" Uncontrolled variation is the enemy of quality."

– Edward Deming

4

પ્રસારમાન

(Measures of Dispersion)

વિષયવસ્તુ :

4.1 પ્રસારમાનનો અર્થ અને તેનાં લક્ષણો

4.2 નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપનો ખ્યાલ

4.3 પ્રસારમાન : નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપો

4.3.1 વિસ્તાર : અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

4.3.2 ચતુર્થક વિચલન : અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

4.3.3 સરેરાશ વિચલન : અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

4.3.4 પ્રમાણિત વિચલન : અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

4.4 મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન : અર્થ

4.1 પ્રસારમાનનો અર્થ (Meaning of Dispersion)

આપણે અગાઉનાં ત્રણ પ્રકરણોમાં માહિતી એકત્ર કર્યા બાદ, તેનું વર્ગીકરણ, કોષ્ટક-રચના અને તેના મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપ અથવા સરેરાશ જેવી બાબતોનો અભ્યાસ કર્યો. હવે આપણે જાણીએ છીએ કે, મધ્યવર્તી સ્થિતિ અથવા સરેરાશનું કોઈ પણ માપ માહિતીનો સારાંશ અથવા કેન્દ્રવર્તી કિંમત રજૂ કરતું માપ છે, પણ એવું બની શકે કે કેટલાંક અવલોકનો સરેરાશના માપની કિંમતની ખૂબ નજીક હોય અને કેટલાંક અવલોકનો આ માપની કિંમતથી ખૂબ દૂર હોય. આમ સમષ્ટિમાંના એકમોના મધ્યવર્તી માપથી અવલોક્નો કેવી રીતે ફેલાયેલાં છે તે જાણવાનું પણ ઉપયોગી છે. મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપો આંકડાશાસ્ત્રીય પૃથક્કરણમાં ખૂબ જ ઉપયોગી હોવા છતાં, ફક્ત આ જ માપો પૂરતા છે તેવું નથી. એક ઉદાહરણ લઈ આ બાબત નીચેની આકૃતિ અને તેની વિગત દ્વારા સમજીએ.

એક વ્યક્તિ તેના કુટુંબ સાથે એકવાર જંગલમાં ફરવા ગયો હતો. તેઓને આગળની મુસાફરી માટે જંગલમાં એક નદી પાર કરવાની હતી અને હોડી પ્રાપ્ય ન હતી. તે વ્યક્તિ જાણતો હતો કે નદીની સરેરાશ ઊંડાઈ 100 સેમી છે અને તેના કુટુંબના બધા સભ્યોની સરેરાશ ઊંચાઈ 125 સેમી છે. તેથી તેણે વિચાર્યું કે તેઓ બધા કોઈ જોખમ વગર નદી પાર કરી શકશે. પરંતુ નદીની મહત્તમ ઊંડાઈ 150 સેમી હતી અને તે વ્યક્તિની એક પુત્રીની ઊંચાઈ 90 સેમી હતી. આપણે સમજી શકીએ છીએ કે તેઓ બધા નદી પાર કરવા જાય તો શું થઈ શકે.

આમ, સ્પષ્ટ છે કે ફક્ત 'સરેરાશ' જાણવાથી અને 'અવલોકનોના ફેલાવા'ની માહિતી જાણ્યા વગર, દર વખતે હેતુ પાર ન પડે.

તે જ રીતે બીજું ઉદાહરણ દેશની વ્યક્તિઓની સરેરાશ આવક એટલે કે દેશની માથાદીઠ આવક (Percapita Income)નું લઈએ. સરેરાશ આવક એટલે કે માથાદીઠ આવક દેશના લોકોની આર્થિક સ્થિતિ સૂચવતું સરેરાશનું એક ખૂબ જ અગત્યનું માપ છે; પરંતુ આ માપ પરથી દેશના લોકોના વિવિધ વર્ગોમાં આવક કેવી રીતે વહેંચાયેલી છે અથવા વિતરિત છે તેના વિશે કોઈ નિર્દેશ મળતો નથી. વધુમાં, ફક્ત આ માપ પરથી દેશના ગરીબ લોકો અને તવંગર લોકો વચ્ચે આવકની અસમાનતાનું પ્રમાણ કેટલું છે તેનો કોઈ ખ્યાલ આવતો નથી.

આમ, કોઈ પણ માહિતીના અભ્યાસ માટે તેનાં જુદાં જુદાં લક્ષણો આપણે જાણવા જોઈએ. આપણે જે જાણવું છે તેમાંથી ફક્ત કેટલાંક લક્ષણો વિશે જ મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપો પરથી જાણી શકાય છે, પરંતુ માહિતીની વધુ સારી ગહન સમજ માટે તેના **પ્રસાર** એટલે કે અવલોકનોના ફેલાવાને પણ માપવું જોઈએ. સરેરાશના માપની સાથે સાથે અવલોકનોમાં ચલન (Variation) દર્શાવતું માપ આવી માહિતી પૂરી પાડે છે. આ પ્રકરણમાં આપણે માહિતીનાં અવલોકનોમાં રહેલું ચલન અને સરેરાશના માપથી અવલોકનો કેટલાં દૂર વિસ્તરેલા છે તે વિશેના અન્ય વિવિધ માપોનો અભ્યાસ કરીશું.

