അധ്യായം 9

ശ്രേണിയും അനുക്രമവും
(SEQUENCES AND SERIES)

❖ *മനുഷ്യന്റെ ചിന്തയുടെ ഫലമാണ് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ – ഡെഡെകിൻഡ്* ❖

9.1 ആമുഖം

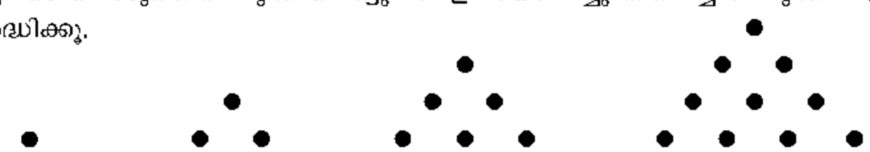
ഫിബോനാച്ചി
(1175-1250)

ശ്രേണികൾ (sequences) അനുക്രമങ്ങൾ (series) എന്നിവയെക്കുറിച്ചുള്ള കുറേ വസ്തുതകൾ നിങ്ങൾ മുൻ ക്ലാസുകളിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്? ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം, ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളിലെ വിവിധ ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം, ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളിലെ വിവിധ അനുശ്രേണികൾ, എന്നിവയെക്കുറിച്ച് പത്താം തരത്തിൽ വിശദമായി ചർച്ച ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. നിയതമായി എഴുതിയിട്ടുള്ള അനുക്രമങ്ങളെ പ്രോഗ്രഷനുകൾ എന്ന് പറയുന്നു.

സമാന്തരശ്രേണികളെക്കുറിച്ച് മുമ്പ് പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. സമാന്തരമാധ്യം (AM), സമഗുണിതശ്രേണി, ജ്യാമിതീയ മാധ്യം (GM) ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം, തുടർച്ചയായ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുക, തുടർച്ചയായ സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക, n എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ഘനസംഖ്യകളുടെ തുക എന്നിവയാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം പഠിക്കുന്നത്.

9.2 ശ്രേണികൾ

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പൊട്ടുകൾ ഉപയോഗിച്ചു നിർമിച്ചിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കൂ.



ഓരോ ചിത്രവും നിർമിക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച പൊട്ടുകളുടെ എണ്ണം 1, 3, 6, 10 എന്നിങ്ങനെയാണ്. എങ്കിൽ തുടർന്നുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ നിർമിക്കാൻ ആവശ്യമായ പൊട്ടുകളുടെ എണ്ണം 15, 21, 28.... എന്നിങ്ങനെയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ഈ സംഖ്യകൾ

1, 3, 6, 10, 15, ... എന്ന ശ്രേണി രൂപീകരിക്കുന്നു.

ഈ ശ്രേണിയുടെ ഒന്നാം പദം, $a_1 = 1$

രണ്ടാം പദം, $a_2 = 1 + 2 = 3$

മൂന്നാം പദം, $a_3 = a_2 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$

എങ്കിൽ ഈ ശ്രേണിയുടെ n -ാം പദം

$a_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ എന്ന് ബീജഗണിത രൂപത്തിൽ എഴുതാം.

n ന്റെ 1, 2, 3, ... തുടങ്ങിയ എണ്ണൽ സംഖ്യാവിലകൾക്കനുസരിച്ച് ശ്രേണിയിലെ $a_1, a_2, a_3, ...$ എന്നിങ്ങനെ പദങ്ങൾ കണ്ടെത്താം.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം

3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം കിട്ടുന്ന 1 നും 50 നും ഇടക്കുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി പരിഗണിക്കുക. ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ 1, 4, 7, 10, ..., 49 ആണെന്നും, ഇതിൽ ആകെ 17 പദങ്ങളാണുള്ളതെന്നും കണാം. അതായത് n ന്റെ 1, 2, 3, ..., 17 വരെയുള്ള വിലകൾക്കനുസരിച്ച് ശ്രേണിയിലെ $a_1, a_2, a_3, ..., a_{17}$ എന്നിങ്ങനെ പദങ്ങൾ കണ്ടെത്താം. കൂടാതെ n ാം പദത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം $a_n - 3n - 2$ എന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

മണ്ഡലം എണ്ണൽ സംഖ്യാഗണമോ അതിന്റെ ഉപഗണമോ ആയിവരുന്ന ഒരു ഏകദമായി ഒരു ശ്രേണിയെ പരിഗണിക്കാം. ഈ ഏകദത്തെ $a(n)$ അല്ലെങ്കിൽ a_n എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം. ഇവയെ ശ്രേണിയുടെ പദങ്ങളെന്നു വിളിക്കുന്നു. അതിനാൽ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ ഈ ഏകദത്തിന്റെ രംഗത്തിലെ അംഗങ്ങളായിരിക്കും.

3 കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ 1 ശിഷ്ടം വരുന്ന 1 നും 50 നും ഇടക്കുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയിൽ ആകെ 17 പദങ്ങളാണുള്ളതെന്ന് മനസ്സിലായല്ലോ. ഇങ്ങനെ ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കൃത്യമായി പറയാൻ കഴിയുന്ന ശ്രേണിയെ പരിമിത ശ്രേണി (finite sequence) എന്നു പറയുന്നു.

3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം ലഭിക്കുന്ന എല്ലാ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെയും ശ്രേണിയെടുത്താൽ അതിലെ പദങ്ങൾ 1, 4, 7, 10, ... എന്നീ ക്രമത്തിലായിരിക്കും. ഈ അനുക്രമത്തിൽ എത്ര പദങ്ങളുണ്ടെന്ന് എണ്ണിതിട്ടപ്പെടുത്താൻ കഴിയില്ല. ഇത്തരം ശ്രേണിയെ അനന്ത ശ്രേണി (infinite sequence) എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു ശ്രേണിയുടെ n -ാം പദം എല്ലായ്പ്പോഴും 'n' മാത്രം ഉൽപ്പെടുന്ന ബീജഗണിത രൂപത്തിൽ തന്നെ എഴുതണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണത്തിന് ഫിബോനാച്ചി ശ്രേണി പരിഗണിക്കുക.

അതിലെ പദങ്ങൾ

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

എന്നിങ്ങനെയാണല്ലോ.

$$a_1 = a_2 = 1$$
$$a_3 = 2 = a_1 + a_2$$
$$a_4 = 5 = a_2 + a_3$$
$$a_5 = 5 = a_3 + a_4$$

ഇങ്ങനെ എഴുതിയാൽ ഫിബോനാച്ചി ശ്രേണിയുടെ പദങ്ങളെഴുതാനുള്ള നിയമം

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1},\ n > 2$$

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾകൂടി പരിഗണിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 1

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ മൂന്ന് പദങ്ങൾ എഴുതുക.

(i) $a_n = 2n + 5$ (ii) $a_n = \dfrac{n-3}{4}$

പരിഹാരം

i. ഇവിടെ $a_n - 2n - 5$

$$a_1 = 2 \times 1 + 5 = 7$$
$$a_2 = 2 \times 2 + 5 = 9$$
$$a_3 = 2 \times 3 + 5 = 11$$

ആദ്യത്തെ മൂന്ന് പദങ്ങൾ 7, 9, 11 എന്നിവയാണ്

ii. ഇവിടെ $a_n = \dfrac{n-3}{4}$

$$a_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2-3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{3-3}{4} = 0$$

അതുകൊണ്ട് ആദ്യ മൂന്ന് പദങ്ങൾ, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0$ എന്നിവയാണ്.

ഉദാഹരണം : 2

$a_n = (n - 1)(2 - n)(3 + n)$ എന്നു നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ശ്രേണിയുടെ 20-ാമത്തെ പദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$n = 20$ എന്നു കൊടുത്താൽ

$$a_{20} = (20 - 1)(2 - 20)(3 + 20)$$
$$= 19 \times (-18) \times (23) = -7866.$$

9.3 അനുക്രമം (Series)

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, എന്ന ശ്രേണി പരിഗണിക്കുക. $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n$ എന്ന രൂപത്തെ തന്നിരിക്കുന്ന ശ്രേണിയോടനുബന്ധിച്ചുള്ള അനുക്രമം (series) എന്നു പറയാം. അനുക്രമത്തെ ഗ്രീക്ക് അക്ഷരം $\sum$ (sigma) ഉപയോഗിച്ച് ചുരുക്കി എഴുതാം. $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ എന്ന ശ്രേണിയെ $\sum_{k=1}^{n} a_k$ എന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ്.

> **കുറിപ്പ്**
>
> 1, 3, 5, 7 എന്ന ശ്രേണിയോടനുബന്ധിച്ചുള്ള അനുക്രമം $1 + 3 + 5 + 7$ ആണ്. ഈ പരിമിത അനുക്രമത്തിന്റെ തുക $1 + 3 + 5 + 7$ ന്റെ വിലയാണ്. അതായത് 16.

ഉദാഹരണം : 3

ഒരു ശ്രേണി ചുവടെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$, $n \geq 2$.

ആദ്യത്തെ അഞ്ച് പദങ്ങൾ കണ്ടെത്തി അതിനോടനുബന്ധിച്ചുള്ള അനുക്രമം എഴുതുക.

പരിഹാരം

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$$
$$a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7$$

$$a_5 = a_4 + 2 = 7 + 2 = 9$$

ആദ്യത്തെ അഞ്ച് പദങ്ങൾ 1, 3, 5, 7, 9 ആണ്. ഇതിനോടനുബന്ധിച്ചുള്ള അനുക്രമം 1 + 3 + 5 + 7 + 9 ആയിരിക്കും.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 9.1

1 മുതൽ 6 വരെയുള്ള ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും n–ാം പദം തന്നിരിക്കുന്നു. ആദ്യത്തെ അഞ്ച് പദങ്ങളെഴുതുക.

1. $a_n = n(n + 2)$ **2.** $a_n - \frac{n}{n+1}$ **3.** $a_n - 2^n$

4. $a_n = \frac{2n-3}{6}$ **5.** $a_n = (-1)^{n-1} 5^{n+1}$ **6.** $a_n = n\frac{n^2+5}{4}$

7 മുതൽ 10 വരെ ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും n–ാം പദം തന്നിരിക്കുന്നു. സൂചിപ്പിച്ചി രിക്കുന്ന പദങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

7. $a_n = 4n - 3;\ a_{17}, a_{24}$ **8.** $a_n - \frac{n^2}{2^n};\ a_7$

9. $a_n = (-1)^{n-1} n^3;\ a_9$ **10.** $a_n = \frac{n(n-2)}{n+3};\ a_{20}$.

