാക്കിയിരുന്നു. ഇത് ഏകദേശം 1140 ൽ ആണ്. റബി ബെൻ എസ്രയ്ക്ക് ${}^nC_r$ ന്റെ സൂത്രവാക്യം നിശ്ചയമില്ലായിരുന്നെന്നു വേണം അനുമാനിക്കാൻ. എന്നിരുന്നാലും നിശ്ചിത $n$ നും $r$ നും ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ എന്ന ഫലം അദ്ദേഹത്തിന് അറിയാമായിരുന്നു. 1321 ൽ മറ്റൊരു ഹീബ്രു എഴുത്തുകാരനായ ലെവി ബെൻ ഗെർസൺ ${}^nP_r$ നും ${}^nP_n$ നും ${}^nC_r$ നും ഒരു പൊതുസൂത്രവാക്യം കണ്ടുപിടിച്ചു.

സ്വിറ്റ്സർലൻഡുകാരനായ ജേക്കബ് ബെർണൂലി (1654 – 1705) ആണ് തന്റെ ആർസ് കൺജക്ടൻസി എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിൽ ക്രമീകരണത്തെയും തെരഞ്ഞെടുക്കലിനെപറ്റി സവിസ്തരം പ്രതിപാദിച്ചത്. ഈ ഗ്രന്ഥം അദ്ദേഹത്തിന്റെ മരണാന്തരം 1713 ൽ പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു. ഇന്നു നമ്മൾ പഠിക്കുന്ന രീതിയിൽ ക്രമീകരണങ്ങളുടെയും തെരഞ്ഞെടുക്കലിന്റെയും അവതരണം ഈ ഗ്രന്ഥത്തിലേതാണ്.