પ્રકરણ 5

# સંકર સંખ્યાઓ અને દ્વિઘાત સમીકરણો

## 5.1 વિહંગાવલોકન

આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્ગ હંમેશાં અનૃણ જ હોય. ઉદાહરણ તરીકે, $(4)^2 = 16$ અને $(-4)^2 = 16$. આથી, 16 નું વર્ગમૂળ $\pm 4$ છે. ઋણ સંખ્યાઓના વર્ગમૂળ વિશે શું કહી શકાય ? સ્પષ્ટ વિસ્તરણ કરવું છે કે, ઋણ સંખ્યાને વાસ્તવિક વર્ગમૂળ શક્ય નથી. તેથી આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની સંહતિનું એવી કોઈ સંહતિમાં વિસ્તરણ કરવું આવશ્યક છે કે જેથી આપણે ઋણ સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ મેળવી શકીએ. **ઓઇલર** (CE 1707 - CE 1783) $-1$ નું વર્ગમૂળ સંકેત $i$ વડે દર્શાવનાર સૌપ્રથમ ગણિતશાસ્ત્રી હતો. i.e., $i = \sqrt{-1}$.

### 5.1.1 કાલ્પનિક સંખ્યાઓ :

ઋણ સંખ્યાના વર્ગમૂળને કાલ્પનિક સંખ્યા કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે, $\sqrt{-9} = \sqrt{-1}\sqrt{9} = i3$, $\sqrt{-7} = \sqrt{-1}\sqrt{7} = i\sqrt{7}$

### 5.1.2 $i$ ની પૂર્ણાંક ઘાત :

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$n > 4$ માટે, $i^n$ ની ગણતરી કરવા, આપણે $n$ ને 4 વડે ભાગીશું અને $n = 4m + r$ સ્વરૂપમાં લખીશું, જ્યાં $m$ એ ભાગફળ અને $r$ શેષ છે $(0 \le r < 4)$.

આથી $$i^n = i^{4m+r} = (i^4)^m \,.\, (i)^r = (1)^m\, (i)^r = i^r$$

ઉદાહરણ તરીકે, $$(i)^{39} = i^{4 \times 9 + 3} = (i^4)^9 \,.\, (i)^3 = i^3 = -i$$

અને $$(i)^{-435} = i^{-(4 \times 108 + 3)} = (i)^{-(4 \times 108)} \,.\, (i)^{-3}$$

$$= \frac{1}{(i^4)^{108}} \cdot \frac{1}{(i)^3} = \frac{i}{(i)^4} = i$$

(i) જો $a$ અને $b$ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તો $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{-1}\sqrt{a} \times \sqrt{-1}\sqrt{b} = i\sqrt{a} \times i\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$

(ii) જો $a$ અને $b$ બંને ધન હોય અથવા તે પૈકી ઓછામાં ઓછો કોઈ એક ધન અથવા શૂન્ય હોય, તો $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ તેમ છતાં પણ જો $a$ અને $b$ બંને ઋણ હોય, તો $\sqrt{a}\sqrt{b} \ne \sqrt{ab}$.

અત્રે આપણે સ્વીકારી લીધું છે કે કાલ્પનિક (અન્યથા આગળ જતાં સંકર) સંખ્યાઓ પૂર્ણાંક ઘાતાંકના નિયમને અનુસરે છે.

**નોંધ :** ખરેખર તો $\sqrt{a}$ સંકેત જ ધન સંખ્યા $a$ ના ધન વર્ગમૂળ માટે જ પ્રયોજિત છે.

### 5.1.3 સંકર સંખ્યાઓ :

(a) જે સંખ્યાને $a + ib$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય, તેને સંકર સંખ્યા કહે છે. અહીં $a, b \in$ R તથા $i = \sqrt{-1}$ છે.

(b) જો $z = a + ib$ સંકર સંખ્યા હોય, તો $a$ અને $b$ ને અનુક્રમે સંકર સંખ્યાના **વાસ્તવિક ભાગ** અને **કાલ્પનિક ભાગ** કહે છે અને તેને $Re\,(z) = a$ તેમજ $Im\,(z) = b$ એમ લખાય છે.

(c) સંકર સંખ્યાઓ માટે '>' અને '<' જેવા ક્રમ સંબંધ વ્યાખ્યાયિત નથી.

(d) જો કોઈ સંકર સંખ્યાનો કાલ્પનિક ભાગ શૂન્ય હોય, તો તે સંકર સંખ્યાને **શુદ્ધ વાસ્તવિક સંખ્યા** કહે છે અને જો તેનો વાસ્તવિક ભાગ શૂન્ય હોય, તો તેને **શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા** કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે, 2 એ શુદ્ધ વાસ્તવિક સંખ્યા છે. કારણ કે, તેનો કાલ્પનિક ભાગ શૂન્ય છે. જ્યારે $3i$ એ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા છે. કારણ કે તેનો વાસ્તવિક ભાગ શૂન્ય છે.

### 5.1.4 સંકર સંખ્યાઓનું બીજગણિત :

(a) જો $a = c$ અને $b = d$ હોય, તો બે સંકર સંખ્યાઓ $z_1 = a + ib$ અને $z_2 = c + id$ સમાન છે તેમ કહેવાય.

(b) જો $z_1 = a + ib$ અને $z_2 = c + id$ બે સંકર સંખ્યાઓ હોય, તો $z_1 + z_2 = (a + c) + i\,(b + d)$.

### 5.1.5 સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો :

સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો નીચેના ગુણધર્મોનું પાલન કરે છે :

1. **સંવૃતતા :** બે સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો પુનઃ સંકર સંખ્યા જ થશે. સંકર સંખ્યાઓનો ગણ સરવાળા માટે સંવૃત છે.
2. **ક્રમનો નિયમ :** કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓ $z_1$ અને $z_2$ માટે, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
3. **જૂથનો નિયમ :** કોઈ પણ ત્રણ સંકર સંખ્યાઓ $z_1, z_2, z_3$ માટે, $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
4. **સરવાળા માટેના તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ :** એક સંકર સંખ્યા $0 + 0i$ (જેનો સંકેત 0 છે) એવી મળે છે કે જેથી $z + 0 = 0 + z = z$. આ સંકર સંખ્યા 0 ને સરવાળા માટેનો તટસ્થ ઘટક કહે છે.
5. **સરવાળા માટેના વિરોધી ઘટકનું અસ્તિત્વ :** કોઈ પણ સંકર સંખ્યા $z = x + iy$ ને સંગત હંમેશાં સંકર સંખ્યા $-z = -x - iy$ અસ્તિત્વ ધરાવે છે જેથી $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

   $-z$ ને સરવાળા માટેનો વિરોધી ઘટક કહે છે.

### 5.1.6 સંકર સંખ્યાઓનો ગુણાકાર :

ધારો કે $z_1 = a + ib$ અને $z_2 = c + id$ બે સંકર સંખ્યાઓ છે. તેમનો ગુણાકાર $z_1\,z_2$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib)\,(c + id) = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$$

સંકર સંખ્યાઓનો ગુણાકાર નીચેના ગુણધર્મોનું પાલન કરે છે :

1. **સંવૃતતા :** બે સંકર સંખ્યાઓનો ગુણાકાર સંકર સંખ્યા થશે. સંકર સંખ્યાઓનો ગણ ગુણાકાર માટે સંવૃત છે.
2. **ક્રમનો નિયમ :** કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓ $z_1$ અને $z_2$ માટે, $z_1{\cdot}z_2 = z_2{\cdot}z_1$
3. **જૂથનો નિયમ :** કોઈ પણ ત્રણ સંકર સંખ્યાઓ $z_1$, $z_2$ અને $z_3$ માટે, $(z_1{\cdot}z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2{\cdot}z_3)$
4. **ગુણાકાર માટેના તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ :** કોઈ પણ સંકર સંખ્યા $z = x + iy$ માટે, સંકર સંખ્યા $1 = 1 + 0{\cdot}i$ અસ્તિત્વ ધરાવે છે જેથી $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ થાય. સંકર સંખ્યા 1 ને ગુણાકાર માટેનો તટસ્થ ઘટક કહે છે.

5. **ગુણાકાર માટેના વ્યસ્ત ઘટકનું અસ્તિત્વ :** કોઈ પણ શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા $z = x + iy$ ને સંગત સંકર સંખ્યા $\frac{1}{z}$ એવી મળે કે જેથી $z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1$ તો આ સંકર સંખ્યા $\frac{1}{z}$ ને $z$ નો ગુણાકાર માટેનો વ્યસ્ત ઘટક કહે છે.

