അധ്യായം 14

T1N9H7

ദോലനങ്ങൾ (OSCILLATIONS)

14.1 ആമുഖം
14.2 ക്രമാവർത്തനദോലനചലനങ്ങൾ
14.3 സരളഹാർമോണികചലനം
14.4 സമവർത്തുളചലനവും ഹാർമോണികചലനവും
14.5 സരളഹാർമോണികചലനത്തിന്റെ പ്രവേഗവും ത്വരണവും
14.6 സരളഹാർമോണിക ചലനത്തിനുവേണ്ട ബലനിയമം
14.7 സരളഹാർമോണികചലനത്തിലെ ഊർജം
14.8 സരളഹാർമോണികചലനത്തിൽ ഏർപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഏതാനും വ്യൂഹങ്ങൾ
14.9 അവമന്ദിത സരളഹാർമോണിക ചലനം
14.10 പ്രണോദിത ദോലനങ്ങളും അനുനാദവും

സംഗ്രഹം
വിചിന്തന വിഷയങ്ങൾ
പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ
അധിക പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ
അനുബന്ധം

14.1 ആമുഖം

നമ്മുടെ നിത്യജീവിതത്തിൽ പല തരത്തിലുള്ള ചലനങ്ങൾ കാണാറുണ്ട്. അവയിൽ ഏതാനും ചില ചലനങ്ങളെക്കുറിച്ച് നിങ്ങൾ മുൻ ക്ലാസ്സുകളിൽ പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു. ഉദാഹരണം നേർരേഖാ (rectilinear) ചലനം, പ്രോജക്ടൈൽ (projectile) ചലനം. ഈ രണ്ടു ചലനങ്ങളും ആവർത്തന ചലനങ്ങൾ അല്ല. സമവർത്തുള (uniform circular) ചലനങ്ങളെക്കുറിച്ചും, സൗരയൂഥത്തിലെ ഗ്രഹങ്ങളുടെ പരിക്രമണ (orbital) ചലനങ്ങളെക്കുറിച്ചും നാം പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഈ ചലനങ്ങളിൽ തുല്യ ഇടവേളകളിൽ ചലനം ആവർത്തിക്കപ്പെടുന്നു. അതായത് ഇവ ക്രമാവർത്തന (periodic) ചലനങ്ങൾ ആണ്. നിങ്ങളുടെ കുട്ടിക്കാലത്ത്, ഊഞ്ഞാലിൽ ആടിയോ, അല്ലെങ്കിൽ തൊട്ടിലിൽ ആടിയോ നിങ്ങൾ രസിച്ചിട്ടുണ്ടാകും. കുട്ടിക്കാലത്തെ ഊഞ്ഞാലാട്ടവും, തൊട്ടിലാട്ടവുമൊക്കെ മധുര സ്മരണകളായി നിങ്ങളുടെ മനസ്സിൽ ഇപ്പോഴുമുണ്ടാകും. ഈ രണ്ടു ചലനങ്ങളും ആവർത്തന ചലനങ്ങളുടെ പ്രകൃതമുള്ളതും എന്നാൽ ഗ്രഹങ്ങളുടെ പരിക്രമണചലനങ്ങളിൽ നിന്നും വ്യത്യസ്തവും ആണ്. ഇവിടെ വസ്തു സന്തുലിതസ്ഥാന (mean position) ത്തിന്റെ ഇരുവശങ്ങളിലേക്കും ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നു. ഒരു പെൻഡുലം ക്ലോക്കിലെ പെൻഡുലത്തിനു ഇതേതരം ചലനമാണ്. ഇളംകാറ്റിൽ മരച്ചില്ലകളുടെയും ഇലകളുടെയും ദോലനം, നങ്കൂരമിട്ടിരിക്കുന്ന ബോട്ടിന്റെ ആട്ടം, കാറിന്റെ എഞ്ചിനുള്ളിലെ പിസ്റ്റണിന്റെ ചലനം തുടങ്ങിയവയെല്ലാം മുന്നോട്ടും പിന്നോട്ടുമുള്ള ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങളാണ്. ഇങ്ങനെയുള്ള ആവർത്തന ചലനങ്ങളെയാണ് ദോലന ചലനങ്ങൾ (oscillatory motion) എന്നു വിളിക്കുന്നത്. ഇത്തരത്തിലുള്ള ചലനത്തെക്കുറിച്ചാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം പഠിക്കുന്നത്.

ദോലന ചലനങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനം ഊർജതന്ത്രത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന ശിലകളിലൊന്നാണ്. ഇതിന്റെ ആശയങ്ങൾ അറിഞ്ഞിരിക്കേണ്ടത് ഭൗതികപ്രതിഭാസങ്ങളെ മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് ആവശ്യമാണ്. ഗിറ്റാർ, വയലിൻ തുടങ്ങിയ സംഗീത ഉപകരണങ്ങളിൽ കമ്പനത്തിലൂടെ മനോഹരമായ ശബ്ദം ഉൽപാദിപ്പിക്കുന്ന കമ്പികൾ ഉണ്ടെന്ന്

നമുക്കറിയാം. ഫോണിലെയും സ്പീക്കറിലേയും വലി ച്ചുകെട്ടിയിരിക്കുന്ന തരം ഡയഫ്രം, തുടങ്ങിയവ അവ യുടെ സന്തുലിത സ്ഥാനത്ത് നിന്നും മുന്നോട്ടും പിന്നോട്ടും ചലിച്ചാണ് ശബ്ദം ഉണ്ടാക്കുന്നത് ശബ്ദത്തിന്റെ വ്യാപനം സാധ്യമാകുന്നത് വായു തന്മാത്രകളുടെ കമ്പനം കാരണമാണ്. അതുപോലെ ഒരു ഖര പദാർത്ഥത്തി ലെ ആറ്റങ്ങൾ സന്തുലിത സ്ഥാനത്തിനിരുവശങ്ങളി ലേക്കും ദോലനം ചെയ്യുകയും, ചൂട് എന്ന അനുഭവം പകരുകയും ചെയ്യുന്നു. സാറ്റലൈറ്റ് ട്രാൻസ്മിറ്റർ, ടെലിവിഷൻ, റേഡിയോ മുതലായവയിലെ ആന്റിന, തുട ങ്ങിയവ ഇലക്ട്രോണുകളുടെ ദോലനങ്ങൾ വഴി സന്ദേശങ്ങൾ കൈമാറുന്നു.

ക്രമാവർത്തന ചലനം,പ്രത്യേകിച്ച് ദോലനചലനം പഠിക്കുന്നതിന് സ്ഥാനാന്തരം, ആയതി (amplitude), ആവൃത്തി (frequency), ക്രമാവർത്തനകാലം (period), ഫെയ്സ് (phase) എന്നീ ആശയങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കേണ്ട തുണ്ട്.

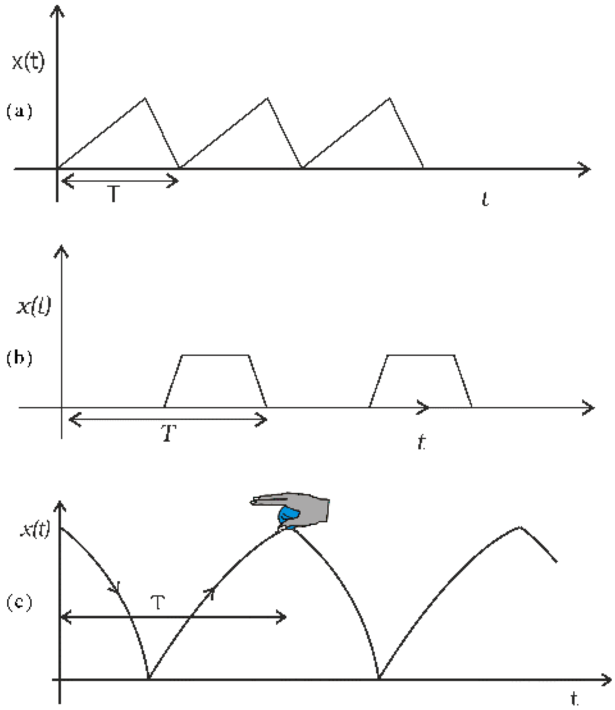
14.2 ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങളും ദോലന ചലങ്ങളും (PERIODIC AND OSCILLATORY MOTIONS)

ചിത്രം 14.1 കാണിക്കുന്നത് ക്രമാവർത്തന ചലന ങ്ങളാണ്. ഒരു ഷഡ്പദം ഒരു ഭിത്തിയുടെ മുകളിലേക്ക് കയറി, ചലനം തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തേക്ക് വീഴുന്നു വെന്നു സങ്കൽപ്പിക്കുക. വീണ്ടും തുല്യ ഇടവേളകളിൽ അതേ ചലനം ആവർത്തിക്കുന്നു എന്നും കരുതുക. ഈ ചലനത്തിലെ സഞ്ചരിച്ച ഉയരവും, സമയവും തമ്മിലുള്ള ഒരു ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 14.1(a) ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഒരു കുട്ടി, തുല്യ സമയ ഇടവേളകളിൽ ഒരു ചവിട്ടുപടികയറിയിറങ്ങുന്ന പ്രവർത്തനം ആവർത്തിക്കുന്നു എന്നു കരുതുക. ഈ പ്രവർത്തനത്തിലെ സമയവും, കുട്ടിയുടെ സ്ഥാനവും തമ്മിലുള്ള ഗ്രാഫ് ചിത്രം 14.1 (b) യിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് പോലെ ആയിരിക്കും. ഒരു സമതല പ്രതലത്തിനും, നിശ്ചിത ഉയരത്തിൽ പിടിച്ചിരിക്കുന്ന നമ്മുടെ കൈപ്പത്തിക്കും ഇടയിൽ തുടർച്ചയായി പ്രതിപതിച്ചു കൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു പന്ത് പരിഗണിക്കുക. പന്ത് സഞ്ചരിക്കുന്ന ഉയരവും, അതിനെടുക്കുന്ന സമയവും തമ്മിലുള്ള ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 14.1(c) യിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഈ ഗ്രാഫിലെ വളഞ്ഞ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളും താഴെ പറയുന്ന ന്യൂട്ടന്റെ ചലന സമവാക്യ ങ്ങളിൽ (ഭാഗം 3.6 കാണുക) u - വിന് ഒരോ പ്രതിപതന ത്തിലും വ്യത്യസ്ത വിലകൾ നല്കിയാൽ ലഭിക്കുന്ന പരബോളയുടെ ഭാഗങ്ങളാണ്.

$h \ -ut + \frac{1}{2}gt^2$ (താഴോട്ടുള്ള ചലനത്തിന്)

$h \ -ut - \frac{1}{2}gt^2$ (മുകളിലേക്കുള്ള ചലനത്തിന്)

ഇവയെല്ലാം ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണ ങ്ങളാണ്. അതായത് തുല്യ ഇടവേളകളിൽ ആവർത്തി ച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ചലനങ്ങളെ ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങൾ (Periodic motion) എന്നു വിളിക്കുന്നു.



ചിത്രം 14.1 ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങൾ. ഒരോ ഉദാഹരണത്തിലും ആവർത്തന കാലം T കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

ക്രമാവർത്തന ചലനത്തിൽ ഏർപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ സന്തുലിതസ്ഥാനം (equilibrium position) മിക്ക സാഹചര്യങ്ങളിലും അതിന്റെ സഞ്ചാര പാതയിലെവിടെയെങ്കിലും ആയിരിക്കും. വസ്തു ഈ സ്ഥാന ത്തായിരിക്കുമ്പോൾ, അതിൽ ഒരു പരിണത ബാഹ്യ ബലവും പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നില്ല. അതു കൊണ്ട്, ഈ സ്ഥാനത്ത് നിശ്ചലാവസ്ഥയിലുള്ളൊരു വസ്തു, അതേ സ്ഥാനത്ത് എപ്പോഴും തുടരുവാനുള്ള പ്രവണത കാണിക്കും. സന്തുലിതസ്ഥാനത്തു നിന്ന് വസ്തുവിന് ചെറിയൊരു സ്ഥാനാന്തരം സംഭവിക്കുകയാണെങ്കിൽ, ആ സ്ഥാനത്തേക്ക് തിരിച്ചെത്തിക്കാൻ പരിശ്രമിക്കുന്ന ഒരു ബലം വസ്തുവിൽ ഉടലെടുക്കുന്നു. ഈ ബലമാണ് വസ്തുവിന്റെ ദോലനം അല്ലെങ്കിൽ കമ്പനം സാധ്യമാ

ക്കുന്നത്. ഉദാഹരണത്തിന് അർദ്ധ ഗോളാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിൽ വെച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു പന്തിന്റെ സന്തുലിതസ്ഥാനം പാത്രത്തിന്റെ മധ്യ ബിന്ദുവിലാണ്. ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്നും കുറച്ച് ദൂരത്തേക്ക് വസ്തുവിന് സ്ഥാനാന്തരം ലഭിക്കുകയാണെങ്കിൽ, വസ്തു ദോലനത്തിലേർപ്പെടും. എല്ലാ ദോലന ചലനങ്ങളും ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങളാണ്. എന്നാൽ എല്ലാ ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങളും ദോലന ചലനങ്ങളല്ല. സമവർത്തുള ചലനം ക്രമാവർത്തന ചലനമാണെങ്കിലും ദോലനചലനമല്ല.

ദോലനങ്ങളും കമ്പനങ്ങളും തമ്മിൽ സാരമായ വ്യത്യാസമില്ല. ചെറിയ ആവൃത്തിയിലുള്ള ചലനങ്ങളെ ദോലനങ്ങളെന്നും (ഒരു മരത്തിലെ ശിഖരത്തിന്റെ ദോലനം മാതിരി), കൂടിയ ആവൃത്തിയിലുള്ളതിനെ കമ്പനം (സംഗീത ഉപകരണത്തിലെ നൂൽ കമ്പിയുടെ കമ്പനം മാതിരി) എന്നും വിളിക്കുന്നു.

ദോലന ചലനത്തിലെ ഏറ്റവും ലഘുവായ ചലനമാണ് സരളഹാർമോണിക ചലനം (simple harmonic motion). ദോലന വസ്തുവിൻമേലുള്ള ബലം, സന്തുലിത സ്ഥാനത്തുനിന്നുള്ള സ്ഥാനാന്തരത്തിന് നേർ അനുപാതത്തിലാണെങ്കിൽ, ഇത്തരം ചലനം ഉണ്ടാക്കുന്നു. കൂടാതെ ദോലന ചലനത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിലും ഈ ബലത്തിന്റെ ദിശ സന്തുലിത സ്ഥാനത്തിന്റെ നേർക്കായിരിക്കും

ദോലന വസ്തുക്കൾ, അവസാനം നിശ്ചലാവസ്ഥയിലാകുന്നത് അവയുടെ സന്തുലിത സ്ഥാനത്താണ്. ഘർഷണം, മറ്റുശോഷണ കാരണങ്ങൾ തുടങ്ങിയവ മൂലമുണ്ടാകുന്ന അവമന്ദനമാണ് (damping) വസ്തുവിനെ നിശ്ചലാവസ്ഥയിലാക്കുന്നത്. എന്നിരുന്നാലും, ചില ബാഹ്യ ക്രമാവർത്തന ഏജൻസികളുടെ സഹായത്തോടെ അവയെ ദോലന ചലനത്തിൽ നിലനിർത്താൻ കഴിയും. ഈ അധ്യായത്തിന്റെ അവസാന ഭാഗത്ത് അവമന്ദിതദോലനത്തെക്കുറിച്ചും (damped oscillation), പ്രണോദിതദോലനത്തെക്കുറിച്ചും (forced oscillation) നാം പഠിക്കും.

ഏതൊരു പദാർത്ഥ മാധ്യമത്തെയും വളരെയധികം യുഗ്മദോലകങ്ങളുടെ (coupled oscillators) ഒരു വ്യൂഹമായി കാണാൻ കഴിയും. മാധ്യമത്തിലെ ഘടകങ്ങളുടെ കൂട്ടായ ദോലനങ്ങൾ തരംഗങ്ങളായി പ്രത്യക്ഷപ്പെടുന്നു. വൈദ്യുതകാന്തിക തരംഗങ്ങൾ, ജലതരംഗങ്ങൾ, ഭൂകമ്പ തരംഗങ്ങൾ എന്നിവയെല്ലാം തരംഗങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

14.2.1 ക്രമാവർത്തനകാലവും ആവൃത്തിയും. (Period and frequency)

തുല്യ ഇടവേളകളിൽ ആവർത്തിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ചലനങ്ങളെ ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നെന്ന് നമ്മൾ പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ചലനം ആവർത്തിക്കുന്നതിനാവശ്യമായ ഏറ്റവും ചെറിയ ഇടവേളയെ, അതിന്റെ ആവർത്തനകാലം (period) എന്നു വിളക്കുന്നു. ഇതിനെ നമുക്ക് T എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ട് പ്രതിനിധാനം ചെയ്യാം. ആവർത്തന കാലത്തിന്റെ SI യൂണിറ്റ് സെക്കന്റ് ആണ്. സെക്കൻഡുകളുടെ തോത് ഉപയോഗിച്ച് ക്രമാവർത്തന ചലനം വിശകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ ചില ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങളുടെ വേഗം വളരെ കൂടിയതോ അല്ലങ്കിൽ കുറഞ്ഞതോ ആയിക്കാണാം. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ സമയത്തിന്റെ സൗകര്യപ്രദമായ മറ്റു ചില തോതുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഒരു ക്വാർട്സ് ക്രിസ്റ്റലിന്റെ (quatrz crystal) കമ്പനങ്ങളുടെ സമയാവർത്തനക്കാലത്തെ മൈക്രോസെക്കന്റ് (10^{-6}s) എന്ന ഏകകം ഉപയോഗിച്ചാണ് അളക്കുന്നത്. മൈക്രോ സെക്കൻഡിനെ μs എന്ന് ചുരുക്കിയെഴുതുന്നു. എന്നാൽ ബുധഗ്രഹത്തിന്റെ (Mercury) പരിക്രമണ സമയാവർത്തന കാലം 88 ഭൗമദിനങ്ങളാണ്. ഹാലിയുടെ വാൽനക്ഷത്രം (Halley's comet) 76 വർഷത്തിലൊരിക്കലാണ് പ്രത്യക്ഷപ്പെടുന്നത്. T യുടെ വ്യുൽക്രമം യൂണിറ്റ് സമയത്തിലുള്ള ആവർത്തനങ്ങളുടെ എണ്ണമാണ്. ഈ ഭൗതിക അളവിനെയാണ് ക്രമാവർത്തന ചലനത്തിന്റെ ആവൃത്തി (frequency) എന്ന് വിളിക്കുന്നത്. ν (ന്യൂ) എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ചാണ് ഇതിനെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നത്. ν യും T യും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

$$\nu \quad 1/T \quad \text{എന്നാണ്} \tag{14.1}$$

ν ന്റെ യൂണിറ്റ് s^{-1} ആണ്. ഹൈന്റിഷ് റുഡോൾഫ് ഹെർട്സ് (Heinrich Rudolph Hertz) എന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞന്റെ സ്മരണാർത്ഥം ആവൃത്തിക്ക് ഒരു പ്രത്യേക യൂണിറ്റ് നൽകി. അതിനെ ഹെർട്സ് (ചുരുക്ക രൂപത്തിൽ Hz) എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അതായത്

1 ഹെർട്സ് = 1 Hz = 1 ദോലനം പ്രതിസെക്കന്റ് = $1s^{-1}$.

ആവൃത്തി ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യ ആകണമെന്ന് നിർബന്ധമില്ല.

> ***ഉദാഹരണം 14.1*** ഒരു മിനിറ്റിൽ 75 പ്രാവശ്യം എന്ന തോതിൽ ഒരു ശരാശരി മനുഷ്യ ഹൃദയം മിടിക്കുന്നു. എങ്കിൽ അതിന്റെ ആവർത്തനകാലവും, ആവൃത്തിയും കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം ഹൃദയമിടിപ്പിന്റെ ആവൃത്തി = 75/(1 മിനുട്ട്)

$= 75/(60\ s)$

$= 1.25\ s^{-1}$

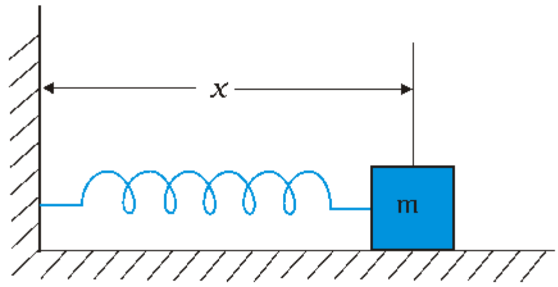
$= 1.25\ Hz$

ആവർത്തനകാലം $T = 1/(1.25\ s^{-1})$

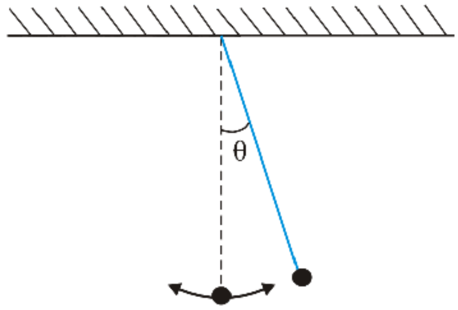
$= 0.8\ s$ ◀

14.2.2 സ്ഥാനാന്തരം (Displacement)

ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശത്തിന്റെ (position vector) മാറ്റമാണ് അതിന്റെ സ്ഥാനാന്തരമെന്ന് നമ്മൾ ഭാഗം 4.2 ൽ നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ സ്ഥാനാന്തരം (displacement) എന്ന വാക്ക് കൂടുതൽ പൊതുവായ അർത്ഥത്തിലാണ് നാം ഉപയോഗിക്കുന്നത്. നാം പരിഗണിക്കുന്ന ഏതൊരു ഭൗതിക സ്വാഭാവത്തിന്റെയും സമയാധിഷ്ഠിതമായ മാറ്റത്തെയാണ് ഇവിടെ സ്ഥാനാന്തരം കൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നത്. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു പ്രതലത്തിലൂടെ നേർരേഖയിൽ സഞ്ചരിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു പന്തിന്റെ കാര്യം പരിഗണിക്കുക. ഇതിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം, ആരംഭ ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള സമയാനുസൃത ദൂരമാണ്. നമ്മുടെ സൗകര്യത്തിനനുസരിച്ചാണ് ആരംഭ സ്ഥാനം നാം (Origin) തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നത്. ഒരറ്റം ഭിത്തിയോട് ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നതും, അടുത്ത അറ്റം ഒരു കട്ടയോട് ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നതുമായ ഒരു സ്പ്രിങ്ങ് പരിഗണിക്കുക. (ചിത്രം 14.2 (a) കാണുക) ഇത്തരം സ്പ്രിംഗുകളിലുണ്ടാകുന്ന ചലനങ്ങളിലും മറ്റു ദോലനങ്ങളിലും പൊതുവായി വസ്തുവിന്റെ സന്തുലിത സ്ഥാനത്തു നിന്നും, അതിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം അളക്കുന്നതാണ് സൗകര്യപ്രദം. ദോലന ചലനത്തിലുള്ള ഒരു സരളപെൻഡുലത്തിൽ (simple pendulam), അത് തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ലംബവുമായി അതുണ്ടാക്കുന്ന സമയാനുസൃത കോണിനേയാണ് സ്ഥാനാന്തരമായി കണക്കാക്കുന്നത് (ചിത്രം 14.2 (b) കാണുക). എല്ലായ്പ്പോഴും സ്ഥാനാന്തരം എന്ന പദം സ്ഥാനവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന എന്ന അർത്ഥത്തിൽ മാത്രമല്ല ഉപയോഗിക്കുന്നത്.



ചിത്രം 14.2(a) ഒരറ്റം ഭിത്തിൽ ഉറപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു സ്പ്രിങ്ങിന്റെ മറ്റേ അറ്റത്തു ഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന കട്ട ഘർഷണമില്ലാത്ത പ്രതലത്തിൽ ചലിക്കുന്നു. കട്ടയുടെ ചലനം ഭിത്തിയിൽ നിന്നുള്ള ദൂരം അല്ലെങ്കിൽ സ്ഥാനാന്തരം X- ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ വിവരിക്കാവുന്നതാണ്.



ചിത്രം 14.2(b) ദോലനം ചെയ്തുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു സരള പെൻഡുലം ലംബവുമായുള്ള കോണീയ സ്ഥാനാന്തരം () അടിസ്ഥാനമാക്കി ഈ ചലനം വിവരിക്കാവുന്നതാണ്.