11 മുതൽ 13 വരെയുള്ള ഓരോ ചോദ്യങ്ങളിൽ ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങളും അതിനോടനുബന്ധിച്ചുള്ള അനുക്രമവും എഴുതുക.

11. $a_1 = 3,\ a_n = 3a_{n-1} + 2,\ n > 1$ **12.** $a_1 = -1,\ a_n - \frac{a_{n-1}}{n},\ n \geq 2$

13. $a_1 = a_2 - 2,\ a_n - a_{n-1} - 1,\ n > 2$

14. $a_1 = a_2 = 1$ ഉം, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n > 2$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഫിബോനാച്ചി ശ്രേണിയിൽ, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ എന്നീ വിലകൾക്ക് $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

9.4 സമാന്തര ശ്രേണി (Arithmetic Progression)

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\ldots\ldots$ എന്ന ശ്രേണി ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയാകണമെങ്കിൽ $a_{n-1} = a_n + d, n \in \mathbf{N}$, ഇവിടെ a_1 നെ ഒന്നാം പദം എന്നും d എന്ന സ്ഥിരസംഖ്യയെ പൊതുവ്യത്യാസമെന്നും പറയുന്നു. ഒന്നാം പദം a യും പൊതുവ്യത്യാസം d യുമായ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ പൊതുരൂപം $a, a + d, a + 2d, \ldots$ എന്നാണ്. ഇതിന്റെ n-ാം പദത്തിന്റെ പൊതുരൂപം $a_n = a + (n - 1)\, d$ ആണ്.

- ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a+l]$$

a – ഒന്നാം പദം, l – അവസാനപദം

ഉദാഹരണം : 4

ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ m-ാമത്തെ പദം n, n-ാമത്തെ പദം m ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ p-ാം പദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$a_m = n$

$a_n = m$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു

എങ്കിൽ $a_m - a_n = (m - n)\, d$ ആയിരിക്കും

അതായത് $n - m = (m - n)\, d$

അതുകൊണ്ട് $d = -1$ എന്നു ലഭിക്കും.

p- ാം പദം ലഭിക്കാൻ a_m ന്റെ കൂടെ $(p - m)\, d$ കൂട്ടിയാൽ മതിയല്ലോ.

$$a_p = n + (p - m) \times -1$$
$$= n - p + m$$
$$= m + n - p$$ എന്നു ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം : 5

ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $nP+\frac{1}{2}n(n-1)Q$

ആണെങ്കിൽ പൊതുവ്യത്യാസം കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇവിടെ P, Q എന്നിവ സ്ഥിരസംഖ്യകളാണ്.

പരിഹാരം

$$S_n = nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q \text{ എന്നു തന്നിരിക്കുന്നു.}$$

എങ്കിൽ $S_1 = P + \frac{1}{2} \times 0 = P$

അതായത് $a_1 = P$ എന്നു ലഭിക്കും

ഇതുപോലെ ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക

$$S_2 = 2 \times P + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times Q$$

അതായത് $a_1 + a_2 = 2P + Q$

$\therefore\ a_2 = 2P + Q - P$

$= P + Q$

പൊതുവ്യത്യാസം $d = a_2 - a_1 = P + Q - P = Q$

ഉദാഹരണം : 6

രണ്ടു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $(3n + 8) : (7n + 15)$ ആണെങ്കിൽ അവയുടെ 12-ാമത്തെ പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

a_1, a_2 എന്നത് ഈ ശ്രേണിയിലെ യഥാക്രമം ഒന്നാമത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും പദങ്ങൾ എന്നും d_1, d_2 എന്നിവ യഥാക്രമം അവയുടെ പൊതുവ്യത്യാസവും എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഒന്നാമത്തെ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d_1)$$

രണ്ടാമത്തെ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{n}{2}(2a_2 + (n-1)d_2)$$

$$\frac{\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2 + (n-1)d_2]} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

$$\text{അതായത്}\quad \frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2}=\frac{3n+8}{7n+15}\quad\text{---------------(1)}$$

$n = 23$ എന്നു കൊടുത്താൽ

$$\frac{2a_1+22d_1}{2a_2+22d_2}=\frac{3\times23+8}{7\times23+15}$$

$$\text{അതായത്}\quad \frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2}=\frac{77}{176}=\frac{7}{16}$$

അംശബന്ധം 7 : 16 എന്നു ലഭിക്കുന്നു

$$\therefore \frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2}=\frac{\text{ആദ്യ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ 12-ാം പദം}}{\text{രണ്ടാമത്തെ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ 12-ാം പദം}}=\frac{7}{16}$$

ഉദാഹരണം : 7

ഒരാളുടെ ആദ്യവർഷത്തെ വരുമാനം 3,00,000 രൂപയാണ്. ഓരോ വർഷവും 10000 രൂപയുടെ വർദ്ധനവ് അടുത്ത 19 വർഷത്തേക്ക് ലഭിക്കുമെങ്കിൽ അയാൾക്ക് 20 വർഷങ്ങളിലായി ലഭിക്കുന്ന ആകെ തുക എത്രയാണ്?

പരിഹാരം

ഓരോ വർഷവും അയാൾക്ക് ലഭിക്കുന്ന വരുമാനം ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയാണ്.
ഒന്നാം പദം $a = 3{,}00{,}000$, $d = 10{,}000$, $n = 20$
20-ാം വർഷം ലഭിക്കുന്ന ആകെ തുക.
ആദ്യത്തെ ഇരുപത് പദങ്ങളുടെ തുകയായിരിക്കും.

$$S_{20}=\frac{20}{2}[600000+19\times10000]=10\,(790000)=79{,}00{,}000$$

അതായത്, 20-ാം വർഷാവസനം അയാൾക്ക് ലഭിക്കുന്ന തുക = 79,00,000 രൂപ

9.4.1. സമാന്തരമാധ്യം (Arithmetic Mean)

10, 20 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ A എന്ന ഏതു സംഖ്യ ഉൾപ്പെടുത്തിയാൽ 10, A, 20 ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയാകും എന്നു കണ്ടെത്താം.
10, A, 20 ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയാകണമെങ്കിൽ A – 10 = 20 – A ആയിരിക്കണം
അതായത് 2A = 10 + 20

$A = \frac{30}{2} = 15$ എന്ന് ലഭിക്കും

15 നെ 10, 20 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ സമാന്തരമാധ്യം എന്നു പറയാം. പൊതുവായി] dª mÂ a, A, b സംഖ്യകൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെങ്കിൽ A എന്ന സംഖ്യയെ a, b എന്നീ സംഖ്യകളുടെ സമാന്തരമാധ്യം എന്ന് പറയാം. അതുകൊണ്ട്

$$A - a = b - A, \Rightarrow A = \frac{a+b}{2}$$ ആകും

അതുകൊണ്ട്, a, b എന്നീ സംഖ്യകളുടെ സമാന്തരമാധ്യം $A = \frac{a+b}{2}$ എന്നെഴുതാം.

മറ്റൊരു പ്രശ്നം പരിഗണിച്ചാലോ? 4, 20 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ 3 സംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുത്തി ഒരു സമാന്തരശ്രേണി രൂപീകരിക്കണം, എന്നാൽ സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെ?

ശ്രേണി $4, A_1, A_2, A_3, 20$ എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ 4 ഈ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദവും 20 അതിന്റെ 5-ാം പദവുമായിരിക്കണം.

അതുകൊണ്ട് $20 - 4 = 4d$

$16 = 4d$

$\therefore d = 4$ എന്ന് ലഭിക്കും.

നമുക്കാവശ്യമായ മൂന്ന് പദങ്ങൾ 8, 12, 16 എന്നിവയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ഈ മൂന്നു സംഖ്യകളെ 4, 20 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള സമാന്തരമാധ്യങ്ങൾ എന്നു പറയാം. പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ a, b എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ n സമാന്തരമാധ്യങ്ങൾ കാണണമെന്നു കരുതുക. സമാന്തരമാധ്യങ്ങൾ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ എന്നിരിക്കട്ടെ, എങ്കിൽ $a, A_1, A_2, \ldots, A_n b$ എന്നിവ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയായിരിക്കും. പൊതുവ്യത്യാസം അറിഞ്ഞാൽ പദങ്ങൾ കണ്ടെത്താം. a ശ്രേണിയുടെ ഒന്നാം പദവും b എന്നത് $(n + 2)$-ാം പദം ആയിരിക്കുമല്ലോ.

അതുകൊണ്ട് $b - a = (n + 1)d$

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$ എന്നു ലഭിക്കും

സമാന്തര മാധ്യങ്ങൾ

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + \frac{3(b-a)}{n+1}$$

....

....

$$A_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1} .$$

എന്നിങ്ങനെ ലഭിക്കും

ഉദാഹരണം : 8

3, 24 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ 6 സംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുത്തി ഒരു സമാന്തര ശ്രേണി രൂപീകരിക്കുക.

പരിഹാരം

സംഖ്യകൾ $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ $3, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, 24$ എന്നിവ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയായിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട് $24 - 3 = 7d$,

$$21 = 7d$$

അതായത്, $d = 3$ ആയിരിക്കും.

സംഖ്യകൾ 6, 9, 12, 15, 18, 21 എന്നിവയായിരിക്കും.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 9.2

1. 1, 2001 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെയും തുക കാണുക.
2. 100, 1000 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള 5 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ എല്ലാ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെയും തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.
3. ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിൽ ആദ്യപദം 2, ആദ്യത്തെ അഞ്ച് പദങ്ങളുടെ തുക അടുത്ത അഞ്ച് പദങ്ങളുടെ തുകയുടെ നാലിലൊന്നുമായാൽ 20-ാമത്തെ പദം -112 ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
4. $-6, -\frac{11}{2}, -5, \ldots$ എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ എത്ര പദങ്ങളുടെ തുകയാണ് -25?