   $x + iy$ નો વ્યસ્ત ઘટક $= \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$.

6. **વિભાજનનો નિયમ :** કોઈ પણ ત્રણ સંકર સંખ્યાઓ $z_1, z_2$ અને $z_3$ માટે

   $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ અને $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$

**5.1.7** ધારો કે $z_1 = a + ib$ અને $z_2 (\neq 0) = c + id$ છે, તો $z_1 \div z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + i\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}$

### 5.1.8 અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા :

ધારો કે $z = a + ib$ એ સંકર સંખ્યા છે. સંકર સંખ્યાના કાલ્પનિક ભાગનું ચિહ્ન બદલવાથી જે સંકર સંખ્યા મળે તેને આપેલ સંકર સંખ્યાની **અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા** કહે છે અને તેને $\bar{z}$ વડે દર્શાવાય છે એટલે કે, $\bar{z} = a - ib$.

નોંધીશું કે $z = a + ib$ નો વિરોધી ઘટક $-a - ib$ છે, પરંતુ તેની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $a - ib$ છે.

અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા સંબંધી કેટલાક ગુણધર્મો નીચે પ્રમાણે છે :

1. $\overline{(\bar{z})} = z$
2. $z + \bar{z} = 2\,\text{Re}\,(z)$ , $z - \bar{z} = 2\,i\,\text{Im}(z)$
3. જો $z$ શુદ્ધ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો $z = \bar{z}$
4. $z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z$ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા છે.
5. $z \cdot \bar{z} = \{\text{Re}\,(z)\}^2 + \{\text{Im}\,(z)\}^2$
6. $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
7. $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = (\bar{z}_1)\,(\bar{z}_2)$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{(\bar{z}_1)}{(\bar{z}_2)}$ $(z_2 \neq 0)$

### 5.1.9 સંકર સંખ્યાનો માનાંક :

ધારો કે $z = a + ib$ એ સંકર સંખ્યા છે. વાસ્તવિક ભાગના અને કાલ્પનિક ભાગના વર્ગોના સરવાળાના ધન વર્ગમૂળને $z$ નો માનાંક (નિરપેક્ષ કિંમત) કહે છે અને તેને $|z|$ વડે દર્શાવાય છે એટલે કે $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ .

સંકર સંખ્યાઓના ગણમાં $z_1 > z_2$ અથવા $z_1 < z_2$ અર્થહીન છે, પરંતુ $|z_1| > |z_2|$ અથવા $|z_1| < |z_2|$ અર્થપૂર્ણ છે કારણ કે, $|z_1|$ અને $|z_2|$ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

### 5.1.10 સંકર સંખ્યાના માનાંકના ગુણધર્મો :

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ એટલે કે $Re\ (z) = 0$ અને $Im\ (z) = 0$
2. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
3. $-|z| \le Re\ (z) \le |z|$ અને $-|z| \le Im\ (z) \le |z|$
4. $z \cdot \bar{z} = |z|^2,\ |z^2| = |\bar{z}|^2$
5. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|,\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\ (z_2 \neq 0)$
6. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re\ (z_1 \bar{z}_2)$
7. $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2Re\ (z_1 \bar{z}_2)$
8. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
9. $|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$
10. $|az_1 - bz_2|^2 + |bz_1 + az_2|^2 = (a^2 + b^2)\,(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

    વિશેષમાં, $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2\,(|z_1|^2 + |z_2|^2)$
11. અગાઉ સૂચવ્યા પ્રમાણે, સંકર સંખ્યા $z = a + ib\ (\neq 0)$ નો વ્યસ્ત ઘટક $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

## 5.2 આર્ગન્ડ સમતલ

પરસ્પર કાટખૂણે છેદતા અક્ષોના સંદર્ભમાં યામ-સમતલના અનન્ય બિંદુ P $(a, b)$ ને સંગત અનન્ય સંકર સંખ્યા $z = a + ib$ મળે. સંકર સંખ્યા $0 + 0i$ એ O $(0, 0)$ દ્વારા દર્શાવાય છે. શુદ્ધ વાસ્તવિક સંખ્યા $a$ એટલે કે $(a + 0i)$ નું નિરૂપણ $x$-અક્ષ પર બિંદુ $(a, 0)$ દ્વારા થાય છે. તેથી **$x$-અક્ષને વાસ્તવિક અક્ષ** કહે છે. શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા $ib$ એટલે કે, $(0 + ib)$ નું નિરૂપણ $y$-અક્ષ પર બિંદુ $(0, b)$ દ્વારા થાય છે. આથી, **$y$-અક્ષને કાલ્પનિક અક્ષ** કહે છે.

આ જ રીતે કોઈ સમતલમાં સંકર સંખ્યાઓનું બિંદુઓ દ્વારા કરાતા નિરૂપણને **આર્ગન્ડ આકૃતિ** કહે છે. જે યામ-સમતલના પ્રત્યેક બિંદુને અનન્ય સંકર સંખ્યા સાથે સંગત કરી શકાય તેને સંકર સમતલ અથવા આર્ગન્ડ સમતલ અથવા ગૉસિયન સમતલ કહે છે.

જો બે સંકર સંખ્યાઓ $z_1$ અને $z_2$ નું બિંદુઓ P અને Q દ્વારા સંકર સમતલમાં નિરૂપણ થતું હોય, તો $|z_1 - z_2| = PQ$

### 5.2.1 સંકર સંખ્યાનું ધ્રુવીય સ્વરૂપ :

ધારો કે આર્ગન્ડ સમતલમાં શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા $z = a + ib$ ને સંગત બિંદુ P છે. જો OP એ $x$-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\theta$ માપનો ખૂણો બનાવે તો $z = r\ (cos\ \theta + isin\ \theta)$ને સંકર સંખ્યાનું ધ્રુવીય સ્વરૂપ કહે છે, જ્યાં $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ અને $tan\ \theta = \frac{b}{a}$. અહીં $\theta$ ને $z$ નો કોણાંક કહે છે અને તેને સંકેતમાં $arg\ (z) = \theta$ એમ લખાય છે.

જો $-\pi < \theta \le \pi$ હોય તો $\theta$ ને $z$ નો મુખ્ય કોણાંક કહે છે અને તે અનન્ય છે.

$$arg\,(z_1z_2) = arg\,(z_1) + arg\,(z_2)$$

$$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg\,(z_1) - arg\,(z_2)$$

### 5.2.2 દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ :

કોઈ સંખ્યાઓ $a$, $b$ અને $c$ (વાસ્તવિક અથવા કાલ્પનિક, $a \neq 0$) માટે સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ને ચલ $x$ માં વ્યાપક દ્વિઘાત સમીકરણ કહે છે. ચલની જે કિંમતો આપેલ સમીકરણનું સમાધાન કરે તેને સમીકરણનાં બીજ કહે છે.

વાસ્તવિક સહગુણકો ધરાવતા દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ને બે બીજ $\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ અને $\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ હોય છે $D = b^2 - 4ac$ સમીકરણનો વિવેચક છે.

**નોંધ :**

1. જો $D = 0$ હોય તો આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ વાસ્તવિક અને સમાન હોય અને $D > 0$ હોય ત્યારે બીજ વાસ્તવિક અને અસમાન હોય.
   વધુમાં, જો $a, b, c \in \mathbf{Q}$ અને D એ કોઈ શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યાનો વર્ગ હોય તો સમીકરણનાં બીજ સંમેય અને અસમાન હોય તથા જો $a, b, c \in \mathbf{Q}$ અને D એ કોઈ સંમેય સંખ્યાનો વર્ગ ન હોય તો સમીકરણનાં બીજ અસંમેય હોય તથા તે અનુબદ્ધની જોડમાં હોય.
   $D < 0$ હોય તો દ્વિઘાત સમીકરણને વાસ્તવિક બીજ હોતાં નથી અથવા સંકર બીજ મળે છે.
2. દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ $\alpha$ અને $\beta$ હોય, તો
   બીજોનો સરવાળો $= (\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$ તથા બીજોનો ગુણાકાર $= \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$.
3. ધારો કે, $s$ અને $p$ અનુક્રમે કોઈ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજનો સરવાળો અને ગુણાકાર દર્શાવતા હોય, તો આ બીજ દ્વારા રચાતું દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - sx + p = 0$ હોય.