നമുക്ക് മറ്റുപല തരത്തിലുമുള്ള സ്ഥാനാന്തചരങ്ങളെയും കാണാൻ സാധിക്കും. ഒരു a.c സെർക്കീട്ടിൽ, കപ്പാസിറ്ററിന് കുറുകേ സമയത്തിനനുസരിച്ച് മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്ന വോൾട്ടേജ്, ഒരു അസ്ഥിര (variable) സ്ഥാനാന്തരമാണ്. ഇതു പോലെ, ശബ്ദതരംഗത്തിന്റെ വ്യാപനത്തിൽ സമയത്തിനനുസരിച്ചുള്ള മർദ്ദവ്യതിയാനങ്ങൾ, പ്രകാശ തരംഗത്തിലെ വൈദ്യുത മണ്ഡലങ്ങളുടെയും കാന്തമണ്ഡലങ്ങളുടെയും വ്യതിയാനങ്ങൾ തുടങ്ങിയവ, വ്യത്യസ്ത സന്ദർഭങ്ങളിലുള്ള സ്ഥാനാന്തരങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. അസ്ഥിര സ്ഥാനാന്തരത്തിന് പോസിറ്റീവോ നെഗറ്റീവോ ആയ വിലകൾ ഉണ്ടാകാം.

ക്രമാവർത്തന ചലനത്തിന്റെ പരീക്ഷണങ്ങളിൽ അവയുടെ സ്ഥാനാന്തരം പല സമയ ഇടവേളകളിൽ അളക്കാറുണ്ട്. ദോലനങ്ങളിൽ ഉണ്ടാകുന്ന സ്ഥാനാന്തരം സാധാരണയായി സമയത്തിന്റെ ഫലനമായാണ് ഗണിതരൂപത്തിൽ എഴുതുന്നത്. ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങളിൽ ഇത്തരം ഫലനങ്ങൾ (functions) സമയ ഇടവേളകളുടെ

ക്രമാവർത്തന സ്വഭാവം കാണിക്കും. ലഘുവായ ക്രമാവർത്തന ഫലനങ്ങളിലൊന്നിനെ

$$f(t) \quad A \cos \omega t$$ എന്ന് എഴുതാം (14.3a)

ദോലനങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട പരീക്ഷണങ്ങളിൽ വ്യത്യസ്ത സമയങ്ങളിൽ സ്ഥാനാന്തരം അളക്കുന്നു. സമയത്തിന്റെ ഒരു ഗണിത ഫലനം (function) ആയി സ്ഥാനാന്തരത്തെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യാൻ കഴിയും. ഈ ഫലനത്തിന്റെ ആർഗ്യുമെൻറ് (argument) ωt ആണ്. 2π യുടെ പൂർണ്ണാങ്ക ഗുണിതങ്ങൾ ωt യുമായി ക്രമമായി കൂട്ടിയാലും അതിന്റെ വില സ്ഥിരമായി നില്ക്കുന്നു. അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ ഫലനം f(t) ക്രമാവർത്തന ഫലനം ആണ്. ഇതിന്റെ ആവർത്തനകാലം

$$T \quad \frac{2\pi}{\omega}$$ ആണ്. (14.3b)

അതായത് T ആവർത്തനകാലമുള്ള ഫലനം f(t), ക്രമാവർത്തനത്തിലാണെങ്കിൽ, f(t) യെ നമുക്ക്

$$f(t) = f(t \quad T)$$ എന്നെഴുതാൻ കഴിയും.

ഒരു സൈൻ ഫലനം, $f(t)= A \sin \omega t$, പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ ഈ ഗണിതഗുണം അത് പാലിക്കുന്നതായി കാണാം.

$$f(t) = A \sin \omega t \quad B \cos \omega t$$ (14.3c)

പോലെയുള്ള സൈൻ ഫലനത്തിന്റെയും കോസ് ഫലനത്തിന്റേയും കൂടിച്ചേരലും, ഒരേ ആവർത്തനകാലം. T, യുള്ള ക്രമാവർത്തന ഫലനമാണ്.

$A \quad D \cos \phi$, $B \quad D \sin \phi$ എന്നു കരുതുകയാണെങ്കിൽ സമവാക്യം (14.3c) അനുസരിച്ച്

$$f(t) \quad D \sin(\omega t + \phi),$$ (14.3d)

ഇവിടെ D യും ϕ യും സ്ഥിരാങ്കങ്ങളാണ്.

ഇവ $D \quad \sqrt{A^2 + B^2}$ and $\phi = \tan^{\quad 1}\left(\frac{B}{A}\right)$ എന്നിങ്ങനെയാണ്

ഏതൊരു ക്രമാവർത്തന ഫലനത്തെയും, വ്യത്യസ്ത ആവർത്തന കാലവും അനുയോജ്യമായ ഗുണാങ്കങ്ങളും ഉള്ള സൈൻ ഫലനങ്ങളുടെയും കോസ് ഫലനങ്ങളുടെയും ശ്രേണിയായി എഴുതാൻ കഴിയുമെന്ന് ഴാങ് ബാപ്റ്റിസ്റ്റ് ജോസഫ് ഫൂറിയർ (Jean Baptiste Joseph Fourier) എന്ന ഫ്രഞ്ച് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ തെളിയിച്ചു.ഈ സവിശേഷമായ ഫലം കാരണമാണ് സൈൻ ഫലനത്തിനും കോസ് ഫലനത്തിനും വലിയ പ്രാധാന്യം ലഭിച്ചത്.

▶ ***ഉദാഹരണം 14.2*** താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന സമയത്തിന്റെ ഏകദങ്ങളിൽ ഏതൊക്കെയാണ് (a) ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങൾ (b) ക്രമാവർത്തനങ്ങൾ അല്ലാത്തത് എന്ന് കണ്ടെത്തുക ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ ആവർത്തനകാലം കണ്ടു പിടിക്കുക. (ω ഒരു പോസിറ്റീവ് സ്ഥിരാങ്കമാണെന്നു കരുതുക)

(i) $\sin \omega t + \cos \omega t$

(ii) $\sin \omega t + \cos 2\omega t + \sin 4\omega t$

(iii) $e^{-\omega t}$

(iv) $\log(\omega t)$

ഉത്തരം

(i) $\sin \omega t + \cos \omega t$ ഒരു ക്രമാവർത്തന ഫലനമാണ്. ഇതിനെ $\sqrt{2}\ \sin(\omega t + \pi/4)$. എന്നും എഴുതാം

അതായത് $\sqrt{2}\ \sin(\omega t+\pi/4) = \sqrt{2}\ \sin(\omega t+\pi/4+2\pi)$

$= \sqrt{2}\ \sin[\omega(t+2\pi/\omega)+\pi/4]$

ഇവിടെ ഫലനത്തിന്റെ ആവർത്തനകാല സമയം $2\pi/\omega$ ആണ്.

(ii) ഇത് ക്രമാവർത്തന ചലനത്തിന് ഉദാഹരണമാണ്. ഇതിലെ ഒരോ പദവും വ്യത്യസ്ത കോണീയ ആവൃത്തിയുള്ള ക്രമാവർത്തന ഫലനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇവിടെ $\sin \omega t$ യുടെ ആവർത്തനകാലം $T_0 = 2\pi/\omega$; $\cos 2\omega t$ യുടെ ആവർത്തനകാലം $\pi/\omega = T_0/2$; $\sin 4\omega t$ യുടെ ആവർത്തനകാലം $2\pi/4\omega = T_0/4$. എന്നിങ്ങനെയാണ്. ആദ്യത്തെ പദത്തിന്റെ ആവർത്തന കാലം രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും പദങ്ങളുടെ ആവർത്തനകാലത്തിന്റെ ഗുണനഫലമാണ്. മൂന്ന് പദങ്ങളുടെയും പൊതുവായ ആവർത്തന കാലം T_0 ആണ്. അതുകൊണ്ട് ഈ ഫലനം, $2\pi/\omega$ ആവർത്തന കാലമുള്ള ഒരു ക്രമാവർത്തന ചലനമാണ്.

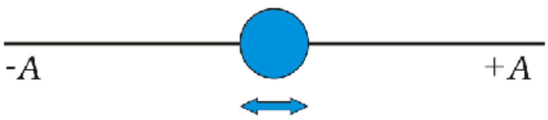
(iii) $e^{-\omega t}$ ക്രമാവർത്തന ഫലനം അല്ല. സമയം കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് ഇതിന്റെ വില തുടർച്ചയായി കുറയുന്നു. സമയത്തിന്റെ വില അനന്തതയിലേക്ക് നീങ്ങുമ്പോൾ വില പൂജ്യത്തിലേക്ക് നീങ്ങുന്നു. അതു കൊണ്ട് ഒരിക്കലും ഒരേ വില ആവർത്തിക്കപ്പെടുന്നില്ല.

(iv) $\log(\omega t)$ ഫലനത്തിന്റെ വില സമയത്തിനനുസരിച്ച് ക്രമമായി കൂടുന്നു. വില ആവർത്തിക്കപ്പെടാത്തതു കൊണ്ട് ഇത് ക്രമാവർത്തന ഫലനമല്ല. സമയം അനന്തതയിലേക്കടുക്കുമ്പോൾ, വിലയും

അനന്തതയിലേക്ക് നീങ്ങുന്നു. അതു കൊണ്ട് ഇത് ഏതെങ്കിലും ഭൗതികസ്ഥാനാന്തരത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നില്ല. ◀

14.3 സരളഹാർമോണികചലനം (SIMPLE HARMONIC MOTION)

ചിത്രം 14.3 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ X അക്ഷത്തിലെ മൂലബിന്ദുവിനെ സന്തുലിത സ്ഥാനമാക്കി, +A - A ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിൽ ഒരു വസ്തു മുന്നോട്ടും പുറകോട്ടും കമ്പനം ചെയ്യുന്നതായി പരിഗണിക്കുക. വസ്തുവിന്റെ പരമാവധി വേഗം മൂലബിന്ദുവിലും പൂജ്യം



ചിത്രം 14.3 X - അക്ഷത്തിന്റെ മൂലബിന്ദുവിനെ ആശ്രയിച്ച്, +A, -A എന്നീ അതിരുകൾക്കിടയിൽ മുന്നിലേക്കും പിന്നിലേക്കും കമ്പനം ചെയ്യുന്ന വസ്തു.

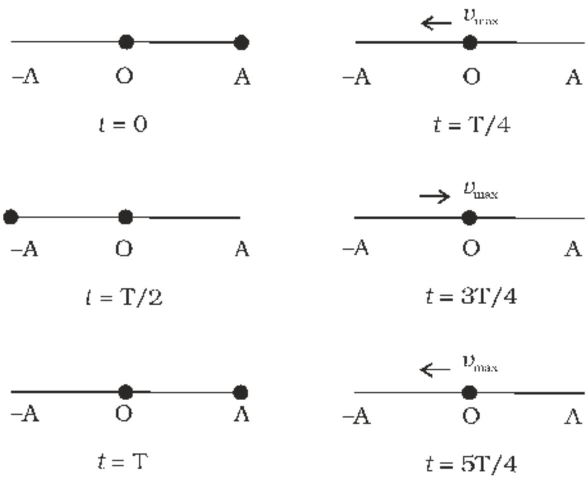
വേഗം ±A യിലും ആകത്തക്കവിധമാണ് ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നത്. വസ്തു +A യിൽ നിന്ന് ചലനം തുടങ്ങുമ്പോഴുള്ള സമയം പൂജ്യമായും, വീണ്ടും അത് +A യിൽ തിരിച്ചെത്തുമ്പോഴുള്ള സമയം t = T ആയും തെരഞ്ഞെടുത്തിരിക്കുന്നു. ഈ ഭാഗത്തിൽ ഈ ചലനത്തെക്കുറിച്ചാണ് നമ്മൾ വിവരിക്കുന്നത്. അതിനു ശേഷം ഇതെങ്ങനെ സാധ്യമാകുന്നുവെന്ന് നമ്മൾ ചർച്ച ചെയ്യും. ഈ കമ്പന ചലനത്തിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (14.4)$$

എന്ന സമവാക്യം അനുസരിച്ചാണെങ്കിൽ ആ വസ്തു സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിലാണ് എന്നു പറയാം.

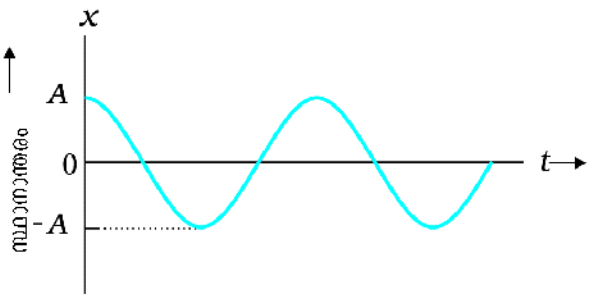
ഇവിടെ A, ω, ϕ എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ ആണ്.

എല്ലാക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങളും സരളഹാർമോണിക മല്ല. സരള ഹാർമോണികം എന്നാൽ ചലന വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം ഒരു സിനുസോയിഡൽ ഫലനമാണെങ്കിൽ അത്തരം ചലനങ്ങളെല്ലാം സരള ഹാർമോണിക ചലനങ്ങളായിരിക്കും. സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിനു വിധേയമായിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ T/4 സമയ ഇടവേളകളിലുള്ള സ്ഥാനാന്തരമാണ് ചിത്രം 14.4 ൽ നൽകിയിട്ടുള്ളത്. ഇവിടെ T എന്നത് ഈ ചലനത്തിന്റെ ആവർത്തന കാലമാണ്. ഗ്രാഫിന്റെ ആകാരം



ചിത്രം 14.4 സരളഹാർമോണിക ചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ t=0, T/4, T/2, 3T/4, T എന്നീ സമയങ്ങളിലുള്ള സ്ഥാനം ചിത്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ചലനം സ്വയം ആവർത്തിക്കപ്പെടുന്ന സമയ ഇടവേള ആണ് T. ചലനത്തിന്റെ ആരംഭദിശയായി (t=0) ഏതു ബിന്ദു തിരഞ്ഞെടുത്താലും T യുടെ വില സ്ഥിരമായിരിക്കും. വസ്തുവിന്റെ പരമാവധി വേഗം സ്ഥാനാന്തരം പൂജ്യമായിരിക്കുമ്പോഴും (x=0) പൂജ്യം വേഗം ചലനത്തിന്റെ അതിരായി വരുന്ന ബിന്ദുക്കളിലുമാണ്.

നിർണ്ണയിക്കുന്ന അളവുകൾ A, ω, ϕ ഇവയുടെ പേരുകൾ സഹിതം ചിത്രം 14.6 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇനി നമുക്ക് ഈ അളവുകളെ നിർവ്വചിക്കാം.

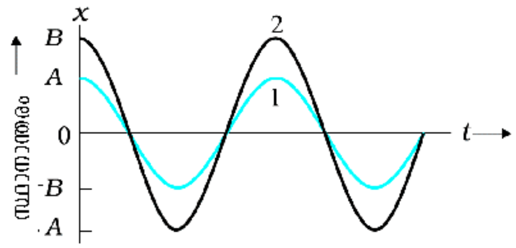


ചിത്രം 14.5 സമവാക്യം (14.4) പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്ന ചലനത്തിൽ, സ്ഥാനാന്തരം, x, സമയത്തിന്റെ ഫലനത്തിലുള്ള ഒരു ഗ്രാഫ്

$x(t)$	:	സ്ഥാനാന്തരം 'x' സമയം 't' യുടെ ഫലനമായി
A	:	ആയതി
ω	:	കോണീയ ആവൃത്തി
$\omega t + \phi$	:	ഫേസ് (സമയ ബന്ധിതം)
ϕ	:	ഫേസ് സ്ഥിരാങ്കം

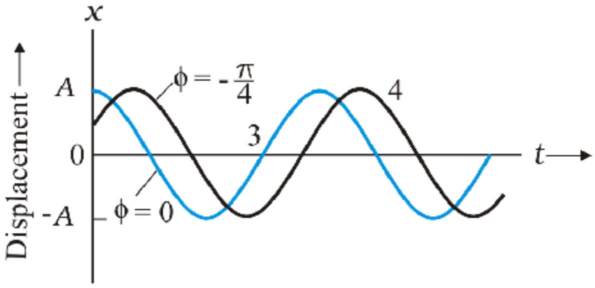
ചിത്രം 14.6 സമവാക്യം (14.4) ലെ പദങ്ങളുടെ പരാമർശങ്ങൾ

അളവ്, A യെ ആയതി (amplitude) എന്ന് വിളിക്കുന്നു. വസ്തുവിന്റെ ഇരുവശങ്ങളിലൊന്നിലേക്കുള്ള പരമാവധി സ്ഥാനന്തരത്തെയാണ് ഈ പോസിറ്റീവ് സ്ഥിരാങ്കം പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നത്. സമവാക്യം (14.4) ലെ കൊസൈൻ ഫലനം ±1 അതിരുകൾക്കുള്ളിൽ വ്യത്യാസപ്പെടുന്നു.അതുകൊണ്ട് സ്ഥാനാന്തരം ±A അതിരുകൾക്കുള്ളിൽ വ്യത്യാസപ്പെടുന്നു. ചിത്രം 14.7 (a) ൽ, സമവാക്യം (14.4) നെ A, B എന്നീ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ആയതികളിൽ വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഗ്രാഫുകൾ രേഖകൾ 1, 2 എന്നിവയാണ്. ഈ ഗ്രാഫുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ആയതിയുടെ പ്രധാന്യം വിവരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 14.7 (a) $\phi = 0$ എന്ന് കരുതിയാൽ, സമവാക്യം (14.4). ൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്ന സ്ഥാനാന്തരം, സമയത്തിന്റെ ഫലനത്തിനുള്ള ഗ്രാഫ് 1, 2 എന്നീ വക്രരേഖകളിൽ ആയതി യഥാക്രമം A യും B യും ആണ്.

സമവാക്യത്തിലെ സമയത്തിനനുസരിച്ച് വ്യത്യാസപ്പെടുന്ന $(\omega t + \phi)$ യെ ചലനത്തിന്റെ ഫേസ് എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഇത് ഒരു നിശ്ചിത സമയത്തിലെ ചലനാവസ്ഥ (state of motion) യെ വിവരിക്കുന്നു. ഇവിടെ ϕ സ്ഥിരാങ്കത്തെ ഫേസ് സ്ഥിരാങ്കം (അല്ലെങ്കിൽ ഫേസ് കോൺ) എന്നു വിളിക്കുന്നു. $t = 0$ സമയത്തെ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരത്തെയും പ്രവേഗത്തെയും ആശ്രയിച്ചാണ് ϕ യുടെ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുന്നത്. $t = 0$ സമയത്തെ $(\omega t + \phi)$ യുടെ വിലയായ ϕ ആണ് ഫേസ് സ്ഥിരാങ്കം. (ചിത്രം 14.7 (b) ഉപയോഗിച്ച് ഇത് കൂടുതൽ നന്നായി മനസ്സിലാക്കാം. ഈ ചിത്രത്തിൽ 3, 4 എന്നീ വക്രരേഖകൾ, സമവാക്യം (14.4) ലെ ϕ ഫേസ് സ്ഥിരാങ്കത്തിന്റെ രണ്ട് വിലകളെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്ന ഗ്രാഫുകളാണ്. ഫേസ് സ്ഥിരാങ്കം, വസ്തുവിന്റെ പ്രാരംഭ അവസ്ഥകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു എന്ന് കാണാൻ കഴിയും. സ്ഥിരാങ്കം, ω യെ ചലനത്തിന്റെ കോണീയാവൃത്തി എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഇത് T യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 14.7 (b) സമവാക്യം (14.4) ന്റെ ഗ്രാഫാണ് ഇത്. ഗ്രാഫ് 3, 4 എന്നിവയ്ക്ക് ϕ വില യഥാക്രമം 0 വും $\pi/4$ ഉം ആണ്. എന്നാൽ അവയുടെ ആയതി A തുല്യമാണ്

ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ലഭിക്കുന്നതിനായി $\phi = 0$ എന്ന സങ്കൽപ്പത്തിൽ സമവാക്യം (14.4) പരിഗണിക്കുക. അതായത് സമവാക്യം (14.4) അപ്പോൾ $x(t) = A \cos \omega t$ എന്നാകുന്നു.

ഈ ചലനം T ആവർത്തനകാലമുള്ള ഒരു ക്രമാവർത്തന ചലനമാണ്. അതു കൊണ്ട് വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം x(t) യുടെ വില, ഒരു ആവർത്തന കാലത്തിനു ശേഷം, ആദ്യത്തെ വിലയിലേക്ക് തിരിച്ചെത്തുന്നു. അതായത് t യുടെ എല്ലാ വിലയിലും $x(t) = x(t+T)$ ആണ്. ഈ നിബന്ധന അനുസരിച്ച്

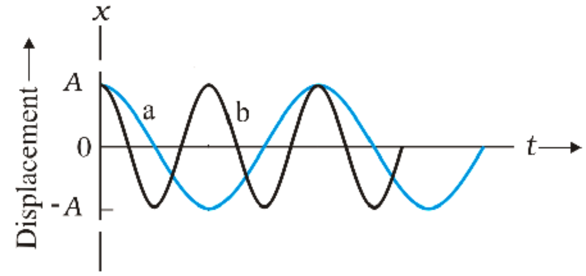
$$A \cos \omega t = A \cos \omega (t + T) \qquad (14.6)$$

എന്നെഴുതാം. ഒരു കൊസൈൻ ഫലനം ആവർത്തിക്കുന്നത് അതിന്റെ ആർഗുമെന്റ് (ഫേസ്) 2π വർധിക്കുമ്പോൾ ആയതു കൊണ്ട് സമവാക്യം (14.6) നെ

$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi$ എന്നെഴുതാം.

അതുകൊണ്ട് കോണീയാവൃത്തി $\omega = 2\pi/T$ ആണ്.

കോണീയാവൃത്തിയുടെ യൂണിറ്റ് റേഡിയൻ/സെക്കന്റ് (rad/s) ആണ്. ആവൃത്തി എന്നത് 1/T ആയതുകൊണ്ട് സരളഹാർമോണിക്ക് ദോലനത്തിന്റെ കോണീയ ആവൃത്തി ω എന്നത് ദോലനാവൃത്തിയുടെ 2π മടങ്ങ് ആകുന്നു. ആവർത്തനകാലം T യുടെ പ്രാധാന്യം വിവരിക്കുന്നതിനായി വ്യത്യസ്ത ആവർത്തന കാലമുള്ള രണ്ട് സിനുസോയിഡൽ ഫലനങ്ങളെ ചിത്രം 14.8ൽ വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ഗ്രാഫിൽ വക്രരേഖ a യുടെ ആവർത്തന കാലം T യും, b യുടേത് T' = T/2 വും ആണ്. അടുത്ത ഭാഗത്തിൽ നമ്മൾ സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിന്റെ ഏറ്റവും ലഘുവായ ഉദാഹരണം ചർച്ച ചെയ്യും.



ചിത്രം 14.8 രണ്ട് വ്യത്യസ്ത സമയാവർത്തന കാലങ്ങളിലും $\phi = 0$ യിലും ഉള്ള സമവാക്യം (14.4) ന്റെ ഗ്രാഫുകൾ

> ▶ **ഉദാഹരണം 14.3** താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന സമയത്തിന്റെ ഏകദങ്ങളിൽ ഏതാണ് (a) സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നത്. (b) ക്രമാവർത്തിതവും എന്നാൽ സരളഹാർമോണികമല്ലാത്തതും ആയ ചലനത്തെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നത്. ഓരോന്നിന്റെയും ആവർത്തനകാലം കണക്കാക്കുക.
> (1) $\sin \omega t - \cos \omega t$
> (2) $\sin^2 \omega t$

ഉത്തരം

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

$$= \sin \omega t - \sin (\pi/2 - \omega t)$$
$$= 2 \cos (\pi/4) \ \sin (\omega t - \pi/4)$$
$$= \sqrt{2} \sin (\omega t - \pi/4)$$

ഈ ഫലനം, $T = 2\pi/\omega$ ആവർത്തനകാലവും, $(-\pi/4)$ അല്ലെങ്കിൽ $(7\pi/4)$ ഫേസും ഉള്ള ഒരു സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു.