5. p -ാംപദം $\frac{1}{q}$, q -ാംപദം $\frac{1}{p}$ യും ആണെങ്കിൽ, ആദ്യത്തെ pq പദങ്ങളുടെ തുക $\frac{1}{2}(pq+1)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക. ഇവിടെ $p \neq q$ ആകുന്നു.

6. 25, 22, 19, ... എന്ന സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ കുറച്ചു പദങ്ങളുടെ തുക 116 ആണെങ്കിൽ അവസാന പദമേത്?

7. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ k-ാമത്തെ പദം $5k+1$ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.

8. സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $(pn + qn^2)$ ആയാൽ പൊതുവ്യത്യാസം കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇവിടെ p, q എന്നിവ സ്ഥിരസംഖ്യക ളാണ്.

9. രണ്ടു സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $(5n+4) : (9n+6)$ എങ്കിൽ അവയുടെ 18-ാമത്തെ പദങ്ങൾ തമ്മി ലുള്ള അംശബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

10. ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ p പദങ്ങളുടെ തുകയും, ആദ്യത്തെ q പദങ്ങളും തുല്യമാണെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ $(p+q)$ പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടി ക്കുക.

11. ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ p, q, r എന്നീ പദങ്ങളുടെ തുക യഥാ ക്രമം a, b, c എന്നിവയാണെങ്കിൽ. $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

12. ആദ്യത്തെ m, n പദങ്ങളുടെ തുകകളുടെ അംശബന്ധം $m^2 : n^2$ ആണെങ്കിൽ m-ാം പദവും, n -ാം പദവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $(2m - 1) : (2n - 1)$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

13. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ n പദങ്ങളുടെ തുക $3n^2 + 5n$, m-ാം പദം 164 ആണെങ്കിൽ, m ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

14. 8, 26 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ അഞ്ച് സംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുത്തി ഒരു സമാ ന്തരശ്രേണി രൂപീകരിക്കുക.

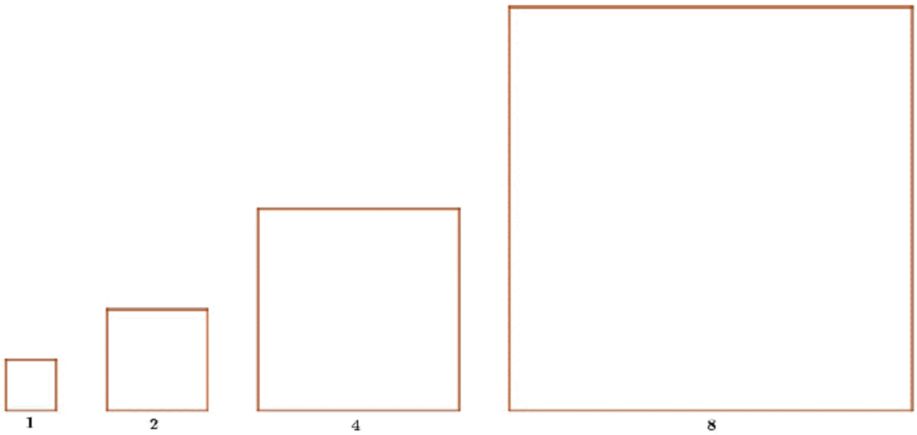
15. a, b എന്നീ സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള സമാന്തരമാധ്യം $\frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}$ ആണെ ങ്കിൽ, n ന്റെ വില കണ്ടെത്തുക.

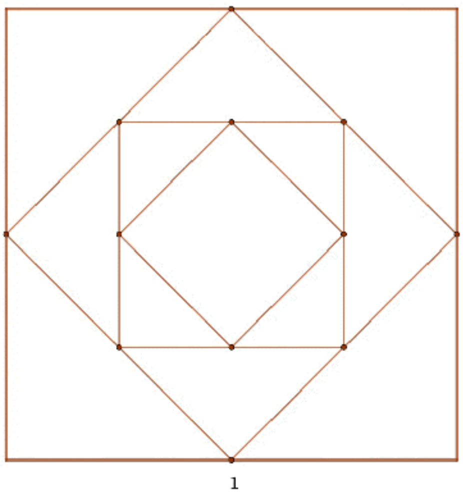
16. 1, 31 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ m സംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുത്തി ഒരു സമാന്തര ശ്രേണി രൂപീകരിക്കുന്നു. 7 -ാമത്തെയും $(m-1)$ -ാമത്തെയും പദങ്ങൾ തമ്മി ലുള്ള അംശബന്ധം 5 : 9 എങ്കിൽ m ന്റെ വില കാണുക.

17. ഒരാൾ തന്റെ വായ്പാതിരിച്ചടവ് ഒന്നാമത്തെ ഗഡുവായി Rs. 100 അടച്ച് തുടങ്ങുന്നു. തുടർന്ന് വരുന്ന ഓരോ മാസവും 5 രൂപാവീതം വായ്പാതിരിച്ചടവിൽ വർദ്ധനവ് വരുത്തുന്നു എങ്കിൽ 30-ാമത്തെ ഗഡുവായി അടക്കുന്ന തുക എത്രയാണ്.
18. ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ ഏറ്റവും ചെറിയ കോൺ $120°$ യും അടുത്തടുത്ത ഏത് രണ്ട് കോണുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം $5°$ യുമാണെങ്കിൽ ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

9.5 സമഗുണിത ശ്രേണി (Geometric Progression)

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമചതുരങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കൂ.





വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളുടെ ശ്രേണി 1, 2, 4, 8, ...

പരപ്പളവിന്റെയും ചുറ്റളവിന്റെയും ശ്രേണികൾ യഥാക്രമം 1, 4, 16, 64, ... 4, 8, 16, 32, ... എന്നിവയായിരിക്കും.

വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളുടെ ശ്രേണി 1 ൽ തുടങ്ങി 2 വീതം ഗുണിച്ച ശ്രേണിയും, പരപ്പളവുകളുടെ ശ്രേണി 1 ൽ നിന്നും തുടങ്ങി 4 വീതം ഗുണിച്ച ശ്രേണിയും കൂടാതെ ചുറ്റളവുകളുടെ ശ്രേണി 4 ൽ തുടങ്ങി 2 വീതം ഗുണിച്ച് കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയാണെന്നും മനസ്സിലാക്കാം. ഇത്തരം ശ്രേണികളെ പൊതുവായി സമ

ഗുണിത ശ്രേണികൾ (Geometric Progression) എന്നു പറയാം. മറ്റൊരുദാഹരണം പരിഗണിക്കാം.

ആദ്യം വശത്തിന്റെ നീളം 1 യൂണിറ്റായ ഒരു സമചതുരം പരിഗണിക്കുക. അതിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാണ് രണ്ടാമത്തെ സമചതുരം നിർമിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇങ്ങനെ തുടർന്നു പോയാൽ ആദ്യത്തെ അഞ്ച് സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവിന്റെ ശ്രേണി കണ്ടെത്താം.

ഇവിടെ വശങ്ങൾ $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}$ എന്നിങ്ങനെയാണ്. എങ്കിൽ പരപ്പളവുകളുടെ ശ്രേണി $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ ആയിരിക്കും

ഈ ശ്രേണി അഞ്ച് പദങ്ങളുള്ള ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാണ്. 1 ൽ തുടങ്ങി $\frac{1}{2}$ വീതം ഗുണിച്ചാണ് ഈ ശ്രേണി കിട്ടുന്നത്. $\frac{1}{2}$ നെ നമുക്ക് പൊതുഗുണിതം (common ratio) എന്നു വിളിക്കാം എങ്കിൽ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളുടെ ശ്രേണി ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാണോ, എങ്കിൽ അതിന്റെ പൊതുഗുണിതം എത്ര?

സമചതുരത്തിന്റെ നിർമിതി തുടർന്നുകൊണ്ടേയിരുന്നാൽ പരപ്പളവിന്റെ ശ്രേണി $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8},$ .... എന്ന അനന്തമായ സമഗുണിത ശ്രേണിയാണെന്ന് കാണാം.

ഒന്നാം പദം –5, പൊതുഗുണിതം –2, ആയ സമഗുണിത ശ്രേണി

–5, 10, –20, 40....... ആയിരിക്കും എന്നു കാണാം.

സമഗുണിത ശ്രേണിയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു പദം പൂജ്യമാകുവാൻ കഴിയുമോ?

ഒരു പദം പൂജ്യമായാൽ ആ പദത്തിനുശേഷം വരുന്ന എല്ലാ പദങ്ങളും അതിനു മുൻപുള്ള എല്ലാ പദങ്ങളും പൂജ്യമായി മാറും, അപ്പോൾ ശ്രേണി.

0, 0, 0 .... എന്നിങ്ങനെയായിരിക്കും എങ്കിൽ ഇതിന്റെ പൊതുഗുണിതം ഏതായിരിക്കും. ഏതു സംഖ്യവേണമെങ്കിലും ആകാം. അതുകൊണ്ട് ഈ ശ്രേണിയുടെ പൊതുഗുണിതം കൃത്യമായി നിർവചിക്കാൻ കഴിയില്ല.

ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ എല്ലാ പദങ്ങളും പൂജ്യമല്ലാത്ത പദങ്ങളായിരിക്കണം എന്നു മനസ്സിലാക്കാം. പൊതുഗുണിതം 1 ആയാലോ? a ഒന്നാം പദമാണെങ്കിൽ അനുക്രമം, $a, a, a,$ ...... എന്നിങ്ങനെയായിരിക്കും. അപ്പോൾ പൊതുഗുണിതം 1 ആയാൽ ശ്രേണിയിലെ എല്ലാ പദങ്ങളും തുല്യമായിരിക്കും എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

ഇത്തരം ശ്രേണികൾ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയായിരിക്കുമോ? പൊതുവായി ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയെ താഴെ പറയും പ്രകാരം നിർവചിക്കാം.

പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു സംഖ്യയിൽ നിന്നു തുടങ്ങി പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു സംഖ്യകൊണ്ട് വീണ്ടും, വീണ്ടും ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയെ സമഗുണിത ശ്രേണി എന്നു പറയാം.