## 5.2 ઉદાહરણો

### ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

**ઉદાહરણ 1 :** $(1 + i)^6 + (1 - i)^3$ ની કિંમત શોધો.

**ઉકેલ :** $(1 + i)^6 = \{(1 + i)^2\}^3 = (1 + i^2 + 2i)^3 = (1 - 1 + 2i)^3 = 8\,i^3 = -8i$

અને $(1 - i)^3 = 1 - i^3 - 3i + 3i^2 = 1 + i - 3i - 3 = -2 - 2i$

$\therefore \quad (1 + i)^6 + (1 - i)^3 = -8i - 2 - 2i = -2 - 10i$

**ઉદાહરણ 2 :** જો $(x+iy)^{\frac{1}{3}} = a + ib$, $x, y, a, b \in R$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = -2\,(a^2 + b^2)$

**ઉકેલ :** $(x+iy)^{\frac{1}{3}} = a + ib \Rightarrow x + iy = (a + ib)^3$

એટલે કે, $x + iy = a^3 + i^3 b^3 + 3iab\,(a + ib)$

$= a^3 - ib^3 + i3a^2b - 3ab^2$

$= a^3 - 3ab^2 + i\,(3a^2b - b^3)$

$\Rightarrow \quad x = a^3 - 3ab^2$ અને $y = 3a^2b - b^3$

$\therefore \quad \frac{x}{a} = a^2 - 3b^2$ અને $\frac{y}{b} = 3a^2 - b^2$

આથી, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = a^2 - 3b^2 - 3a^2 + b^2 = -2a^2 - 2b^2 = -2(a^2 + b^2)$.

**ઉદાહરણ 3 :** સમીકરણ $z^2 = \overline{z}$ ઉકેલો, જ્યાં $z = x + iy$

**ઉકેલ :** $z^2 = \overline{z} \Rightarrow x^2 - y^2 + i2xy = x - iy$

આથી $x^2 - y^2 = x$ .. **(1)**

અને $2xy = -y$ .. **(2)**

(2) પરથી, $y = 0$ અથવા $x = -\frac{1}{2}$

જ્યારે $y = 0$ હોય તો (1) પરથી $x^2 - x = 0$ એટલે કે, $x = 0$ અથવા $x = 1$.

જ્યારે $x = -\frac{1}{2}$ હોય ત્યારે (1) પરથી $y^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ અથવા $y^2 = \frac{3}{4}$ એટલે કે, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

આથી, આપેલ સમીકરણના ઉકેલો : $0 + i0,\ 1 + i0,\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ છે.

**ઉદાહરણ 4 :** જો $\frac{2z+1}{iz+1}$ નો કાલ્પનિક ભાગ $-2$ હોય, તો દર્શાવો કે $z$ ના બિંદુગણનું આર્ગન્ડ સમતલમાં નિરૂપણ એક રેખા છે.

**ઉકેલ :** ધારો કે $z = x + iy$. $\frac{2z+1}{iz+1} = \frac{2(x+iy)+1}{i(x+iy)+1}$

$$= \frac{(2x+1)+i2y}{(1-y)+ix}$$

$$= \frac{\{(2x+1)+i2y\}}{\{(1-y)+ix\}} \times \frac{\{(1-y)-ix\}}{\{(1-y)-ix\}}$$

$$= \frac{(2x+1-y)+i(2y-2y^2-2x^2-x)}{1+y^2-2y+x^2}$$

આમ, $\quad \mathrm{Im}\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right) = \frac{2y-2y^2-2x^2-x}{1+y^2-2y+x^2}$

પરંતુ $\quad \mathrm{Im}\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right) = -2$

તેથી, $\quad \frac{2y-2y^2-2x^2-x}{1+y^2-2y+x^2} = -2$

$\therefore \quad 2y - 2y^2 - 2x^2 - x = -2 - 2y^2 + 4y - 2x^2$

એટલે કે, $\quad x + 2y - 2 = 0$ એ રેખાનું સમીકરણ છે.

**ઉદાહરણ 5 :** જો $\left|z^2-1\right|=|z|^2+1$ હોય, તો દર્શાવો કે, $z$ કાલ્પનિક અક્ષ પર છે.

**ઉકેલ :** ધારો કે $z = x + iy$ છે.

$\therefore \quad |z^2 - 1| = |z|^2 + 1$

$\therefore \quad \left|x^2-y^2-1+i\,2xy\right|=\left|x+iy\right|^2+1$

$\therefore \quad (x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 = (x^2 + y^2 + 1)^2$

$\Rightarrow (x^2-y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) + 1 + 4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2) + 1$

$\therefore \quad 4x^2 = 0 \quad$ i.e., $\quad x = 0$

$\therefore$ $z$ એ કાલ્પનિક $y$-અક્ષ પર છે.

**ઉદાહરણ 6 :** બે સંકર સંખ્યાઓ $z_1$ અને $z_2$ એવી મળે કે જેથી $\bar{z}_1+i\bar{z}_2=0$ અને $arg\,(z_1 z_2) = \pi$ હોય, તો $arg\,(z_1)$ શોધો.

**ઉકેલ :** $\bar{z}_1+i\bar{z}_2=0$ આપેલ છે. આથી $\overline{\bar{z}_1+i\bar{z}_2} = 0$ એટલે કે $z_1 - i z_2 = 0$ $\quad \Rightarrow z_1 = i z_2$

$\Rightarrow iz_1 = i^2 z_2$

$\Rightarrow -z_2 = i z_1$

$\Rightarrow z_2 = -i z_1$

આમ, $\quad arg\,(z_1 z_2) = arg\,z_1 + arg\,(-i z_1) = \pi$ **(આપેલ છે.)**

$\Rightarrow \quad arg\,(-i z_1^2) = \pi$

$\Rightarrow \quad arg\,(-i) + arg\,(z_1^2) = \pi$

$\Rightarrow \quad arg\,(-i) + 2\,arg\,(z_1) = \pi$

$\Rightarrow \quad \frac{-\pi}{2} + 2\,arg\,(z_1) = \pi$

$\Rightarrow \quad arg\,(z_1) = \frac{3\pi}{4}$

**ઉદાહરણ 7 :** જો બે શૂન્યેતર સંકર સંખ્યાઓ $z_1$ અને $z_2$ માટે $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ હોય, તો સાબિત કરો કે $arg\,(z_1) - arg\,(z_2) = 0$.

**ઉકેલ** ધારો કે, $z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ અને $z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

જ્યાં $\quad r_1 = |z_1|,\ arg\,(z_1) = \theta_1,\ r_2 = |z_2|,\ arg\,(z_2) = \theta_2$.

હવે, $\quad |z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| \Rightarrow \left|r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)+r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\right|=r_1+r_2$

$\Rightarrow \left|r_1\cos\theta_1+r_2\cos\theta_2+i(r_1\sin\theta_1+r_2\sin\theta_2)\right|^2=r_1^2+2r_1r_2+r_2^2$

$\Rightarrow r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)=(r_1+r_2)^2$

$\Rightarrow \cos(\theta_1-\theta_2)=1$

$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2$ i.e. $arg\,z_1 = arg\,z_2$

**ઉદાહરણ 8 :** સંકર સંખ્યાઓ $z_1$, $z_2$, $z_3$ માટે જો $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = 1$ હોય, તો $|z_1 + z_2 + z_3|$ ની કિંમત શોધો.

**ઉકેલ :** $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$

$$\Rightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 = |z_3|^2 = 1$$

$$\Rightarrow z_1 \overline{z}_1 = z_2 \overline{z}_2 = z_3 \overline{z}_3 = 1$$

$$\Rightarrow \overline{z}_1 = \frac{1}{z_1}, \overline{z}_2 = \frac{1}{z_2}, \overline{z}_3 = \frac{1}{z_3}$$

$\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = 1$ આપેલ છે.

$\therefore$ $|\overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3| = 1$ એટલે કે, $|\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = 1$

$\Rightarrow$ $|z_1 + z_2 + z_3| = 1$

**ઉદાહરણ 9 :** જો કોઈ સંકર સંખ્યા $z$ એ $(-4, 0)$ કેન્દ્રવાળા અને 3 એકમ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના અંદરના ભાગમાં અથવા વર્તુળના પરિઘ પર હોય તો $|z+1|$ ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

**ઉકેલ :** વર્તુળના કેન્દ્રથી $z$ નું નિરૂપણ કરતાં બિંદુ સુધીનું અંતર $|z-(-4+i0)| = |z+4|$.

આપેલ શરત અનુસાર, $|z+4| \le 3$. **... (1)**

હવે $|z+1| = |z+4-3| \le |z+4| + |-3| \le 3+3=6$

આથી $|z+1|$ ની મહત્તમ કિંમત 6 છે.