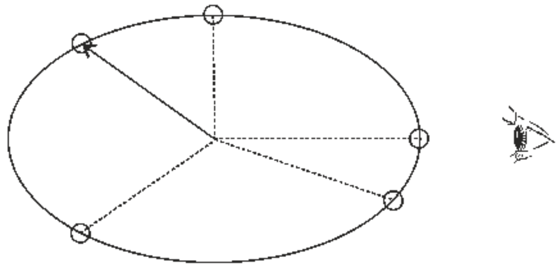
(b) $\sin^2 \omega t$

$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 2 \omega t$$

$T = \pi/\omega$. ആവർത്തന കാലമുള്ള ഒരു ക്രമാവർത്തന ഫലനമാണ്. ഇതും സന്തുലിത സ്ഥാന ബിന്ദു പൂജ്യത്തിനു പകരം ½ ആയ ഒരു ഹാർമോണിക ചലനത്തെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു. ◀

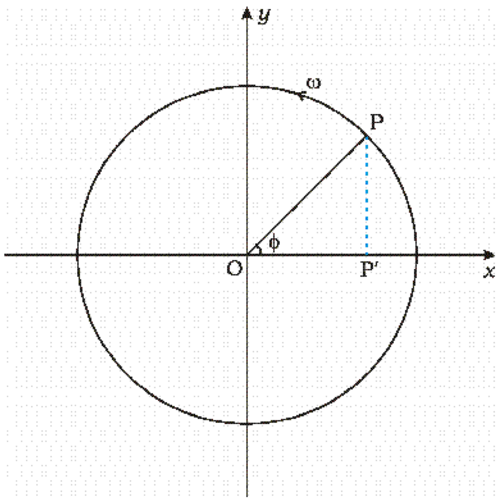
14.4 സമവർത്തുള ചലനവും സരളഹാർമണിക ചലനവും (SIMPLE HARMONIC MOTION AND UNIFORM CIRCULAR MOTION

ഒരു സമവർത്തുള ചലനത്തിന്റെ വൃത്തപാതയുടെ ഏതെങ്കിലും വ്യാസ രേഖയിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന പ്രക്ഷേപ പാദത്തിന്റെ (foot of projection) ചലനമാണ് സരള ഹാർമോണിക ചലനം എന്നാണ് നാം ഈ പാഠഭാഗത്ത് കാണാൻ പോകുന്നത്. ഒരു ലഘുപരീക്ഷണം വഴി (ചിത്രം 14.9) നമുക്ക് ഇത് തെളിയിക്കാം. ഒരു ചരടിന്റെ ഒരറ്റത്ത് ഒരു പന്തിനെ ഉറപ്പിക്കുക. അതിനുശേഷം പന്തിനെ തറയ്ക്ക് സമാന്തരമായ തലത്തിൽ കറക്കുക. ഇപ്പോൾ പന്ത് സ്ഥിര കോണീയ വേഗമുള്ള സമവർത്തുള ചലനത്തിൽ ആണ്. ചലനതലത്തിൽ ശ്രദ്ധ കേന്ദ്രീകരിച്ചു കൊണ്ട്, വശങ്ങളിൽ നിന്നോ, മുൻപിൽ നിന്നോ പന്തിനെ നിരീക്ഷിക്കുക. കറക്കത്തിന്റെ കേന്ദ്രബിന്ദു, മധ്യബിന്ദുവായി പന്ത് മുന്നോട്ടും പിറകോട്ടും ചലിക്കുന്നതായി കാണപ്പെടുന്നു.



ചിത്രം 14.9 ഒരു പ്രതലത്തിൽ സമവർത്തുള ചലനത്തിലുള്ള ഒരു പന്തിനെ വൃത്തത്തിന്റെ വക്കിലൂടെ നിരീക്ഷിക്കുമ്പോൾ അത് SHM ആയിരിക്കും.

പന്ത് കറങ്ങുന്ന തലത്തിന് ലംബമായുള്ള ഭിത്തിയിലും ഇത് നിങ്ങൾക്ക് കാണാവുന്നതാണ്. വൃത്തത്തിന്റെ, നിരീക്ഷിക്കുന്ന ദിശക്ക് ലംബമായ, വ്യാസത്തിലൂടെയുള്ള പന്തിന്റെ ചലനമാണ് ഇവിടെയെല്ലാം നാം കാണുന്നത്. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിലൂടെ ω കോണീയ വേഗത്തിൽ (സ്ഥിര), അപ്രദക്ഷിണ ദിശയിൽ സമവർത്തുള ചലനത്തിൽ ഏർപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിനെയാണ് ചിത്രം 14.10 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



ചിത്രം 14.10

വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം $\overline{OP}$, $t = 0$ എന്ന സമയത്ത് പോസിറ്റീവ് $\overrightarrow{OP}$ എന്ന ഒരു കണിക A ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തപാതയിലൂടെ സ്ഥിര കോണീയ പ്രവേഗ (ω)

ത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക. x അക്ഷത്തിന്റെ ദിശയുമായി ϕ കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. t സെക്കന്റിനു ശേഷം ഈ വസ്തു ഇവിടെ നിന്നും ωt എന്ന കോൺ അധികമായി ഉണ്ടാക്കിയിട്ടുണ്ടാവും, അതായത് ഈ സമയത്ത് വസ്തു P, x അക്ഷത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് ദിശയുമായി $(\omega t + \phi)$ എന്ന കോൺ ഉണ്ടാക്കിയിട്ടുണ്ടാകും. ഇനി നമുക്ക് സ്ഥാനസദിശം $\overline{OP}$ യുടെ X അക്ഷത്തിലുള്ള പ്രക്ഷേപം എന്താണെന്ന് നോക്കാം. ഇവിടെ ഇതിനെ OP′ ആയി കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. P′ ന്റെ X അക്ഷത്തിലെ സ്ഥാനം എന്നത്, $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ എന്നെഴുതുവാൻ കഴിയും. അതായത് വസ്തു P വർത്തുള ചലനത്തിലാണെങ്കിൽ അതിന്റെ പ്രക്ഷേപ പാദം P′ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിലൂടെ സരളഹാർമോണിക ചലനത്തിലേർപ്പെടും. ഇവിടെ വസ്തു P യെ അവലംബ വസ്തു (reference particle) അല്ലെങ്കിൽ അവലംബബിന്ദു (reference point) വെന്നും അതുൾക്കൊള്ളുന്ന വൃത്തത്തെ അവലംബവൃത്തം (reference circle) എന്നു വിളിക്കുന്നു.

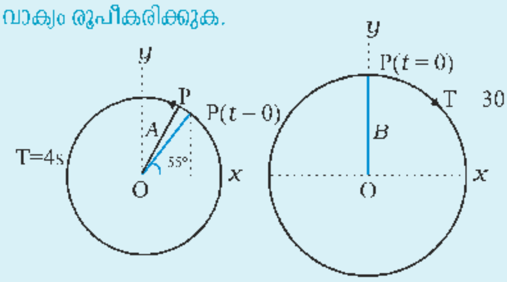
P യുടെ പ്രക്ഷേപം ഏതു വ്യാസരേഖയിലും നമുക്ക് എടുക്കുവാൻ കഴിയും. ഉദാഹരണത്തിന് y അക്ഷത്തിലൂടെയുള്ള വ്യാസരേഖയിലെടുക്കുകയാണെങ്കിൽ P ന്റെ സ്ഥാനാന്തരം $y(t)$ എന്നത്

$$y = A \sin(\omega t + \phi)$$

എന്നെഴുതുവാൻ കഴിയും. ഇത് x അക്ഷത്തിലൂടെയുള്ള പ്രക്ഷേപത്തിന്റെ സരളഹാർമോണികചലനത്തിന്റെ അതേ ആയതിയുള്ളതും അതേ സമയം അതിൽ നിന്നും ഫേസ് അളവിൽ $\pi/2$ വ്യത്യാസമുള്ളതുമായ ഒരു സരള ഹാർമോണിക ചലനമാണെന്ന് കാണുവാൻ കഴിയും.

ഇവിടെ സരളഹാർമോണികചലനവും സമവർത്തുള ചലനവും തമ്മിലുള്ള പാരസ്പര്യം നിലനിൽക്കുമ്പോൾ തന്നെ അവയ്ക്കു ഹേതുവായ ബലങ്ങൾ വ്യത്യസ്തമാണ് എന്ന കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതുണ്ട്. സരള ഹാർമോണിക ചലനം ഉണ്ടാക്കുന്ന ബലം സമവർത്തുള ചലനത്തിന് നിദാനമായ അഭികേന്ദ്രബലത്തിൽ (centripetal force) നിന്നും വിഭിന്നമാണ്.

ഉദാഹരണം 14.4 ചിത്രം 14.10 രണ്ട് വർത്തുള ചലനങ്ങളാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം, പരിക്രമണത്തിന്റെആവർത്തന കാലം, വസ്തുവിന്റെ ആദ്യ സ്ഥാനം, പരിക്രമണത്തിന്റെ ദിശ എന്നിവയെല്ലാം ചിത്രത്തിൽ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഒരോ ഉദാഹരണത്തിലും പ്രക്ഷേപത്തിന്റെ സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിന്റെ സമവാക്യം രൂപീകരിക്കുക.



ഉത്തരം

(a) $t = 0$ സമയത്തിൽ OP, വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്ര ബിന്ദുവിൽ x അക്ഷവുമായി $45^0 = \pi/4$ റേഡിയൻ കോൺ രൂപീകരിക്കുന്നു. t സമയം കഴിയുമ്പോൾ അപ്രദക്ഷിണ ദിശയിൽ $\frac{2\pi}{T}t$ കോൺ ചലിക്കുകയും, x അക്ഷവുമായി $\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}$ കോൺ രൂപീകരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. t സമയത്തിന് ശേഷം X അക്ഷത്തിലൂടെയുള്ള പ്രക്ഷേപത്തിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ ആണ്}$$

$T = 4$ s ആയിരിക്കുമ്പോൾ

$$x(t) \quad A \cos\left(\frac{2\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$$ ആണ്. ഇത് ആയതി A, ആവർത്തനകാലം 4 s, ആദ്യ ഫേസ് $\frac{\pi}{4}$ എന്നിവയുള്ള ഒരു സരള ഹാർമോണിക ചലനമാണ്.

(b) ഈ ഉദാഹരണങ്ങൾ $t = 0$ സമയത്ത് വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്ര ബിന്ദുവിൽ x അക്ഷവുമായി OP രൂപപ്പെടുത്തുന്ന കോൺ $90^0 = \pi/2$ ആണ്.

* കോണളവിന്റെ സാധാരണ ഉപയോഗിക്കുന്ന യൂണിറ്റ് റേഡിയൻ ആണ്. ചാപത്തിന്റെയും (arc) ആരത്തിന്റെയും (radius) ഹരണഫലമായി ആണ് ഇതിനെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത്. കോണളവ് ഡൈമൻഷൻ ഇല്ലാത്ത ഒരു അളവാണ്. അതിനാൽ π യുടെ ഗുണിതങ്ങളോ ഉപഗുണിതങ്ങളോ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ യൂണിറ്റ് റേഡിയൻ എപ്പോഴും പരാമർശിക്കേണ്ടതില്ല. റേഡിയനിൽ നിന്നും ഡിഗ്രിയിലേക്കുള്ള യൂണിറ്റ് മാറ്റം, മീറ്ററിനും സെന്റീമീറ്ററിനും അല്ലെങ്കിൽ മൈലിനും ഇടയ്ക്കുള്ള യൂണിറ്റ് മാറ്റവുമായി സാമ്യമില്ല. ഒരു ത്രികോണമിതി ഫലനത്തിന്റെ *(trigonometric function)* ആർഗുമെന്റ് യൂണിറ്റ് ഇല്ലാതെ പ്രസ്താവിച്ചാൽ, യൂണിറ്റ് റേഡിയൻ ആണെന്ന് മനസ്സിലാക്കേണ്ടതാണ്. നേരെമറിച്ച് കോണളവിന്റെ യൂണിറ്റായി ഡിഗ്രി ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ, ഇത് വ്യക്തമായി കാണിക്കേണ്ടതാണ്. ഉദാഹരണത്തിന് $sin(15^0)$ അർത്ഥമാക്കുന്നത് 15 ഡിഗ്രിയുടെ സൈൻ എന്നാണ് പക്ഷേ $sin(15)$ അർത്ഥമാക്കുന്നത് 15 റേഡിയനിന്റെ സൈൻ എന്നാണ്. ഇനിമുതൽ മിക്കപ്പോഴും നമ്മൾ യൂണിറ്റായി *'rad'* എഴുതുന്നത് ഉപേക്ഷിക്കും. കോണളവ് സംഖ്യാവിലകളായി യൂണിറ്റില്ലാതെ പ്രസ്താവിക്കുമ്പോൾ ഇത് റേഡിയൻ ആണെന്ന് എടുക്കേണ്ടതാണ്.

t സമയത്തിൽ ഇത് ഘടികാര ദിശയിൽ x അക്ഷവുമായി $\frac{2\pi}{T}t$ കോൺ തിരിയുകയും $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{T}t\right)$ കോൺ രുപീകരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. t സമയത്തിനു ശേഷം x പ്രക്ഷേപത്തിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം

$$x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$= B\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$ ആണ്.

T = 30s ആയിരിക്കുമ്പോൾ

$$x(t) \quad B\sin\left(\frac{\pi}{15}t\right)$$

ഇതിനെ

$$x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)$$

എന്നെഴുതി സമവാക്യം (14.4) ആയി താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ, ഇത് ആവർത്തന കാലം 30s, ആയതി B, ആദ്യഫേസ് $\frac{\pi}{2}$ എന്നിവയുള്ള ഒരു സരള ഹാർമോണിക ചലനമാണെന്ന് കാണാം. ◀

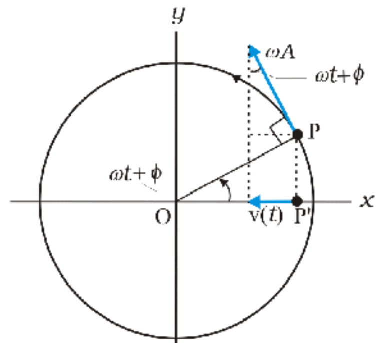
14.5 സരളഹാർമോണികചലനത്തിന്റെ പ്രവേഗവും, ത്വരണവും (VELOCITY AND ACCELERATION IN SIMPLE HARMONIC MOTION)

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിലുടെ ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന വസ്തുവിന്റെ വേഗം എന്നത് കോണീയ വേഗവും വൃത്തത്തിന്റെ ആരവും തമ്മിലുള്ള ഗുണിതമാണ്.

അതായത് $v = \omega A$ (14.8)

ഇവിടെ വസ്തു ചലിക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ ആരമാണ് A. വർത്തുള ചലനത്തിലുള്ള വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗ സദിശം v യുടെ ദിശ എല്ലായ്പ്പോഴും വസ്തു സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ വൃത്തപാതയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരയുടെ ദിശയിലായിരിക്കും എന്ന് നാം മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. ചിത്രം 14.11 ന്റെ ജ്യാമിതീയ വിശകലനത്തിൽ നിന്നും വസ്തുവിന്റെ t സമയത്തെ വേഗം എന്നത്.

$v(t) = -\omega A\sin(\omega t+\phi)$ (14.9) എന്നു കാണാനാകും.



ചിത്രം 14.11 P' എന്ന വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗം, v (t) അവലംബ വസ്തു P- യുടെ പ്രവേഗം $\bar{v}$ -യുടെ പ്രക്ഷേപണം ആണ്.

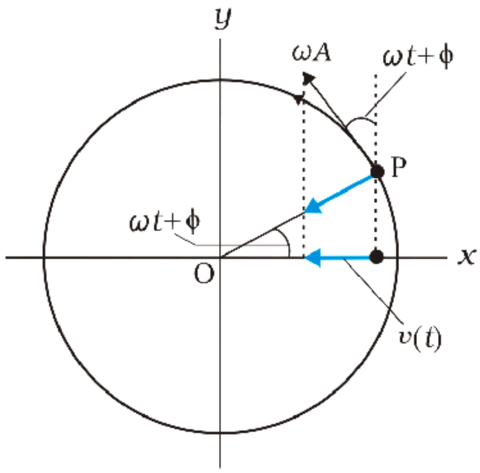
പ്രവേഗം v (t) യുടെ ദിശ x അക്ഷത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് ദിശയ്ക്കു വിപരീതമായതുകൊണ്ടാണ് (നെഗറ്റീവ് x അക്ഷത്തിലേക്ക്) നെഗറ്റീവ് ചിഹ്നം സമവാക്യത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. സമവാക്യം (14.9), വസ്തുവിന്റെ (P -യുടെ പ്രക്ഷേപം) തൽക്ഷണ (instantaneous) പ്രവേഗമാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. അതു കൊണ്ട്, ഇത് സരള ഹാർമോണികചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ തൽക്ഷണ പ്രവേഗത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നു. സമയത്തെ ബന്ധപ്പെടുത്തി സ്ഥാനാന്തരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമവാക്യം (14.4) നെ അവകലനം (differentiate) ചെയ്താലും സമവാക്യം (14.9) ലഭിക്കും. അതായത്

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \qquad (14.10)$$

സമവർത്തുള ചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തു, ആരത്തിലൂടെ കേന്ദ്ര ബിന്ദുവിലേക്ക് a എന്ന ത്വരണത്തിന് (radial ത്വരണം), വിധേയമാക്കപ്പെടുന്നെന്ന് നമ്മൾ മനസ്സിലാക്കിക്കഴിഞ്ഞു. P യുടെ ത്വരണം $\frac{v^2}{A}$ അഥവാ $\omega^2 A$ ആണ്. ഇതിന്റെ ദിശ വൃത്ത കേന്ദ്രത്തിലേക്കാണ്. അതായത് PO യുടെ ദിശയിലൂടെയാണ്.

അപ്പോൾ പ്രക്ഷേപവസ്തു P യുടെ തൽക്ഷണ ത്വരണം (ചിത്രം 14.12 കാണാം)

$$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi)$$
$$= -\omega^2 x(t) \qquad (14.11)$$



ചിത്രം 14.12 വസ്തു P'-ന്റെ ത്വരണം, $a(t)$, അവലംബ വസ്തു P' -യുടെ ത്വരണം. a -യുടെ പ്രക്ഷേപം ആണ്.

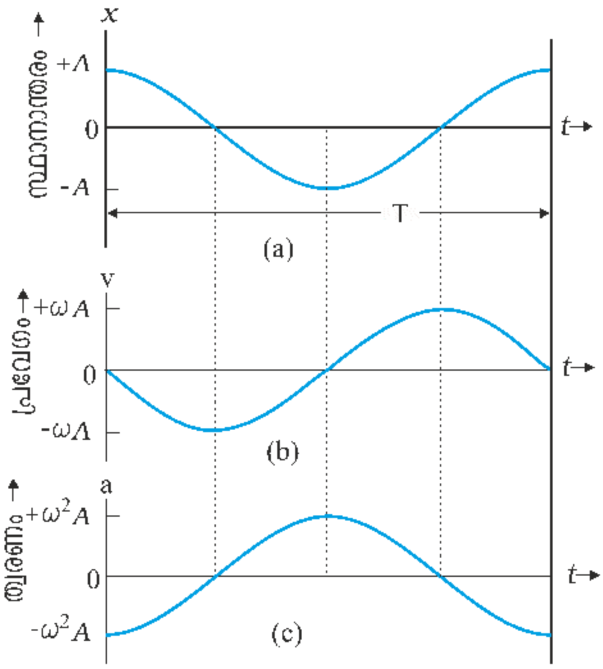
ആണ്. ഇത് സമവാക്യം (14.11), നൽകുന്ന സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ത്വരണത്തെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം വളരെ പ്രധാനപ്പെട്ട ഒരു ഗണിത വാക്യമാണ് ഇത്. സമവാക്യം (14.9) നെ സമയത്തെ ബന്ധിപ്പിച്ച് അവകലനം (differentiate) ചെയ്താൽ സമവാക്യം (14.11) ലഭിക്കും. അതായത്

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) \qquad (14.12)$$

സമവാക്യം (14.11) ൽ നിന്നും നമുക്ക് സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിലിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ ത്വരണം സ്ഥാനാന്തരത്തിന് നേർ അനുപാതത്തിലാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയും. ഇവിടെ $x(t)>0$ ആണെങ്കിൽ $a(t)<0$ ആയും $x(t)<0$ ആണെങ്കിൽ $a(t)>0$ ആയും കാണപ്പെടുന്നു. -A യ്ക്കും A യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള x ന്റെ ഏത് വിലയ്ക്കും ത്വരണം a(t) യുടെ ദിശ സരളഹാർമോണിക ചലനപാതയുടെ കേന്ദ്രത്തിലേക്കായിരിക്കും എന്ന വസ്തുതയിലേക്കാണ് ഈ നിഗമനം നമ്മെ എത്തിക്കുന്നത്.

ഗണിതക്രിയകൾ ലഘൂകരിക്കാൻ $\phi = 0$ എന്ന അനുമാനത്തിൽ x(t), v(t), a(t) തുടങ്ങിയവയുടെ ഗണിത രൂപം നമുക്കൊന്ന് എഴുതി നോക്കാം.

$x(t) = A\cos\omega t$, $v(t) = -\omega A\sin\omega t$, $a(t) = -\omega^2 A\cos\omega t$ ഈ ഗണിത രൂപങ്ങളുടെ ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 14.13 ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. ഈ ഭൗതിക അളവുകളെല്ലാം സമായാനുസൃത സിനുസോയിഡൽ രീതിയിൽ മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നതായി നമുക്ക് കാണാനാകും. കൂടാതെ താഴെപ്പറയുന്ന സവിശേഷതകളും ഈ ഗ്രാഫുകളിൽ കാണുവാൻ കഴിയും. (i) അവയുടെ ആയതികൾ (ഏറ്റവും ഉയർന്ന വില) വ്യത്യസ്തമാണ്. (ii) വിവിധ ഗ്രാഫുകൾ തമ്മിൽ ഫേസ് വ്യത്യാസം ഉണ്ട്. (iii) x, -A യ്ക്കും A യ്ക്കും ഇടയിൽ മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നു. (iv) v(t) യുടെ വ്യതിയാനം $-\omega A$ മുതൽ ωA വരെയാണ്. (v) $a(t)$ യുടെ വ്യതിയാനം $-\omega^2 A$ മുതൽ $\omega^2 A$ വരെയാണ്. (vi) സ്ഥാനാന്തര-സമയ ഗ്രാഫും പ്രവേഗ- സമയ ഗ്രാഫും തമ്മിൽ $\pi/2$ ഫേസ് വ്യത്യാസം ഉണ്ട്. (vii) സ്ഥാനാന്തര - സമയഗ്രാഫും ത്വരണ-സമയ ഗ്രാഫും തമ്മിൽ π ഫേസ് വ്യത്യാസം ഉണ്ട്.



ചിത്രം 14.13 ആവർത്തനകാലം T യുള്ള സരളഹാർമോണിക ചലനത്തിൽ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം, പ്രവേഗം, ത്വരണം എന്നിവ .

▶ ഉദാഹരണം 14.5 താഴെ പറയുന്ന സമവാക്യം അനുസരിച്ച് ഒരു വസ്തു സരളഹാർമോണിക ചലനത്തിലേർപ്പെടുന്നു. (അളവുകൾ SI യൂണിറ്റിൽ)

$$x = 5\cos[2\pi t + \pi/4].$$

1.5 സെക്കൻഡിൽ വസ്തുവിന്റെ (a) സ്ഥാനാന്തരം, (b) വേഗം, (c) ത്വരണം എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉത്തരം

വസ്തുവിന്റെ കോണീയ ആവൃത്തി $\omega = 2\pi s^{1}$, ആവർത്തനകാലം $T = 1$ s എന്നിങ്ങനെയാണ്.