ഈ പ്രസ്താവനയെ മറ്റൊരു രീതിയിലും വിവരിക്കാം. ഏതുപദത്തെയും തൊട്ടു പുറകിലുള്ള പദം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഒരേ സംഖ്യ തന്നെ കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയാണ് സമഗുണിത ശ്രേണി. അതായത്,

എല്ലാ പദങ്ങളും പൂജ്യമല്ലാത്ത

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$ എന്ന ശ്രേണി ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാകണമെങ്കിൽ

$k \geq 1$ ആകുമ്പോൾ $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (സ്ഥിരസംഖ്യ) ആയിരിക്കണം.

9.5.1. സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ പൊതുപദം

a, r എന്നിവ യഥാക്രമം ഒന്നാം പദവും, പൊതുഗുണിതവുമായ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയെ

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ എന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം. എങ്കിൽ ഈ ശ്രേണിയുടെ n-ാം പദം

$a_n = ar^{n-1}$ ആണ്.

സമഗുണിത ശ്രേണിയിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം പരിഗണിക്കുക.

ഉദാഹരണത്തിന് $\frac{a_5}{a_3} = \frac{ar^4}{ar^2} = r^2$; $\frac{a_{10}}{a_7} = \frac{ar^9}{ar^6} = r^3$ എന്നിങ്ങനെ ലഭിക്കും പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ

$$\frac{a_m}{a_n} = r^{m-n}$$ ആയിരിക്കും

9.5.2 സമഗുണിത ശ്രേണിയിലെ n പദങ്ങളുടെ തുക

a, r എന്നിവ യഥാക്രമം ഒന്നാം പദവും പൊതുഗുണിതവുമായിവരുന്ന ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ (Geometric progression) ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക S_n എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} \quad \ldots (1)$$

$r = 1$, ആയാൽ $S_n = a + a + a + ... + a = na$ എന്ന് ലഭിക്കും.

$r \neq 1$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

സമവാക്യം (1) നെ r കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n \quad ... (2)$$

(2) ൽ നിന്നും (1) കുറച്ചാൽ

$(r - 1)\, S_n = ar^n - a$

$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ അല്ലെങ്കിൽ $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ എന്നും എഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 9

5, 25, 125, ... എന്ന സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ 10-ാം പദവും, n -ാം പദവും കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $a = 5$, $r = 5$

$a_{10} = ar^9 = 5 \times 5^9 = 5^{10}$

$a_n = ar^{n-1} = 5 \times 5^{n-1} = 5^n$

ഉദാഹരണം : 10

2, 8, 32, ... എന്ന സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ എത്രാമത്തെ പദമാണ് 131072?

പരിഹാരം

ഇവിടെ $a = 2$, $r = 4$

131072 എന്നത് n ാം പദമായെടുക്കാം.

$$a_n = 131072$$

$$131072 = ar^{n-1}$$

$$131072 = 2 \times 4^{n-1}$$

$$65536 = 4^{n-1}$$

അതായത് $4^8 = 4^{n-1}$.

$$n - 1 = 8,\ n = 9$$

അതുകൊണ്ട് 9 -ാമത്തെ പദം 131072

ഉദാഹരണം : 11

ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ മൂന്നാം പദം 24, 6-ാം പദം, 192 ആയാൽ 10-ാം പദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$a_3 = 24 \Rightarrow ar^2 = 24 \text{ ------(1)}$$
$$a_6 = 192 \Rightarrow ar^5 = 192 \text{ -----(2)}$$

$$\frac{a_6}{a_3} = \frac{192}{24}$$

അതുകൊണ്ട് $r^3 = 8$

$$r^3 = 8$$

$\therefore$ r = 2 എന്നു ലഭിക്കും

സമവാക്യം (1) ൽ നിന്ന് $a \times 2^2 = 24$

അതിനാൽ $a = 6$ എന്നും ലഭിക്കും

അതുകൊണ്ട് $a_{10} = ar^9 = 6 \times 2^9 = 3072$

ഉദാഹരണം : 12

$1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+...$ എന്ന സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെയും ആദ്യത്തെ 5 പദങ്ങളുടെയും തുകകൾ കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $a = 1, r = \frac{2}{3}$

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r} = \frac{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

അതുകൊണ്ട് $S_5 = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right] = 3\times\frac{211}{243} = \frac{211}{81}$

ഉദാഹരണം : 13

$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$ എന്ന സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ എത്ര പദങ്ങളുടെ തുകയാണ് $\frac{3069}{512}$?

പരിഹാരം

ഇവിടെ $a = 3,\ r = \frac{1}{2}$

n പദങ്ങളുടെ തുകയാണ് $\frac{3069}{512}$ എന്നെടുക്കാം.

$$S_n = \frac{3069}{512}$$

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{3069}{512}$$

$$\frac{3(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3069}{512}$$

$$6\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = \frac{3069}{512}$$

$$1-\frac{1}{2^n} = \frac{3069}{3072}$$

$$\frac{1}{2^n} = 1-\frac{3069}{3072} = \frac{3}{3072} = \frac{1}{1024}$$

$$2^n = 1024 = 2^{10}$$

അതുകൊണ്ട്, $n = 10$

ഉദാഹരണം : 14

ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക $\frac{13}{12}$. അവയുടെ ഗുണനഫലം -1 ആയാൽ പൊതുഗുണിതവും പദങ്ങളും കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

പദങ്ങൾ $\frac{a}{r}$, a, ar എന്നിരിക്കട്ടെ

എങ്കിൽ $\frac{a}{r} + ar + a = \frac{13}{12}$ ... (1)

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = -1 \quad \ldots (2)$$

അതായത് $a^3 = -1$, $a = -1$ ഈ വില സമവാക്യം (1) ൽ കൊടുത്താൽ

$$\frac{1}{r} \quad 1 \quad r = \frac{13}{12}$$

അല്ലെങ്കിൽ $12r^2 + 25r + 12 = 0$ എന്നു ലഭിക്കും ഇതിന്റെ പരിഹാരം കണ്ടാൽ

$r = \frac{3}{4}$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{4}{3}$

$r = -\frac{3}{4}$ ആയാൽ പദങ്ങൾ $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$

$r = \frac{-4}{3}$ ആയാൽ പദങ്ങൾ $\frac{3}{4}$, 1, $\frac{4}{3}$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 15

7, 77, 777, 7777, ... എന്ന ശ്രേണിയുടെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന ശ്രേണി ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണി അല്ലെന്നു മനസ്സിലാക്കാം, സമഗുണിത ശ്രേണിയുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തി തുക എങ്ങനെ കാണാമെന്ന് നോക്കാം.

$$S_n = 7 + 77 + 777 + 7777 + \ldots n \text{ പദങ്ങൾ വരെ}$$

$$= \frac{7}{9}[9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots n \text{ പദങ്ങൾ വരെ}]$$

$$= \frac{7}{9}[(10-1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + (10^4 - 1) + \ldots n \text{ പദങ്ങൾ വരെ}]$$

$$= \frac{7}{9}[(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots n \text{ പദങ്ങൾ വരെ} - n]$$

$$= \frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right] = \frac{7}{9}\left[\frac{10\,(10^n - 1)}{9} - n\right]$$

ഉദാഹരണം : 16

ഒരാൾക്ക് രക്ഷിതാക്കൾ 2, മുൻതലമുറയിൽ 4, അതിനും മുൻതലമുറയിൽ 8 എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്നു. അയാൾക്ക് മുൻപുള്ള 10 തലമുറയിൽപെട്ട ആകെ അംഗങ്ങൾ എത്ര?

പരിഹാരം

ഇവിടെ $a = 2, r = 2, n = 10$ ആകുന്നു.

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

10 തലമുറയിൽപ്പെട്ട ആകെ അംഗങ്ങൾ

$$S_{10} = 2(2^{10} - 1) = 2046$$

9.3.4 സമഗുണിതമാധ്യം (Geometric Mean)

സമാന്തരമാധ്യവും സമാന്തരമാധ്യങ്ങളും നിങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കിയല്ലോ? അതുപോലെ സമഗുണിത മാധ്യമെന്താണെന്നു നോക്കാം.

4, 16 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ G എന്ന അധിസംഖ്യ ഉൾപ്പെടുത്തിയാൽ 4, G, 16 ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാകുമോ എന്നു കണ്ടെത്താം.

4, G, 16 എന്നിവ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാണെങ്കിൽ $\frac{G}{4} = \frac{16}{G}$ ആയിരിക്കും.

അതായത് $G^2 = 64$

G = 8 എന്ന് ലഭിക്കും

8 നെ നമുക്ക് 4, 16 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ സമഗുണിതമാധ്യം (Geometric Mean) എന്നു പറയാം അതായത് a, b എന്നിവ രണ്ടു അധിസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ അവയുടെ സമഗുണിത മാധ്യം $G = \sqrt{ab}$ ആയിരിക്കും.

മറ്റൊരു പ്രശ്നം പരിഗണിക്കൂ. 2, 64 എന്നീ പോസിറ്റീവ് സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ നാല് അധിസംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുത്തി നമുക്കൊരു സമഗുണിതശ്രേണി രൂപീകരിക്കണം. എങ്കിൽ സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെ?

ശ്രേണി 2, G_1, G_2, G_3, G_4, 64 എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ ഈ ശ്രേണിയുടെ 2 ഒന്നാം പദവും 64 ആറാം പദവുമായിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട് $\frac{64}{2} = r^5$ ആയിരിക്കും.

അതായത് $r = 2$ എന്നു ലഭിക്കും
സംഖ്യകൾ $G_1 = 4, G_2 = 8, G_3 = 16, G_4 = 32$ എന്നു ലഭിക്കും, ഈ സംഖ്യകളെ 2, 64 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള നാല് സമഗുണിത മാധ്യങ്ങൾ (Geometric Means) എന്നു പറയാം.
പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ a, b എന്നീ അധിസംഖ്യകൾക്കിടയിൽ n സമഗുണിതമാധ്യങ്ങൾ കാണണമെന്നു കരുതുക. സമഗുണിതമാധ്യങ്ങൾ $G_1, G_2, G_3, \ldots\ldots G_n$ എന്നിരിക്കട്ടെ. എന്നാൽ $a, G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n, b$ എന്നിവ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയായിരിക്കും. പൊതുഗുണിതം അറിഞ്ഞാൽ നമുക്ക് പദങ്ങൾ കണ്ടെത്താം. a, b എന്നിവ യഥാക്രമം ശ്രേണിയുടെ ഒന്നാം പദവും (n + 2)ാം പദവും ആണല്ലോ. അതുകൊണ്ട്,

$\frac{b}{a} = r^{n-1}$ ആയിരിക്കും

അതായത് $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n\ 1}}$ എന്നു ലഭിക്കും

അതുകൊണ്ട് സംഖ്യകൾ, $G_1 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}$

$$G_2 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$$

$$G_n = ar^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$ എന്നു ലഭിക്കും

ഉദാഹരണം : 17

1, 256 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ മൂന്നു സംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുത്തി ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണി രൂപീകരിക്കുക.