(**નોંધ :** $z = -7$ એ શરત (1) નું પાલન કરે છે તથા $|-7+1|=6$. $z = -1$ માટે $|z+4| = 3 \le 3$ દર્શાવે છે.

વળી, સંકર સંખ્યાના માનાંકની ન્યૂનતમ કિંમત 0 છે. આથી $|z+1|$ ની ન્યૂનતમ કિંમત 0 છે.

**ઉદાહરણ 10 :** $3 < |z| < 4$ શરતોનું પાલન કરતાં બિંદુઓનાં સ્થાન નિશ્ચિત કરો.

**ઉકેલ :** $|z| < 4 \Rightarrow x^2 + y^2 < 16$. આ ઊગમબિંદુ કેન્દ્રવાળા અને 4 એકમ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના અંદરનો ભાગ અને $|z| > 3 \Rightarrow x^2 + y^2 > 9$ આ ઊગમબિંદુ કેન્દ્રવાળા અને 3 એકમ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનો બહિર્ભાગ દર્શાવે છે. આથી, $3 < |z| < 4$ એ બે વર્તુળો $x^2 + y^2 = 9$ અને $x^2 + y^2 = 16$ ની વચ્ચેનો ભાગ છે.

**ઉદાહરણ 11 :** જ્યારે $x = -2 - \sqrt{3}\,i$ હોય, ત્યારે $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - x + 41$ ની કિંમત શોધો.

**ઉકેલ :** $x + 2 = -\sqrt{3}\,i \Rightarrow x^2 + 4x + 7 = 0$

આથી, $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - x + 41 = (x^2 + 4x + 7)(2x^2 - 3x + 5) + 6$ **(ભાગાકાર કરતાં)**

$= 0 \times (2x^2 - 3x + 5) + 6 = 6$

**ઉદાહરણ 12 :** સમીકરણ $x^2 - px + 8 = 0$ નાં બીજનો તફાવત 2 હોય, તો $p$ ની કિંમત શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે સમીકરણ $x^2 - px + 8 = 0$ નાં બીજ $\alpha$ અને $\beta$ છે.

આથી, $\alpha + \beta = p$ અને $\alpha \cdot \beta = 8$.

હવે $|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$

$\therefore \quad 2 = \sqrt{p^2 - 32}$

$\therefore \quad p^2 - 32 = 4$ એટલે કે, $p = \pm 6$.

**ઉદાહરણ 13 :** સમીકરણ $x^2 - (a-2)x - (a+1) = 0$ નાં બીજના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય, તો $a$ ની કિંમત શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે, આપેલ સમીકરણનાં બીજ $\alpha$ અને $\beta$ છે.

આથી, $\alpha + \beta = a - 2$ અને $\alpha\beta = -(a+1)$

હવે
$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$$
$$= (a-2)^2 + 2(a+1)$$
$$= (a-1)^2 + 5$$

આથી, $\alpha^2 + \beta^2$ ન્યૂનતમ થવા માટે, $(a-1)^2 = 0$ એટલે કે, $a = 1$.

## વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

**ઉદાહરણ 14 :** જો સંકર સંખ્યાઓ $z_1$ અને $z_2$ માટે, $|1-\bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = k(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$ હોય, તો $k$ ની કિંમત શોધો.

**ઉકેલ :** ડા.બા.$= |1-\bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2$

$$= (1-\bar{z}_1 z_2)\,\overline{(1-\bar{z}_1 z_2)} - (z_1 - z_2)\,\overline{(z_1 - z_2)}$$

$$= (1-\bar{z}_1 z_2)\,(1-z_1 \bar{z}_2) - (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$

$$= 1 + z_1\,\bar{z}_1\,z_2\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2$$

$$= 1 + |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2$$

$$= (1-|z_1|^2)\,(1-|z_2|^2)$$

જ.બા $= k(1 - |z_1|^2)\,(1-|z_2|^2)$

$\Rightarrow \quad k = 1$ (જમણી અને ડાબી બાજુ સરખાવતાં)

(**નોંધ :** $|z_1| = 1$ અથવા $|z_2| = 1$ હોય તો બંને બાજુ શૂન્ય થઈ જાય અને $k$ નું કોઈ પણ વાસ્તવિક મૂલ્ય ચાલે.)

**ઉદાહરણ 15** જો સંકર સંખ્યાઓ $z_1$ અને $z_2$ બંને $z + \bar{z} = 2|z-1|$; $arg\,(z_1 - z_2) = \frac{\pi}{4}$ નું સમાધાન કરે, તો $Im\,(z_1 + z_2)$ શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે, $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ અને $z_2 = x_2 + iy_2$.

હવે $z + \bar{z} = 2|z-1|$

$\Rightarrow \quad (x+iy) + (x-iy) = 2\,|x-1+iy|$

$\Rightarrow \quad x^2 = [(x-1)^2 + y^2]$

$\Rightarrow \quad 2x = 1 + y^2$ ... (1)

વળી, $z_1$ અને $z_2$ બંને (1) નું સમાધાન કરે છે. આપણી પાસે,

$2x_1 = 1 + y_1^2$ અને $2x_2 = 1 + y_2^2$ છે.

$\therefore 2(x_1 - x_2) = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2)$

$$\therefore 2 = (y_1 + y_2)\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) \quad \text{... (2)}$$

વળી, $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$

આથી, $tan\ \theta = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, જ્યાં $\theta = arg\ (z_1 - z_2)$

$\therefore \quad tan\ \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ $\left(\text{કારણ કે } \theta = \dfrac{\pi}{4}\right)$

એટલે કે, $1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

(2) પરથી, આપણને $2 = y_1 + y_2$ મળે. એટલે કે $Im\ (z_1 + z_2) = 2$

## હેતુલક્ષી પ્રકારના પ્રશ્નો

**ઉદાહરણ 16 :** વિધાન સત્ય બને તે રીતે નીચેના પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

(i) $3i^3 - 2ai^2 + (1 - a)i + 5$ વાસ્તવિક હોય, તો '$a$' ની કિંમત .......... છે.

(ii) જો $|z| = 2$ અને $arg\ (z) = \dfrac{\pi}{4}$ હોય, તો $z =$ .......... .

(iii) $arg\ (z) = \dfrac{\pi}{3}$ નું સમાધાન કરે તેવા $z$ નો બિંદુગણ .......... છે.

(iv) $(-\sqrt{-1})^{4n-3}$ ; $n \in \mathbf{N}$ ની કિંમત .......... છે.

(v) $a + bi$ સ્વરૂપમાં સંકર સંખ્યા $\dfrac{1-i}{1+i}$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા .......... છે.

(vi) જો કોઈ સંકર સંખ્યા તૃતીય ચરણમાં હોય, તો તેની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા .......... ચરણમાં હોય.

(vii) જો $(2 + i)\,(2 + 2i)\,(2 + 3i) \ldots (2 + ni) = x + iy$ હોય, તો $5 \cdot 8 \cdot 13 \ldots (4 + n^2) =$ .......... .

**ઉકેલ :** (i) $3i^3 - 2ai^2 + (1 - a)i + 5 = -3i + 2a + 5 + (1 - a)i = 2a + 5 + (-a - 2)\,i$

વાસ્તવિક છે. આથી, $-a - 2 = 0$ એટલે કે, $a = -2$.

(ii) $z = |z|\left(cos\dfrac{\pi}{4} + i\,sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,(1 + i)$

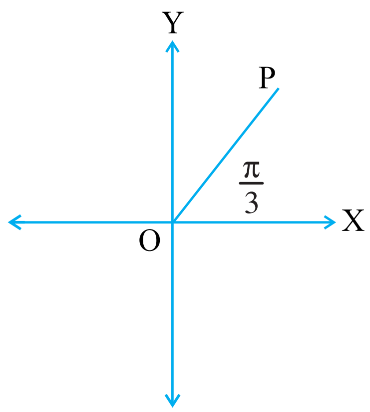
(iii) ધારો કે, $z = x + iy$. આથી $z$ નું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $z = r\,(cos\ \theta + i\ sin\ \theta)$ છે જ્યાં અહીં $tan\ \theta = \dfrac{y}{x}$

અને $\theta = arg\ (z) = \dfrac{\pi}{3}$ આપેલ છે. આથી,

$tan\ \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = \sqrt{3}x$, જ્યાં $x > 0, y > 0$.