આપણો અનુભવ છે કે બે કે તેથી વધુ સમૂહોનાં અવલોકનોના સરેરાશના માપ સમાન હોવા છતાં આ સમૂહો કેટલીક બાબતોમાં એકબીજાથી ભિન્ન હોઈ શકે. જેમકે, આ સમૂહોનાં અવલોકનોનો તેમની સરેરાશના માપથી ફેલાવો (Scatter or spread) તથા અવલોકનોમાં રહેલ આંતરિક ચલન ભિન્ન હોઈ શકે. તેથી સમૂહોની સરખામણી ફક્ત સરેરાશના માપના આધારે કરવાને બદલે તેમના અવલોકનોના ચલનને પણ ધ્યાનમાં લેવું સલાહભર્યું છે. આ બાબત સમજવા માટે આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ધારો કે કોઈ નાણાકીય વિશ્લેષક ત્રણ કંપનીઓ A, B અને C ના ધંધાકીય ક્ષેત્રે દેખાવ વિશે અભ્યાસ કરવા માગે છે. તેને ત્રણ કંપનીઓનાં છેલ્લાં પાંચ વર્ષના નફાની વિગત નીચે મુજબ મળે છે :

વર્ષ	1	2	3	4	5	કુલ
કંપની A નો નફો (લાખ ₹)	30	30	30	30	30	150
કંપની B નો નફો (લાખ ₹)	15	30	30	30	45	150
કંપની C નો નફો (લાખ ₹)	–5	30	70	30	25	150

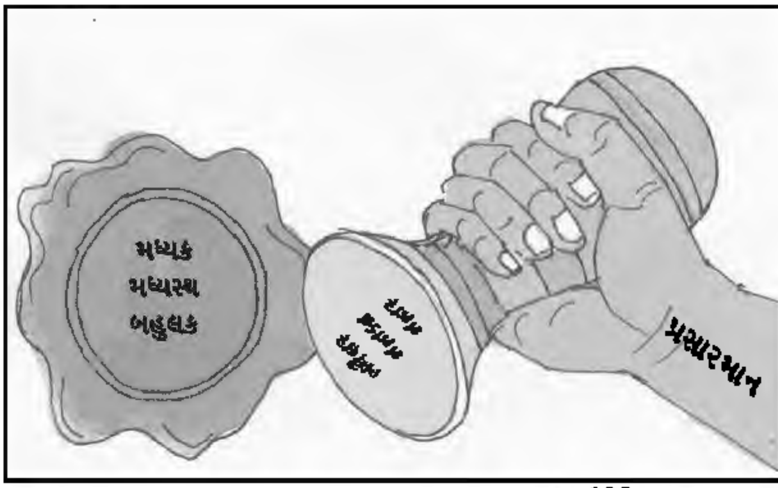
હવે, સૌપ્રથમ સ્વાભાવિક છે કે નાણાકીય વિશ્લેષક ત્રણેય કંપનીઓના સરેરાશ વાર્ષિક નફા વિશે અને ત્યાર બાદ નફામાં થયેલા ફેરફારો વિશે જાણવા માંગશે. ઉપર જણાવેલી ત્રણેય કંપનીના નફા (લાખ ₹માં)ની વિગત પરથી સ્પષ્ટ છે કે, ત્રણેય કંપની A, B અને C માટે નફાનો મધ્યક = મધ્યસ્થ = બહુલક = 30 (લાખ ₹) થાય છે. હવે ત્રણેય કંપની A, B અને C ના વ્યક્તિગત વાર્ષિક નફાની વિગત જોતા માલૂમ પડે છે કે કંપની A નો નફો છેલ્લાં 5 વર્ષમાં એકસમાન 30 (લાખ ₹) છે, તેથી નફામાં ચલનનો ગાળો 30 – 30 = 0 છે, કંપની Bના નફામાં ચલનનો ગાળો 45 – 15 = 30 (લાખ ₹) છે, જ્યારે કંપની C ના નફામાં ચલનનો ગાળો 70 – (–5) = 75 (લાખ ₹) છે. અહીં કંપની A નાં બધાં જ વર્ષોમાં થતો નફો એકસમાન છે એટલે તેમાં ચલન બિલકુલ નથી, જ્યારે કંપની B ના વાર્ષિક નફા સરેરાશ માપ 30 (લાખ ₹)ની નજીક છે પરંતુ કંપની C ના વાર્ષિક નફા તેના સરેરાશ માપ 30 (લાખ ₹) કરતાં ઘણાં દૂર સુધી વિસ્તરેલા છે. આમ, ત્રણેય કંપનીઓના નફાનો મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક સમાન હોવા છતાં આ ત્રણેય કંપનીઓના વાર્ષિક નફા તેના ફેલાવા (Scatter or spread)ના સંદર્ભમાં એકબીજાથી ખૂબ જ જુદા પડે છે. તેથી ત્રણેય કંપનીઓના નફાના માત્ર સરેરાશના માપને આધારે આંકડાશાસ્ત્રીય પૃથક્કરણ કરી ત્રણેય કંપની નફાના સંદર્ભમાં સરખી છે તેવું તારણ કાઢીએ, તો તે ભૂલભરેલું અને ગેરમાર્ગે દોરનારું છે.

આમ, માત્ર એક સમષ્ટિનાં લક્ષણોના અભ્યાસ માટે નહિ પરંતુ બે કે તેથી વધુ સમષ્ટિના તુલનાત્મક આંકડાશાસ્ત્રીય અભ્યાસ માટે પણ સમષ્ટિનાં અવલોકનોના પ્રસાર કે ફેલાવાની જાણકારી મેળવવી જરૂરી થઈ પડે છે.