പരിഹാരം

G_1, G_2, G_3 എന്നീ 3 സംഖ്യകൾ 1 നും 256 നും ഇടയിലുള്ള മൂന്ന് സംഖ്യകൾ ആയാൽ, $1, G_1, G_2, G_3, 256$ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയായിരിക്കും.
അതുകൊണ്ട് $256 = r^4$ ആയിരിക്കും.
അതിനാൽ $r = \pm 4$ (രേഖീയ പരിഹാരം മാത്രം പരിഗണിച്ചിരിക്കുന്നു.)

അതുകൊണ്ട് $\frac{256}{1} = r^4$ ആയിരിക്കും

$$r = \pm 4$$

$r = -4$, ആയാൽ സംഖ്യകൾ $-4, 16, -64$ (ഈ സംഖ്യകൾ 1 നും 256 നും ഇടയിലല്ല) $r = 4$ ആകുമ്പോൾ 4, 16, 64 എന്നീ സംഖ്യകൾ 1, 256 സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ അതു കൊണ്ട് സമഗുണിതശ്രേണി 1, 4, 16, 64, 256 ആകുന്നു.

9.6 സമാന്തരമാധ്യവും സമഗുണിതമാധ്യവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

A, G എന്നിവ യഥാക്രമം a, b എന്നീ രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ സമാന്തരമാധ്യവും, സമഗുണിതമാധ്യവുമാണെന്ന് കരുതുക.

എങ്കിൽ $A = \frac{a+b}{2}, G = \sqrt{ab}$ ആയിരിക്കും.

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

$$= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0$$

അതായത് $A \geq G$.

> **കുറിപ്പ്**
> $a = b$ ആയാൽ $A = G$ ആയിരിക്കും

ഉദാഹരണം : 18

a, b എന്നീ അധിസംഖ്യകളുടെ സമാന്തരമാധ്യവും സമഗുണിതമാധ്യവും യഥാ ക്രമം 10, 8 എന്നിവയായാൽ സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

A = 10 എന്നും G = 8 എന്നും തന്നിരിക്കുന്നു. അതായത്

$$\frac{a+b}{2} = 10, \quad \sqrt{ab} = 8$$

$$a + b = 20 \text{ ------- } (1)$$

$ab = 64$ ------- (2) എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾ ലഭിക്കും

$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ എന്നെഴുതാമല്ലോ

$$(a-b)^2 = 20^2 - 4 \times 64$$

$$(a-b)^2 = 144$$

$a - b = \pm 12$ ------- (3) എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

സമവാക്യം (1), (3) പരിഗണിച്ചാൽ

$a = 4, b = 16$ അല്ലെങ്കിൽ $a = 16, b = 4$ എന്ന് ലഭിക്കും.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 9.3

1. $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$ എന്ന സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ 20-ാം പദവും n-ാം പദവും കാണുക.
2. ഒരു സമഗുണിതശ്രേണിയുടെ 8-ാം പദം 192, പൊതുഗുണിതം 2, ആയാൽ ഇതിന്റെ 12-ാം പദം കാണുക
3. ഒരു സമഗുണിതശ്രേണിയുടെ 5, 8, 11 എന്നീ പദങ്ങൾ യഥാക്രമം p, q, s ആയാൽ $q^2 = ps$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
4. ഒരു സമഗുണിതശ്രേണിയുടെ നാലാം പദം അതിന്റെ 2-ാം പദത്തിന്റെ വർഗ മാണ്. ആദ്യപദം -3 ആയാൽ അതിന്റെ 7-ാം പദം കാണുക.
5. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ശ്രേണികളിൽ എത്രാമത്തെ പദമാണ് അവസാന ത്തേത്?

   (a) $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots 128$ (b) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots 729$

   (c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots \frac{1}{19683}$

6. x ന്റെ ഏത് വിലയ്ക്ക് $-\frac{2}{7}, x, -\frac{7}{2}$ എന്നത് ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണി ആകും.

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ശ്രേണികളിൽ ബ്രാക്കറ്റിൽ നല്കിയിട്ടുള്ള പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

7. 0.15, 0.015, 0.0015, ... (20 പദങ്ങളുടെ)
8. $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, \ldots$ (n പദങ്ങളുടെ)
9. $1, -a, a^2, -a^3, \ldots$ n terms ($a \neq -1$, n പദങ്ങളുടെ)
10. $x^3, x^5, x^7, \ldots$ n terms ($x \neq \pm 1$, n പദങ്ങളുടെ)

11. വിലകാണുക $\sum_{k=1}^{11}(2+3^k)$

12. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ തുക $\frac{39}{10}$. അവയുടെ ഗുണഫലം 1 ആയാൽ പൊതുഗുണിതവും, ആദ്യപദവും കാണുക.

13. 3, 3^2, 3^3, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ എത്ര പദങ്ങളുടെ തുകയാണ് 120?

14. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ തുക 16 കൂടാതെ അടുത്ത മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ തുക 128 ആയാൽ, ആദ്യപദവും, പൊതുഗുണിതവും ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകയും കാണുക.

15. ഒരു സമഗുണിതത്തിന്റെ ശ്രേണിയിൽ $a = 729$, 7-ാം പദം 64 ആയാൽ S_7 കാണുക.

16. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയിൽ ആദ്യ രണ്ട് പദങ്ങളുടെ തുക -4 ആകുന്നു. കൂടാതെ അതിന്റെ 5-ാം പദം മൂന്നാം പദത്തിന്റെ നാല് മടങ്ങാണ്. GP എഴുതുക.

17. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ 4-ാം പദം, 10-ാം പദം. 16-ാം പദം ഇവ യഥാക്രമം x, y, z ആയാൽ, x, y, z ഇവയും ഒരു G.P യിലായിരിക്കും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

18. 8, 88, 888, 8888... എന്ന ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കുക.

19. 2, 4, 8, 16, 32 എന്ന ശ്രേണിയുടെയും 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$ എന്ന ശ്രേണിയുടെയും സമസ്ഥാനീയ പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ തുക കാണുക.

20. $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}$ എന്ന ശ്രേണിയുടെയും $A, AR, AR^2, \ldots AR^{n-1}$ എന്ന ശ്രേണിയുടെയും സമസ്ഥാനീയ പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലങ്ങളും ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. ഇതിന്റെ പൊതുഗുണിതം എഴുതുക.

21. ചുവടെ നല്കിയിട്ടുള്ള നിബന്ധനകൾ ശരിയാകുന്ന സമഗുണിത ശ്രേണി എഴുതുക. മൂന്നാംപദം ഒന്നാം പദത്തെക്കാൾ 9 കൂടുതലാണ്. രണ്ടാംപദം 4-ാം പദത്തെക്കാൾ 18 കൂടുതലാണ്.

22. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയിലെ p-ാം, q -ാം, r-ാം പദങ്ങൾ യഥാക്രമം a, b, c ആണെങ്കിൽ $a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q} = 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

23. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ ഒന്നാംപദം, n-ാം പദം ഇവ യഥാക്രമം a, b ആണ്, P എന്നത് ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം ആണെങ്കിൽ $P^2 = (ab)^n$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

24. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകയും, $(n + 1)$ -ാം പദം മുതൽ $2n$ -ാം വരെയുള്ള പദങ്ങളുടെ തുകയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $\frac{1}{r^n}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

25. a, b, c, d ഇവ സമഗുണിത ശ്രേണിയിൽ ആയാൽ $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

26. 3 നും 81 നും ഇടയിൽ രണ്ട് പദങ്ങൾ ചേർത്ത് ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണി രൂപീകരിക്കുക.

27. a, b യുടെ ഇടയിലുള്ള ഒരു സമഗുണിതമാധ്യം $\frac{a^{n-1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$ ആയാൽ n ന്റെ വില കാണുക.

28. രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ തുക അവയുടെ സമഗുണിത മാധ്യത്തിന്റെ 6 മടങ്ങാണ് എങ്കിൽ സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $\left(3+2\sqrt{2}\right):\left(3-2\sqrt{2}\right)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

29. A, G ഇവ യഥാക്രമം രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ സമാന്തരമാധ്യവും സമഗുണിത മാധ്യവുമായാൽ സംഖ്യകൾ $A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

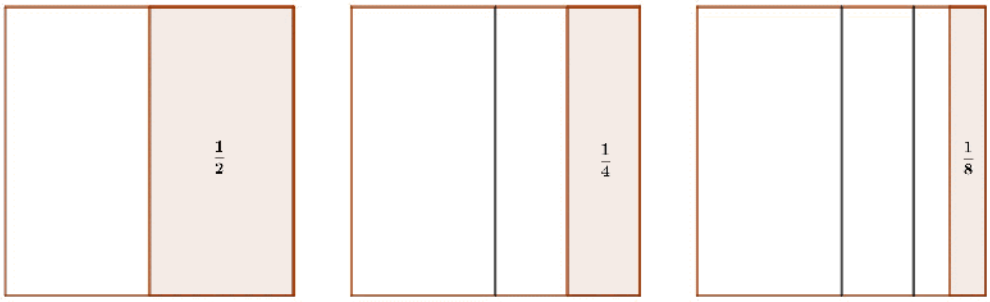
30. ഒരു പരീക്ഷണത്തിലെ ബാക്ടീരിയകളുടെ എണ്ണം ഓരോ മണിക്കൂറിലും ഇരട്ടിയാകുന്നു. പരീക്ഷണാരംഭത്തിൽ 30 ബാക്ടീരിയകളാണുണ്ടായിരുന്നത്. 2-ാം മണിക്കൂർ, 4-ാം മണിക്കൂർ, n -ാം മണിക്കൂർ, ഇവയിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ബാക്ടീരിയകളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

31. ഒരു ബാങ്ക് നിക്ഷേപത്തിന് 10% കൂട്ടുപലിശ നൽകുന്നു. 500 രൂപ നിക്ഷേപിച്ച ഒരാൾക്ക് 10 വർഷം കഴിയുമ്പോളുള്ള തുക കാണുക.