$t = 1.5$ സെക്കൻഡിൽ

(a) സ്ഥാനാന്തരം = $(5.0 \text{ m}) \cos [(2\pi \text{ s}^{1}) \times 1.5 \text{ s} + \pi/4]$

$= (5.0 \text{ m}) \cos [(3\pi + \pi/4)]$

$= -5.0 \times 0.707 \text{ m}$

$= -3.535 \text{ m}$

(b) സമവാക്യം (14.9) അനുസരിച്ച് വസ്തുവിന്റെ വേഗം

$= -(5.0 \text{ m})(2\pi \text{ s}^{-1}) \sin [(2\pi \text{ s}^{-1}) \times 1.5 \text{ s} + \pi/4]$

$= -(5.0 \text{ m})(2\pi \text{s}^{-1}) \sin [(3\pi + \pi/4)]$

$= 10\pi \times 0.707 \text{ m s}^{-1}$

$= 22 \text{ m s}^{-1}$

(c) സമവാക്യം (14.10) അനുസരിച്ച് വസ്തുവിന്റെ ത്വരണം

$= -(2\pi \text{s}^{-1})^2 \times$ സ്ഥാനാന്തരം

$= -(2\pi \text{s}^{1})^2 \times (-3.535 \text{ m})$

$= 140 \text{ m s}^{2}$ ◀

14.6 സരളഹാർമോണിക ചലനത്തിനു വേണ്ട ബലനിയമം (FORCE LAW FOR SIMPLE HARMONIC MOTION)

ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാമത്തെ നിയമവും സമവാക്യം (14.11) ഉം സംയോജിപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ, സരളഹാർമോണിക ചലനത്തിൽ

$$F(t) \quad ma$$

$$= \; m\omega^2 x(t)$$

അല്ലെങ്കിൽ $F(t) = \; k\, x(t)$ (14.13)

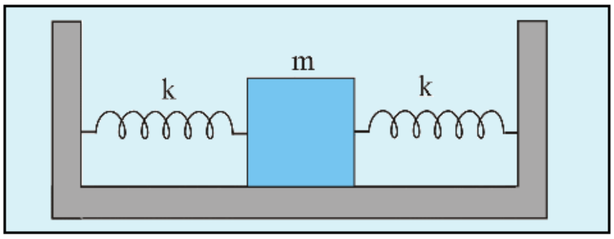
ആണ്. ഇവിടെ $k = m\omega^2$ (14.14a)

അല്ലെങ്കിൽ $\omega \quad \sqrt{\frac{k}{m}}$ (14.14b)

സമവാക്യം 14.13 വസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലത്തെ നൽകുന്നു. ഇത് സ്ഥാനാന്തരത്തിന് നേർ അനുപാതത്തിലും, അതിന്റെ വിപരീത ദിശയിലും (അതായത് സന്തുലിത സ്ഥാനത്തിനു നേരേ) ആണ്. അതുകൊണ്ട് ഇത് പുനഃസ്ഥാപന ബലം (restoring force) എന്നറിയപ്പെടുന്നു. ഇവിടെ ഒരു കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കണം. സമവർത്തുളചലനത്തിലെ അഭികേന്ദ്രബലത്തിന്റെ വില സ്ഥിരമാണ്. എന്നാൽ സരളഹാർമോണികചലനത്തിലെ പുനഃസ്ഥാപനബലത്തിന്റെ വില സമയത്തിനനുസരിച്ച് മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നു. ഈ പാഠഭാഗത്ത് ഇതുവരെ നടത്തിയിരിക്കുന്ന വിശകലനത്തിൽ നിന്നും ഒരു സരളഹാർമോണികചലനത്തെ സമവാക്യം 14.4 ഉപയോഗിച്ചും 14.13 ഉപയോഗിച്ചും നിർവചിക്കാനാകും എന്നു മനസ്സിലാക്കാം. സമവാക്യം 14.4 ൽ നിന്നും സമാവാക്യം 14.13 രൂപികരിക്കാൻ നാം രണ്ടു പ്രാവശ്യം അവകലനം (differentiate) ചെയ്യേണ്ടിവരും. എന്നാൽ സമവാക്യം 14.13 ൽ നിന്നും (ബല നിയമം) സമവാക്യം 14.4 തിരികെ രൂപീകരിക്കാൻ നാം രണ്ടു പ്രാവശ്യം സമാകലനം (integration) ചെയ്യേണ്ടിവരും.

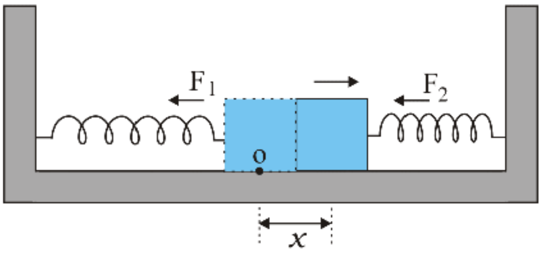
ഒരു വസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം സമവാക്യം 14.13 അനുസരിച്ച് x ന്റെ വേറൊരു വർഗത്തിനും ആനുപാതികമാകാതെ, x ന് മാത്രം ആനുപാതികമായിരിക്കുന്നതു കൊണ്ട്, ഇങ്ങനെയുള്ളവയെ രേഖീയ ഹാർമോണിക ദോലകങ്ങൾ (linear harmonic oscillator) എന്നും വിളിക്കാറുണ്ട്. പുനഃ സ്ഥാപന ബലം, x ന്റെ രേഖീയ ഏകദമല്ലാത്ത പദങ്ങളായ x^2, x^3 മുതലായവ ഉൾപ്പെടുന്നുണ്ടെങ്കിൽ. ഇവയെ രേഖീയമല്ലാത്ത (അരേഖിയ) ഹാർമോണിക ദോലകങ്ങൾ (non-linear harmonic oscillators) എന്നു വിളിക്കുന്നു.

▶ ***ഉദാഹരണം 14.6*** സ്പ്രിംഗ് സ്ഥിരാങ്കം k ഉള്ള ഒരേ പോലെയുള്ള രണ്ട് സ്പ്രിംഗുകൾ ചിത്രം 14.14 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് പോലെ m മാസ്സുള്ള ഒരു കട്ടയുമായി ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. കട്ടയെ സന്തുലിത സ്ഥാനത്ത് നിന്ന് ഏതെങ്കിലും ഒരു വശത്തേക്ക് സ്ഥാനാന്തരത്തിന് വിധേയമാക്കുകയാണെങ്കിൽ, അത് സരളഹാർമോണികചലനത്തിലാകുമെന്ന് തെളിയിക്കുക. ദോലനത്തിന്റെ ആവർത്തന കാലം കണ്ടുപിടിക്കുക.



ചിത്രം 14.14

ഉത്തരം: വസ്തുവിന് സന്തുലിതസ്ഥാനത്തിന്റെ വലതുവശത്തേക്ക് ചിത്രം 14.15 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ ഒരു ചെറിയ സ്ഥാനാന്തരം (x) നല്കി എന്നു കരുതുക. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ, കട്ടയുടെ ഇടതു വശത്തുള്ള സ്പ്രിംഗ് x ദൂരം വലിയുകയും, വലതു



ചിത്രം 14.15

വശത്തുള്ള സ്പ്രിംഗ് x ദൂരം ചുരുങ്ങുകയും ചെയ്യുന്നു. കട്ടയിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലങ്ങൾ

F_1 = $k x$ (സ്പ്രിംഗ് ഇടതുവശത്ത് പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം, മാസ്സിനെ സന്തുലിത സ്ഥാനത്തേക്ക് വലിക്കുന്നു)

F_2 = $k x$ (സ്പ്രിംഗ് വലതുവശത്ത് പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം, മാസ്സിനെ സന്തുലിത സ്ഥാനത്തേക്ക് വലിക്കുന്നു)

മാസ്സിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ആകെ ബലം

$F \quad -2kx$ ആണ്.

അതായത് മാസ്സിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം സ്ഥാനാന്തരത്തിന് നേർ അനുപാതത്തിലും സന്തുലിത സ്ഥാനത്തിന്റെ നേർക്കും ആണ്. അതുകൊണ്ട് മാസ്സിന്റെ ചലനം സരളഹാർമോണികമാണ്. ദോലനങ്ങളുടെ ആവർത്തനകാലം

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$ ആണ്.

14.7 സരളഹാർമോണിക ചലനത്തിലെ ഊർജം (ENERGY IN SIMPLE HARMONIC MOTION)

സരളഹാർമോണികചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന് ഗതികോർജവും സ്ഥിതികോർജവും ഉണ്ട്. ഒരു പരമാവധി മൂല്യത്തിനും പൂജ്യത്തിനും ഇടയിൽ ഈ ഊർജരൂപങ്ങൾ സദാ മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നു.

സരളഹാർമോണികചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗം സമയത്തിന്റെ ക്രമാവർത്തന ഫലനമാണെന്ന് നമ്മൾ ഭാഗം 14.5 ൽ പഠിച്ചു. പരമാവധി സ്ഥാനാന്തരത്തിൽ പ്രവേഗം പൂജ്യമാണ്. ഇങ്ങനെയുള്ള വസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജം

$$K \quad \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}k\,A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \qquad (14.15)$$

ആണ്. ഇതും സമയത്തിന്റെ ക്രമാവർത്തന ഫലനം ആണ്. ഗതികോർജത്തിന്റെ വില പരമാവധി സ്ഥാനാന്തരത്തിൽ പൂജ്യവും, സന്തുലിത സ്ഥാനത്തിൽ പരമാവധിയുമാണ്. ഗതികോർജത്തിൽ v യുടെ ചിഹ്നം അപ്രസക്തമായതു കൊണ്ട്, ഗതികോർജത്തിന്റെ ആവർത്തനകാലം T/2 ആണ്.

സരളഹാർമോണികചലനത്തിലിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥിതികോർജം (U) എത്രയാണ്. സംരക്ഷിത ബലങ്ങളിൽ മാത്രമേ സ്ഥിതികോർജം എന്ന ആശയം സാധ്യമാകുകയുള്ളൂയെന്ന് നാം അധ്യായം 6-ൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. സ്പ്രിങ്ങ് ബലം, F = -kx ഒരു സംരക്ഷിത ബലം ആയതുകൊണ്ട്, അതുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന സ്ഥിതി കോർജം

$$U \quad \frac{1}{2}k\,x^2 \qquad (14.16)$$

ആണ്. അതു കൊണ്ട് സരളഹാർമോണികചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥിതികോർജം

$$U(x) = \frac{1}{2}k\,x^2$$

$$\frac{1}{2}k\,A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \qquad (14.17)$$

ആണ്. അതായത് സരളഹാർമോണികചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥിതികോർജവും T/2 ആവർത്തനകാലമുള്ള ഒരു ക്രമാവർത്തന പ്രതിഭാസമാണ്. സ്ഥിതികോർജത്തിന്റെ വില സന്തുലിതസ്ഥാനത്ത് പൂജ്യവും, പരമാവധി സ്ഥാനാന്തരത്തിൽ ഏറ്റവും കൂടുതലും ആണ്. സമവാക്യം (14.5), (14.7) എന്നിവയനുസരിച്ച് വസ്തുവിന്റെ ആകെ ഊർജം

$$E = U + K$$

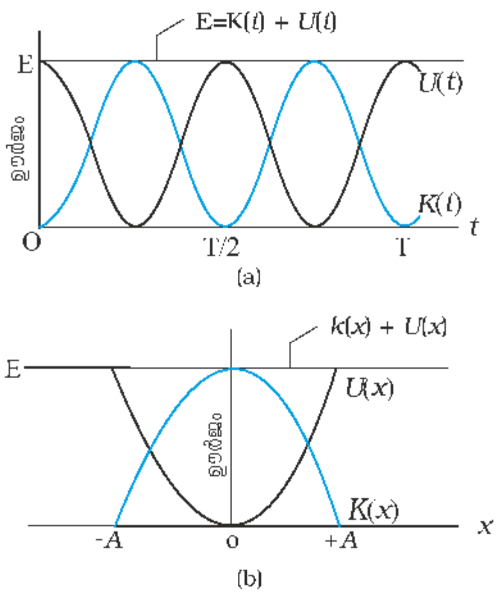
$$\frac{1}{2}k\,A^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}k\,A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$\frac{1}{2}k\,A^2 \left[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)\right]$$

ആണ്. ബ്രാക്കറ്റിലുള്ള പദത്തിന്റെ മൂല്യം ഒന്നായതു കൊണ്ട്, മൊത്തം ഊർജം

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \qquad (14.18)$$

എന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു. ഈ സമവാക്യത്തിൽ നിന്നും, സംരക്ഷിത ബലത്തിലുള്ള ചലനത്തിലേതുപോലെ തന്നെ, സരള ഹാർമോണിക ദോലകങ്ങളുടെ ആകെ ഊർജം സമയത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ല എന്ന് മനസിലാക്കാം. ഒരു രേഖീയ സരളഹാർമോണിക ദോലകത്തിന്റെ സ്ഥിതികോർജത്തിനും, ഗതികോർജത്തിനും, സമയവും സ്ഥാനാന്തരവും തമ്മിലുള്ള ആശ്രിതത്വമാണ് ചിത്രം 14.16 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഈ ചിത്രത്തിൽ നിന്നും, ഒരു രേഖീയ ഹാർമോണിക ദോലകത്തിന്റെ എല്ലാ ഊർജവും പോസിറ്റീവാണെന്നും, ഒരാവർത്തനകാലത്തിൽ രണ്ടു പ്രാവശ്യം എല്ലാ ഊർജങ്ങളും അതിന്റെ പരമാവധി വിലയിലെത്തുന്നു എന്നും മനസ്സിലാകുന്നു. സ്ഥാനാന്തരം, x = 0 ആയിരിക്കുമ്പോൾ, മൊത്തം ഊർജം ഗതികോർജവും, x=±A ആയിരിക്കുമ്പോൾ മൊത്തം ഊർജം സ്ഥിതികോർജവും ആണ്.



ചിത്രം 14.16 ഒരു രേഖീയ ഹാർമോണിക ദോലനത്തിൽ സമയം t യുടെ ഫലനമായ സ്ഥിതികോർജം U(t) ഗതികോർജം K(t) ആകെ ഊർജം E എന്നിവ. എല്ലാ ഊർജങ്ങളും പോസിറ്റീവാണ്. സ്ഥിതികോർജത്തിന്റെയും ഗതികോർജത്തിന്റെയും വിലകൾ ഒരു ആവർത്തനകാലത്തിൽ രണ്ടുപ്രാവശ്യം പരമാവധിയിലെത്തും.

b) ആയതി A ഉള്ള ഒരു രേഖീയ ഹാർമോണിക ദോലകത്തിന്റെ സ്ഥാനം x ന്റെ ഫലനമായ സ്ഥിതികോർജം U(t) , ഗതികോർജം K(t) , ആകെ ഊർജം E എന്നിവ. x=0 യിൽ ആകെ ഊർജം ഗതികോർജവും x=A യിൽ ആകെ ഊർജം സ്ഥിതികോർജവുമാണ്.

സന്തുലിത സ്ഥാനത്തിന്റെ ഇരുവശങ്ങളിലുള്ള പരമാവധി സ്ഥാനാന്തരങ്ങൾക്കിടയിൽ, സ്ഥിതികോർജം ഉപയോഗിച്ച് ഗതികോർജം വർദ്ധിച്ചു കൊണ്ടിരിക്കുന്നു. അതുപോലെ നേരെ മറിച്ചും സംഭവിക്കുന്നു.

> **ഉദാഹരണം 14.7** 50 N/m സ്പ്രിംഗ് സ്ഥിരാങ്കമുള്ള സ്പ്രിംഗിനെ 1kg മാസ്സുള്ള ഒരു കട്ടയുമായി ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. സന്തുലിത സ്ഥാനം x = 0 യിൽ നിന്നും x = 10cm ദൂരത്തേക്ക്, ഒരു ഘർഷണരഹിതപ്രതലത്തിനു മുകളിലൂടെ വലിച്ചുനീട്ടുന്നു. t = 0 സമയത്ത് വസ്തു നിശ്ചലാവസ്ഥയിലാണ്. സന്തുലിതസ്ഥാനത്തിൽ നിന്നും 5 cm ദൂരത്തായിരിക്കുമ്പോഴുള്ള ഗതികോർജവും സ്ഥിതികോർജവും കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം: സമവാക്യം (14.14 b) അനുസരിച്ച് സരള ഹാർമോണികചലനത്തിലുള്ള കട്ടയുടെ കോണീയാവൃത്തി

$$\omega \quad \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{50 \text{ N m}^{-1}}{1\text{kg}}}$$

$$= 7.07 \text{ rad s}^{-1}$$

ആണ്. ഒരു നിശ്ചിത സമയത്തുള്ള വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം

$$x(t) = 0.1 \cos(7.07t)$$

ആണ്. അതു കൊണ്ട് വസ്തു സന്തുലിതസ്ഥാനത്തു നിന്നും 5cm ദൂരത്തൊയിരിക്കുമ്പോൾ

$0.05 = 0.1 \cos(7.07t)$ ആണ്.

എന്നാൽ $\cos(7.07t) = 0.5$ ആയതിനാൽ

$$\sin(7.07t) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

ആതുകൊണ്ട് $x = 5$ cm ആയിരിക്കുമ്പോഴുള്ള പ്രവേഗം

$$= 0.1 \times 7.07 \times 0.866 \text{ m s}^{-1}$$

$= 0.61 \text{ m s}^{-1}$ ആണ്.

അതുകൊണ്ട് കട്ടയുടെ ഗതികോർജം K.E.

$$= \frac{1}{2} m\, v^2$$

$= ½[1 kg × (0.6123 m s^{-1})^2]$

$= 0.19$ J

വസ്തുവിന്റെ സ്ഥിതികോർജം P.E.

$$= \frac{1}{2} k\, x^2$$

$= ½(50 N m^{-1} × 0.05 m × 0.05 m)$

$= 0.0625$ J

x = 5 cm ആയിരിക്കുമ്പോഴുള്ള വസ്തുവിന്റെ ആകെ ഊർജം

= K.E. + P.E.

= 0.25 J

വസ്തുവിന്റെ പരമാവധി സ്ഥാനാന്തരത്തിൽ ഗതികോർജം പൂജ്യമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം. അതുകൊണ്ട് ആകെ ഊർജം സ്ഥിതികോർജത്തിന് തുല്യമാണ്. അതായത് പരമാവധി സ്ഥാനാന്തരത്തിലെ ആകെ ഊർജം

$= ½(50 N m^{-1} × 0.1 m × 0.1 m)$

$= 0.25$ J

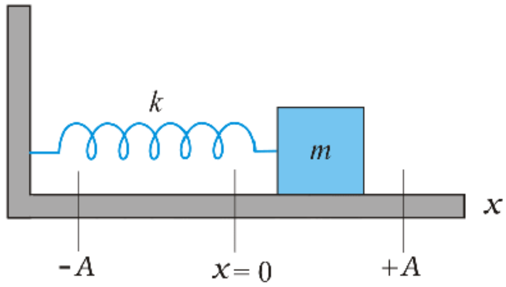
ഇത് 5 cm ദൂരത്തിലുള്ള ആകെ ഊർജത്തിന് സമമാണ്. അതായത് ഇത് ഊർജസംരക്ഷണ നിയമത്തിന് അനുസൃതമാണ്. ◀

14.8 സരളഹാർമോണികചലനത്തിൽ ഏർപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഏതാനും വ്യൂഹങ്ങൾ (SOME SYSTEMS EXECUTING SIMPLE HARMONIC MOTION)

പരിപൂർണ്ണമായ സരളഹാർമോണികചലനത്തിന് വിധേയമായിരിക്കുന്ന ഭൗതിക ഉദാഹരണങ്ങൾ ഒന്നും ഇല്ല. എന്നാൽ ചില നിബന്ധനകൾക്ക് വിധേയമായി, ഏകദേശ സരളഹാർമോണികചലനത്തിനു വിധേയമായിരിക്കുന്ന വ്യൂഹങ്ങളെ നമുക്ക് കാണാൻ കഴിയും. ഇങ്ങനെയുള്ള വ്യൂഹങ്ങളുടെ ചലനമാണ് ഈ ഭാഗത്ത് നാം ചർച്ചചെയ്യുന്നത്.

14.8.1 സ്പ്രിംഗ് മൂലമുള്ള ദോലനങ്ങൾ (Oscillations due to a spring)

ഒരറ്റം ഉറപ്പുള്ള ഭിത്തിയുമായി ഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു സ്പ്രിങ്ങുമായി ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന m മാസുള്ള ഒരു കട്ടയുടെ, കുറഞ്ഞ ആയതിയിലുള്ള ചലനം, നിരീക്ഷിക്കാൻ കഴിയുന്ന ഏറ്റവും ലഘുവായ സരള ഹാർമോണിക ചലനം ആണ്.ഇത് ചിത്രം 14.17 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. കട്ട വച്ചിരിക്കുന്നത് ഘർഷണമില്ലാത്ത ഒരു പ്രതലത്തിലാണ്. കട്ടയെ ഒരു തിരശ്ചീന വശത്തേക്ക് വലിച്ചു വിടുകയാണെങ്കിൽ, അത് സംതുലിത സ്ഥാനത്തിന്റെ ഇരുവശങ്ങളിലേക്കും ചലിക്കുവാൻ ആരംഭിക്കുന്നു. സ്പ്രിംഗ് സന്തുലിത സ്ഥാനത്തായിരിക്കുമ്പോഴുള്ള കട്ടയുടെ മധ്യഭാഗം, x = 0 സൂചിപ്പിക്കുന്നെന്ന് കരുതുക.



ചിത്രം 14.17 മാസ്സ് m ഉള്ള ഒരു കട്ടയോടു കൂടിയ ഒരു സരളഹാർമോണിക ദോലകം. ഘർഷണമില്ലാത്ത ഒരു പ്രതലത്തിലൂടെയാണ് കട്ട ചലിക്കുന്നത്. ഒരു വശത്തേക്ക് കട്ടയെ വലിച്ചു വിട്ടാൽ, അത് സരളഹാർമോണിക ചലനത്തിലേർപ്പെടുന്നു.

-A, +A എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്, സന്തുലിത സ്ഥാനത്തിന് ഇടതുവശത്തേക്കും, വലതുവശത്തേക്കും ഉള്ള പരമാവധി സ്ഥാനാന്തരമാണ്. ഒരു സ്പ്രിംഗിൽ ഒരു ചെറിയ സ്ഥാനാന്തര ഫലമായുണ്ടാകുന്ന പുനഃസ്ഥാപന ബലത്തിന്റെ വില വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരത്തിന് നേർ അനുപാതത്തിലും, ദിശ സന്തുലിത സ്ഥാനത്തിന്റെ നേർക്കും ആയിരിക്കും എന്ന് ഇംഗ്ലീഷ് ഭൗതികശാസ്ത്രജ്ഞനായ റോബർട്ട് ഹുക്ക് കണ്ടു പിടിച്ചിരുന്നു. ഇതിനെ ഹുക്ക് നിയമം എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഇത് നമ്മൾ അധ്യായം 9 -ൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. സ്പ്രിങ്ങിന്റെ നീളവുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ സ്ഥാനാന്തരം വളരെ കുറവാണെങ്കിൽ മാത്രമേ ഈ നിയമം ശരിയാകുകയുള്ളു. ഏതെങ്കിലും ഒരു നിശ്ചിത സമയം t യിൽ, കട്ടയുടെ സന്തുലിതസ്ഥാനത്തു നിന്നുള്ള സ്ഥാനാന്തരം x - ആണെങ്കിൽ, കട്ടയിൽ അനുഭവ പ്പെടുന്ന ബലം

$$F(x) \quad -k\, x \qquad (14.19)$$

ആണ്. ഇവിടെ അനുപാത സ്ഥിരാങ്കം k യെ സ്പ്രിംഗ് സ്ഥിരാങ്കം എന്നു വിളിക്കുന്നു. സ്പ്രിംഗിന്റെ ഇലാ

സ്തിക സ്വഭാവങ്ങളാണ് ഇതിന്റെ വിലയെ സ്വാധീനിക്കുന്നത്. ഒരു വളയാത്ത സ്പ്രിങ്ങിന്റെ k യുടെ വില വളരെ കൂടുതലും, വളയുന്നതിന്റെ k യുടെ വില വളരെ കുറവും ആണ്. സമവാക്യം (14. 19), സരളഹാർമോണികചലനത്തിലെ ബലനിയമത്തിന് സമാനമാണ്. അതു കൊണ്ട് ഈ വ്യൂഹം സരളഹാർമോണികചലനത്തിലാണ്. സമവാക്യം (14.14)ൽ നിന്നും

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (14.20)$$

ആവർത്തന കാലം

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (14.21)$$

സമവാക്യം (14.20), (14.21) എന്നിവയിൽ നിന്നും ഒരു വളയാത്ത സ്പ്രിങ്ങും (k വലുത്) ഭാരം കുറഞ്ഞ കട്ടയുമുള്ള (m ചെറുത്) ഒരു വ്യൂഹത്തിന്റെ കോണീയാവൃത്തി വലുതും ആവർത്തനകാലം ചെറുതും ആണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം 14.8 അഞ്ചു കിലോഗ്രാം മാസുള്ള ഒരു വസ്തു, 500N/m സ്പ്രിംഗ് സ്ഥിരാങ്കം ഉള്ള ഒരു സ്പ്രിങ്ങുമായി ബന്ധിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇതിന് നിരശ്ചീനമായിട്ടുള്ള ഒരു ദണ്ഡിലൂടെ ഘർഷണമില്ലാതെ നിരങ്ങുവാൻ കഴിയും. വസ്തുവിനെ സന്തുലിത സ്ഥാനത്ത് നിന്നും 10 cm ദൂരത്തേക്ക് വലിച്ചു വിട്ടാൽ താഴെ പറയുന്നവ കണക്കാക്കുക.
(a) ദോലനത്തിന്റെ ആവർത്തന കാലം
(b) പരമാവധി വേഗം
(c) വസ്തുവിന്റെ പരമാവധി ത്വരണം.