માહિતીનાં અવલોકનો સરેરાશના માપથી કેટલે અંતરે ફેલાયેલા કે વિસ્તરેલા છે તેના માપને પ્રસારમાન (Dispersion) કહે છે.

'પ્રસારમાન' એ માત્ર સમષ્ટિનાં અવલોકનોના ચલન વિશેનો સામાન્ય ખ્યાલ જણાવે છે એવું નથી પરંતુ તે ચલન વિશેનું ચોક્કસ માપ પણ દર્શાવે છે. જુદા જુદા આંકડાશાસ્ત્રીઓએ પ્રસારમાનની વ્યાખ્યાઓ જણાવી છે તેમાંથી સ્પિગલ (Spiegel)એ આપેલી વ્યાખ્યા નીચે મુજબ છે :

"માહિતીના સરેરાશ માપની આસપાસ તેનાં અવલોકનો કેટલા પ્રમાણમાં ફેલાયેલા છે તે દર્શાવતું મૂલ્ય એટલે ચલન અથવા પ્રસારમાન."



પ્રસારને જાણવાથી માહિતી વિશે જે વધારાની વિગતો મળે છે, તેનાથી મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપોની વિશ્વસનીયતા આંકી શકાય છે. જો માહિતીમાં પ્રસાર વધુ હોય તો મધ્યવર્તીના માપ સમગ્ર માહિતીનું પ્રતિનિધિત્વ ધરાવતું માપ ન હોઈ, ફક્ત સરેરાશની નજીકનાં અવલોકનો માટેનું પ્રતિનિધિત્વ ધરાવતું માપ હોય છે.

પ્રસારમાનનાં ઇચ્છનીય લક્ષણો :

પ્રસારમાનનાં કેટલાંક ઇચ્છનીય લક્ષણો નીચે મુજબ છે :

(1) પ્રસારમાનની વ્યાખ્યા સ્પષ્ટ અને ચોક્કસ હોવી જોઈએ.

(2) તેની ગણતરી સહેલી અને સમજવામાં સરળ હોવી જોઈએ.

(3) તેની ગણતરીમાં માહિતીનાં બધાં જ અવલોકનોનો ઉપયોગ થવો જોઈએ.

(4) તે બૈજિક ક્રિયાઓ તથા આંકડાશાસ્ત્રીય ગણતરીઓ માટે અનુકૂળ હોવું જોઈએ.

(5) તે નિદર્શનના સાપેક્ષમાં સ્થિર માપ હોવું જોઈએ. એટલે કે એક જ સમષ્ટિમાંથી સમાન કદનાં જુદાં જુદાં નિદર્શો લેવામાં આવે તો તેમાંથી મળતું પ્રસારનું માપ લગભગ સરખું મળવું જોઈએ.

(6) તેની કિંમત પર માહિતીનાં અતિ નાનાં અને અતિ મોટાં અવલોકનોની અસર ઓછી હોવી જોઈએ.

4.2 પ્રસારમાનના નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપનો ખ્યાલ

નિરપેક્ષ માપ (Absolute Measure) :

જે પ્રસારના માપને માહિતીનાં અવલોકનોના એકમ વડે દર્શાવવામાં આવે તે માપને પ્રસારનું **નિરપેક્ષ માપ** કહેવામાં આવે છે. દા.ત. જો માહિતીનાં અવલોકનોનો એકમ કિગ્રા હોય તો પ્રસારના નિરપેક્ષ માપનો એકમ પણ કિગ્રા થશે.

બે કે તેથી વધુ માહિતી સમૂહોના અવલોકનો જુદા જુદા એકમો ધરાવતા હોય અને તેઓના પ્રસારની સરખામણી કરવી હોય તો નિરપેક્ષ માપ ઉપયોગી ન બને. આ બાબત નીચેના ઉદાહરણથી સમજીએ :

ધારો કે કોઈ એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓના વજન (કિગ્રામાં) અને તેમની ઊંચાઈ (સેમીમાં) આપેલા છે. હવે વિદ્યાર્થીઓના વજન અને ઊંચાઈની માહિતીમાંથી શેમાં વધુ પ્રસાર છે તે જાણવા માટે તેના નિરપેક્ષ માપ મેળવીએ તો વજનની માહિતીમાં રહેલ પ્રસારના નિરપેક્ષ માપનો એકમ કિગ્રા થશે, જ્યારે ઊંચાઈની માહિતીમાં રહેલ પ્રસારના નિરપેક્ષ માપનો એકમ સેમી થશે. આમ, બંને નિરપેક્ષ માપોનાં મૂલ્યોના એકમ જુદા જુદા છે, તેથી તેમની સરખામણી કરવી હોય તો નિરપેક્ષ માપ પરથી તે શક્ય ન બને.

સાપેક્ષ માપ (Relative Measure) :

પ્રસારનું જે માપ એકમથી મુક્ત હોય તેને પ્રસારનું **સાપેક્ષ માપ** કહે છે. બે કે તેથી વધુ માહિતી સમૂહનાં અવલોકનોના એકમો ભિન્ન હોય ત્યારે તેમના પ્રસારની સરખામણી સાપેક્ષ માપથી જ થઈ શકે છે.