32. ഒരു ദ്വിമാന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളുടെ സമാന്തരമാധ്യവും സമഗുണിത മാധ്യവും യഥാക്രമം 8, 5 ആയാൽ സമവാക്യം കാണുക.

9.7 അനന്തസമഗുണിത അനുക്രമം (Infinite Geometric series)

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം ശ്രദ്ധിക്കൂ.



ഒരു മീറ്റർ വശമുള്ള ഒരു സമചതുരത്തെ തുല്യമായ രണ്ട് ഭാഗങ്ങളാക്കി, അതിലൊരു ഭാഗം ഷെയ്ഡ് ചെയ്തിരിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തെ ഭാഗത്തെ വീണ്ടും രണ്ടു തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കി വിഭജിച്ചതിനുശേഷം അതിലൊരുഭാഗം ഷെയ്ഡു ചെയ്തിരിക്കുന്നു. ഈ പ്രക്രിയ തുടർന്നുകൊണ്ടേയിരിക്കുക. ഷെയ്ഡ് ചെയ്ത ഭാഗങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -----$ എന്ന അനന്ത സമഗുണിത ശ്രേണി രൂപീകരിക്കുന്നതുകാണാം. ഇതിനോടനുബന്ധിച്ചുള്ള ശ്രേണിയിലെ 'n' പദങ്ങളുടെ തുക.

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ----+ \frac{1}{2^n}$ ആയിരിക്കും. n ന്റെ വില കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് പരപ്പളവുകളുടെ തുക 1 മീറ്റർ നീളമുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിനോടടുക്കുന്നതായി കാണാം. അതായത് $n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ ഈ തുക 1 നോടടുക്കുന്നു. എന്നു പറയാം. അതായത് അനന്തസമഗുണിത അനുക്രമത്തിന്റെ തുക.

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ---- = 1$$

എന്നു പരിഗണിക്കാം. ഇത് തന്നെ മറ്റൊരു രീതിയിൽ കാണാം.

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ----+ \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

n ന്റെ വില കൂടുന്നതനുസരിച്ച് $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ന്റെ വില കുറഞ്ഞു വരുന്നതായി കാണാം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക ശ്രദ്ധിക്കൂ.

n	1	2	3	4	5	6	7
$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.03125	0.015625	0.0078125

അതായത് $n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ ആകുന്നു എന്നു പറയാം. അപ്പോൾ അനന്ത അനുക്രമത്തിലെ പദങ്ങളുടെ തുക

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ----$$

= 1 - 0 = 1 എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ പൊതുഗുണിതം $\frac{1}{2}$ നും 1 നും ഇടയിലാണല്ലോ, അതുപോലെ പൊതുഗുണിതം r, 0, 1 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിലാണെങ്കിൽ, അതായത് $0 < r < 1$, $n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ $r^n \to 0$ ആയിരിക്കും എന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

പൊതുഗുണിതം $-\frac{1}{2}$ ആയാലോ? $-\frac{1}{2}$ ന്റെ കേവലവില $\frac{1}{2}$ ആയതുകൊണ്ടു തന്നെ $n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ എന്നു കണ്ടെത്താം.

അതായത് $-1 < r < 0$, ആയാലും $n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ $r^n \to 0$ ആയിരിക്കും. പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ പൊതുഗുണിതം 'r', $0 < |r| < 1$ ആയാൽ $n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ $r^n \to 0$ ആയിരിക്കും. ഇത്തരം അവസരങ്ങളിൽ നമുക്ക് അനന്ത സമഗുണിത അനുക്രമത്തിന്റെ തുക കാണാൻ ശ്രമിക്കാം.

$a, ar^2, ar^3, \ldots$ എന്ന സമഗുണിതശ്രേണി പരിഗണിക്കുക ഇവിടെ $0 < |r| < 1$ ആണ്. സമഗുണിത അനുക്രമത്തിന്റെ 'n' പദങ്ങളുടെ തുക

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ $r^n \to 0$ ആയിരിക്കും. അപ്പോൾ $S_n \to \frac{a}{1-r}$ എന്നു മനസ്സിലാക്കാം.
ഈ അനന്തഅനുക്രമത്തിന്റെ തുകയെ നമുക്ക് S എന്നു സൂചിപ്പിച്ചാൽ

$$S = \frac{a}{1-r}$$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

r ന്റെ വില $0 < |r| < 1$ അല്ലെങ്കിൽ എന്തായിരിക്കും അനന്ത സമഗുണിത അനുക്രമത്തിന്റെ തുക എന്ന് ആലോചിച്ചു നോക്കൂ.
ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിശോധിക്കൂ.

i. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$

ii. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 9.4

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ അനന്തസമഗുണിത ശ്രേണിയുടെയും പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

1. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots\ldots\ldots$
2. $6, 1.2, 2.4, \ldots\ldots\ldots$
3. $5, \frac{20}{7}, \frac{80}{49}, \ldots\ldots\ldots$
4. $\frac{-3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{-3}{64}, \ldots\ldots\ldots$
5. $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} \times \ldots\ldots\ldots = 3$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
6. $x = 1 + a + a^2 + \ldots\ldots\ldots, y = 1 + b + b^2 + \ldots\ldots\ldots, |a| < 1, |b| < 1$ ഉം ആയാൽ

   $1 + ab + a^2b^2 + \ldots\ldots = \frac{xy}{x+y-1}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

9.8. ചില സവിശേഷ അനുക്രമങ്ങളുടെ n പദങ്ങളുടെ തുക

ആദ്യത്തെ n എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ആണെന്ന് പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇതുപോലെ ആദ്യത്തെ n എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക, $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, മൂന്നാംകൃതികളുടെ തുക $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ എന്നിവ എങ്ങനെ കണ്ടെത്താമെന്നു നോക്കാം.
ആദ്യമായി, $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ പരിഗണിക്കാം.

$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$ എന്ന സർവസമവാക്യത്തിൽ $k = 1, 2\ldots, n$ എന്നീ വില കൾ കൊടുത്താൽ നമുക്ക് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ ലഭിക്കും.

$$1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$$

മുകളിലത്തെ സമവാക്യങ്ങളുടെ രണ്ടു ഭാഗവും കൂട്ടിയാൽ

$$n^3 - 0^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

അതായത്, $n^3 = 3S_n - \frac{3n(n+1)}{2} + n$, ഇവിടെ $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

$$\Rightarrow 3Sn = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n$$
$$= n\left[\frac{2n^2 + 3(n+1) - 2}{2}\right]$$
$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{6}\left(2n^2 + 3n + 3 - 2\right)$$
$$S_n = \frac{n}{6}\left(2n^2 + 3n + 1\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

അതായത്, $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

അല്ലെങ്കിൽ, $\sum_{k\ 1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ എന്നെഴുതാവുന്നതാണ്.

അടുത്തതായി

$S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ എന്ന തുക എങ്ങനെ കാണാമെന്നു നോക്കാം. അതിനായി $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ എന്ന സർവസമവാക്യത്തിൽ $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$ എന്നീ വിലകൾ കൊടുത്താൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന n സമവാക്യങ്ങൾ ലഭിക്കും.

$$2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$$
$$3^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$$
$$4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1$$

....

....

....

$$n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$$
$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

മുകളിലത്തെ n സമവാക്യങ്ങളുടെ രണ്ടുഭാഗവും കൂട്ടിയാൽ

$(n+1)^4 - 1^4$

$= 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$

എന്നു ലഭിക്കും

അതായത്

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_n + \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4n(n+1)}{2} + n$$
$$4S_n = (n \quad 1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n - \ 1$$
$$= (n \quad 1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)$$
$$= (n+1)\left[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n \ - \ 1\right]$$

$$S_n = \frac{(n+1)}{4}\left[n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1\right]$$

$$= \frac{(n+1)}{4}\left(n^3 + n^2\right)$$

$$= \frac{(n+1)n^2(n+1)}{4}$$

$$= \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$$

അതായത്, $$1^3 + 2^3 + \ldots\ldots + n^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$$

ഉദാഹരണം : 19

ഒരു അനുക്രമത്തിന്റെ n-ാം പദം $n(n + 3)$ ആയാൽ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

പരിഹാരം

$$a_n = n(n + 3)$$

$$= n^2 + 3n$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

ഉദാഹരണം : 20

$5 + 11 + 19 + 29 + 41\ldots$ എന്ന അനുക്രമത്തിന്റെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

പരിഹാരം

$$S_n = 5 + 11 + 19 + 29 + \ldots + a_{n-1} + a_n \ldots\ldots\ldots.(1)$$

അല്ലെങ്കിൽ $$S_n = 5 + 11 + 19 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \ldots\ldots\ldots.(2)$$

(1) ൽ നിന്നും (2) കുറച്ചാൽ

$$0 = 5 + [6 + 8 + 10 + 12 + \ldots (n-1) \text{ പദങ്ങൾ}] - a_n$$

$$a_n = 5 + \frac{(n-1)[12 + (n-2) \times 2]}{2}$$

$$= 5 + (n-1)(n+4) = n^2 + 3n + 1$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (k^2 + 3k + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{n(n+2)(n+4)}{3}$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 9.5

1 മുതൽ 7 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

1. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \ldots$
2. $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \ldots$
3. $3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + \ldots$
4. $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots$
5. $5^2 + 6^2 + 7^2 + \ldots + 20^2$
6. $3 \times 8 + 6 \times 11 + 9 \times 14 + \ldots$
7. $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \ldots$

8 മുതൽ 10 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ n -ാം പദം തന്നിട്ടുണ്ട്. n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