આથી $z$ નો બિંદુગણ એ $y = \sqrt{3}x$ નો ઊગમબિંદુ સિવાયનો પ્રથમ ચરણનો ભાગ છે.

ખૂલ્લું કિરણ $\overrightarrow{OP}$ ઉકેલ છે.




આકૃતિ 5.1

(iv) અહીં $(-\sqrt{-1})^{4n-3} = (-i)^{4n-3} = (-i)^{4n}\ (-i)^{-3} = \dfrac{1}{(-i)^3} = \dfrac{1}{-i^3} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i^2} = -i$

(v) $\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{1-i}{1+i} \times \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{1+i^2-2i}{1-i^2} = \dfrac{1-1-2i}{1+1} = -i$

$\therefore$ આથી, $\dfrac{1-i}{1+i}$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $i$ છે.

(**નોંધ :** શરત $a + bi$ સ્વરૂપે ન આપી હોય તો જવાબ $\dfrac{1+i}{1-i}$ પણ થાય.)

(vi) સંકર સંખ્યાની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા એ $x$-અક્ષમાં આપેલ સંકર સંખ્યાનું પ્રતિબિંબ છે. આથી, જો સંકર સંખ્યા તૃતીય ચરણમાં હોય, તો તેનું પ્રતિબિંબ દ્વિતીય ચરણમાં હોય.

(vii) $(2 + i)\ (2 + 2i)\ (2 + 3i)\ ...\ (2 + ni) = x + iy$ આપેલ છે. ... **(1)**

$\Rightarrow \quad \overline{(2+i)}\ \overline{(2+2i)}\ \overline{(2+3i)}...\overline{(2+ni)} = \overline{(x+iy)} = (x-iy)$

એટલે કે, $(2 - i)\ (2 - 2i)\ (2 - 3i)\ ...\ (2 - ni) = x - iy$ ... **(2)**

(1) તથા (2) ની બંને બાજુનો ગુણાકાર લેતાં, $5 \cdot 8 \cdot 13\ ...\ (4 + n^2) = x^2 + y^2$.

અથવા $|2 + i|^2\,|2 + 2i|^2\ ...\ |2 + ni|^2 = x^2 + y^2$

$\therefore\ 5 \cdot 8 \cdot 13 \cdot\ ...\ (n^2 + 4) = x^2 + y^2$

**ઉદાહરણ 17 :** નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો

(i) શૂન્યેતર સંકર સંખ્યાનો $i$ સાથે ગુણાકાર કરવામાં આવે, તો સંકર સંખ્યા દર્શાવતું કિરણ વિષમઘડી દિશામાં કાટખૂણે ભ્રમણ કરે છે.

(ii) કોઈક $\theta$ માટે સંકર સંખ્યા $\cos\theta + i \sin\theta$ શૂન્ય હોઈ શકે.

(iii) જો કોઈ સંકર સંખ્યા તેની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા સાથે સંપાતી હોય, તો તે સંખ્યા કાલ્પનિક અક્ષ પર હોય.

(iv) સંકર સંખ્યા $z = (1 + i\sqrt{3})\ (1 + i)\ (\cos\theta + i \sin\theta)$ નો કોણાંક $\dfrac{7\pi}{12} + \theta$ છે.

(v) $|z+1| < |z-1|$ થાય તેવી સંકર સંખ્યા $z$ નું નિરૂપણ કરતાં બિંદુઓ, વર્તુળના અંદરના ભાગમાં છે.

(vi) જો કોઈ ત્રણ સંકર સંખ્યાઓ $z_1, z_2, z_3$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો તે સંકર સમતલમાં વર્તુળ પર હોય.

(vii) જો $n$ ધન પૂર્ણાંક હોય તો, $i^n + (i)^{n+1} + (i)^{n+2} + (i)^{n+3}$ ની કિંમત 0 છે.

**ઉકેલ :**

(i) સત્ય. ધારો કે, સંકર સંખ્યા $z = 2 + 3i$ એ કિરણ OP દ્વારા દર્શાવાય છે. આથી, $iz = -3 + 2i$ તે કિરણ OQ દ્વારા દર્શાવાય છે. જો કિરણ OP એ વિષમઘડી દિશામાં કાટખૂણે પરિભ્રમણ કરે તો તે કિરણ OQ સાથે સંપાતી થાય.

$z = x + iy = (x, y)$ તો $iz = -y + ix = (-y, x)$

(ii) અસત્ય. કારણ કે, $\cos\theta + i\sin\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$ અને $\sin\theta = 0$, પરંતુ $\theta$ ની કોઈ કિંમત માટે $\cos\theta$ અને $\sin\theta$ બંને શૂન્ય નથી.

(iii) અસત્ય. કારણ કે, $x + iy = x - iy \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ સંકર સંખ્યા વાસ્તવિક અક્ષ પર છે.

(iv) સત્ય. $\arg(z) \approx \arg(1 + i\sqrt{3}) + \arg(1 + i) + \arg(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} + \theta = \dfrac{7\pi}{12} + \theta$

(v) અસત્ય. કારણ કે, $|x+iy+1| < |x+iy-1|$

$\Rightarrow \quad (x+1)^2 + y^2 < (x-1)^2 + y^2$

$\Rightarrow \quad 4x < 0.$

આ પ્રદેશ આર્ગન્ડ સમતલનો $y$-અક્ષની ડાબી બાજુનો ખૂલ્લો અર્ધતલ છે.

(vi) $z_1, z_2, z_3$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો $z_2 = \dfrac{z_1 + z_3}{2}$. આથી, $z_1, z_2, z_3$ સમરેખ બિંદુઓ છે.

(vii) સત્ય. કારણ કે $i^n + (i)^{n+1} + (i)^{n+2} + (i)^{n+3}$

$= i^n (1 + i + i^2 + i^3) = i^n (1 + i - 1 - i) = i^n (0) = 0$

**ઉદાહરણ 18 :** વિભાગ I ની અભિવ્યક્તિને વિભાગ II ની અભિવ્યક્તિ સાથે એવી રીતે જોડો કે જેથી ફલિત વિધાન સત્ય બને.

| વિભાગ I | વિભાગ II |
|---|---|
| (a) $1+i^2 + i^4 + i^6 + \ldots i^{20}$ ની કિંમત .......... છે. | (i) શુદ્ધ કાલ્પનિક સંકર સંખ્યા |
| (b) $i^{-1097}$ ની કિંમત .......... છે. | (ii) શુદ્ધ વાસ્તવિક સંખ્યા |
| (c) $1+i$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા .......... ચરણમાં છે. | (iii) દ્વિતીય |
| (d) $\dfrac{1+2i}{1-i}$ .......... ચરણમાં છે. | (iv) ચતુર્થ |
| (e) જો $a, b, c \in$ R અને $b^2 - 4ac < 0$ હોય, તો $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ વાસ્તવિક નથી (સંકર હોય) અને | (v) અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યાઓની જોડ હોય તો આવશ્યક નથી. |
| (f) જો $a, b, c \in$ R અને $b^2 - 4ac > 0$ હોય તથા $b^2 - 4ac$ એ કોઈ સંખ્યાનો પૂર્ણવર્ગ હોય, તો સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ .......... | (vi) અનુબદ્ધ સંખ્યાઓની જોડ હોય છે. |

**ઉકેલ :** (a) $\Leftrightarrow$ (ii), કારણ કે $1 + i^2 + i^4 + i^6 + \ldots + i^{20}$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 = 1$ શુદ્ધ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

(b) $\Leftrightarrow$ (i), કારણ કે $i^{-1097} = \dfrac{1}{(i)^{1097}} = \dfrac{1}{i^{4\times274+1}} = \dfrac{1}{\{(i)^4\}^{274}(i)} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i^2} = -i$

શુદ્ધ કાલ્પનિક સંકર સંખ્યા છે.

(c) $\Leftrightarrow$ (iv), $1 + i$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $1 - i$ છે. તે બિંદુ $(1, -1)$ દ્વારા આલેખાય છે તે બિંદુ ચતુર્થ ચરણમાં છે.

(d) $\Leftrightarrow$ (iii), કારણ કે $\dfrac{1+2i}{1-i} = \dfrac{1+2i}{1-i} \times \dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{-1+3i}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$ આ બિંદુ $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ છે તથા તે બિંદુ દ્વિતીય ચરણમાં છે.