સામાન્ય રીતે સમૂહનાં અવલોકનોમાં રહેલાં પ્રસારના નિરપેક્ષ માપ અને સમૂહનાં અવલોકનોની યોગ્ય સરેરાશના ગુણોત્તરને પ્રસારનું સાપેક્ષ માપ કહે છે. પ્રસારના સાપેક્ષ માપને પ્રસારાંક (Co-efficient of Dispersion) કહે છે અને આ માપ માહિતીનાં અવલોકનોના એકમથી મુક્ત હોય છે.

4.3 પ્રસારનાં માપ (Measures of Dispersion)

આપણે પ્રસારના નીચે દર્શાવેલ વિવિધ નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપનો અભ્યાસ કરીશું :

(1) વિસ્તાર (Range)

(2) ચતુર્થક વિચલન (Quartile Deviation)

(3) સરેરાશ વિચલન (Mean Deviation)

(4) પ્રમાણિત વિચલન (Standard Deviation)

ઉપર્યુક્ત માપોમાંથી વિસ્તાર અને ચતુર્થક વિચલનને આપણે પ્રસારનાં સ્થાનીય માપ કહીશું, કારણ કે આ માપ માહિતીના ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલાં અવલોકનોના સ્થાન પર આધાર રાખે છે, જ્યારે સરેરાશ વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલનને આપણે વિચલનોના સારાંશ દર્શાવતા માપ કહીશું, કારણ કે આ બંને માપ અવલોકનોના મધ્યવર્તી માપથી લીધેલ વિચલનો પર આધાર રાખે છે.

4.3.1 વિસ્તાર (Range)

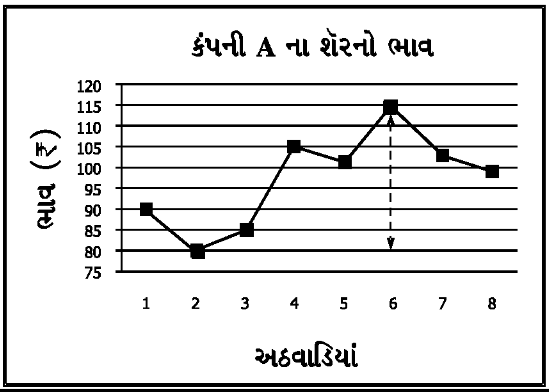
માહિતીના સૌથી મોટાં અને સૌથી નાનાં અવલોકનોના તફાવતને વિસ્તાર કહેવામાં આવે છે. તેને સંકેત R વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$\therefore$ વિસ્તાર $= R = x_H - x_L$

જ્યાં x_H = સૌથી મોટું અવલોકન

x_L = સૌથી નાનું અવલોકન

વિસ્તાર R એ પ્રસારનું નિરપેક્ષ માપ છે અને R નો એકમ એ જ હોય છે જે અવલોકનોનો એકમ હોય.



આઠ અઠવાડિયા માટે કંપની Aના શૅરના અઠવાડિક બંધભાવ આપેલા છે. આલેખ પરથી સ્પષ્ટ છે કે મહત્તમ ભાવ ₹ 115 અને ન્યૂનતમ ભાવ ₹ 80 છે. તેથી, વિસ્તાર = 115 – 80 = ₹ 35 થશે.

વિસ્તારની વ્યાખ્યા પરથી સ્પષ્ટ છે કે, વર્ગીકૃત માહિતી હોય તોપણ વિસ્તાર શોધવા માટે અવલોકનોની આવૃત્તિની જરૂર પડતી નથી. કોઈ પણ વર્ગીકૃત માહિતી માટે સૌથી મોટી કિંમતોના વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા અને સૌથી નાની કિંમતોના વર્ગની અધઃસીમાનો તફાવત લેવાથી તે માહિતીનો વિસ્તાર મેળવી શકાય છે.

માહિતીના વિસ્તાર R ને $x_H + x_L$ વડે ભાગવાથી સાપેક્ષ વિસ્તાર મળે છે.

$$\therefore \text{ સાપેક્ષ વિસ્તાર } = \frac{R}{x_H + x_L} = \frac{x_H - x_L}{x_H + x_L}$$

સાપેક્ષ વિસ્તારને વિસ્તારાંક (Co-efficient of Range) પણ કહેવામાં આવે છે. વિસ્તારાંક એ એકમથી મુક્ત છે.

જો કોઈ સમષ્ટિની માહિતી માટે વિસ્તારાંક નાનો હોય તો એમ કહી શકાય કે સમષ્ટિના એકમોમાં ચલન ઓછું છે, અર્થાત્ એકમોની કિંમતો એકબીજાથી બહુ અલગ નથી, પરંતુ જો વિસ્તારાંક મોટો હોય તો સમષ્ટિના એકમોમાં ચલન વધુ છે તેમ કહી શકાય. અર્થાત્ એકમોની કિંમતો એકબીજાથી ઘણી અલગ છે તેમ કહી શકાય.

ઉદાહરણ 1 : એક બૅટ્સમૅનના ક્રિકેટની છેલ્લી દસ મૅચમાં અનુક્રમે 48, 75, 37, 52, 93, 81, 25, 72, 18 અને 60 રન થાય છે. આ માહિતી પરથી તેના રનનો વિસ્તાર તથા વિસ્તારાંક શોધો.

અહીં $x_H = 93$, $x_L = 18$

તેથી વિસ્તાર $= x_H - x_L = 93 - 18 = 75$

$\therefore$ $R = 75$ રન

આમ, બૅટ્સમૅને છેલ્લી દસ મૅચમાં કરેલા રનનો વિસ્તાર 75 રન છે.

$$\text{વિસ્તારાંક અથવા સાપેક્ષ વિસ્તાર } = \frac{R}{x_H + x_L}$$

$$= \frac{75}{93+18} = \frac{75}{111} = 0.6757$$

$\therefore$ વિસ્તારાંક ≈ 0.68

આમ, બૅટ્સમૅનના રનનો વિસ્તારાંક 0.68 છે.