8. $n(n+1)(n-4)$.
9. $n^2 + 2^n$
10. $(2n-1)^2$

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 21

ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ p, q, r, s എന്നീ സ്ഥാനങ്ങളിൽ വരുന്ന പദങ്ങൾ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയിലാണെങ്കിൽ $(p-q), (q-r), (r-s)$ എന്നീ മൂന്നു സംഖ്യകളും സമഗുണിത ശ്രേണിയിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ

$$a_p = a + (p-1)\,d \quad \dots (1)$$
$$a_q = a + (q-1)\,d \quad \dots (2)$$
$$a_r = a + (r-1)\,d \quad \dots (3)$$
$$a_s = a + (s-1)\,d \quad \dots (4)$$

a_p, a_q, a_r, a_s എന്നിവ സമഗുണിത ശ്രേണിയിലായതുകൊണ്ട്

$$\frac{a_q}{a_p}=\frac{a_r}{a_q}=\frac{a_q-a_r}{a_p-a_q}=\frac{q-r}{p-q} \quad \dots (5)$$

എന്നെഴുതാം. അതുപോലെ

$$\frac{a_r}{a_q}=\frac{a_s}{a_r}=\frac{a_r-a_s}{a_q-a_r}=\frac{r-s}{q-r} \quad \dots (6)$$

(5), (6) എന്നിവയിൽ നിന്നും

$$\frac{q-r}{p-q}=\frac{r-s}{q-r}$$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

അതായത്, $p-q,\ q-r,\ r-s$ എന്നിവ സമഗുണിത ശ്രേണിയിലായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 22

a, b, c എന്നീ സംഖ്യകൾ ഒരു സമഗുണിതശ്രേണിയിലും കൂടാതെ $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$, ആണെങ്കിൽ, x, y, z എന്നിവ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$ എന്നിരിക്കട്ടെ

എങ്കിൽ $a = k^x$, $b = k^y$, $c = k^z$. എന്നെഴുതാം.

a, b, c എന്നീ സംഖ്യകൾ സമഗുണിത ശ്രേണിയിലായതുകൊണ്ട്

$$b^2 = ac$$

അതായത് $\Rightarrow (k^y)^2 = k^x \times k^z$

$$k^{2y} = k^{x+z}$$

അതുകൊണ്ട് $2y = x + z$

അതായത് x, y, z എന്നിവ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയിലായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 23

a, b, c, d, p എന്നിവ വ്യത്യസ്ത സംഖ്യകളും $(a^2 + b^2 + c^2)p^2 - 2(ab + bc + cd)\,p + (b^2 + c^2 + d^2) \le 0$, യും ആണെങ്കിൽ a, b, c, d എന്നിവ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണി യിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$(a^2 + b^2 + c^2)\,p^2 - 2\,(ab + bc + cd)\,p + (b^2 + c^2 + d^2) \le 0 \quad \ldots (1)$
എന്നു തന്നിരിക്കുന്നു.

കൂടാതെ, $(a^2 + b^2 + c^2)\,p^2 - 2\,(ab + bc + cd)\,p + (b^2 + c^2 + d^2)$

$$= (a^2p^2 - 2abp + b^2) + (b^2p^2 - 2bcp + c^2) + (c^2p^2 - 2cdp + d^2),$$

$$(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 \ge 0 \; \ldots (2)$$

കാരണം സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക എല്ലായ്പ്പോഴും ന്യൂനമല്ലാത്ത സംഖ്യ യായിരിക്കും. (1), (2) എന്നിവയിൽ നിന്നും

$$(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 = 0$$

അതായത് $ap - b = 0,\ bp - c = 0,\ cp - d = 0$

$ap = b,\ bp = c,\ cp = d$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

ഇതിൽ നിന്നും $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{d}{c} = p$

എന്നെഴുതാം.

അതുകൊണ്ട് a, b, c, d എന്നിവ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയിലായിരിക്കും

ഉദാഹരണം : 24

p, q, r എന്നീ സംഖ്യകൾ സമഗുണിത ശ്രേണിയിലും കൂടാതെ $px^2 + 2qx + r = 0$; $dx^2 + 2ex + f = 0$ എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾക്ക് പൊതുവായി ഒരു പരിഹാരവുമുണ്ട്.

എങ്കിൽ $\dfrac{d}{p}, \dfrac{e}{q}, \dfrac{f}{r}$ എന്നിവ സമാന്തര ശ്രേണിയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$px^2 + 2qx + r = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ, $x = \dfrac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4rp}}{2p}$

p, q, r എന്നിവ സമഗുണിത ശ്രേണിയിലായതുകൊണ്ട് $q^2 = pr$ ആയിരിക്കും.

$$\text{അതുകൊണ്ട്, } x = \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4rp}}{2p}$$

$\dfrac{-2q}{2p} = \dfrac{-q}{p}$ പരിഹാരങ്ങൾ രണ്ടും തുല്യമാണെന്നു കാണാം.

$x = \dfrac{-q}{p}$, $dx^2 + 2ex + f = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ കൂടി പരിഹാരമാണല്ലോ. അതു കൊണ്ട്

$$d\left(\frac{-q}{p}\right)^2 + 2e\left(\frac{-q}{p}\right) + f = 0,$$

$$\frac{dq^2}{p^2} - \frac{2eq}{p} + f = 0$$

അതായത് $dq^2 - 2epq + fp^2 = 0$

ഈ സമവാക്യത്തെ pq^2 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ

$$\frac{d}{p} - \frac{2e}{q} + \frac{f}{p} = 0 \quad \text{അല്ലെങ്കിൽ} \quad \frac{2e}{q} = \frac{d}{p} + \frac{f}{r}$$

അതുകൊണ്ട് $\dfrac{d}{p}, \dfrac{e}{q}, \dfrac{f}{r}$ എന്നിവ സമാന്തര ശ്രേണിയിലായിരിക്കും

കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ $(m + n)$-ാം പദത്തിന്റെയും $(m - n)$ -ാം പദത്തിന്റെയും തുക m -ാം പദത്തിന്റെ ഇരട്ടിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
2. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ തുക 24, അവയുടെ ഗുണന ഫലം 440 ആയാൽ പദങ്ങൾ കാണുക.

3. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ n, $2n$, $3n$ എന്നീ പദങ്ങളുടെ തുക യഥാക്രമം S_1, S_2, S_3, ആയാൽ $S_3 = 3(S_2 - S_1)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

4. 200 നും 400 നും ഇടയിലുള്ള 7 ന്റെ എല്ലാ ഗുണിതങ്ങളുടെയും തുക കാണുക.

5. 1 നും 100 നും ഇടയിലുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽ 2 ന്റെയോ, 5 ന്റെയോ ഗുണിതങ്ങളായ എല്ലാ സംഖ്യകളുടെയും തുക കാണുക.

6. 4 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 വരുന്ന എല്ലാ രണ്ടക്ക സംഖ്യകളുടെയും തുക കാണുക.

7. $f(x + y) = f(x).f(y)$, $x, y \in \mathbf{N}$ എന്ന പ്രത്യേകതയുള്ള ഏകദം f ൽ

$f(1) = 3$ ഉം $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$ ആയാൽ n ന്റെ വില കാണുക.

8. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദം 5, പൊതുഗുണിതം 2 എന്നിവ ആകുന്നു. ഈ അനുക്രമത്തിലെ കുറച്ച് പദങ്ങളുടെ തുക 315 ആയാൽ ഈ ശ്രേണിയുടെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണവും അവസാന പദവും കാണുക.

9. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും അഞ്ചാമത്തെയും പദങ്ങളുടെ തുക 90 ആയാൽ പൊതുഗുണിതം കാണുക.

10. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയിലെ ആദ്യ മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ തുക 56 ഈ പദങ്ങളിൽ നിന്നും യഥാക്രമം, 1, 7, 21 എന്നീ സംഖ്യകൾ കുറച്ചാൽ ഒരു സമാന്തര അനുക്രമം ലഭിക്കും. എന്നാൽ പദങ്ങൾ കാണുക.

11. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയിലുള്ള ആകെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യയാണ്. ഈ ശ്രേണിയിലെ എല്ലാ പദങ്ങളുടെയും തുക ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനത്ത് വരുന്ന പദങ്ങളുടെ തുകയുടെ 5 മടങ്ങായാൽ അനുക്രമത്തിന്റെ പൊതുഗുണിതം എഴുതുക.

12. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയിൽ 11 പദങ്ങളുണ്ട്, ആദ്യപദം 11 ഉം, അതിലെ ആദ്യ നാല് പദങ്ങളുടെ തുകയും അവസാനത്തെ നാല് പദങ്ങളുടെ തുകയും യഥാക്രമം 56, 112 എന്നിവ ആയാൽ ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക.

13. ഏതൊരു $x \neq 0$, $\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx}$ ആയാൽ a, b, c, d എന്നിവ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

14. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയിലെ n പദങ്ങളുടെ തുക S ഉം ഗുണനഫലം P യും അവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ തുക R ഉം ആയാൽ $P^2R^n = S^n$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

15. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ p, q, r എന്നീ പദങ്ങൾ യഥാക്രമം a, b, c ആയാൽ $(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

16. $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right), c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണി ആയാൽ a, b, c യും ഒരു സമാന്തര ശ്രേണി ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

17. a, b, c, d ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണി ആയാൽ $(a^n + b^n)$, $(b^n + c^n)$, $(c^n + d^n)$ യും ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

18. a,b,c,d എന്നിവ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാണ്. a,b എന്നിവ $x^2 - 3x + p = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരവും c, d എന്നിവ $x^2 - 12x + q = 0$, എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരവും ആയാൽ $(q + p) : (q - p) = 17:15$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

19. a, bഎന്നീ സംഖ്യകളുടെ സമാന്തര മാധ്യവും, സമഗുണിത മാധ്യവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $m : n$ ആയാൽ $a:b = \left(m + \sqrt{m^2 - n^2}\right) : \left(m - \sqrt{m^2 - n^2}\right)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

20. a, b, c എന്നിവ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയും, b, c, d എന്നിവ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയും, $\frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}$ എന്നിവ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുമായാൽ a, c, e എന്നിവ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

21. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അനുക്രമങ്ങളുടെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

(i) $5 + 55 + 555 + \ldots$ (ii) $.6 + .66 + .666 + \ldots$

22. $2 \times 4 + 4 \times 6 + 6 \times 8 + \ldots + n$ പദം, എന്ന അനുക്രമത്തിന്റെ 20–ാം പദം കാണുക.