(e) $\Leftrightarrow$ (vi), જો $b^2 - 4ac < 0$ તો D < 0 તથા D નું વર્ગમૂળ કાલ્પનિક સંખ્યા છે. આથી,

બીજ $x = \dfrac{-b \pm \text{શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા}}{2a}$ એટલે કે, બીજ અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યાઓની જોડ છે.

(f) $\Leftrightarrow$ (v), સમીકરણ $x^2 - (5 + \sqrt{2})\, x + 5\sqrt{2} = 0$ નો વિચાર કરીએ, તો $a = 1$, $b = -(5 + \sqrt{2})$, $c = 5\sqrt{2}$ મળે. સ્પષ્ટ છે કે, $a, b, c \in$ R.

હવે, $D = b^2 - 4ac = \{-(5 + \sqrt{2})\}^2 - 4{\cdot}1{\cdot}5\sqrt{2} = (5 - \sqrt{2})^2$

આથી, $x = \dfrac{5+\sqrt{2} \pm (5-\sqrt{2})}{2} = 5, \sqrt{2}$ જે અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યાઓની જોડ નથી.

**ઉદાહરણ 19 :** $\dfrac{i^{4n+1} - i^{4n-1}}{2}$ ની કિંમત શું મળે ?

**ઉકેલ :** $i$, કારણ કે $\dfrac{i^{4n+1} - i^{4n-1}}{2} = \dfrac{i^{4n}i - i^{4n}i^{-1}}{2}$

$$= \frac{i - \frac{1}{i}}{2} = \frac{i^2 - 1}{2i} = \frac{-2}{2i} = i$$

**ઉદાહરણ 20 :** $(1 + i)^{2n} = (1 - i)^{2n}$ બને તે માટે, $n$ ની ન્યૂનતમ ધન પૂર્ણાંક કિંમત શું હોઈ શકે ?

**ઉકેલ :** $n = 2$, કારણ કે $(1 + i)^{2n} = (1 - i)^{2n} \Rightarrow \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2n} = 1 \Rightarrow \left[\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2\right]^n = 1 \Rightarrow (-1)^n = 1$

$n = 2$ હોય ત્યારે આ શક્ય બને

**ઉદાહરણ 21 :** $3 + \sqrt{7}\, i$ ની વ્યસ્ત સંખ્યા મેળવો.

**ઉકેલ :** $z$ ની વ્યસ્ત સંખ્યા $= \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

આથી, $3 + \sqrt{7}\, i$ ની વ્યસ્ત સંખ્યા $= \dfrac{3-\sqrt{7}i}{16} = \dfrac{3}{16} - \dfrac{\sqrt{7}i}{16}$

**ઉદાહરણ 22 :** જો $z_1 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ અને $z_2 = \sqrt{3} + i$ હોય, તો $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ કયા ચરણમાં હોય તે નક્કી કરો.

**ઉકેલ :** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} = \left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}\right)i$

આ પ્રથમ ચરણનું બિંદુ છે.

**ઉદાહરણ 23 :** $\dfrac{\sqrt{5+12i} + \sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i} - \sqrt{5-12i}}$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા કઈ હશે તે શોધો. **($a + bi$ સ્વરૂપમાં)**

**ઉકેલ :** ધારો કે, $z = \dfrac{\sqrt{5+12i} + \sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i} - \sqrt{5-12i}} \times \dfrac{\sqrt{5+12i} + \sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i} + \sqrt{5-12i}}$

$$= \frac{5+12i+5-12i+2\sqrt{25+144}}{5+12i-5+12i} = \frac{3}{2i} = \frac{3i}{-2} = 0 - \frac{3}{2}i$$

આથી $z$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $= 0 + \dfrac{3}{2}i$ છે.

**ઉદાહરણ 24 :** $1 - i$ ના મુખ્ય કોણાંકની કિંમત શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે $1 - i$ નો મુખ્ય કોણાંક $\theta$ છે. વળી,

$$tan\ \theta = -1 \Rightarrow tan\ \theta = tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4},\ \text{કારણ કે}\ -\pi < -\frac{\pi}{4} \le \pi$$

અથવા $r\ cos\ \theta = 1, r\ sin\ \theta = -1 \Rightarrow r = \sqrt{2}, cos\ \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, sin\ \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{4}$

આથી મુખ્ય કોણાંક $-\frac{\pi}{4}$ છે.

**ઉદાહરણ 25 :** સંકર સંખ્યા $(i^{25})^3$ નું ધ્રુવીય સ્વરૂપ મેળવો.

**ઉકેલ :** $z = (i^{25})^3 = (i)^{75} = i^{4\times18+3} = (i^4)^{18}\ (i)^3 = i^3 = -i = 0 - i$

ધ્રુવીય સ્વરૂપ $z = r\ (cos\ \theta + i\ sin\theta)$

$$= 1\left\{cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\ sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= cos\frac{\pi}{2} - i\ sin\frac{\pi}{2}$$

**ઉદાહરણ 26 :** $z - 2 - 3i$ નો કોણાંક $\frac{\pi}{4}$ હોય, તો $z$ નો બિંદુગણ શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે $z = x + iy$. વળી, $z - 2 - 3i = (x - 2) + i\ (y - 3)$

ધારો કે $z - 2 - 3i$ નો કોણાંક $\theta$ છે.

$$tan\theta = \frac{y-3}{x-2}$$

$$\therefore \quad tan\frac{\pi}{4} = \frac{y-3}{x-2} \qquad \left(\theta = \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \quad 1 = \frac{y-3}{x-2}\ \text{i.e.}\ x - y + 1 = 0$$

આથી $z$ નો બિંદુગણ એક રેખા દર્શાવે છે.

**ઉદાહરણ 27 :** જો $1 - i$ એ સમીકરણ $x^2 + ax + b = 0$ નું બીજ હોય, જ્યાં $a, b \in \mathbf{R}$ તો $a$ અને $b$ ની કિંમત શોધો.

**ઉકેલ :** બીજનો સરવાળો $\frac{-a}{1} = (1 - i) + (1 + i) \Rightarrow a = -2.$

(અવાસ્તવિક સંકર બીજ અનુબદ્ધની જોડમાં હોય. આથી બીજું બીજ $1 + i$ છે.)

બીજનો ગુણાકાર $\frac{b}{1} = (1 - i)\ (1 + i) \Rightarrow b = 2$

**વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 28 થી 33 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :**

**ઉદાહરણ 28 :** $1 + i^2 + i^4 + i^6 + ... + i^{2n}$ ..........

(A) ધન (B) ઋણ (C) 0 (D) ન મળે.

**ઉકેલ :** $1 + i^2 + i^4 + i^6 + ... + i^{2n} = 1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^n$

$n$ ની કિંમત આપ્યા સિવાય તેની કિંમત મેળવી શકાતી નથી. સાચો વિકલ્પ (D) છે.

**ઉદાહરણ 29 :** જો સંકર સંખ્યા $z = x + iy$ એ શરત $|z+1| = 1$ નું સમાધાન કરે તો $z$ .......... પર હોય.

(A) $x$-અક્ષ (B) (1, 0) કેન્દ્રવાળા અને 1 એકમ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળ

(C) (–1, 0) કેન્દ્રવાળા અને 1 એકમ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળ (D) $y$-અક્ષ

**ઉકેલ :** $|z+1|=1 \Rightarrow |(x+1)+iy| = 1$

$\Rightarrow \quad (x+1)^2 + y^2 = 1$

આ સમીકરણ (–1, 0) કેન્દ્રવાળું અને 1 એકમ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે. સાચો વિકલ્પ (C) છે.

**ઉદાહરણ 30 :** સંકર સંખ્યાઓ $z, -iz$ અને $z + iz$ દ્વારા સંકર સમતલ પર રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ .......... હોય.

(A) $|z|^2$ (B) $|\bar{z}|^2$

(C) $\frac{|z|^2}{2}$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

**ઉકેલ :** ધારો કે $z = x + iy$. આથી $-iz = y - ix$. આથી,

$z + iz = (x - y) + i(x + y)$

$\therefore$ ત્રિકોણનું માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{|z|^2}{2}$. સાચો વિકલ્પ (C) છે.