ઉદાહરણ 2 : એક કારખાનાના કામદારોના માસિક વેતનની નીચેની માહિતી પરથી આપેલા કામદારોના માસિક વેતનનો વિસ્તાર અને વિસ્તારાંક શોધો.

માસિક વેતન (₹)	3500	4000	5000	7500	10,000	12,000
કામદારોની સંખ્યા	3	21	30	19	6	5

અહીં આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ અસતત છે અને ચલ કિંમત (વેતન) પરથી સ્પષ્ટ છે કે $x_H = 12{,}000$ અને $x_L = 3500$

વિસ્તાર $= x_H - x_L$

$= 12{,}000 - 3500$

$= 8500$

$\therefore \quad R = ₹\ 8500$

આમ, કામદારોના માસિક વેતનનો વિસ્તાર ₹ 8500 છે.

$$\text{વિસ્તારાંક} = \frac{R}{x_H + x_L}$$

$$= \frac{8500}{12000+3500}$$

$$= \frac{8500}{15500}$$

$$= 0.5484$$

$\therefore$ વિસ્તારાંક ≈ 0.55

આમ, કામદારોના માસિક વેતનનો વિસ્તારાંક 0.55 છે.

ઉદાહરણ 3 : કોઈ એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થતી વસ્તુઓને તેમના વજન મુજબ જુદાં જુદાં ખોખામાં મૂકવામાં આવે છે. નીચે આપેલી માહિતી પરથી ખોખાના વજનનો વિસ્તાર અને સાપેક્ષ વિસ્તાર શોધો :

વજન (કિગ્રા)	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35
ખોખાંની સંખ્યા	8	15	26	47	4

અહીં આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ સતત છે. આ આવૃત્તિ-વિતરણની પ્રથમ વર્ગની અધઃસીમા અને અંતિમ વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા અનુક્રમે માહિતીના સૌથી નાના અને સૌથી મોટાં અવલોકનો દર્શાવશે.

અર્થાત્ $x_H = 35$ અને $x_L = 10$

વિસ્તાર $= x_H - x_L$

$= 35 - 10$

$= 25$

$\therefore \quad R = 25$ કિગ્રા

તેથી ખોખાંમાં રહેલા વજનનો વિસ્તાર 25 કિગ્રા છે.

$$\text{સાપેક્ષ વિસ્તાર} = \frac{R}{x_H + x_L}$$

$$= \frac{25}{35+10}$$

$$= \frac{25}{45}$$

$$= 0.5556$$

$\therefore$ સાપેક્ષ વિસ્તાર ≈ 0.56

તેથી ખોખાંમાં રહેલ વજનનો વિસ્તારાંક 0.56 છે.

ઉદાહરણ 4 : એક શાળાના 50 વિદ્યાર્થીઓએ કોઈ એક પરીક્ષામાં મેળવેલ ગુણના નીચે આપેલા આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી વિસ્તાર અને વિસ્તારાંક શોધો.

ગુણ	50 - 59	60 - 69	70 - 79	80 - 89	90 - 99
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	15	23	6	4

ઉપરના આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી સ્પષ્ટ છે કે સૌથી મોટા વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા 99 અને સૌથી નાના વર્ગની અધઃસીમા 50 છે.

અર્થાત્, $x_H = 99$ અને $x_L = 50$

વિસ્તાર $= x_H - x_L = 99 - 50 = 49$

$\therefore$ $R = 49$ ગુણ

તેથી વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણનો વિસ્તાર 49 ગુણ છે.

$$\text{વિસ્તારાંક} = \frac{R}{x_H + x_L}$$

$$= \frac{49}{99+50}$$

$$= \frac{49}{149}$$

$$= 0.3289$$

$\therefore$ વિસ્તારાંક ≈ 0.33

આમ, વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણનો વિસ્તારાંક 0.33 છે.

વિસ્તારના લાભ તથા ગેરલાભ

લાભ :

(1) વિસ્તાર સ્પષ્ટ રીતે વ્યાખ્યાયિત છે.

(2) તેની ગણતરી સરળ છે.

(3) જો માહિતીનાં અવલોકનોમાં ચલન ઓછું હોય, તો વિસ્તાર ઉપયોગી માપ છે.

ગેરલાભ :

(1) તેની ગણતરીમાં માહિતીનાં બધાં અવલોકનોનો ઉપયોગ થતો નથી.

(2) વિસ્તાર પર નિદર્શનની અસર વધુ હોય છે.

(3) તે બૈજિક ક્રિયાઓ માટે અનુકૂળ માપ નથી.

(4) ખુલ્લા છેડાવાળા આવૃત્તિ-વિતરણ માટે તેની ગણતરી થઈ શકતી નથી.