ഉത്തരം (a) സമവാക്യം 14.21-ൽ നിന്നും ദോലനത്തിന്റെ ആവർത്തന കാലം

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{5.0\ \text{kg}}{500\ \text{N m}^{-1}}}$$

$$= (2\pi/10)\ \text{s}$$

$$= 0.63\ \text{s}$$

(b) സരളഹാർമോണികചലനത്തിന്റെ പ്രവേഗം

$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$

അതുകൊണ്ട് പരമാവധി പ്രവേഗം

$$v_m = A\omega$$

$$= 0.1 \times \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= 0.1 \times \sqrt{\frac{500\ \text{N m}^{-1}}{5\ \text{kg}}}$$

$$= 1\ \text{m s}^{-1}$$

(c) സന്തുലിത സ്ഥാനത്ത് നിന്നും $x(t)$ സ്ഥാനാന്തരത്തിലുള്ള വസ്തുവിന്റെ ത്വരണം.

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$= -\frac{k}{m}\, x(t)$$

അതുകൊണ്ട് പരമാവധി ത്വരണം

$$a_{max} = \omega^2 A$$

$$= \frac{500\ \text{N m}^{-1}}{5\ \text{kg}} \times 0.1\ \text{m}$$

$$= 10\ \text{m s}^{-2}$$

ഈ ത്വരണം ലഭിക്കുന്നത് വസ്തു പരമാവധി, സ്ഥാനാന്തരത്തിലായിരിക്കുമ്പോഴാണ്. ◀

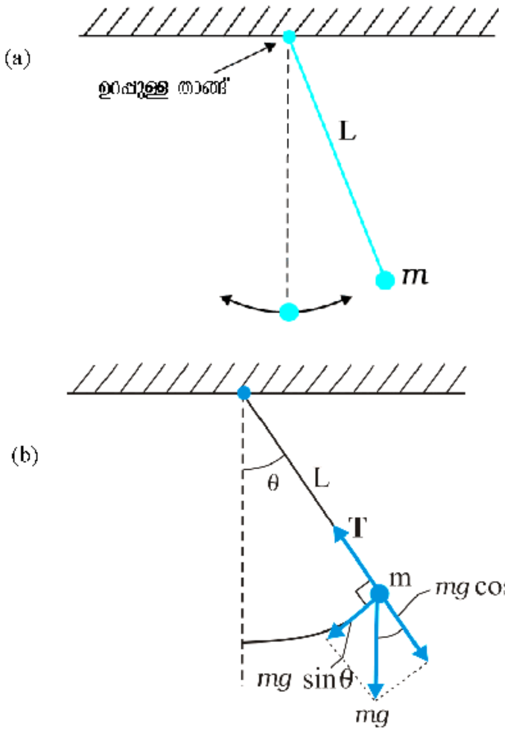
14.8.2 സിംപിൾ പെൻഡുലം (The Simple Pendulum)

ദേവാലയത്തിന്റെ മേൽക്കൂരയിൽ നിന്നും തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്ന ശരറാന്തലിന്റെ ദോലന കാലം ഗലിലിയോ തന്റെ നാഡീ സ്പന്ദനത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ നിർണ്ണയിച്ചു എന്ന് പറയപ്പെടുന്നു. ഈ വിളക്കിന്റെ ചലനം ക്രമാവർത്തനചലനമാണെന്ന് അദ്ദേഹം നിരീക്ഷിച്ചു. ഈ വിളക്ക് ഒരു തരത്തിലുള്ള പെൻഡുലത്തിന് ഉദാഹരണമാണ്. ഏകദേശം 100 cm നീളമുള്ള വലിയാത്ത ഒരു നൂലിന്റെ ഒരഗ്രത്ത് ഒരു കല്ല് ബന്ധിച്ച് നിങ്ങൾക്ക് സ്വന്തമായി പെൻഡുലം നിർമ്മിക്കാൻ കഴിയും. സ്വതന്ത്രമായി ദോലനം ചെയ്യുവാൻ കഴിയുന്നവിധം ഇതിനെ ഒരു താങ്ങിൽ കെട്ടിത്തൂക്കുക. കല്ലിനെ ഒരു വശത്തേക്ക് കുറച്ച് ദൂരം വലിച്ച ശേഷം സ്വതന്ത്രമാക്കുകയാണെങ്കിൽ, ഇത് സന്തുലിത സ്ഥാനത്തിന് ഇരുവശത്തേക്കും ചലിക്കുന്നു. ഈ ചലനം ഏകദേശം 2s ആവർത്തന കാലമുള്ള ഒരു ക്രമാവർത്തന ചലനമാണ്.

ഈ ക്രമാവർത്തനചലനം, അതിന്റെ സന്തുലിത സ്ഥാനത്തു നിന്നുമുള്ള സ്ഥാനാന്തരം വളരെ ചെറുതായിരിക്കുമ്പോൾ ഒരു സരളഹാർമോണികചലനമാണെന്ന് കാണിക്കുവാൻ കഴിയും. ചിത്രം 14.18 (a) ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ ഒരറ്റം താങ്ങിൽ ബന്ധിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു വലിയാത്ത നൂലിന്റെ രണ്ടാമത്തെ അറ്റത്ത് m മാസുള്ള ഒരു വസ്തു തൂക്കിയിടുന്നതാണ്

ഒരു സരളപെൻഡുലം. തൂക്കിയിടുന്ന മാസിനെ പെൻഡുലത്തിന്റെ ബോബ് (bob) എന്നു വിളിക്കുന്നു. നൂല് താങ്ങിൽ ബന്ധിച്ചിരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള രേഖയ്ക്ക് ഇരുവശവുമായി ബോബിന് ആടുവാൻ കഴിയും. ബോബിനും താങ്ങിനുമിടയിലുള്ള നൂലിന്റെ നീളത്തെ പെൻഡുലം നീളം L എന്നു പറയുന്നു.

ചിത്രം 14. 18 (b) നൂലിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന വലിവു ബലം (Tension), T, ഗുരുത്വാകർഷണബലം, mg എന്നിങ്ങനെ ബോബിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന വ്യത്യസ്ത ബലങ്ങൾ ചിത്രീകരിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു സ്വതന്ത്ര ബല ചിത്രമാണ്. നൂല് ലംബവുമായി രൂപപ്പെടുത്തുന്ന കോൺ θ ആണെന്ന് കരുതുക. ബോബ് സന്തുലിത സ്ഥാനത്തായിരിക്കുമ്പോൾ $\theta = 0$ ആണ്.



ചിത്രം 14.18 (a) സന്തുലിത സ്ഥാനം അടിസ്ഥാനമാക്കി ബോബ് tZne\ wsN¿¶ p (b) ആരമിക ത്വരണം T-mg cosθ, താങ്ങിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ടോർക്ക് ഉണ്ടാക്കാതെ അഭികേന്ദ്രബലം നൽകുന്നു. പുനഃസ്ഥാപന ടോർക്ക് തൊടുവര ബലമായ, mgsinθ നൽകുന്നു.

ബോബിൽ രണ്ടു ബലങ്ങൾ മാത്രമേ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നുള്ളൂ T എന്ന വലിവു ബലവും (ചരടിലൂടെയുള്ളത്) കുത്തനെയുള്ള ഗുരുത്വാകർഷണ ബലവും mg എന്ന ബലത്തെ ചരടിലൂടെയുള്ള $mg\cos\theta$ എന്ന ഘടകമായും അതിനു ലംബമായുള്ള $mg \sin\theta$ എന്ന ഘടകമായും വിഘടിപ്പിക്കാൻ കഴിയും. പെൻഡുലം ബോബ് നിശ്ചിത കേന്ദ്രമായിട്ടുള്ളതും L ആരമുള്ളതുമായ ഒരു വൃത്തപാതയിലൂടെ ചലിക്കുന്നതിനാൽ അതിൻമേൽ ഒരു ആരമിക ത്വരണം (Radial acceleration) $\omega^2 L$ ഉണ്ട്. അതോടൊപ്പം ഒരു തൊടുവര ത്വരണവും (Tangential acceleration) പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നുണ്ട്. (രണ്ടാമത് പ്രസ്താവിക്കപ്പെടുന്ന ത്വരണം വൃത്തപാതയിലൂടെയുള്ള ബോബിന്റെ ചലനം സമചലനമല്ലാത്തതുകൊണ്ട് ഉണ്ടാകുന്നതാണ്). ഇവിടെ ആരമിക ത്വരണം ഉണ്ടാകുന്നത് ബോബിന്മേൽ ആരത്തിലൂടെ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന പരിണത ബലം $T mg \cos\theta$ യ്ക്ക് തുല്യമാണ്. അതേ സമയം തൊടുവര ത്വരണം ഉണ്ടാകുന്നത് $mg \cos\theta$ മൂലമാണ്. ആരമിക ബലം ഉണ്ടാക്കുന്ന ടോർക്ക് പൂജ്യമായതിനാൽ സരളഹാർമോണിക പെൻഡുലത്തിന്റെ താങ്ങുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ടോർക്ക് പരിഗണിക്കുന്നതാണ് സൗകര്യപ്രദം. നിശ്ചിതകേന്ദ്രം ആധാരമായി ബോബിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ടോർക്ക് പൂർണ്ണമായും ഉണ്ടാകുന്നത് ബലത്തിന്റെ തൊടുവര ഘടകമായ $mg \sin\theta$ മൂലമാണ്. അതിനാൽ

$$\tau = -L\,(mg \sin\theta) \qquad (14.22)$$

ഇത് ഒരു പുനഃസ്ഥാപന ടോർക്ക് ആയതിനാൽ ബോബിന്റെ കോണീയ സ്ഥാനാന്തരം എല്ലായ്പ്പോഴും കുറയ്ക്കുവാൻ ശ്രമിക്കുന്നു. ഈ സവിശേഷതയാണ് മുകളിലെ സമവാക്യത്തിലെ നെഗറ്റീവ് ചിഹ്നത്തിന് കാരണം. ന്യൂട്ടന്റെ ചലന നിയമം വർത്തുള ചലനത്തിൽ പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ

$$\tau = I\,\alpha \qquad (14.23)$$

എന്നെഴുതാൻ കഴിയും. ഇവിടെ I സൂചിപ്പിക്കുന്നത് മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയും α എന്നത് കോണീയ ത്വരണവുമാണെന്ന്, ഓർക്കണം. സമവാക്യം 14.22, 14.23 എന്നിവയിൽ നിന്നും

$$I\,\alpha = -m\,g \sin\,\theta\;\; L \qquad (14.24)$$

അഥവാ

$$\alpha = -\frac{m\,g\,L}{I} \sin\,\theta \qquad (14.25)$$

θ യുടെ മൂല്യം വളരെ ചെറുതാണ് എന്ന സങ്കൽപ്പത്തിൽ സമവാക്യം (14.25) നെ നമുക്ക് ലഘൂകരിക്കു

വാൻ കഴിയും. θ ചെറുതാകുമ്പോൾ

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \pm \ldots \qquad (14.26)$$

എന്നെഴുതുവാൻ കഴിയും. ഇവിടെ θ റേഡിയൻ എന്ന യൂണിറ്റിലാണ് എടുത്തിട്ടുള്ളത്. ഇവിടെ നിന്നും θ യുടെ വില തീരെ ചെറുതാണെങ്കിൽ $\sin\theta \approx \theta$ എന്ന് അനുമാനിക്കാനാകും. അതുകൊണ്ട് സമവാക്യം 14.25 നെ

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta \qquad (14.27)$$

എന്നെഴുതുവാൻ കഴിയും.

പട്ടിക 14.1 ൽ റേഡിയനിലും ഡിഗ്രിയിലുമുള്ള θ യുടെ വിലയും $\sin\theta$ യുടെ വിലയും നൽകിയിരിക്കുന്നു. $\theta = 20^0$ ആകുമ്പോൾ പോലും റേഡിയനിലുള്ള വില $\sin\theta$ യുടെ വിലയ്ക്ക് ഏകദേശം സമമാണ്. സമവാക്യം (14.11) ന്റെ കോണീയ തുല്യരൂപമാണ് സമവാക്യം (14.27). അതായത് ഒരു സരള പെൻഡുലത്തിന്റെ ചെറിയ കോണിലുള്ള ദോലനം ഏകദേശം സരള ഹാർമോണിക ചലനമാണ്.

θ (degrees)	θ (radians)	$\sin\theta$
0	0	0
5	0.087	0.087
10	0.174	0.174
15	0.262	0.256
20	0.349	0.342

പട്ടിക14.1 *$\sin\theta$ യുടെ ഫലനമായി കോൺ θ*

സമവാക്യം (14.27)നെ സമവാക്യം (14.11) മായി താരതമ്യപ്പെടുത്തുമ്പോൾ, പെൻഡുലത്തിന്റെ കോണീയാവൃത്തി

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

ആണ്. അതുപോലെ പെൻഡുലത്തിന്റെ ആവർത്തന കാലം. T.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \qquad (14.28)$$

ആണ്. സരള പെൻഡുലത്തിന്റെ ആകെ മാസ്, m, അതിന്റെ ബോബിൽ കേന്ദ്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നു. ബോബ്, പെൻഡുലം ഉറപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും L ആരത്തിലാണ്. അതുകൊണ്ട് ഈ വ്യൂഹത്തിന് $I = mL^2$ എന്ന് നമുക്കെഴുതാം. ഈ വില സമവാക്യം (14. 28) ൽ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (14.29)$$

എന്നു ലഭിക്കുന്നു. ഈ സമവാക്യം സരളഹാർമോണികചലനത്തിന്റെ ആവർത്തന കാലത്തെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു.

▶ ***ഉദാഹരണം 14.9*** *ഒരു ഘടികാരത്തിന്റെ പെൻഡുലം ഒരു സെക്കന്റ് ഇടവിട്ട് ടിക്, ടിക് ശബ്ദം പുറപ്പെടുവിക്കുന്നെങ്കിൽ അതിന്റെ നീളം എത്രയായിരിക്കും.*

ഉത്തരം ഒരു സിംപിൾ പെൻഡുലത്തിന്റെ ആവർത്തന കാലം

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$ ആണ്.

ഇതിൽ നിന്നും

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

സെക്കന്റിൽ ഒരു ടിക് ശബ്ദം പുറപ്പെടുവിക്കുന്ന പെൻഡുലത്തിന്റെ ആവർത്തന കാലം 2 s ആണ്. അതുകൊണ്ട് $g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}, T = 2\ \mathrm{s}, L$

$$= \frac{9.8(\mathrm{m\ s^{-2}}) \times 4(\mathrm{s^2})}{4\pi^2}$$

$= 1$ m ◀

14.9 അവമന്ദിത സരളഹാർമോണികചലനം (DAMPED SIMPLE HARMONIC MOTION)

വായുവിൽ ആടിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു സരള പെൻഡുലത്തിന്റെ ചലനം കുറേസമയത്തിനുശേഷം നിലയ്ക്കുന്നതായി നാം കാണാറുണ്ട്. എന്തുകൊണ്ടാണ് ഇങ്ങനെ സംഭവിക്കുന്നത്? പെൻഡുലം താങ്ങിൽ ഉറപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തെ ഘർഷണവും, പെൻഡുലവുമായി സമ്പർക്കത്തിലുള്ള വായുവിന്റെ വലിവും (drag), പെൻഡുലത്തിന്റെ ചലനത്തെ എതിർക്കുന്നതാണ് ഇതിനു കാരണം. ഇങ്ങനെ പെൻഡുലത്തിന്റെ ചലനം എതിർക്കപ്പെടുമ്പോൾ, അതിന്റെ ഊർജം സാവധാനം കുറയുന്നു. ഇങ്ങനെയുള്ള ദോലനങ്ങളെ **അവമന്ദിത ദോലനങ്ങൾ** (damped oscillations) എന്നു വിളിക്കുന്നു. അവമന്ദിത ദോലനങ്ങളിൽ, വ്യൂഹത്തിന്റെ ഊർജം തുടർച്ചയായി കുറഞ്ഞു പോകുന്നുണ്ടെങ്കിലും, ദോലനം ഏകദേശം ക്രമാവർത്തിതമായി നിലനിൽക്കുന്നു. ഇത്തരം ഊർജശോഷണ ബലങ്ങൾ സാധാരണയായി ഘർഷണ ബലങ്ങളാണ്. ശോഷണ ബലങ്ങളുടെ പ്രഭാവം,

സരളഹാർമോണികചലനം – ആയതി എത്ര ചെറുതായിരിക്കണം?

ഒരു സരള പെൻഡുലത്തിന്റെ സമയ ക്രമാവർത്തനം നിർണയിക്കാനുള്ള പരീക്ഷണം നടത്തുമ്പോൾ, നിങ്ങളുടെ ടീച്ചർ ആയതി ചെറുതാക്കിവെക്കാൻ പറയുന്നു. ഇത് എത്ര കണ്ട് ചെറുതായിരിക്കണം എന്ന് നിങ്ങൾ ചോദിച്ചിട്ടുണ്ടോ? ആയതി 5^0, 2^0, 1^0 അല്ലെങ്കിൽ 0.5^0 അല്ലെങ്കിൽ 10^0, 20^0, 30^0 ആകാമോ.

ഇത് മനസ്സിലാക്കാൻ വ്യത്യസ്തമായ ആയതികളുടെ സമയ ക്രമാവർത്തനം വലിയ ആയതികൾ വരെ അളക്കുന്നത് നല്ലതായിരിക്കും. തീർച്ചയായും വലിയ ദോലനങ്ങൾക്ക്, പെൻഡുലം ലംബതലത്തിൽ ദോലനം ചെയ്യുന്നു എന്ന് ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതാണ്. ചെറിയ ആയതിയിലുള്ള ദോലനങ്ങൾ സമയക്രമാവർത്തനം T(o) എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. ആയതി 'θ_0' യുടെ സമയക്രമാവർത്തനത്തെ $T(\theta_0) = cT\ (0)$ എന്നും സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്. ഇവിടെ 'c' ഒരു ഗുണിതഘടകം (multi-plying factor) ആണ്. 'c' യുടെയും 'θ_0' യുടെയും ഇടയിൽ ഗ്രാഫ് വരച്ചാൽ, ഏകദേശം ഇതു പോലെയുള്ള വിലകൾ കിട്ടും.

θ_0	:	20^0	45^0	50^0	70^0	90^0
c	:	1.02	1.04	1.05	1.10	1.18

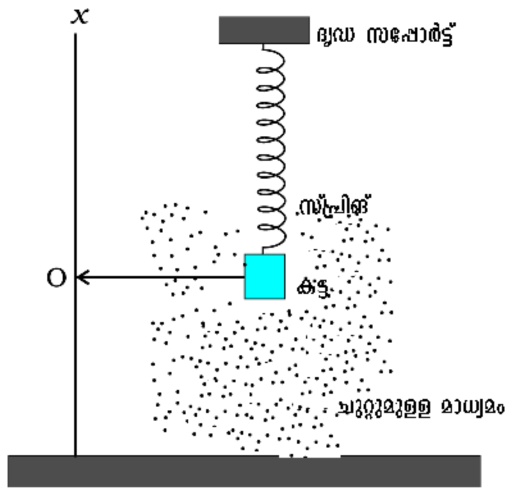
ഇത് അർഥമാക്കുന്നത് ആയതി 20^0 യിൽ സമയക്രമാവർത്തനത്തിലെ പിശക് ഏകദേശം 2% യും, 50^0 ആയതിയിൽ 5% ഉം, 70^0 ആയതിയിൽ 10% ഉം 90^0 ആയതിയിൽ 18% ആണ്.

പരീക്ഷണത്തിൽ നിങ്ങൾക്ക് T(o) ഒരിക്കലും അളക്കാൻ സാധിക്കില്ല കാരണം ഇത് അർഥമാക്കുന്നത് ഒരു ദോലനവും ഇല്ല എന്നാണ്. സൈദ്ധാന്തികമായി പോലും $\sin\theta$ യുടെ വില θ ആകുന്നത് $\theta = 0$ ആകുമ്പോൾ ആണ്. θ യുടെ മറ്റു വിലകൾക്ക് ചെറിയ കൃത്യതയില്ലായ്മ ഉണ്ട്. θ കൂടുമ്പോൾ ഇത് കൂടുകയും ചെയ്യും. അതിനാൽ പിശക് കൂടുകയും ചെയ്യും. അതിനാൽ എത്ര പിശക് നമുക്ക് അനുവദിക്കാൻ പറ്റും എന്ന് നമ്മൾക്ക് തീരുമാനിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഒരു അളവും പൂർണ്ണമായും കൃത്യമല്ല. നമുക്ക് ഇത്തരം ചോദ്യങ്ങളും പരിഗണിക്കാം. സ്റ്റോപ് വാച്ചിന്റെ കൃത്യത എത്രയാണ്. സ്റ്റോപ് വാച്ച് തുടങ്ങുമ്പോഴോ നിർത്തുമ്പോഴോ ഉള്ള നിങ്ങളുടെ തന്നെ കൃത്യത എത്രയാണ്? ഈ ലെവലിൽ നിങ്ങളുടെ കൃത്യത 5 ശതമാനത്തിൽ നിന്നോ 10 ശതമാനത്തിൽ നിന്നോ ഒട്ടും മികച്ചതല്ല എന്ന് നിങ്ങൾക്ക് ബോദ്ധ്യമാകും. പെൻഡുലത്തിന്റെ സമയക്രമാവർത്തനം, 50^0 ആയാൽ 5 ശതമാനത്തോളം മാത്രം വർദ്ധിക്കുന്നതിനാൽ നിങ്ങൾക്ക് നിങ്ങളുടെ പരീക്ഷണങ്ങളിൽ ആയതി അതിനുള്ളിൽ നിർത്തിയാൽ മതിയാകും.

ഒരു ദോലകത്തിലെങ്ങനെയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കുവാൻ ചിത്രം 14.19 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെയുള്ള ഒരു വ്യൂഹം നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം. ഇവിടെ സ്പ്രിങ് സ്ഥിരാങ്കം, k യുള്ള ഒരു സ്പ്രിങ്ങുമായി ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന m മാസ് ഉള്ള ഒരു കട്ട, ലംബമായി ദോലനം ചെയ്യത്തക്ക രീതിയിൽ ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നു. സമവാക്യം 14.20 ൽ നിന്നും ഇതിന്റെ കോണീയ ആവൃത്തി

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ ആണ്.

ഒരു സരളപെൻഡുലത്തെ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു സ്പ്രിങ്ങിൽ തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു കട്ടയെ ചെറിയ സ്ഥാനാന്തരത്തിനു വിധേയമാക്കിയതിനുശേഷം സ്വതന്ത്രമാക്കിയാൽ അത് അതിന്റെ സ്വാഭാവിക കോണീയ ആവൃത്തിയിൽ ദോലനം ചെയ്യുമെന്ന് നമുക്ക് അറിയാം. ചുറ്റുമുള്ള മാധ്യമം പ്രയോഗിക്കുന്ന മന്ദീകരണ ബലം കാരണം ഈ വ്യൂഹത്തിന്റെ യാന്ത്രികോർജം കുറയുന്നു. ഈ ഊർജനഷ്ടം ചുറ്റുമുള്ള മാധ്യമത്തിൽ (കട്ടയിലും) താപോർജമായി പ്രത്യക്ഷപ്പെടുന്നു (ചിത്രം 14.19)



ചിത്രം 14.19 ഒരു അവമന്ദിത സരള ഹാർമോണിക ദോലകം: കട്ട ദോലനം ചെയ്യുമ്പോൾ, ചുറ്റുമുള്ള മാധ്യമത്തിൽ ദീർഘ ചതുരതകിട് കട്ടയിൽ ഒരു അവമന്ദിത ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നു.