23. $3 + 7 + 13 + 21 + 31 + \ldots$ എന്ന അനുക്രമത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

24. S_1, S_2, S_3 ഇവ യഥാക്രമം ആദ്യത്തെ n എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക, അവയുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക, അവയുടെ ഘനങ്ങളുടെ തുക, ആയാൽ $9S_2^2 = S_3(1 + 8S_1)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

25. $\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+...$ എന്ന അനുക്രമത്തിന്റെ n പദങ്ങളുടെ തുക ലഘൂകരിച്ച രൂപത്തിൽ എഴുതുക.

26. $\frac{1\times 2^2+2\times 3^2+...+n\times(n+1)^2}{1^2\times 2+2^2\times 3+...+n^2\times(n+1)}=\frac{3n+5}{3n+1}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

27. 12000 രൂപ വിലയ്ക്ക് ഒരു കർഷകൻ സെക്കന്റ് ഹാൻഡ് ട്രാക്ടർ വാങ്ങിക്കുന്നു. അഡ്വാൻസായി 6000 രൂപ നൽകുകയും ബാക്കി തുക വാർഷിക ഗഡുവായി നൽകാം എന്ന കരാറിൽ എത്തിച്ചേരുന്നു. വാർഷിക ഗഡു 500 രൂപയും ബാക്കി അടക്കാനുള്ള തുകയുടെ 12% പലിശയും എന്നതായിരുന്നു നിബന്ധന. എങ്കിൽ ഇടപാട് തീരുമ്പോൾ ട്രാക്ടറിന് എന്ത് വിലയാകും?

28. ഷംസാദ് അലി 22000 രൂപ വിലയുള്ള സ്കൂട്ടർ വാങ്ങിക്കുന്നു. 4000 രൂപ പണമായി നൽകി ബാക്കി തുക 1000 രൂപ വീതമുള്ള വാർഷിക തവണകളായി 10% പലിശയും കൂടി നൽകാൻ തീരുമാനിച്ചു. എങ്കിൽ ഇടപാട് തീരുമ്പോൾ എന്ത് തുക നൽകേണ്ടി വരും?

29. ഒരാൾ അദ്ദേഹത്തിന്റെ നാല് സുഹൃത്തുക്കൾക്ക് കത്തയച്ചു. ഇതിന്റെ കോപ്പി എടുത്ത് ഏതെങ്കിലും നാല് വ്യത്യസ്ത സുഹൃത്തുക്കൾക്ക് അയയ്ക്കുവാൻ അദ്ദേഹം നിർദ്ദേശിച്ചു. ഈ ശൃംഖല തുടർച്ചയായി സംഭവിക്കുന്നു എന്ന് വിചാരിക്കുക. ഒരു കത്തയക്കാൻ 50 പൈസ ചെലവ് വരുമെങ്കിൽ 8-ാമത്തെ സെറ്റ് അയക്കാൻ മൊത്തം ചെലവ് എത്ര?

30. ഒരാൾ 10000 രൂപ 5% സാധാരണ പലിശ നൽകുന്ന ഒരു ബാങ്കിൽ നിക്ഷേപിച്ചു. 15 വർഷത്തിന് ശേഷവും 20 വർഷത്തിന് ശേഷവും അദ്ദേഹത്തിന് ലഭിക്കാൻ സാധ്യതയുള്ള തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.

31. ഒരു യന്ത്രത്തിന്റെ വില 15625 രൂപയാണ്. ഇത് വർഷം തോറും 20% നിരക്കിൽ കുറയുന്നുവെങ്കിൽ 5 വർഷത്തിന് ശേഷം യന്ത്രത്തിന്റെ വില എന്തായിരിക്കാം.

32. 150 പേർ ഒരു ജോലി നിശ്ചിത ദിവസം കൊണ്ട് ചെയ്ത് തീർക്കാമെന്നുറപ്പ് നല്കുന്നു. പക്ഷെ രണ്ടാം ദിവസം 4 പേരും 3-ാം ദിവസം വീണ്ടും 4 പേരും അങ്ങനെ തുടർച്ചയായി കൊഴിഞ്ഞു പോയ്ക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നു. ജോലി തീരാൻ ആദ്യം നിശ്ചയിച്ചതിനേക്കാൾ 8 ദിവസം കൂടുതൽ എടുത്തു എങ്കിൽ എത്രദിവസം കൊണ്ടാണ് ജോലി പൂർത്തീകരിച്ചത്.

സംഗ്രഹം

- ഒരു നിയമമനുസരിച്ച് ക്രമമായി നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള സംഖ്യകളെയാണ് ശ്രേണി എന്നത് കൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത്. മറ്റൊരു രീതിയിൽ നിർവചി ച്ചാൽ എണ്ണൽ സംഖ്യയുടെയോ അല്ലെങ്കിൽ അതിന്റെ $\{1, 2, 3, \ldots k\}$ പോലുള്ള ഉപഗണങ്ങൾ മണ്ഡലമായി വരുന്ന ഏകദമാണ് ശ്രേണി. നിശ്ചിത പദങ്ങളുള്ള ശ്രേണിയെ പരിമിത ശ്രേണിയാണെന്ന് പറയുന്നു. പരിമിത ശ്രേണിയല്ലാത്ത ശ്രേണികളെ അനന്ത ശ്രേണി എന്ന് പറയു ന്നു.

- $a_1, a_2, a_3, \ldots$ എന്ന ശ്രേണി പരിഗണിച്ചാൽ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ എന്നതിനെ അനുക്രമം എന്ന് പറയുന്നു. ഒരു അനുക്രമത്തിൽ പരിമിതമായ പദങ്ങളാ ണുള്ളത് എങ്കിൽ അതിനെ പരിമിത അനുക്രമം എന്ന് പറയുന്നു.

- ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയിൽ (A.P.) ഓരോ പദത്തോടും ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കൂട്ടുകയോ കുറയുകയോ ചെയ്യുന്നു. ഈ നിശ്ചിത സംഖ്യയെ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം എന്ന് പറയുന്നു. A.P യുടെ ഒന്നാം പദം a യും പൊതുവ്യത്യാസം d യും അവസാനത്തെ പദം l ഉം ആയാൽ ശ്രേണിയുടെ n -ാം പദം അല്ലെങ്കിൽ പൊതുപദം.

$$a_n = a + (n - 1)\, d$$

എന്നും ആദ്യ n പദങ്ങളുടെ തുക $S_n - \frac{n}{2}\left[2a-(n-1)d\right] - \frac{n}{2}(a+l)$ എന്നു മാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

- രണ്ട് സംഖ്യകൾ a, b യുടെ സമാന്തരമാധ്യം (A) = $\frac{a \mid b}{2}$ ആണ്. അതാ യത് a, A, b ഒരു സമാന്തര അനുക്രമമാണ്.

- ഒരു ശ്രേണിയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു പദവും അതിന് തൊട്ട് മുന്നെയുള്ള പദവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യയാണെങ്കിൽ ഈ ശ്രേണിയെ സമഗുണിത ശ്രേണി (GP) എന്ന് പറയാം. ഈ അംശബന്ധത്തെ GP യുടെ പൊതുഗുണകം എന്ന് പറയുന്നു. GP യുടെ ഒന്നാം പദം a, പൊതുഗുണകം r ആയാൽ n - ാം പദത്തെ $a_n = ar^{n-1}$ എന്നും

  ആദ്യ n പദങ്ങളുടെ തുകയെ $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $r \neq 0$

  എന്ന് നിർവചിക്കുന്നു.

- a, b എന്നീ സംഖ്യകളുടെ സമഗുണിത മാധ്യത്തെ (G) $\sqrt{ab}$ എന്ന് നിർവചിക്കുന്നു. അതായത് a, G, b എന്നിവ ഒരു G.P യാണ്.

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

ഏകദേശം 4000 വർഷങ്ങൾക്ക് മുൻപ് തന്നെ ബാബിലോണിയക്കാർക്ക് സമാന്തര, സമഗുണിത ശ്രേണികളെക്കുറിച്ച് അറിവുള്ളതായി തെളിവുകളുണ്ട്. ബോയിത്തിയസ് (510) പറയുന്നത് പ്രകാരം ഗ്രീക്ക് എഴുത്തുകാർക്ക് സമാന്തര, സമഗുണിത ശ്രേണികളെക്കുറിച്ച് അറിയാമെന്നാണ്. ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞരിൽ ആര്യഭട്ട (476) യാണ് ആര്യഭടീയം എന്ന അദ്ദേഹത്തിന്റെ കൃതിയിൽ ആദ്യമായി എണ്ണൽ സംഖ്യയുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക ക്യൂബുകളുടെ തുക എന്നിവയ്ക്കുള്ള സൂത്രവാക്യങ്ങൾ കണ്ടെത്തിയത്. അദ്ദേഹം p -ാം പദത്തിൽ ആരംഭിക്കുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ n പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടെത്തുന്ന സൂത്രവാക്യം നൽകിയിട്ടുണ്ട്. പ്രധാനപ്പെട്ട ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻമാരായ ബ്രഹ്മഗുപ്ത (598), മഹാവീര (850), ഭാസ്കര (1114-1185) എന്നിവരും വർഗങ്ങളുടെയും ക്യൂബുകളുടെയും തുകയെക്കുറിച്ച് പരാമർശിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഒരുപാട് പ്രായോഗിക

തല ഉപയോഗങ്ങളുള്ള ഒരു ശ്രേണിയാണ് ഫിബോനാച്ചി ശ്രേണി. ഈ ശ്രേണി ലിയനാർഡോ ഫിബോനാച്ചി (1170-1250) എന്ന ഇറ്റാലിയൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനാണ് കണ്ടെത്തിയത്. പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ശ്രേണികളെ പ്രത്യേക രൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റുന്ന പ്രക്രിയകൾക്ക് തുടക്കമായി. 1671 ൽ ജെയിംസ് ഗ്രിഗറി അനന്ത ശ്രേണികളെ ബന്ധപ്പെടുത്തി അനന്തഅനുക്രമം എന്ന വാക്ക് ഉപയോഗിക്കുകയുണ്ടായി. ബീജഗണിതം, ഗണിതസിദ്ധാന്തം എന്ന ഗണിതശാഖകളുടെ വ്യക്തമായ ആവിർഭാവത്തോടുകൂടിയാണ് ശ്രേണി, അനുക്രമം എന്നീ ആശയങ്ങൾ അനുയോജ്യമായ രീതിയിൽ രൂപപ്പെട്ടത്.