નોંધ :

ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાંથી લીધેલાં નિદર્શોની અંદરના ચલન વિશેની જાણકારી માટે સાંખ્યિકીય ગુણવત્તા નિયંત્રણમાં દોરવામાં આવતા નિયંત્રણ આલેખોમાં વિસ્તારનો ઉપયોગ થાય છે. જો ચલન વધુ ન હોય તો નાણાંના દર, વિનિમય દર, શૅરના ભાવમાં થતા ચલન માપવા વિસ્તારનો ઉપયોગ થાય છે. તેમજ રોજબરોજના પ્રશ્નો જેવા કે, 'સુપર માર્કેટમાં થતું દૈનિક વેચાણ', 'શહેરનું તાપમાન', 'સ્કૂટર અથવા કારમાં થતા પેટ્રોલના વપરાશનો ખર્ચ' વગેરેને સામાન્ય રીતે તે કયા અંતરાલમાં સમાયેલા છે તે સ્વરૂપમાં દર્શાવવામાં આવે છે. એના પરથી માહિતીનો વિસ્તાર જાણી શકાય છે.

પ્રવૃત્તિ

તમે તમારી આસપાસ રહેતા 15થી 25 વર્ષની વચ્ચે વય ધરાવતા 20 યુવક તથા યુવતીઓની ઊંચાઈ અને વજન વિશે માહિતી એકઠી કરો અને તે પરથી તેમના ઊંચાઈ અને વજન કયા અંતરાલમાં સમાયેલા છે તે માહિતી મેળવો અને વિસ્તાર શોધો. ઊંચાઈ અને વજનના સાપેક્ષ વિસ્તાર શોધો અને સરખામણી કરો.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. એક વર્ગના 10 વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ (સેમીમાં) નીચે આપેલ છે :
162, 145, 170, 181, 167, 151, 175, 185, 169, 156
આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈનો વિસ્તાર અને વિસ્તારાંક શોધો.

2. એક બસ કંપનીની 77 બસ શહેરમાં મુસાફરી માટે પ્રાપ્ય છે. કોઈ એક દિવસે કોઈ એક સમયે બસમાં બેઠેલા મુસાફરોની સંખ્યાના નીચે આપેલા વિતરણ પરથી એક બસમાં મુસાફરી કરતા મુસાફરોની સંખ્યાનો વિસ્તાર અને વિસ્તારાંક શોધો.

મુસાફરોની સંખ્યા	2	7	10	18	25	30	37
બસની સંખ્યા	1	4	11	17	23	16	5

3. એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓના નીચે આપેલ ગુણના આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી વિદ્યાર્થીના ગુણનો વિસ્તાર અને સાપેક્ષ વિસ્તાર શોધો.

ગુણ	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	8	20	25	60	45	10

4. એક વિસ્તારમાં આવેલી 80 દુકાનોના દૈનિક વકરા(હજાર ₹માં)નું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી દૈનિક વકરાના વિસ્તારનું નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપ મેળવો.

દૈનિક વકરો(હજાર₹)	5 - 9	10 - 14	15 - 19	20 - 24	55 - 29	30 - 34
દુકાનોની સંખ્યા	11	20	17	13	12	7

*

4.3.2 ચતુર્થક વિચલન (Quartile Deviation)

આપણે જાણીએ છીએ કે વિસ્તારની ગણતરીમાં ફક્ત અંતિમ અવલોકનો એટલે કે સૌથી મોટા અવલોકન અને સૌથી નાના અવલોકનોનો ઉપયોગ થાય છે, તેવી જ રીતે સ્થાનીય સરેરાશનાં માપો પ્રથમ ચતુર્થક Q_1 અને તૃતીય ચતુર્થક Q_3 નો ઉપયોગ કરીને પણ પ્રસારમાનનું માપ મેળવવામાં આવે છે, જેને ચતુર્થક વિચલન તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. માહિતીના ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલાં અવલોકનોમાં વચ્ચેના 50 % અવલોકનોના ચલન કે પ્રસારનો ઉપયોગ કરી વ્યાખ્યાયિત કરેલા માપને **ચતુર્થક વિચલન** (Quartile Deviation) કહે છે.

માહિતીના તૃતીય ચતુર્થક Q_3 અને પ્રથમ ચતુર્થક Q_1 વચ્ચેના તફાવતને 2 વડે ભાગવાથી મળતા માપને ચતુર્થક વિચલન કહે છે અને તેને સંકેતમાં Q_d વડે દર્શાવાય છે. સંકેત અનુસાર માહિતીના ચતુર્થક વિચલનના સૂત્રને નીચે મુજબ લખાય :

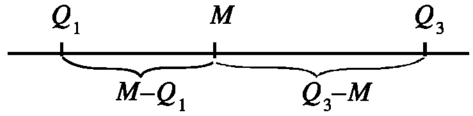
$$Q_d = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

ચતુર્થક વિચલનને **અર્ધ આંતર ચતુર્થક વિસ્તાર** (Semi–Inter–Quartile Range) પણ કહેવામાં આવે છે.

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી

$(Q_3 - Q_1)$ને આંતર ચતુર્થક વિસ્તાર (Inter Quartile Range) કહે છે, પરંતુ મોટે ભાગે તેને અર્ધ આંતરચતુર્થક વિસ્તારમાં ફેરવવામાં આવે છે, જે આંતરચતુર્થક વિસ્તારનું મધ્યબિંદુ દર્શાવે છે.

ચતુર્થક વિચલન એ બે ચતુર્થકો Q_1 અને Q_3ના મધ્યસ્થ (M)થી અંતરની સરેરાશ દર્શાવે છે, જે નીચેની આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ થાય છે.



$$\text{ચતુર્થક વિચલન} = \frac{(Q_3 - M) + (M - Q_1)}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

ચતુર્થક વિચલન Q_dને Q_1 અને Q_3ની સરેરાશ વડે ભાગવાથી આપણને ચતુર્થક વિચલનનું સાપેક્ષ માપ મળે છે.