മന്ദീകരണ ബലങ്ങൾ ചുറ്റുമുള്ള മാധ്യമത്തിന്റെ സ്വഭാവത്തെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. കട്ടയെ ഒരു ദ്രാവകത്തിൽ മുക്കിയിട്ടിരുന്നാൽ അതിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന മന്ദീകരണത്തിന്റെ അളവ് വളരെ ഉയർന്നതും ഊർജനഷ്ടം വളരെ വേഗത്തിലും ആയിരിക്കും. മന്ദീകരണ ബലം സാധാരണയായി ബോബിന്റെ (bob) പ്രവേഗത്തിന് ആനുപാതികമായിരിക്കും (സമവാക്യം (10.19) സ്റ്റോക്ക്

നിയമം ഓർക്കുക.) ഇത് പ്രവേഗദിശയ്ക്ക് എതിരെയാണ് പ്രവർത്തിക്കുന്നത്. മന്ദീകരണബലത്തെ $\mathbf{F}_d$ എന്നു സൂചിപ്പിച്ചാൽ

$\mathbf{F}_d = -b\,\mathbf{v}$ എന്നെഴുതാം (14.30)

ഇവിടെ 'b' എന്ന പോസിറ്റീവ് സ്ഥിരാങ്കം മാധ്യമത്തിന്റെ സ്വാഭാവ സവിശേഷതകൾ (ഉദാഹരണത്തിന് വിസ്കോസിറ്റി), കട്ടയുടെ വലുപ്പം, ആകൃതി മുതലായവയെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. സാധാരണയായി സമവാക്യം 14.30 വളരെ ചെറിയ പ്രവേഗങ്ങൾക്ക് മാത്രമാണ് ബാധകമായിട്ടുള്ളത്.

മാസ്, m-നെ സ്പ്രിങ്ങിൽ സ്വതന്ത്രമായി തൂക്കിയിട്ടാൽ അത് സ്പ്രിങ്ങിൽ ഒരു ചെറിയ വലിവുണ്ടാക്കും. അതിനുശേഷം നിശ്ചിത ഉയരത്തിൽ നിശ്ചലാവസ്ഥയിലാകുന്നു. ഈ സ്ഥാനം ചിത്രം 14.20 ലെ O എന്ന ബിന്ദു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഈ സ്ഥാനത്തെ മാസിന്റെ സന്തുലിത സ്ഥാനം എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഈ സ്ഥാനത്തു നിന്നും മാസിനെ കുറച്ച് ദൂരം താഴേക്ക് വലിക്കുകയോ മുകളിലേക്ക് തള്ളുകയോ ചെയ്താൽ സ്പ്രിംഗ് വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന പുനഃസ്ഥാപന ബലം $F_S = -k\,x$ ആണ്. ഇവിടെ സന്തുലിത സ്ഥാനത്ത് നിന്നും വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന സ്ഥാനാന്തരമാണ് x. അതുകൊണ്ട് ഏതെങ്കിലും ഒരു നിശ്ചിത സമയം t യിൽ, മാസ്സിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം F= -kx-bv ആണ്.

t സമയത്തെ മാസ്സിന്റെ ത്വരണം a(t) ആണെങ്കിൽ x ചലനദിശയിലൂടെ, ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാമത്തെ ചലന നിയമം പ്രയോഗിച്ചാൽ

$$m\,a(t) = -k\,x(t) - b\,v(t) \qquad (14.31)$$

ഏകമാന ചലനം ചർച്ച ചെയ്യുന്നതു കൊണ്ടാണ് ഇവിടെ നമ്മൾ സദിശ ചിഹ്നം ഉപേക്ഷിച്ചത്. v(t) ക്ക് പകരമായി dx/dt യും, a(t) ക്ക് പകരമായി $\frac{d^2x}{dt^2}$ ഉം ഉപയോഗിച്ച് ക്രമപ്പെടുത്തുമ്പോൾ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + k\,x = 0 \qquad (14.32)$$

എന്ന ഡിഫറൻഷ്യൽ (differential) സമവാക്യം ലഭിക്കുന്നു. സമവാക്യം 14.32 നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന മൂല്യം (solution), പ്രവേഗത്തിന് ആനുപാതികമായ ഒരു അവമന്ദിത ബലത്തിന്റെ സ്വാധീനത്താലുള്ള കട്ടയുടെ ചലനത്തെ വിവരിക്കുന്നു. ഈ സമവാക്യത്തെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ

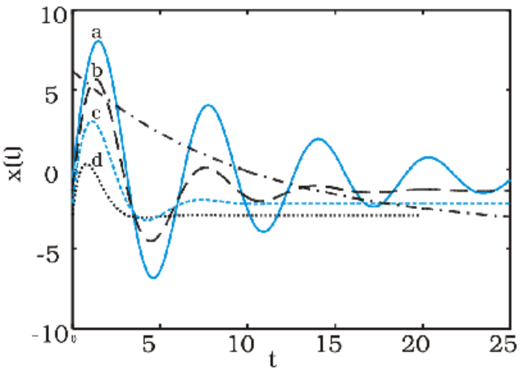
$$x(t) = A\,e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi) \qquad (14.33)$$

എന്നു ലഭിക്കും. ഇവിടെ A അവമന്ദിത ദോലകത്തിന്റെ ആയതിയും, ω' കോണീയ ആവൃത്തിയും ആണ് കോണീയ ആവൃത്തിയുടെ സമവാക്യം

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad (14.34)$$

ആണ്. സമവാക്യം 14.33 ലെ കൊസൈൻ ഫലനത്തിന്റെ ആവർത്തനകാലം $2\pi/\omega'$ ആണെങ്കിലും x(t) പരിപൂർണ്ണമായും ക്രമാവർത്തിതമല്ല. $e^{-bt/2m}$ എന്ന ഘടകം സമയത്തിനനുസരിച്ച് തുടർച്ചയായി കുറഞ്ഞു കൊണ്ടിരിക്കുന്നതാണ്. എന്നിരുന്നാലും ഒരു ആവർത്തന കാലം, T- യിൽ ഈ വ്യതിയാനം വളരെ ചെറുതാണെങ്കിൽ സമവാക്യം 14. 33 പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്ന ചലനം ഏകദേശം ക്രമാവർത്തിതമാണ്.

ചിത്രം 14. 20 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ സമവാക്യം 14. 33–നെ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് പ്രതിനിധാനം ചെയ്യാവുന്നതാണ്. ആയതി $Ae^{-bt/2m}$ ഉള്ളതും സമയത്തിനനുസരിച്ച് സാവധാനം കുറഞ്ഞു കൊണ്ടിരിക്കുന്നതും ആയ ഒരു കോസൈൻ ഫലനമായി നമുക്കിതിനെ കരുതാം.



ചിത്രം 14.20 അവമന്ദിത ഹാർമോണികദോലനങ്ങളിൽ സ്ഥാനാന്തരം സമയത്തിന്റെ ഫലനത്തിൽ *a* മുതൽ *d* വരെയുള്ള വക്രരേഖകളിൽ അവമന്ദനം ക്രമമായി വർദ്ധിക്കുന്നു.

അവമന്ദിത ബലം അനുഭവപ്പെടാത്ത ഒരു ദോലകത്തിന്റെ യാന്ത്രികോർജം ($E = 1/2kA^2$) എന്ന സമവാക്യം നൽകുന്നു. ദോലകം അവമന്ദിതമാണെങ്കിൽ, ആയതി സ്ഥിരമായിരിക്കില്ല. അത് സമയത്തെ അനുസരിച്ച് വ്യത്യാസപ്പെട്ടുകൊണ്ടിരിക്കും. ചെറുതാണെങ്കിൽ അവമന്ദനം ആയതി, A -ക്കു പകരമായി $Ae^{-bt/2m}$ കൊടുത്താൽ നമുക്ക് അവമന്ദിതദോലനത്തിലെ E(t) കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്. അതായത്

$$E(t) = \frac{1}{2} k\ A^2\ e^{-b\ t/m} \qquad (14.35)$$

ആണ്. സമവാക്യം (14.35), വ്യൂഹത്തിന്റെ ആകെ ഊർജം സമയത്തിനനുസരിച്ച് എക്സ്പോണൻഷ്യലായി കുറയുന്നു എന്ന് കാണിക്കുന്നു. ചെറിയ അവമന്ദനം എന്നതുകൊണ്ടുദ്ദേശിക്കുന്നത് $\left(\frac{b}{\sqrt{k\,m}}\right)$ ഒന്നിനേക്കാൾ വളരെ കുറവാണെന്നാണ്.

> ▶ ***ഉദാഹരണം 14.10*** ചിത്രം 14.19 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന അവമന്ദിത ദോലകത്തിലെ കട്ടയുടെ മാസ്സ് 200 g, k=90N/m, അവമന്ദിത സ്ഥിരാങ്കം, b = 40 g/s എന്നിങ്ങനെയാണ്.
>
> (a) ദോലനത്തിന്റെ ആവർത്തനകാലം
>
> (b) കമ്പനത്തിന്റെ ആയതി ആരംഭ വിലയുടെ പകുതി വിലയാകുവാൻ വേണ്ട സമയം
>
> (c) യാന്ത്രികോർജം ആരംഭ മൂല്യത്തിന്റെ പകുതി വിലയാകുവാൻ വേണ്ട സമയം
>
> എന്നിവ കണ്ടു പിടിക്കുക.

ഉത്തരം

(a) $km = 90 \times 0.2 = 18\ \text{kg N m}^{-1}$ അതിനാൽ $\sqrt{k\,m} = 4.243\ \text{kg s}^{-1}$. $b = 0.04\ \text{kg s}^{-1}$. അതിനാൽ b, $\sqrt{k\,m}$ നേക്കാൾ വളരെ കുറവാണ്. അതിനാൽ സമവാക്യം (14.34)ൽ നിന്നും സമയക്രമാവർത്തനം താഴെ പറയും പ്രകാരം കിട്ടുന്നു.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{0.2\ kg}{90\ \text{N m}^{-1}}}$$

$$= 0.3\ \text{s}$$

(b) സമവാക്യം 14.33 ൽ നിന്നും ആയതി പ്രാരംഭമൂല്യത്തിൽ നിന്നും പകുതിയിലേക്ക് താഴാൻ ഉള്ള സമയം $T_{1/2}$ ആണ്

$$T_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{b/2m}$$

$$= \frac{0.693}{40} \times 2 \times 200\ \text{s}$$

$$= 6.93\ \text{s}$$

(c) യാന്ത്രിക ഊർജം അതിന്റെ പ്രാരംഭമൂല്യത്തിൽ നിന്നും പകുതിയിലേക്ക് താഴാൻ എടുക്കുന്ന സമയം കണ്ടുപിടിക്കാൻ നമ്മൾ സമവാക്യം 14.35 ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഈ സമവാക്യത്തിൽ നിന്നും

$$E(t_{1/2})/E(0) = \exp(\ bt_{1/2}/m)$$

Or $$\tfrac{1}{2} = \exp(\ bt_{1/2}/m)$$

$$\ln(1/2) = (bt_{1/2}/m)$$

Or $$t_{1/2} = \frac{0.693}{40\ \text{g s}^{-1}} \times 200\ \text{g}$$

$$= 3.46\ \text{s}$$

ഇത് ആയതിയുടെ ശോഷണസമയത്തിന്റെ നേർപകുതിയാണ്. ഇതിൽ ആശ്ചര്യപ്പെടേണ്ടതില്ല, കാരണം സമവാക്യം 14.33 ഉം 14.35 പ്രകാരം ഊർജം ആയതിയുടെ വർഗത്തെയാണ് ആശ്രയിക്കുന്നത്. ഇവിടെ രണ്ട് എക്സ്പോണൽഷ്യലുകളിലും 2 ഒരു ഘടകമായി ഉണ്ട് എന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക. ◀

14.10 പ്രണോദിതദോലനങ്ങളും അനുനാദവും (FORCED OSCILLATIONS AND RESONANCE)

ഒരു വ്യൂഹം (സരള പെൻഡുലം അല്ലെങ്കിൽ ഒരു സ്പ്രിംഗിനോട് ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ബ്ലോക്ക്) അതിന്റെ സന്തുലിതാവസ്ഥയിൽ നിന്നും അല്പം നീക്കിയതിനുശേഷം സ്വതന്ത്രമാക്കുമ്പോൾ, അത് അതിന്റെ സ്വാഭാവികാവൃത്തിയിൽ ദോലനം ചെയ്യുന്നു. ഈ ദോലനങ്ങളെ സ്വതന്ത്രദോലനങ്ങൾ *(free oscillations)* എന്നു വിളിക്കുന്നു. എപ്പോഴുമുള്ള മന്ദീകരണ ബലങ്ങൾ മൂലം എല്ലാ സ്വാഭാവിക ദോലനങ്ങളും കുറച്ചു സമയത്തിനു ശേഷം നിലയ്ക്കുന്നു. പക്ഷെ ഒരു ബാഹ്യ ഏജൻസിക്ക് ഈ ദോലനങ്ങളെ നിലനിർത്താൻ കഴിയും. അത്തരം ദോലനങ്ങളെ പ്രണോദിത ദോലനങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ പ്രേരിത ദോലനങ്ങൾ എന്നുവിളിക്കുന്നു. ബാഹ്യബലം ക്രമാവർത്തിതമാകുന്ന ഒരു സാഹചര്യം പരിഗണിക്കാം. ഇതിന്റെ ആവൃത്തി ω_d യെ പ്രേരിത *(driven)* ആവൃത്തി എന്നു വിളിക്കുന്നു. പ്രണോദിത ക്രമാവർത്തിത ദോലനങ്ങളുടെ ഒരു പ്രധാനപ്പെട്ട വസ്തുത വ്യൂഹം അതിന്റെ സ്വാഭാവിക ആവൃത്തി

* *ഗുരുത്വാകർഷണത്തിന്റെ പ്രഭാവത്തിൽ കട്ട സ്പ്രിംഗിന്റെ O എന്ന സന്തുലിത സ്ഥാനത്തായിരിക്കും. ഇവിടെ ഈ സ്ഥാനത്തു നിന്നുമുള്ള സ്ഥാനാന്തരത്തെയാണ് x സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.*

യിലാകണമെന്നില്ല ദോലനം ചെയ്യുന്നത് എന്നതാണ്. ബാഹ്യ ഏജൻസിയുടെ ആവൃത്തി ω_d യിലാണ്. മന്ദീകരണം മൂലം സ്വാഭാവിക ദോലനങ്ങൾ നശിച്ചുപോകുന്നതിലാണ് ഇത്. പ്രണോദിത ദോലനങ്ങളുടെ ഒരു പരിചിതമായ ഉദാഹരണമായി ഊഞ്ഞാലാടുന്ന ഒരു കുട്ടിയെ പരിഗണിക്കാം. തന്റെ ആട്ടം നിലനിർത്തുന്നതിനായി കുട്ടി പാദങ്ങളെ ക്രമാവർത്തിതമായി നിലത്ത് ഊന്നി ബലം കൊടുക്കുന്നത് കാണാം. (അല്ലെങ്കിൽ മറ്റാരെങ്കിലും ക്രമാവർത്തിതമായി കുട്ടിക്ക് ഒരു തള്ള് കൊടുക്കണം) ഇത് ദോലനങ്ങളെ നിലനിർത്താൻ ആവശ്യമാണ്.

സമയത്തിനനുസരിച്ച് ക്രമാവർത്തിതമായി വ്യത്യാസപ്പെടുന്നതും Fo ആയതിയും ഉള്ള ഒരു ബാഹ്യബലം, F(t), ഒരു അവമന്ദന ദോലകത്തിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നതായി പരിഗണിക്കുക ഇങ്ങനെയുള്ള ഒരു ബലത്തെ

$$F(t) = F_o \cos \omega_d t \qquad (14.36)$$

എന്ന് പ്രതിനിധാനം ചെയ്യാം. രേഖീയ പുനസ്ഥാപന ബലം, അവമന്ദന ബലം, സമവാക്യം (14.36) പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്ന സമയാശ്രിത പ്രചോദിത ബലം എന്നിവയെല്ലാം ഒരുമിച്ച് ഉണ്ടാകുന്ന സംയോജിത ബലത്തെ

$$m\,a(t) = -k\,x(t) - bv(t) + F_o \cos \omega_d t \qquad (14.37a)$$

എന്നെഴുതാം. a (t) - ക്ക്പകരം $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ എന്നും v(t) ക്ക് പകരം $\dfrac{dx}{dt}$ എന്നും എഴുതി സമവാക്യം (14.37a) നെ പുനഃക്രമീകരിച്ചാൽ

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F_o \cos \omega_d t \qquad (14.37b)$$

എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. ഇത് കോണീയാവൃത്തി ω_d യുള്ള ഒരു ക്രമാവർത്തിത ബലത്തിനു വിധേയമായിരിക്കുന്ന m മാസ് ഉള്ള ഒരു ദോലകത്തിന്റെ ദോലനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഈ ദോലകം ആരംഭത്തിൽ സ്വാഭാവിക ആവൃത്തി ω യിൽ ദോലനം ചെയ്യുന്നു. ഒരു ക്രമാവർത്തിത ബാഹ്യബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുമ്പോൾ, ഇതിന്റെ സ്വാഭാവികാവൃത്തിയിലുള്ള ദോലനം ഇല്ലാതാവുകയും ബാഹ്യബലത്തിന്റെ കോണീയാവൃത്തിയിലുള്ള ദോലനം ആരംഭിക്കുകയും ചെയ്യും. സ്വാഭാവിക ദോലനം ഇല്ലാതായതിനു ശേഷമുള്ള വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരത്തെ

$$x(t) = A \cos (\omega_d t + \phi) \qquad (14.38)$$

എന്നെഴുതാം. ഇവിടെ ക്രമാവർത്തിത ബാഹ്യബലം പ്രയോഗിക്കുന്ന നിമിഷം മുതലാണ് സമയം കണക്കാക്കുന്നത്.

പ്രണോദിതാവൃത്തി ω_d യുടെയും, സ്വാഭാവികാവൃത്തി ω യുടെയും സംയോജിത ഫലനമാണ് ആയതി, A. ഇതിനെ

$$A = \frac{F_o}{\left\{m^2\left(\omega^2 - \omega_d^2\right)^2 + \omega_d^2 b^2\right\}^{1/2}} \qquad (14.39a)$$

എന്നെഴുതാം

ഫേസ്വ്യതിയാനം ϕ യെ $\tan \phi = \dfrac{-v_o}{\omega_d x_o}$ (14.39b)

എന്ന ബന്ധത്തിലൂടെ കണ്ടെത്താം.

ഇവിടെ m, വസ്തുവിന്റെ മാസ്സും, v_0, x_0 എന്നിവ ക്രമാവർത്തന ബലം പ്രയോഗിക്കുന്ന t = 0 സമയത്തുള്ള വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗവും, സ്ഥാനാന്തരവും ആണ്. പ്രണോദിത ദോലകത്തിന്റെ ആയതി, പ്രണോദിത ബലത്തിന്റെ കോണീയാവൃത്തിയെ ആശ്രയിക്കുന്നെന്നാണ് സമവാക്യം (14.39) കാണിക്കുന്നത്.: പ്രണോദിതാവൃത്തി ω_d യും സ്വാഭാവികാവൃത്തി ω യും വളരെ അടുത്തായിരിക്കുമ്പോഴും ഇവയുടെ വിലകൾ തമ്മിൽ വലിയ അന്തരമുള്ളപ്പോഴും ദോലകത്തിന്റെ സ്വഭാവത്തിന് വളരെ വ്യത്യാസം കാണാൻ സാധിക്കും. നമുക്ക് ഇവ രണ്ടും പരിശോധിക്കാം.

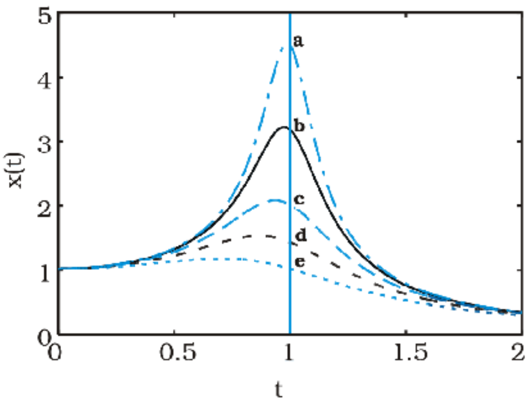
(a) അവമന്ദനം ചെറുതും പ്രണോദിതാവൃത്തിയും സ്വാഭാവികാവൃത്തിയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം വളരെ വലതും ആയിരിക്കുമ്പോൾ (Small Damping, Driving Frequency far from Natural Frequency)

ഇത്തരം സാഹചര്യങ്ങളിൽ സമവാക്യം 14.39a യിലെ $m(\omega^2 - \omega_d^2)$ നേക്കാൾ വളരെ ചെറുതായിരിക്കും $\omega_d b$. അതു കൊണ്ട് $\omega_d b$ എന്ന പദത്തെ അവഗണിക്കാം. അങ്ങനെയാകുവോൾ സമവാക്യം (14.39)

$$A = \frac{F_o}{m\left(\omega^2 - \omega_d^2\right)} \qquad (14.40)$$

എന്നായി ചുരുങ്ങുന്നു. ഒരു വ്യൂഹത്തിൽ നിലനില്ക്കുന്ന വ്യത്യസ്ത അവമന്ദന വിലകളിൽ, പ്രണോദിത ബലത്തിന്റെ കോണീയാവൃത്തിയിലുള്ള സ്ഥാനാന്തര ആയതിയുടെ ആശ്രിതത്വം ചിത്രം 14.21 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. അവമന്ദനബലത്തിന്റെ വില എന്തായിരുന്നാലും $\omega_d/\omega = 1$ ആയിരിക്കുമ്പോൾ, പ്രണോദിത

കമ്പനത്തിന്റെ ആയതി ഏറ്റവും കൂടുതലാണ് എന്നു കാണാം. വളരെ ചെറിയ അവമന്ദനങ്ങൾക്ക്, അനുനാദത്തിന്റെ (resonance) ഉച്ചസ്ഥാനം ഉയരം കൂടിയതും കൂർത്തതും ആണെന്നാണ് ചിത്രത്തിലെ വക്രരേഖകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.



ചിത്രം 14.22 പ്രണോദിത ദോലനങ്ങളുടെ ആയതി. പ്രണോദിത ബലത്തിന്റെ കോണീയാവൃത്തിയുടെ ഫലനത്തിൽ $\omega_d/\omega = 1$ ന്റെ അടുത്ത് ആയതി പരമാവധി ആണ്. വ്യൂഹത്തിന്റെ വ്യത്യസ്ത വ്യാപ്തിയിലുള്ള അവമന്ദനത്തിന് അനുസൃതമാണ് അഞ്ച് വക്ര രേഖകൾ. വക്രരേഖ *a* ഏറ്റവും കുറവ് അവമന്ദനത്തിന് അനുസൃതമാണ്. *b*, *c*, *d*, *e* എന്നീ വക്ര രേഖകളിൽ അവമന്ദനം ക്രമമായി വർധിക്കുന്നു. വക്രതയുടെ അഗ്രം *b* യുടെ ഇടത്തേക്ക് വ്യതിചലിക്കുന്നു.

പ്രണോദിതാവൃത്തി വ്യത്യാസപ്പെടുത്തി, സ്വാഭാവികാവൃത്തിക്ക് തുല്യമാക്കിയാൽ, ആയതി അനന്തതയോടടുക്കുന്നു. ഇത് അവമന്ദനം പൂജ്യമാകുമ്പോഴുള്ള തികച്ചും സാങ്കൽപികമായ പ്രസ്താവനയാണ്. ഇത് പ്രായോഗിക വ്യൂഹത്തിൽ ഒരിക്കലും ഉണ്ടാകുന്നില്ല. കാരണം, അവമന്ദനം ഒരിക്കലും പൂജ്യമാവുകയില്ല. ആടിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു ഊഞ്ഞാലിന്റെ ആവർത്തന കാലവും, അതിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബാഹ്യബലത്തിന്റെ ആവർത്തന കാലവും തുല്യമാകുമ്പോൾ, ഊഞ്ഞാലിന്റെ ആയതി പരമാവധിയാകുന്നത് നിങ്ങൾ തിർച്ചയായും ശ്രദ്ധിച്ചിട്ടുണ്ടാകും. അതിന്റെ ആയതി ഒരിക്കലും അനന്തത എന്ന വില കൈവരിക്കുന്നില്ല. ഊഞ്ഞാൽ വ്യൂഹത്തിൽ എല്ലായ്പ്പോഴും ഒരു അവമന്ദന ബലം ഉള്ളതുകൊണ്ടാണ് ഇങ്ങനെ സംഭവിക്കുന്നത്.