**ઉદાહરણ 31 :** સમીકરણ $|z+1-i| = |z-1+i|$ .......... દર્શાવે છે.

(A) રેખા (B) વર્તુળ (C) પરવલય (D) અતિવલય

**ઉકેલ :** $|z+1-i| = |z-1+i|$

$\Rightarrow \quad |z-(-1+i)| = |z-(1-i)|$

$\Rightarrow \quad$ PA = PB, જ્યાં A (–1, 1), B (1, –1) તથા P $(x, y)$ છે.

$\Rightarrow \quad z$ એ બિંદુઓ A અને B ને જોડતા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજક પર છે અને લંબદ્વિભાજક એક રેખા દર્શાવે.

સાચો વિકલ્પ (A) છે.

**ઉદાહરણ 32 :** સમીકરણ $z^2 + |z|^2 = 0$ ના ઉકેલોની સંખ્યા .......... છે. $(z \neq 0)$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) અનંત

**ઉકેલ :** $z^2 + |z|^2 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 - y^2 + i2xy + x^2 + y^2 = 0$

$\Rightarrow$ $2x^2 + i2xy = 0 \Rightarrow 2x(x + iy) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ અથવા $x + iy = 0$ એટલે કે $z = 0$

$\therefore$ $x = 0$ અથવા $z = 0$ પરંતુ $z \neq 0$

$\therefore$ $x = 0$ લેતાં $y$ એ કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોઈ શકે. આવા ઉકેલોની સંખ્યા અનંત હોય.

સાચો વિકલ્પ (D) છે.

**ઉદાહરણ 33 :** $sin\frac{\pi}{5} + i\left(1 - cos\frac{\pi}{5}\right)$ નો કોણાંક .......... હોય.

(A) $\frac{2\pi}{5}$ (B) $\frac{\pi}{5}$ (C) $\frac{\pi}{15}$ (D) $\frac{\pi}{10}$

**ઉકેલ :** અહીં $r\ cos\ \theta = sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ અને $r\ sin\ \theta = 1 - cos\ \frac{\pi}{5}$

$$\therefore \quad tan\ \theta = \frac{1 - cos\frac{\pi}{5}}{sin\frac{\pi}{5}} = \frac{2\ sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)}{2\ sin\left(\frac{\pi}{10}\right).\ cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad tan\theta = tan\left(\frac{\pi}{10}\right) \text{ i.e., } \theta = \frac{\pi}{10}$$

સાચો વિકલ્પ (D) છે.

## સ્વાધ્યાય 5.3

### ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

1. ધન પૂર્ણાંક $n$, માટે, $(1 - i)^n\left(1 - \frac{1}{i}\right)^n$ ની કિંમત શોધો.

2. કિંમત શોધો : $\sum_{n=1}^{13}(i^n + i^{n+1})$ ; $n \in \mathbf{N}$

3. જો $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = x + iy$ હોય, તો $(x, y)$ શોધો.

4. જો $\frac{(1+i)^2}{2-i} = x + iy$ હોય, તો $x + y$ શોધો.

5. જો $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100} = a + ib$ હોય, તો $(a, b)$ શોધો.

6. જો $a = \cos\theta + i\sin\theta$ હોય, તો $\frac{1+a}{1-a}$ ની કિંમત શોધો.

7. જો $(1 + i) z = (1 - i)\bar{z}$ હોય, તો દર્શાવો કે $z = -i\bar{z}$.

8. જો $z = x + iy$ હોય, તો સાબિત કરો કે $z\bar{z} + 2(z + \bar{z}) + b = 0$; $b \in \mathbf{R}$; $\forall b < 8$ વર્તુળ દર્શાવે છે.

9. જો $\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}-1}$ નો વાસ્તવિક ભાગ 4 હોય, તો સાબિત કરો કે સંકર સમતલમાં $z$ નો બિંદુગણ વર્તુળ દર્શાવે છે.

10. સાબિત કરો કે, સંકર સંખ્યા $z$ એ શરત $arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{4}$ નું સમાધાન કરે તો તે વર્તુળ પર હોય.

11. સમીકરણ $|z| = z + 1 + 2i$ નો ઉકેલ મેળવો.

## વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

12. જો $|z+1| = z + 2(1 + i)$ હોય, તો $z$ શોધો.

13. જો $arg(z - 1) = arg(z + 3i)$ હોય, તો $(x - 1) : y$ શોધો, જ્યાં $z = x + iy$.

14. $\left|\frac{z-2}{z-3}\right| = 2$ વર્તુળ દર્શાવે છે. આ વર્તુળનું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો.

15. જો $\frac{z-1}{z+1}$ એ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા હોય, તો $|z|$ ની કિંમત શોધો. **($z \neq -1$)**

16. બે સંકર સંખ્યાઓ $z_1$ અને $z_2$ માટે, $|z_1| = |z_2|$ અને $arg(z_1) + arg(z_2) = \pi$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $z_1 = -\bar{z}_2$.

17. જો $|z_1| = 1$ $(z_1 \neq -1)$ અને $z_2 = \frac{z_1-1}{z_1+1}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $z_2$ નો વાસ્તવિક ભાગ 0 છે.

18. જો $z_1$, $z_2$ અને $z_3$, $z_4$ એ અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યાઓની બે જોડ હોય, તો $arg\left(\frac{z_1}{z_4}\right) + arg\left(\frac{z_2}{z_3}\right)$ શોધો.

19. If $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = 1$ હોય, તો સાબિત કરો કે $|z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \ldots + \frac{1}{z_n}\right|$.

20. સંકર સંખ્યાઓ $z_1$ અને $z_2$ માટે $arg(z_1) - arg(z_2) = 0$ હોય, તો સાબિત કરો કે $|z_1 - z_2| = |z_1| - |z_2|$

21. સમીકરણોની સંહતિ $Re(z^2) = 0$, $|z| = 2$ નો ઉકેલ મેળવો.

22. સમીકરણ $z + \sqrt{2}\,|(z + 1)| + i = 0$ નું સમાધાન કરતી હોય તેવી સંકર સંખ્યા શોધો.

**23.** સંકર સંખ્યા $z=\dfrac{1-i}{cos\dfrac{\pi}{3}+i\,sin\dfrac{\pi}{3}}$ નું ધ્રુવીય સ્વરૂપ લખો.

**24.** જો બે સંકર સંખ્યાઓ $z$ અને $w$ માટે, $|zw|=1$ અને $arg\,(z) - arg\,(w) = \dfrac{\pi}{2}$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\bar{z}\,w = -i$.

## હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

**25.** વિધાન સત્ય બને તે રીતે નીચેના પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

(i) કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓ $z_1$ અને $z_2$ માટે, $|az_1-bz_2|^2+|bz_1+az_2|^2=$ .......... $a, b \in \mathbf{R}$

(ii) $\sqrt{-25}\times\sqrt{-9}$ = ..........

(iii) $\dfrac{(1-i)^3}{1-i^3}$ = ..........

(iv) $i + i^2 + i^3 + ...$ (1000 પદ સુધી) = ..........

(v) $1 + i$ ની વ્યસ્ત સંખ્યા = ..........

(vi) જો સંકર સંખ્યાઓ $z_1$ અને $z_2$ માટે, $z_1 + z_2$ કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો $z_2$ = ..........

(vii) $arg\,(z) + arg\,\bar{z}$ $(\bar{z} \neq 0)$ ..........

(viii) જો $|z+4| \leq 3$ હોય, તો $|z+1|$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો અનુક્રમે .......... અને .......... હોય.

(ix) જો $\left|\dfrac{z-2}{z+2}\right|=\dfrac{\pi}{6}$ હોય, તો $z$ નો બિંદુગણ .......... છે.

(x) જો $|z| = 4$ અને $arg\,(z) = \dfrac{5\pi}{6}$ હોય, તો $z$ = ..........

**26.** નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

(i) સંકર સંખ્યાઓ માટે ક્રમ સંબંધ વ્યાખ્યાયિત છે.

(ii) શૂન્યેતર સંકર સંખ્યાનો $-i$ સાથે ગુણાકાર કરવામાં આવે ત્યારે તે વિષમ ધન દિશામાં ઊગમબિંદુની આસપાસ કાટખૂણે પરિભ્રમણ કરે છે.

(iii) કોઈ પણ સંકર સંખ્યા $z$ માટે, $|z| + |z-1|$ ની ન્યૂનતમ કિંમત 1 છે.

(iv) $|z-1|=|z-i|$ દ્વારા નિરૂપાતી રેખાનો બિંદુગણ એ બિંદુઓ (1, 0) અને (0, 1) ને જોડતી રેખાને લંબ છે.