$\therefore$ સાપેક્ષ ચતુર્થક વિચલન $= \dfrac{(Q_3 - Q_1)/2}{(Q_3 + Q_1)/2} = \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

આ સાપેક્ષ ચતુર્થક વિચલનને ચતુર્થક વિચલનાંક (Co-efficient of Quartile Deviation) પણ કહેવામાં આવે છે. અત્રે નોંધવું જરૂરી છે કે Q_dને અવલોકનોના એકમમાં દર્શાવાય છે. પરંતુ ચતુર્થક વિચલનાંક એકમથી મુક્ત માપ છે, એટલે કે તે એકમરહિત માપ છે.

ઉદાહરણ 5 : કોઈ એક દિવસે કરેલા 10 ફેરામાં એક બસ-ઓપરેટરને નીચે મુજબ મુસાફરો મળી રહે છે. આ માહિતી પરથી મુસાફરોની સંખ્યાનું ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલનાંક શોધો.

19, 25, 35, 10, 24, 8, 12, 5, 20, 30

માહિતીમાં આપેલાં અવલોકનોને ચઢતાં ક્રમમાં ગોઠવતાં

5, 8, 10, 12, 19, 20, 24, 25, 30, 35

અહીં $n = 10$, $\frac{n+1}{4} = 2.75$ અને $3\left(\frac{n+1}{4}\right) = 8.25$

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 2.75$મા અવલોકનની કિંમત

તેથી, $Q_1 = 8 + 0.75(10 - 8)$

$= 8 + 1.5$

$\therefore$ $Q_1 = 9.5$ મુસાફરો

તૃતીય ચતુર્થક $Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 8.25$ મા અવલોકનની કિંમત

તેથી, $Q_3 = 25 + 0.25(30 - 25)$

$= 25 + 1.25$

$\therefore$ $Q_3 = 26.25$ મુસાફરો

ચતુર્થક વિચલન $Q_d = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \dfrac{26.25 - 9.5}{2}$

$= 8.38$

$\therefore$ $Q_d = 8.38$

આમ, મુસાફરોની સંખ્યાનું ચતુર્થક વિચલન 8.38 મુસાફરો છે.

ચતુર્થક વિચલનાંક $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \dfrac{16.75}{26.25 + 9.5}$

$= \dfrac{16.75}{35.75}$

$= 0.4685$

$\therefore$ ચતુર્થક વિચલનાંક ≈ 0.47

આમ, મુસાફરોની સંખ્યાનો ચતુર્થક વિચલનાંક 0.47 છે.

ઉદાહરણ 6 : 50 બાળકોને એક કોયડો ઉકેલતા લાગતાં સમય (મિનિટમાં)ની માહિતી નીચે આપેલ છે. તે પરથી બાળકોને કોયડો ઉકેલતા લાગતા સમયનું ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલનાંક શોધો.

સમય (મિનિટ)	2	4	6	8	10
બાળકોની સંખ્યા	3	12	18	12	5

સમય (મિનિટ) x	બાળકોની સંખ્યા f	સંચયી આવૃત્તિ cf
2	3	3
4	12	15
6	18	33
8	12	45
10	5	50
કુલ	$n = 50$	

અહીં, $n = 50$, $\frac{n+1}{4} = 12.75$, $3\left(\frac{n+1}{4}\right) = 38.25$

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 12.75$મા અવલોકનની કિંમત

$\therefore \quad Q_1 = 4$ મિનિટ

તૃતીય ચતુર્થક $Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 38.25$ મા અવલોકનની કિંમત

$\therefore \quad Q_3 = 8$ મિનિટ

ચતુર્થક વિચલન $Q_d = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{8-4}{2}$

$= 2$

$\therefore \quad Q_d = 2$ મિનિટ

આમ, બાળકોને કોયડો ઉકેલતા લાગતા સમયનું ચતુર્થક વિચલન 2 મિનિટ છે.

ચતુર્થક વિચલનાંક $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \frac{4}{8+4}$

$= \frac{4}{12}$

$= 0.3333$

$\therefore$ ચતુર્થક વિચલનાંક ≈ 0.33

આમ, બાળકોને કોયડો ઉકેલતા લાગતા સમયનો ચતુર્થક વિચલનાંક 0.33 છે.

ઉદાહરણ 7 : નીચે આપેલ એક શહેરની 1000 વ્યક્તિઓની આવકના વિતરણ પરથી વ્યક્તિઓની આવકનું ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલનાંકની ગણતરી કરો :

આવક (હજાર ₹)	50થી ઓછી	50 - 70	70 - 90	90 - 110	110 - 130	130 - 150	150થી વધુ
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	54	100	140	300	230	125	51

આવક (હજાર ₹)	**વ્યક્તિઓની સંખ્યા f**	**સંચયી આવૃત્તિ cf**
50થી ઓછી	54	54
50 - 70	100	154
70 - 90	140	294
90 - 110	300	594
110 - 130	230	824
130 - 150	125	949
150થી વધુ	51	1000
કુલ	n **= 1000**	–

અહીં, $n = 1000$, $\frac{n}{4} = 250$ અને $3\left(\frac{n}{4}\right) = 750$

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = \left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 250મા અવલોકનની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિ (cf)ના સ્તંભ પરથી માલૂમ પડે છે કે, 250મા અવલોકનની કિંમત 70 - 90ના વર્ગમાં સમાયેલી છે. તેથી 70 - 90 એ Q_1 વર્ગ થશે.