(b) സ്വാഭാവികാവൃത്തിയോട് പ്രണോദിതാവൃത്തി അടുത്തിരിക്കുമ്പോൾ (Driving Frequency Close to Natural Frequency)

ഇത്തരം സാഹചര്യത്തിൽ ω_d യുടെ മൂല്യം ω യുടെ മൂല്യത്തിനടുത്തായിരിക്കും. അതിനാൽ $m(\omega^2 - \omega_d^2)$ യുടെ വില $\omega_d b$ യുടേതിനേക്കാൾ വളരെ ചെറുതായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് സമവാക്യം 14.39 നെ

$$A = \frac{F_o}{\omega_d b} \qquad (14.41)$$

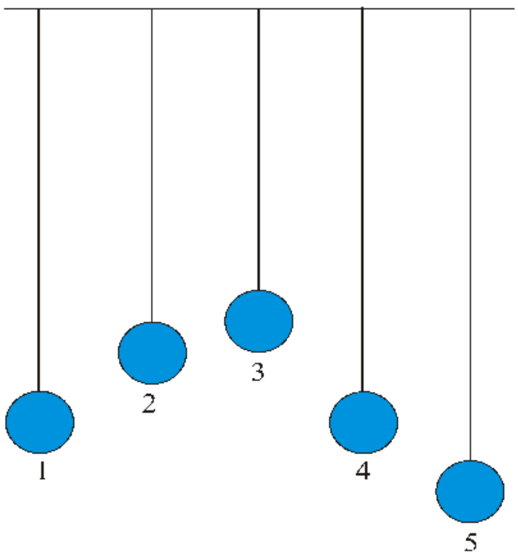
എന്നെഴുതാം.

ഒരു നിശ്ചിത പ്രണോദിത ആവൃത്തിയിലുള്ള പരമാവധി ആയതിയെ നിയന്ത്രിക്കുന്നത് പ്രണോദിത ആവൃത്തിയും, അവമന്ദനവുമാണെന്ന് ഈ സമവാക്യത്തിൽ നിന്നും വ്യക്തമാണ്. അതു കൊണ്ട് ആയതി ഒരിക്കലും അനന്തമാകുകയില്ല. ഒരു ദോലകത്തിന്റെ സ്വാഭാവിക ആവൃത്തിയോട് പ്രണോദിതാവൃത്തി അടുത്തു വരുമ്പോൾ, ദോലകത്തിന്റെ ആയതി വർദ്ധിക്കുന്ന പ്രതിഭാസത്തെ അനുനാദം (Resonance) എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

അനുനാദം ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രതിഭാസങ്ങൾ നിത്യജീവിതത്തിൽ നമുക്ക് സുപരിചിതങ്ങളാണ്. ഊഞ്ഞാലുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നിങ്ങളുടെ അനുഭവം അനുനാദത്തിന് നല്ലൊരുദാഹരണമാണ്. ഊഞ്ഞാലാട്ടത്തിൽ അനുരണനത്തിന്റെ പ്രഭാവം നിങ്ങൾക്ക് അനുഭവപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടാകാം. കൂടുതൽ ഉയരത്തിൽ ആടാനുള്ള കഴിവ് ഊഞ്ഞാലിന്റെ സ്വാഭാവികാവൃത്തിയും, തറക്കെതിരായി പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലത്തിന്റെ താളവും തമ്മിലുള്ള സമയക്രമീകരണത്തെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നെന്ന് നിങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ടാകും.

ഈ ആശയം കൂടുതൽ വ്യക്തമാകുന്നതിനു വേണ്ടി വിവിധ നീളങ്ങളിലുള്ള അഞ്ച് സരള പെൻഡുലങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. ഇവ ചിത്രം 14.22 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ, ഒരു പൊതു ചരടിൽ നിന്നും ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നു. പെൻഡുലം ഒന്നിനും നാലിനും ഒരേ നീളവും മറ്റുള്ളവയ്ക്ക് വ്യത്യസ്ത നീളവുമാണ് ഒന്നാമത്തെ പെൻഡുലത്തെ ചെറിയ ആയതിയിൽ ആട്ടുക. ഈ പെൻഡുലത്തിന്റെ ഊർജം മറ്റുള്ള പെൻഡുലങ്ങളിലേക്ക് പൊതു ചരടിലൂടെ വ്യാപിക്കുകയും അവ ദോലനം ആരംഭിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഇവിടെ പ്രണോദിത ബലം ലഭിക്കുന്നത് ചരടിലൂടെയാണ്. ഈ പ്രണോദിത ബലത്തിന്റെ ആവൃത്തി, ഒന്നാമത്തെ പെൻഡുലത്തിന്റെ ആവൃത്തി തന്നെയായിരിക്കും. 2, 3, 5 എന്നീ പെൻഡുലങ്ങളെ നിരീക്ഷിച്ചാൽ, അവ വ്യത്യസ്ത ആയതിയിലും അവയുടെ സ്വഭാവിക ആവൃത്തിയിലും ദോലനം ആരംഭിക്കുന്നതായി കാണാം. എന്നാൽ ഈ ദോലനങ്ങൾ സാവധാനം അവമന്ദനത്തിനുവിധേയം ആകുന്നു. അവയുടെ ആവൃത്തികൾ സാവധാനം വ്യത്യാസപ്പെടുകയും, അവസാനം ഒന്നാമത്തെ പെൻ

ഡുലത്തിന്റെ ആവൃത്തി കൈവരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. അവയുടെ ആവൃത്തി പ്രണോദിത ബലത്തിന്റെ ആവൃത്തിയാണെങ്കിലും ആയതി വ്യത്യസ്തമായിരിക്കും. ഇവയുടെ ആയതികൾ ചെറുതായിരിക്കും. എന്നാൽ നാലാമത്തെ പെൻഡുലത്തിന്റെ പ്രതികരണം മറ്റുള്ളവയിൽ നിന്നും തികച്ചും വ്യത്യസ്തമാണ്. ഇതിന്റെ ആവൃത്തി ഒന്നാമത്തേതിന്റെ ആവൃത്തിക്ക് തുല്യമാണ്. എന്നാൽ ആയതി സാവധാനം വർദ്ധിച്ച് വളരെ വലുതാകുന്നു. അതായത് അനുനാദത്തിലേത് പോലുള്ള ഒരു പ്രതികരണം ഈ പെൻഡുലം പ്രകടിപ്പിക്കുന്നു. ഇതിനു കാരണം ഈ പെൻഡുലത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ അനുനാദത്തിന് ആവശ്യമായ സാഹചര്യം സംജാതമായതാണ്. അതായത് ഇതിന്റെ സ്വഭാവികാവൃത്തി പ്രണോദിതബലത്തിന്റെ ആവൃത്തിയുമായി പൊരുത്തപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 14.22 ഒരു ചരടിൽ നിന്നും നിശ്ചിത അകലങ്ങളിൽ തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്ന അഞ്ച് സിംപിൾ പെൻഡുലങ്ങളുടെ ഒരു വ്യൂഹം.

ഒരു ഏക സ്വാഭാവിക ആവൃത്തിയിൽ ദോലനം ചെയ്യുന്ന വ്യൂഹങ്ങളെയാണ് നാം ഇതുവരെ പരിഗണിച്ചത്. – എന്നാൽ എല്ലാ വ്യൂഹങ്ങൾക്കും ഒന്നോ, അതിലധികമോ സ്വഭാവിക ആവൃത്തികൾ ഉണ്ട്. വലിച്ചു കെട്ടിയിരിക്കുന്ന ചരടും, വായുവും ഒക്കെ ഇത്തരം സംവിധാനങ്ങളുടെ ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. കെട്ടിടങ്ങൾ, പാലങ്ങൾ, വിമാനങ്ങൾ ഇവയ്ക്കൊക്കെ ഒന്നിലധികം സ്വാഭാവിക കമ്പന ആവൃത്തികൾ ഉണ്ട്. ഒരു ബാഹ്യ ക്രമാവർത്തന ബലം ഇത്തരം സംവിധാനങ്ങളിൽ പ്രണോദിത കമ്പനങ്ങൾ ഉണ്ടാകും. ഏതെങ്കിലും സാഹചര്യത്തിൽ ബാഹ്യബലത്തിന്റെ ആവൃത്തി ω_d ഇത്തരം സംവിധാനങ്ങളുടെ സ്വാഭാവിക ആവൃത്തിക്കുതുല്യമായാൽ അപ്പോഴുണ്ടാകുന്ന പ്രണോദിത കമ്പനങ്ങളുടെ ആയതി വളരെ കൂടുതലാവുകയും അത് കെട്ടിടങ്ങളുടെയും പാലങ്ങളുടെയും തകർച്ചയിലേക്ക് നയിക്കുകയും ചെയ്യും ഇത്തരത്തിലുള്ള അപകടങ്ങൾ ഒഴിവാക്കുവാൻ വേണ്ടിയാണ് പാലങ്ങളിലൂടെ കടന്നു പോകുമ്പോൾ സൈനികർ മാർച്ചു ചെയ്തു പോകാത്തത്. അതുപോലെ ഒരേ നിർമ്മാണ സാമഗ്രികൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരേ ദൃഢതയിൽ നിർമ്മിച്ചിരിക്കുന്ന കെട്ടിടങ്ങൾ എല്ലാം ഭൂകമ്പത്താൽ ഒരേ പോലെ തകർന്നു വീഴാതിരിക്കുവാനുള്ള കാരണവും ഇതുതന്നെ. കെട്ടിടങ്ങളുടെ സ്വാഭാവിക ആവൃത്തി അവയുടെ ഉയരം, അവ നിർമ്മിക്കാനുപയോഗിക്കുന്ന സാമഗ്രികൾ, തുടങ്ങിയ ഒട്ടേറെ ഘടകങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചാണ് ഇരിക്കുന്നത്. ഭൂകമ്പ വേളയിൽ ഏതെങ്കിലും കെട്ടിടത്തിന്റെ സ്വാഭാവിക ആവൃത്തി ഭൂകമ്പ തരംഗത്തിന്റെ ആവൃത്തിക്കു തുല്യമായി വന്നാൽ അത്തരം കെട്ടിടങ്ങൾ തകർന്നു വീഴുന്നതിന് സാധ്യത കൂടുതലായിരിക്കും.

സംഗ്രഹം

1. സ്വയം ആവർത്തിക്കപ്പെടുന്ന ചലനങ്ങളെ ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു.
2. ഒരു പൂർണ്ണദോലനത്തിന് ആവശ്യമായ സമയമാണ് ആവർത്തന കാലം T. ഇത് ആവൃത്തിയുമായി

$$T = \frac{1}{\nu}$$

എന്ന സമവാക്യത്തിലൂടെ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഒരു സെക്കൻഡിലുള്ള ആവർത്തന ചലനത്തിന്റെ അല്ലെങ്കിൽ ദോലന ചലനത്തിന്റെ എണ്ണമാണ് ആവൃത്തി. SI യൂണിറ്റിൽ ഇത്

അളക്കുന്നത് ഹെർട്സ് എന്ന യൂണിറ്റുപയോഗിച്ചാണ്.

$$1 \text{ ഹെർട്സ്} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ ദോലനം പ്രതി സെക്കൻഡ്} = 1 \text{ s}^{-1}$$

3. സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിൽ, സന്തുലിത സ്ഥാനത്തുനിന്നുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ക്ഷണിക സ്ഥാനാന്തരം $x(t)$ യുടെ സമവാക്യം

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi)$$

ആണ്. ഇതിൽ A സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ ആയതി, $(\omega t - \phi)$ ചലനത്തിന്റെ ഫേസ്, ϕ ഫേസ് സ്ഥിരാങ്കം, എന്നിങ്ങനെയാണ്. കോണീയാവൃത്തി ω ചലനത്തിന്റെ ആവൃത്തിയുമായും ആവർത്തന കാലവുമായും ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad \text{(കോണീയാവൃത്തി)}$$

4. സരളഹാർമോണികചലനത്തെ സമവർത്തുളചലനത്തിനു വിധേയമായിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിൽ നിന്നും വൃത്തപാതയുടെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വ്യാസരേഖയിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന പ്രക്ഷേപത്തിന്റെ ചലനമായി കണക്കാക്കാം.

5. സരളഹാർമോണികചലനത്തിൽ വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗവും, ത്വരണവും, സമയത്തിന്റെ ഫലനങ്ങളാണ്. അവയുടെ സമവാക്യങ്ങൾ

$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t - \phi) \quad \text{(പ്രവേഗം)}$$

$$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

$$= -\omega^2 x(t) \quad \text{(ത്വരണം)}$$

ഇതിൽ നിന്നും സരളഹാർമോണികചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗവും ത്വരണവും ക്രമാവർത്തന ഫലനമാണ് എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. പ്രവേഗത്തിന്റെ ആയതി $v_m = \omega A$ യും ത്വരണത്തിന്റെ ആയതി $a_m = \omega^2 A$ യും ആണ്.

6. സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിലെ ബലം എല്ലായ്പ്പോഴും സ്ഥാനാന്തരത്തിന് ആനുപാതികവും സന്തുലിത സ്ഥാനത്തിന്റെ നേർക്ക് ആയിരിക്കുകയും ചെയ്യും.

7. സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിലുള്ള വസ്തുവിന്റെ ഏതൊരു സമയത്തെയും ഗതികോർജം $K = \frac{1}{2}mv^2$ സ്ഥിതികോർജം $U = \frac{1}{2}kx^2$ എന്നിങ്ങനെയാണ്. ദോലനം ചെയ്യുന്ന വസ്തുവിൽ ഘർഷണം ഇല്ലെങ്കിൽ വസ്തുവിന്റെ മൊത്തം ഊർജം $E = K + U$ സ്ഥിരമാണ്. എന്നാൽ പ്രായോഗികമായി K യുടേയും U വിന്റേയും വില സമയത്തിനനുസരിച്ച് സദാ വ്യത്യാസപ്പെട്ടുകൊണ്ടിരിക്കും.

8. ഹുക്കിന്റെ നിയമം അനുശാസിക്കുന്ന $F = -kx$ എന്ന പുനഃസ്ഥാപനബലത്തിനു വിധേയമായി ദോലനം ചെയ്തു കൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു സരളഹാർമോണികചലനത്തിലായിരിക്കും. ഇതിന്റെ കോണീയാവൃത്തി

$$\text{കോണീയാവൃത്തി}, \ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{ആവർത്തനകാലം}, \ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

ഇങ്ങനെയുള്ള വ്യൂഹത്തെ രേഖീയ ദോലകം *(linear oscillator)* എന്നു വിളിക്കുന്നു.

9. ചെറിയ കോണിൽ ആടിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്ന സരളപെൻഡുലത്തിന്റെ ചലനം ഏകദേശം സരള

ഹാർമോണിക ചലനമാണ്. അതിന്റെ ആവർത്തനകാലം

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$ ആയിരിക്കും.

10. ബാഹ്യബലത്തിന്റെ സ്വാധീനം മൂലം ഒരു പ്രായോഗിക ദോലന വ്യൂഹത്തിന്റെ യാന്ത്രികോർജം ദോലന സമയത്ത് കുറഞ്ഞു കൊണ്ടിരിക്കുന്നു. യാന്ത്രികോർജം താപോർജമായി മാറുന്നതു കൊണ്ടാണ് ഇങ്ങനെ സംഭവിക്കുന്നത്. അങ്ങനെയുള്ള സന്ദർഭങ്ങളിൽ ദോലനത്തിനും ദോലനം ചെയ്യുന്ന വസ്തുവിനും അവമന്ദനം സംഭവിക്കുന്നുവെന്നു പറയുന്നു. b അവമന്ദന സ്ഥിരാങ്കവും, v ദോലകത്തിന്റെ പ്രവേഗവും ആയാൽ അവമന്ദനബലം $F_d = -bv$ ആയിരിക്കും. ഇത്തരം ബലത്തിനു വിധേയമായ ദോലകത്തിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം

$$x(t) = A e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi)$$

ആണ്. ഇവിടെ ω', അവമന്ദിത ദോലനത്തിന്റെ കോണീയാവൃത്തിയാണ്. ഇതിനെ

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

എന്ന സമവാക്യമുപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം. അവമന്ദനസ്ഥിരാങ്കം ചെറുതായാൽ, $\omega' \approx \omega$, ആണ്. ഇവിടെ ω എന്നത് അവമന്ദനം സംഭവിക്കാത്ത ദോലകത്തിന്റെ കോണീയാവൃത്തിയാണ്. അവമന്ദിത ദോലകത്തിന്റെ യാന്ത്രികോർജം E എന്നത്

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2 e^{-bt/m}$$

11. ω_d കോണീയാവൃത്തിയുള്ള ഒരു ബാഹ്യബലം ω സ്വാഭാവിക കോണീയാവൃത്തിയുള്ള ഒരു വ്യൂഹത്തിൽ പ്രയോഗിച്ചാൽ, വ്യൂഹം ω_d കോണീയാവൃത്തിയിൽ ദോലനം ചെയ്യുന്നു. ദോലനത്തിന് പരമാവധി ആയതി ലഭിക്കുന്നത്.

$$\omega_d = \omega$$

ആയിരിക്കുമ്പോഴാണ്. ഈ അവസ്ഥയെ അനുനാദം (resonance) എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ഭൗതിക അളവ്	ചിഹ്നം	ഡൈമെൻഷൻ	യൂണിറ്റ്	കുറിപ്പ്
ആവർത്തനകാലം	T	[T]	s	ചലനം സ്വയം ആവർത്തിക്കുന്ന ഏറ്റവും ചെറിയ സമയം
ആവൃത്തി	ν (or f)	[T^{-1}]	s^{-1}	$\nu = \frac{1}{T}$
കോണീയാവൃത്തി	ω	[T^{-1}]	s^{-1}	$\omega = 2\pi\nu$
ഫേസ് സ്ഥിരാങ്കം	ϕ	ഡൈമെൻഷൻ ഇല്ല	rad	സരളഹാർമോണികചലനത്തിലെ സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ ആദ്യഫേസ്
ബലസ്ഥിരാങ്കം	k	[MT^{-2}]	N m^{-1}	സരളഹാർമോണികചലനം

വിചിന്തനവിഷയങ്ങൾ

1. ചലനം സ്വയം ആവർത്തിക്കുന്ന ഏറ്റവും ചെറിയ സമയമാണ് ആവർത്തന കാലം T. അതുകൊണ്ട് n T സമയത്തിന് ശേഷം ചലനം വീണ്ടും ആവർത്തിക്കുന്നു. ഇവിടെ n ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യയാണ്.
2. എല്ലാ ആവർത്തന ചലനങ്ങളും സരളഹാർമോണികചലനങ്ങളല്ല. ബലനിയമം F=-kx അനുസരിക്കുന്ന ആവർത്തനചലനം മാത്രമാണ് സരളഹാർമോണികചലനം .

3. വിപരീതവർഗനിയമ ബലം (inverse square law force) കാരണമോ (ഗ്രഹ ചലനത്തിലെപ്പോലെ)' ദ്വിമാന സരള ഹാർമോണിക ബലം $(-m\omega^2 r)$ കാരണമോ വർത്തുള ചലനം ഉണ്ടാകാം. രണ്ടാമത്തെ സന്ദർഭത്തിൽ രണ്ട് ലംബ ദിശയിലുമുള്ള (x,y) ചലനത്തിന്റെ ഫേസ് $\pi/2$ വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കണം. ഉദാഹരണത്തിന് ആദ്യസ്ഥാനം (0,A) യും, പ്രവേഗം $(\omega A, 0)$ യും ഉള്ള ഒരു വസ്തുവിൽ $m\omega^2 r$ ബലം പ്രയോഗിച്ചാൽ, A ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിലൂടെ വസ്തു സമാനമായി സഞ്ചരിക്കും.

4. ഒരു നിശ്ചിത കോണീയാവൃത്തി ω യുള്ള രേഖീയ സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തെ പൂർണ്ണമായും മനസ്സിലാക്കുവാൻ, ചലനത്തിന്റെ പ്രാരംഭദശയെ സംബന്ധിച്ച് താഴെ പറയുന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ജോഡി സവിശേഷതകൾ മാത്രം മതി. ഈ അവസ്ഥകൾ (i) ആദ്യ സ്ഥാനവും, ആദ്യ പ്രവേഗവും, (ii) ആയതിയും ഫേസും (iii) ഊർജവും ഫേസും എന്നിവയാണ്.

5. ഒരു നിശ്ചിത ആയതിയോ ഊർജമോ ഉള്ള ചലനത്തിന്റെ മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ നിന്ന് ആദ്യസ്ഥാനമോ ആദ്യപ്രവേഗമോ ഉപയോഗിച്ച് ചലനത്തിന്റെ ഫേസ് നിർണ്ണയിക്കുന്നു.

6. അനിയന്ത്രിതമായ ആയതിയിലും ഫേസിലും ഉള്ള രണ്ട് സരളഹാർമോണികചലനങ്ങൾ സംയോജിപ്പിച്ചാൽ അത് ആവർത്തന ചലനമാകണമെന്ന് നിർബന്ധമില്ല. ഒരു ചലനത്തിന്റെ ആവൃത്തി അടുത്ത ചലനത്തിന്റെ ആവൃത്തിയുടെ എണ്ണൽസംഖ്യാ ഗുണിതങ്ങളാണെങ്കിൽ അത് ആവർത്തനചലനം ആയിരിക്കും. എന്നിരുന്നാലും ഒരു ആവർത്തനചലനത്തെ അനുയോജ്യമായ ആവൃത്തികളുള്ള അസംഖ്യം ഹാർമോണിക ചലനങ്ങളുടെ തുകയായി പ്രകടിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്.

7. ഫേസ് സ്ഥിരാങ്കം, ഊർജം, ആയതി എന്നിവയെ സരളഹാർമോണികചലനത്തിന്റെ ആവർത്തന കാലം ആശ്രയിക്കുന്നില്ല. ഇത് ഭൂഗുരുത്വം മൂലമുള്ള ഗ്രഹങ്ങളുടെ പരിക്രമണ പാതയിലൂടെയുള്ള ആവർത്തന ചലനവുമായി ഇതിനെ താരതമ്യം ചെയ്തു നോക്കൂ. (കെപ്ളറുടെ മൂന്നാം നിയമം)

8. ചെറിയ കോണീയാവൃത്തിയിൽ സരള പെൻഡുലത്തിന്റെ ചലനം സരള ഹാർമോണികമാണ്.

9. ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനം സരള ഹാർമോണികമാകണമെങ്കിൽ, അതിന്റെ സ്ഥാനാന്തരത്തെ താഴെ പറയുന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു രൂപത്തിൽ പ്രകടിപ്പിക്കാൻ കഴിയണം

$$x \quad A\cos\omega t - B\sin\omega t$$

$$x = A\cos(\omega t - \alpha),\; x = B\sin(\omega t - \beta)$$

മൂന്ന് രൂപങ്ങളും പൂർണമായും സമാനങ്ങളാണ്. (ഏതെങ്കിലും ഒരു സമവാക്യത്തെ മറ്റു രണ്ട് ഗണിത വാക്യങ്ങളായി, എഴുതാൻ കഴിയും).

അവമന്ദിത സരള ഹാർമോണിക ചലനങ്ങൾ (സമവാക്യം 14.31) പൂർണമായും ഒരു സരള ഹാർമോണിക ചലനമെന്ന് പറയാൻ കഴിയില്ല. $2m/b$ യേക്കാൾ വളരെ ചെറിയ സമയ ഇടവേളയിൽ ഇത് ഏകദേശം ഒരു സരള ഹാർമോണിക ചലനമായി പരിഗണിക്കുവാൻ കഴിയും. ഇവിടെ b അവമന്ദന സ്ഥിരാങ്കമാണ്.

10. പ്രണോദിതദോലനങ്ങളിൽ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥിരമായ ചലനം (പ്രണോദിത ബലത്തിന് പൂർണ ശോഷണം സംഭവിച്ച ശേഷം) സരള ഹാർമോണിക ചലനമാണ്. ഇതിന്റെ ആവൃത്തി പ്രണോദിത ബലത്തിന്റെ ആവൃത്തി ω_d യാണ്. അല്ലാതെ വസ്തുവിന്റെ സ്വാഭാവിക ആവൃത്തി ω അല്ല.

11. അവമന്ദന ബലത്തിന്റെ മൂല്യം പൂജ്യമാകുന്ന സാഹചര്യത്തിൽ, അനുനാദത്തിലുള്ള സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിന്റെ ആയതി അനന്തമാണ്. എന്നാൽ എല്ലാ യഥാർത്ഥ വ്യൂഹത്തിലും വളരെ ചെറിയ തോതിലാണെങ്കിൽ പോലും അവമന്ദനം ഉണ്ട്.

12. പ്രണോദിതദോലനത്തിൽ വസ്തുവിന്റെ ഹാർമോണിക ചലനത്തിന്റെ ഫേസ് പ്രചോദിത ബലത്തിന്റെ ഫേസിൽ നിന്നും വ്യത്യസ്തമാണ്.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

14 .1 താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിൽ ഏതെല്ലാമാണ് ക്രമാവർത്തനചലനത്തെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നത്?