(v) જો કોઈ સંકર સંખ્યા $z$ માટે, $z \neq 0$ અને $Re\,(z) = 0$ હોય, તો $Im\,(z^2) = 0$.

(vi) અસમતા $|z-4|<|z-2|$ એ $x > 3$ દ્વારા મળતા પ્રદેશનું નિરૂપણ કરે છે.

(vii) બે સંકર સંખ્યાઓ $z_1$ અને $z_2$ માટે, $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ હોય, તો $arg\,(z_1 - z_2) = 0$.

(viii) 2 એ સંકર સંખ્યા નથી.

**27.** વિભાગ I ની અભિવ્યક્તિને વિભાગ IIની અભિવ્યક્તિ સાથે એવી રીતે જોડો કે જેથી વિધાન સત્ય બને.

| વિભાગ I | વિભાગ II |
|---|---|
| (a) $\sqrt{3}+i$ નું ધ્રુવીય સ્વરૂપ .......... છે. | (i) બિંદુઓ $(-2, 0)$ અને $(2, 0)$ ને જોડતા રેખાખંડનો લંબદ્વિભાજક |
| (b) $-1+\sqrt{-3}$ નો કોણાંક .......... છે. | (ii) $(0, -4)$ કેન્દ્રવાળા અને 3 એકમ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળ પર અથવા વર્તુળની બહાર |
| (c) જો $\lvert z+2\rvert=\lvert z-2\rvert$ હોય, તો $z$ નો બિંદુગણ .......... છે. | (iii) $\frac{2\pi}{3}$ |
| (d) જો $\lvert z+2i\rvert=\lvert z-2i\rvert$ હોય, તો $z$ નો બિંદુગણ .......... છે. | (iv) બિંદુઓ $(0, -2)$ અને $(0, 2)$ ને જોડતા રેખાખંડનો લંબદ્વિભાજક |
| (e) અસમતા $\lvert z+4i\rvert\geq 3$ દ્વારા જેનું નિરૂપણ થતું હોય તે પ્રદેશ .......... છે. | (v) $2\left(cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6}\right)$ |
| (f) $\lvert z+4\rvert\leq 3$ દ્વારા જેનું નિરૂપણ થતું હોય તે પ્રદેશ .......... છે. | (vi) $(-4, 0)$ કેન્દ્રવાળા અને 3 એકમ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળ પર અથવા વર્તુળની અંદર |
| (g) $\frac{1+2i}{1-i}$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા .......... છે. | (vii) પ્રથમ ચરણમાં |
| (h) $1-i$ ની વ્યસ્ત સંખ્યા .......... છે. | (viii) તૃતીય ચરણમાં |

**28.** $\frac{2-i}{(1-2i)^2}$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા કઈ છે ? ($a+bi$ સ્વરૂપમાં મેળવો.)

**29.** જો $\lvert z_1\rvert=\lvert z_2\rvert$ હોય, તો $z_1=z_2$ હોવું જરૂરી છે ?

**30.** જો $\frac{(a^2+1)^2}{2a-i}=x+iy$ હોય, તો $x^2+y^2$ ની કિંમત મેળવો.

**31.** જો $\lvert z\rvert=4$ અને $arg\,(z)=\frac{5\pi}{6}$ હોય, તો $z$ શોધો.

**32.** $\left|(1+i)\dfrac{(2+i)}{(3+i)}\right|$ શોધો.

**33.** $(1 + i\sqrt{3})^2$ નો મુખ્ય કોણાંક શોધો.

**34.** જો $\left|\dfrac{z-5i}{z+5i}\right| = 1$ હોય, તો $z$ નું સ્થાન નક્કી કરો.

**વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલ ચાર વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 35 થી 50 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :**

**35.** $x$ ની કઈ કિંમત માટે, $sinx + i\ cos\ 2x$ અને $cos\ x - i\ sin\ 2x$ એકબીજાની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યાઓ બને ?

(A) $x = n\pi$ (B) $x = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2}$ (C) $x = 0$ (D) $x$ ની કોઈ કિંમત ન મળે.

**36.** $\alpha$ ની કઈ વાસ્તવિક કિંમત માટે, અભિવ્યક્તિ $\dfrac{1-i\sin\alpha}{1+2i\sin\alpha}$ શુદ્ધ વાસ્તવિક સંખ્યા બને ?

(A) $(n+1)\dfrac{\pi}{2}$ (B) $(2n + 1)\ \dfrac{\pi}{2}$

(C) $n\pi$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ. $n \in \mathbf{N}$

**37.** જો .......... હોય, તો $z = x + iy$ તૃતીય ચરણમાં હોય અને તો $\dfrac{\bar{z}}{z}$ પણ તૃતીય ચરણમાં જ હોય,

(A) $x > y > 0$ (B) $x < y < 0$ (C) $y < x < 0$ (D) $y > x > 0$

**38.** $(z + 3)(\bar{z} + 3)$ ની કિંમત .......... ને સમાન છે.

(A) $|z+3|^2$ (B) $|z-3|$ (C) $z^2 + 3$ (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

**39.** જો $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^x = 1$ હોય, તો .......... .

(A) $x = 2n+1$ (B) $x = 4n$ (C) $x = 2n$ (D) $x = 4n + 1, n \in \text{N}$

**40.** જો $\alpha^2 + \beta^2 =$ .......... $x \in \text{R}$ એ સમીકરણ $\left(\dfrac{3-4ix}{3+4ix}\right) = \alpha - i\beta\ (\alpha,\beta \in \mathbf{R})$ નું સમાધાન કરે.

(A) 1 (B) – 1 (C) 2 (D) – 2

**41.** કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓ $z_1$ અને $z_2$ માટે નીચેનામાંથી કયું સત્ય છે ?

(A) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ (B) $arg\ (z_1 z_2) = arg\ (z_1).\ arg\ (z_2)$

(C) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ (D) $|z_1 + z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

**42.** સંકર સંખ્યા $2 - i$ દ્વારા દર્શાવાતું બિંદુ સમઘડી દિશામાં ઊગમબિંદુની આસપાસ $\frac{\pi}{2}$ ના ખૂણે પરિભ્રમણ કરે તો બિંદુનું નવું સ્થાન .......... હોય.

(A) $1 + 2i$ (B) $-1 - 2i$ (C) $2 + i$ (D) $-1 + 2i$

**43.** ધારો કે $x, y \in \mathbf{R}$ છે. જો $x + iy$ એ અવાસ્તવિક સંકર સંખ્યા હોય, તો .......... .

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x \neq 0$ (D) $y \neq 0$

**44.** જો $a + ib = c + id$ હોય, તો .......... .

(A) $a^2 + c^2 = 0$ (B) $b^2 + c^2 = 0$ (C) $b^2 + d^2 = 0$ (D) $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

**45.** જો કોઈ સંકર સંખ્યા $z$ એ શરત $\left|\frac{i+z}{i-z}\right| = 1$ નું સમાધાન કરે તો તે .......... પર હોય.

(A) વર્તુળ $x^2 + y^2 = 1$ (B) $x$-અક્ષ (C) $y$-અક્ષ (D) રેખા $x + y = 1$

**46.** જો $z$ એ કોઈ સંકર સંખ્યા હોય, તો .......... .

(A) $|z^2| > |z|^2$ (B) $|z^2| = |z|^2$ (C) $|z^2| < |z|^2$ (D) $|z^2| \geq |z|^2$

**47.** જો .......... હોય, તો $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ શક્ય બને.

(A) $z_2 = \overline{z_1}$ (B) $z_2 = \frac{1}{z_1}$ (C) $arg\,(z_1) = arg\,(z_2)$ (D) $|z_1| = |z_2|$

**48.** $\theta$ ની કઈ વાસ્તવિક કિંમત માટે, અભિવ્યક્તિ $\frac{1+i\cos\theta}{1-2i\cos\theta}$ વાસ્તવિક સંખ્યા બને ?

(A) $n\pi + \frac{\pi}{4}$ (B) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$ (C) $2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

**49.** જ્યારે $x < 0$ હોય ત્યારે $arg\,(x)$ ની કિંમત .......... હોય.

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\pi$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

**50.** જો $f(z) = \frac{7-z}{1-z^2}$, જ્યાં $z = 1 + 2i$ હોય, તો $|f(z)| =$ .......... .

(A) $\frac{|z|}{2}$ (B) $|z|$ (C) $2|z|$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.