(a) പുഴയുടെ ഒരു വശത്ത് നിന്നും മറു വശത്തേക്കു നീന്തി തിരിച്ച് അതേ വശത്ത് ഒരാൾ എത്തിച്ചേരുന്നു.

(b) തെക്ക് - വടക്ക് ദിശയിൽ സ്വതന്ത്രമായി തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു ഒരു കാന്തത്തെ അതിന്റെ സന്തുലിത ദിശയിൽ നിന്നും ഒരു വശത്തേക്ക് അല്പം തിരിച്ച ശേഷം സ്വതന്ത്രമാക്കുന്നു.

(c) മാസ് കേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കി കറങ്ങിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു ഹൈഡ്രജൻ തന്മാത്ര

(d) വില്ലിൽ നിന്നും തൊടുത്തുവിട്ട അമ്പ്

14.2 താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്നും സരളഹാർമോണിക ചലനത്തെയും, സരള ഹാർമോണികമല്ലാത്ത ക്രമാവർത്തന ചലനത്തെയും വേർതിരിച്ചെഴുതുക.

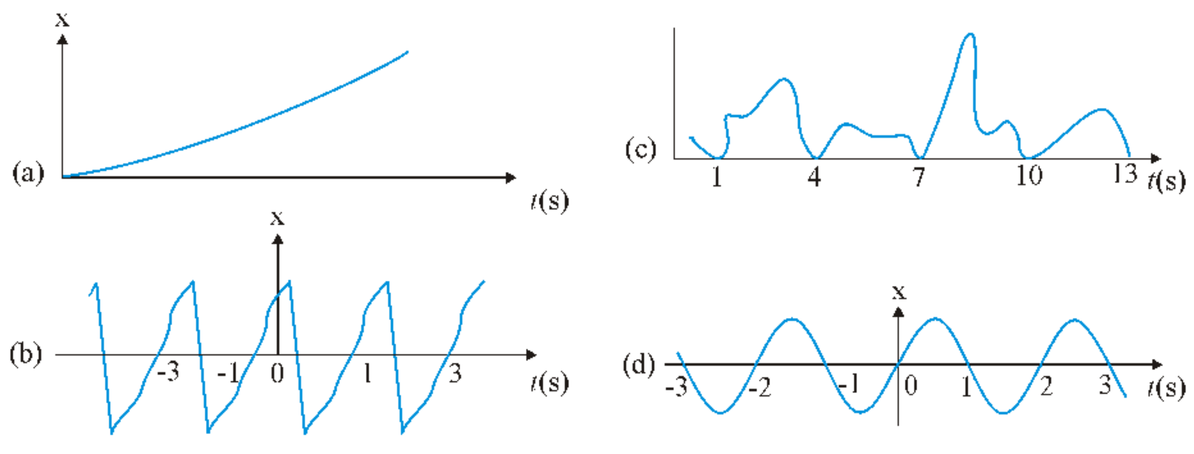
(a) സ്വന്തം അച്ചുതണ്ടിലുള്ള ഭൂമിയുടെ ഭ്രമണം

(b) U ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു ട്യൂബിൽ നിറച്ചിരിക്കുന്ന രസയൂപത്തിന്റെ ദോലന ചലനം

(c) അർദ്ധഗോളാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിന്റെ ഏറ്റവും താഴെനിന്നും അല്പം മുകളിലായുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നും ഉരുട്ടിവിടുന്ന ഒരു ബാൾബെയറിങ്ങിന്റെ ചലനം

(d) ഒരു ബഹുആറ്റതന്മാത്രയുടെ സന്തുലന സ്ഥാനത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ചലനം

14.3 നേർരേഖാ ചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനവും സമയവും തമ്മിലുള്ള ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 14.27 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഏതെല്ലാം ഗ്രാഫുകളാണ് ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങളെ സ്വചിപ്പിക്കുന്നത്? ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങളുടെ ക്രമാവർത്തനകാലം എന്താണ്?



ചിത്രം 14,23

14.4 താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന സമയത്തിന്റെ ഏകദങ്ങൾ പരിശോധിക്കുക. ഇവയിൽ ഏതെല്ലാമാണ് (a) സരള ഹാർമോണിക ചലനങ്ങൾ. (b) സരള ഹാർമോണികങ്ങളല്ലാത്ത ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങൾ (c) ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങളല്ലാത്തവ. ക്രമാവർത്തന ചലനങ്ങളുടെ ക്രമാവർത്തന കാലം കണ്ടു പിടിക്കുക.

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$ (b) $\sin^3 \omega t$

(c) $3 \cos (\pi/4 - 2\omega t)$ (d) $\cos \omega t + \cos 3\omega t + \cos 5\omega t$

(e) $\exp (-\omega^2 t^2)$ (f) $1 + \omega t + \omega^2 t^2$

14.5 ഒരു വസ്തു 10 രാ അകലത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന A, B എന്നീ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിൽ രേഖീയ സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിലാണ്. A-യിൽ നിന്നും B യിലേക്കുള്ള ദിശയെ പോസിറ്റീവായി കണക്കാക്കി താഴെ പറയുന്ന സ്ഥാനങ്ങളിലെ പ്രവേഗം, ത്വരണം, ബലം എന്നിവയുടെ ദിശ കണക്കാക്കുക

(a) A എന്ന ബിന്ദുവിൽ
(b) B എന്ന ബിന്ദുവിൽ
(c) A യിലേക്ക് സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ AB യുടെ മധ്യ ബിന്ദുവിൽ
(d) A- എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ദിശയിൽ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ B - യിൽ നിന്നും 2 cm അകലെ
(c) B - യുടെ ദിശയിൽ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ A-യിൽ നിന്നും 3 cm അകലെ
(f) Aയുടെ ദിശയിൽ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ B -യിൽ നിന്നും 4 cm അകലെ

14.6 ഒരു വസ്തുവിന്റെ ത്വരണവും (മ) സ്ഥാനാന്തരവും (ഃ) തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. ഇവയിലേതെല്ലാമാണ് സരള ഹാർമോണിക ചലനങ്ങളെന്നെഴുതുക.

(a) $a = 0.7x$
(b) $a = -200x^2$
(c) $a = -10x$
(d) $a = 100x^3$

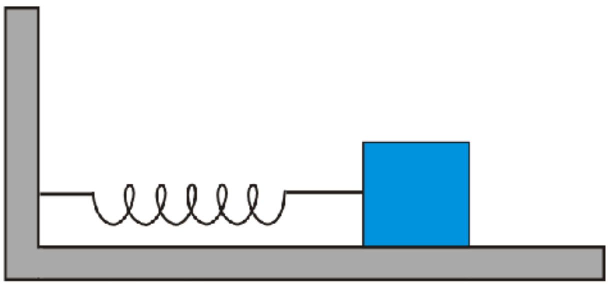
14.7 സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിലേർപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം

$x(t) = A \cos (\omega t + \phi)$.

എന്ന ഫലനം ഉപയോഗിച്ച് കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. പൂജ്യം സമയത്തിൽ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം 1 cm, പ്രവേഗം ω cm/s, കോണിയാവൃത്തി $\pi\ s^{-1}$ എന്നിങ്ങനെയാണെങ്കിൽ വസ്തുവിന്റെ ആയതിയും ആദ്യ ഫേസ് കോണും എത്ര? കോസ് ഫലനത്തിന് പകരം $x = B \sin (\omega t + \alpha)$, എന്ന സൈൻ ഫലനം ഉപയോഗിച്ച് വസ്തുവിന്റെ ചലനം വിവരിച്ചാൽ, മുകളിൽ കൊടുത്ത സ്ഥാനാന്തരത്തിലും പ്രവേഗത്തിലും വസ്തുവിന്റെ ആയതിയും ആദ്യ ഫേസ് കോണും എത്രയായിരിക്കും?

14.8 പൂജ്യം മുതൽ 50 kg വരെ അളക്കാവുന്ന ഒരു സ്പ്രിങ്ങ് ത്രാസ്സിലെ സ്കെയിലിന്റെ നീളം 20 cm ആണ്. ഇതിൽ തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ ദോലനത്തിന്റെ ക്രമാവർത്തനകാലം 0.6 s ആണെങ്കിൽ വസ്തുവിന്റെ ഭാരം എത്ര?

14.9 സ്പ്രിംഗ് സ്ഥിരാങ്കം 1200 N/m ഉള്ള ഒരു സ്പ്രിംഗ് 3 kg മാസുമായി ചിത്രം 14.24 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. വസ്തുവിനെ 2 cm വലിച്ച് ദോലനം ചെയ്യിച്ചാൽ താഴെ പ്പറയുന്നവ കണ്ടു പിടിക്കുക.



ചിത്രം 14.24

(i) ദോലനത്തിന്റെ ആവൃത്തി. (ii) മാസിന്റെ പരമാവധി ത്വരണം (iii) മാസിന്റെ പരമാവധി വേഗത

14.10 പരിശീലന പ്രശ്നം 14.9ലെ സ്പ്രിംഗ് വലിയാതിരിക്കുമ്പോഴുള്ള മാസിന്റെ സ്ഥാനം ഃ = 0 ആയും ഇടത്തു നിന്ന് വലത്തോട്ടുള്ള ദിശയെ x അക്ഷത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് ദിശയായും കരുതുക. പൂജ്യം സമയത്തിൽ $(t = 0)$ വസ്തു താഴെപ്പറയുന്ന സ്ഥാനങ്ങളിലാണെങ്കിൽ സമയത്തിനനുസരിച്ചുള്ള x ന്റെ ഏകദം എഴുതുക.

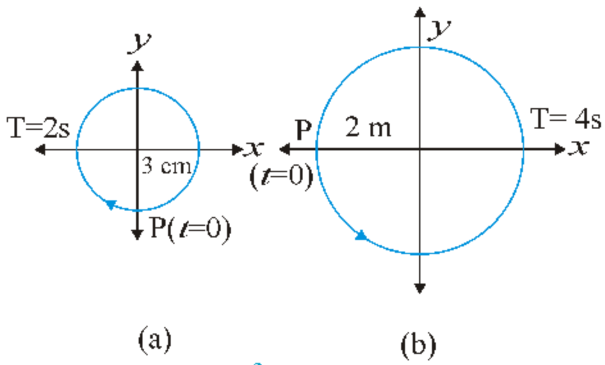
(a) സന്തുലിത സ്ഥാനത്തിൽ

(b) സ്പ്രിംഗ് പരമാവധി വലിഞ്ഞു നിൽക്കുന്ന അവസ്ഥയിൽ

(c) സ്പ്രിംഗ് പരമാവധി ചുരുങ്ങി നിൽക്കുന്ന അവസ്ഥയിൽ

ഈ ഏകദങ്ങൾ സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിൽ ആവൃത്തി, ആയതി, ആദ്യ ഫേസ് എന്നിവ എങ്ങനെ വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നുവെന്ന് എഴുതുക.

14.11 ഒരു വസ്തുവിന്റെ വർത്തുളചലനമാണ് ചിത്രം 14.25 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം, വർത്തുളചലനത്തിന്റെ ക്രമാവർത്തന കാലം, ആദ്യസ്ഥാനം, ചലനത്തിന്റെ ദിശ എന്നിവ ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 14.25

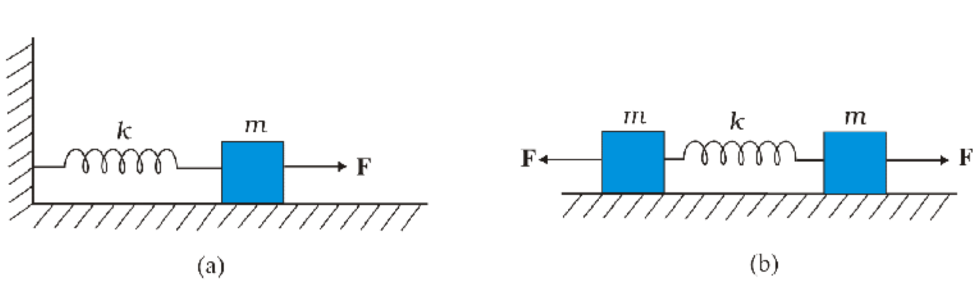
വർത്തുള ചലനം നടത്തുന്ന വസ്തു P യുടെ x പ്രക്ഷേപത്തിന്റെ സരളഹാർമോണികചലന സമവാക്യം ഒരോ സന്ദർഭത്തിലും എഴുതുക.

14.12 താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിന്റെ സമവാക്യത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അതിൽ വസ്തുവിന്റെ ആദ്യസ്ഥാനം, കോണീയ വേഗം, വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എന്നിവ അടയാളപ്പെടുത്തുക. എല്ലാ സന്ദർഭത്തിലും വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്നത് അപ്രദക്ഷിണ ദിശയിലാണ്. (x cm ലും t സെക്കൻഡിലും അളന്നിരിക്കുന്നു.

(a) $x - \ 2 \sin (3t \quad \pi/3)$ (b) $x - \cos (\pi/6 \quad t)$

(c) $x - 3 \sin (2\pi t \quad \pi/4)$ (d) $x - 2 \cos \pi t$

14.13 ചിത്രം 14.26(a) ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ m മാസ്സുള്ള ഒരു വസ്തു k സ്പ്രിംഗ് സ്ഥിരാങ്കമുള്ള ഒരു സ്പ്രിംഗുമായി ബന്ധിപ്പിച്ച് F ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നു. അതേ സ്പ്രിംഗിന്റെ രണ്ടറ്റത്തും m മാസ്സുള്ള രണ്ടു വസ്തുക്കൾ ബന്ധിപ്പിച്ച് F ബലം പ്രയോഗിച്ചിരിക്കുന്നത് ചിത്രം 14.26 (b) യിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 14.26

(a) രണ്ട് സന്ദർഭങ്ങളിലും സ്പ്രിംഗിന്റെ പരമാവധി വലിവ് എത്ര?

(b) ചിത്രം (c) യിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന മാസും, ചിത്രം (d) യിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന രണ്ട് മാസുകളും ബലത്തിൽ നിന്നും സ്വതന്ത്രമാക്കിയാൽ അവയുടെ ദോലനത്തിന്റെ ക്രമാവർത്തന കാലം എത്രയാണ്?

14.14 ഒരു വാഹന എൻജിന്റെ സിലിണ്ടറിനുള്ളിലെ പിസ്റ്റണിന്റെ സ്ട്രോക്ക് (ആയതിയുടെ ഇരട്ടി) 1.0m ആണ്. പിസ്റ്റണിന്റെ ചലനം 200 rad/m കോണീയ ആവൃത്തിയുള്ള സരള ഹാർമോണിക ചലനമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ പരമാവധി വേഗത എത്രയാണ്.

14.15 ചന്ദ്രോപരിതലത്തിലെ ഗ്രാവിറ്റി (ഗുരുത്വം) മൂലമുള്ള ത്വരണം 1.7 m/s^2 ആണ്.ഒരു സരള ഹാർമോണിക പെൻഡുലത്തിന്റെ ഭൗമോപരിതലത്തിലെ ക്രമാവർത്തന കാലം 3.5 s ആണെങ്കിൽ ചന്ദ്രോപരിതലത്തിലെ അതിന്റെ ക്രമാവർത്തന കാലം എത്രയായിരിക്കും? (ഭൗമോപരിതലത്തിലെ ഗുരുത്വ ത്വരണം 9.8 m/s^2 ആണ്.)

14.16 താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരമെഴുതുക.

(a) സരളഹാർമോണികചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ആവർത്തനകാലം, ബലസ്ഥിരാങ്കം k, വസ്തുവിന്റെ മാസ് m എന്നിവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ എന്നാണ്. എന്നാൽ സരളഹാർമോണികചലനത്തിലുള്ള ഒരു സരള പെൻഡുലത്തിന്റെ ക്രമാവർത്തന കാലം പെൻഡുലത്തിന്റെ മാസിനെ ആശ്രയിക്കാത്തതെന്തുകൊണ്ട്?

(b) ദോലനത്തിന്റെ കോൺ ചെറുതായിരിക്കുമ്പോൾ സരളപെൻഡുലത്തിന്റെ ചലനം ഏകദേശം സരളഹാർമോണികമാണ്. എന്നാൽ വലിയ ദോലനകോണിൽ ക്രമാവർത്തന കാലം $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. യേക്കാൾ കൂടുതലാണ്. എന്തുകൊണ്ടാണ് ഇങ്ങനെ സംഭവിക്കുന്നത് എന്ന് വിശദീകരിക്കുക.

(c) കൈത്തണ്ടയിൽ കെട്ടിയിരിക്കുന്ന വാച്ചുമായി ഒരാൾ ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നും താഴേക്ക് ചാടുന്നുവെന്ന് കരുതുക. കെട്ടിടത്തിൽ നിന്നും താഴേക്ക് വീണുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന സമയത്ത് വാച്ച് കൃത്യസമയം കാണിക്കുമോ?

(d) സ്വതന്ത്രമായി താഴേക്ക് പതിച്ചു കൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു പെട്ടിയിൽ സ്ഥാപിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു സരള പെൻഡുലത്തിന്റെ ആവൃത്തി എത്രയാണ്?

14.17 ഒരു കാറിൽ M മാസും l നീളവുമുള്ള ഒരു സരള പെൻഡുലം കെട്ടിത്തൂക്കിയിരിക്കുന്നു. R ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തപരിധിയിലൂടെ v വേഗതയിൽ കാർ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ പെൻഡുലം അതിന്റെ സന്തുലിത സ്ഥാനത്തു നിന്നും വൃത്തത്തിന്റെ ആരദിശയിൽ ചെറുതായി ദോലനം ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ അതിന്റെ ക്രമാവർത്തന കാലം എത്രയാണ്?

14.18 സിലണ്ടറാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കോർക്കിന്റെ സമതല പരപ്പളവ് A, സാന്ദ്രത ρ ഉയരം h എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഇത് ρ_l സാന്ദ്രതയുള്ള ഒരു ദ്രാവകത്തിൽ പൊങ്ങിക്കിടക്കുന്നു. കോർക്കിനെ ദ്രാവകത്തിൽ അല്പം താഴ്ത്തിയ ശേഷം സ്വതന്ത്രമാക്കിയപ്പോൾ സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിലാണെങ്കിൽ അതിന്റെ ക്രമാവർത്തനകാലം

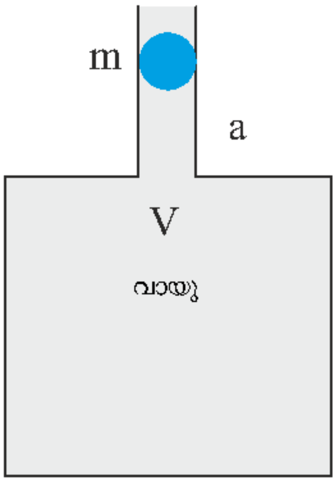
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h\rho}{\rho_l g}}$$

ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക. (ദ്രാവകം ചെലുത്തുന്ന അവമന്ദീകരണം അവഗണിക്കാം)

14.19 മെർക്കുറി നിറച്ച U ട്യൂബിന്റെ ഒരഗ്രം ഒരു സക്ഷൻ പമ്പുമായി ഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. മറ്റേ അഗ്രം വായുവിലേക്ക് തുറന്നുവച്ചിരിക്കുന്നു. രണ്ടുകോളങ്ങളും തമ്മിൽ ഒരു ചെറിയ മർദവ്യത്യാസമുണ്ട്. ഒരറ്റത്തുള്ള മെർക്കുറിയെ മുകളിലുള്ള പമ്പ് ഉപയോഗിച്ച് കുറച്ച് താഴ്ത്തിയ ശേഷം സ്വതന്ത്രമാക്കിയാൽ മെർക്കുറി സരളഹാർമോണികചലനത്തിലായിരിക്കുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

അധിക പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

14.20 ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലുള്ള ഒരു അറയിലെ വായുവിന്റെ ഉള്ളളവ് V യും കഴുത്തിന്റെ ഛേദതലപരപ്പളവ് a യും ആണ്. ഇതിന്റെ കഴുത്തിൽ സ്ഥാപിച്ചിരിക്കുന്ന ഗോളത്തിന് ഘർഷണമില്ലാതെ താഴോട്ടും മേലോട്ടും നീങ്ങാൻ കഴിയും. ഗോളത്തിനെ കുറച്ച് താഴേക്ക് നീക്കി സ്വതന്ത്രമാക്കിയാൽ അത് സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിലായിരിക്കുമെന്ന് തെളിയിക്കുക. മർദ്ദത്തിന്റേയും ഉള്ളളവിന്റെയും വ്യതിയാനങ്ങൾ ഐസോതെർമൽ ആണെന്ന് പരിഗണിച്ച് ഗോളത്തിന്റെ ചലനത്തിന്റെ ക്രമാവർത്തനകാലം കണ്ടുപിടിക്കുക.



ചിത്രം 14.27

14.21 3000 kg ഭാരമുള്ള ഒരു വാഹനത്തിന്റെ സസ്പെൻഷൻ 15 cm അമർന്നിരിക്കുന്നു. സസ്പെൻഷന്റെ ഒരു പൂർണ്ണദോലനത്തിൽ ഇത് 50% ആയി കുറയുന്നു. എങ്കിൽ (a) സസ്പെൻഷന്റെ സ്പ്രിംഗ് സ്ഥിരാങ്കത്തിന്റെ വിലയെത്ര? (b) ഒരോ ചക്രവും 750kg ഭാരം താങ്ങുന്നുവെങ്കിൽ സ്പ്രിംഗും ഷോക്ക് അബ്സോർബറും ഉൾപ്പെടുന്ന വ്യൂഹത്തിന്റെ അവമന്ദന സ്ഥിരാങ്കത്തിന്റെ വിലയെത്ര?

14.22 സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഒരു ക്രമാവർത്തന കാലത്തിലെ ശരാശരി ഗതികോർജവും ശരാശരി സ്ഥിതികോർജവും തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

14.23 15 cm ആരത്തോടു കൂടിയ വൃത്താകൃതിയിലുള്ളതും 10kg മാസ്സുള്ളതുമായ ഒരു തകിടിനെ അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന നൂലിൽ നൂലിന് ലംബമായി തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്നു. തകിടിനെ വർത്തുള ദിശയിൽ കുറച്ചുതിരിച്ച് സ്വതന്ത്രമാക്കിയപ്പോൾ അതിന്റെ ദോലനത്തിന്റെ ക്രമാവർത്തന കാലം 1.5s ആണെങ്കിൽ നൂലിന്റെ ടോർഷണൽ സ്പ്രിംഗ് സ്ഥിരാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക. (ടൊർഷൻ സ്ഥിരാങ്കം α പുന:സ്ഥാപന ബലം J യും തകിട് തിരിയുന്ന കോൺ θ യുമായി. $J = -\alpha\theta$ എന്ന് ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

14.24 ഒരു വസ്തു 5 cm ആയതിയിലും 0.2 s ക്രമാവർത്തന കാലത്തിലും ഉള്ള സരളഹാർമോണിക ചലനത്തിലാണ്. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന സ്ഥാനാന്തരത്തിൽ വസ്തുവിന്റെ ത്വരണവും സ്ഥാനാന്തരവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

(a) 5 cm

(b) 3 cm

(c) 0 cm

14.25 ഘര്‍ഷണമോ അവമന്ദനമൊ ഇല്ലാതെ ഒരു തിരശ്ചീന തലത്തില്‍ ω കോണീയാവൃത്തിയില്‍ സ്വതന്ത്രമായി ദോലനം ചെയ്യാന്‍ കഴിയുന്ന രീതിയില്‍ ഒരു മാസിനെ ഒരു സ്പ്രിങ്ങുമായി ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇതിനെ x_0 ദൂരത്തേക്ക് നീക്കിയതിനുശേഷം പൂജ്യം സമയത്തില്‍ $(t=0)$ v_0 വേഗതയില്‍ സന്തുലിത സ്ഥാനത്തിന്റെ ദിശയിലേക്ക് തള്ളുന്നു. ഇങ്ങനെയുണ്ടാകുന്ന ദോലനത്തിന്റെ ആയതി, ω, x_0 ,v_0 എന്നിവയുമായി ബന്ധിപ്പിച്ച് എഴുതുക. (ആദ്യപ്രവേഗം നെഗറ്റീവായി കരുതി $x = a \cos(\omega t+\theta)$ എന്ന സമവാക്യത്തില്‍ നിന്നും തുടങ്ങുക.)