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - cf}{f} \times c$

અહીં, $L = 70$, $\frac{n}{4} = 250$, $cf = 154$, $f = 140$, $c = 20$

તેથી $Q_1 = 70 + \frac{250 - 154}{140} \times 20$

$= 70 + \frac{1920}{140}$

$= 70 + 13.7143$

$= 83.7143$

$\therefore \quad Q_1 \approx 83.71$ (હજાર ₹)

તૃતીય ચતુર્થક $Q_3 = 3\left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 750$મા અવલોકનની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિ (cf)ના સ્તંભ પરથી માલૂમ પડે છે કે 750મા અવલોકનની કિંમત 110 - 130 વર્ગમાં સમાયેલી છે. તેથી 110 - 130 એ Q_3 વર્ગ થશે.

$$\text{તૃતીય ચતુર્થક } Q_3 = L + \frac{3\left(\frac{n}{4}\right) - cf}{f} \times c$$

અહીં, $L = 110,\ 3\left(\frac{n}{4}\right) = 750,\ cf = 594,\ f = 230,\ c = 20$

તેથી $Q_3 = 110 + \frac{750 - 594}{230} \times 20$

$= 110 + \frac{3120}{230}$

$= 110 + 13.5652$

$= 123.5652$

$\therefore \quad Q_3 \approx 123.56$ (હજાર ₹)

ચતુર્થક વિચલન $Q_d = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{123.56 - 83.71}{2}$

$= \frac{39.85}{2}$

$= 19.925$

$\therefore\ Q_d \approx 19.93$

આમ, વ્યક્તિઓની આવકનું ચતુર્થક વિચલન 19.93 (હજાર ₹) છે.

ચતુર્થક વિચલનાંક $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \frac{123.56 - 83.71}{123.56 + 83.71}$

$= \frac{39.85}{207.27}$

$= 0.1923$

$\therefore$ ચતુર્થક વિચલનાંક ≈ 0.19

આમ, વ્યક્તિઓની આવકનો ચતુર્થક વિચલનાંક 0.19 છે.

ચતુર્થક વિચલનના લાભ તથા ગેરલાભ :

લાભ :

(1) ચતુર્થક વિચલનએ સ્પષ્ટ રીતે વ્યાખ્યાયિત થયેલ પ્રસારનું માપ છે.

(2) તેની ગણતરી સરળ છે.

(3) ચતુર્થક વિચલન પર અતિ નાનાં અને અતિ મોટાં અવલોકનોની અસર થતી નથી, કેમકે ચતુર્થક વિચલનનું માપ વચ્ચેનાં 50 % અવલોકનોની કિંમતોને ધ્યાનમાં લઈ મેળવવામાં આવે છે.

(4) જો આવૃત્તિ-વિતરણના વર્ગો ખુલ્લાં છેડાવાળા હોય તો પ્રસારનું આ એક જ માપ મેળવી શકાય છે.

ગેરલાભ :

(1) ચતુર્થક વિચલન મેળવવા માટે પ્રથમ 25 % અને અંતિમ 25 % અવલોકનોને અવગણવામાં આવે છે. આમ, આ માપની ગણતરીમાં બધાં અવલોકનોનો ઉપયોગ થતો નથી.

(2) તે બૈજિક ક્રિયાઓ માટે અનુકૂળ માપ નથી.

(3) નિદર્શનના સાપેક્ષમાં આ માપ સ્થિર નથી.

(4) આંકડાશાસ્ત્રના ઉચ્ચ અભ્યાસમાં આ માપનો ઉપયોગ ઓછો થાય છે.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. એક નિશાનબાજ એક સ્પર્ધાની પૂર્વતૈયારી કરતી વખતે છેલ્લા દસ પ્રયત્નોમાં તેનું નિશાન નીચે જણાવેલ અંતર (મિમિ)થી ચૂકી જાય છે.

20, 32, 24, 41, 18, 27, 15, 36, 35, 25

આ માહિતી પરથી નિશાનચૂકના માપનું ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલનાંક શોધો.

2. એક શાળાના 43 વિદ્યાર્થીઓને મેળવેલા ગુણના નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી ગુણનું ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલનાંક શોધો.

ગુણ	10	20	30	40	50	60
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	4	7	15	8	7	2

3. એક રેસ્ટોરન્ટમાં કોઈ એક દિવસે આવતા 200 ગ્રાહકોએ નાસ્તાના બિલ તરીકે ચૂકવેલ રકમનું વિતરણ નીચે મુજબ છે :

ચૂકવેલ રકમ (₹)	0-50	50-100	100-150	150-200	200-250
ગ્રાહકોની સંખ્યા	25	40	80	30	25

આ માહિતી પરથી ગ્રાહક દ્વારા એક દિવસમાં ચૂકવાયેલ રકમનું ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલનાંક શોધો.

*

4.3.3 સરેરાશ વિચલન (Average Deviation)

પ્રસારમાનનાં બે માપ વિસ્તાર અને ચતુર્થક વિચલનની ગણતરીમાં બધાં જ અવલોકનોનો ઉપયોગ થતો નથી અને આ બંને માપ અવલોકનોનું કોઈ પણ સરેરાશની સાપેક્ષ ચલન દર્શાવતાં નથી. પ્રસારમાનનું એવું માપ કે જેમાં બધાં જ અવલોકનોનો ઉપયોગ થાય અને અવલોકનોનું તેની સરેરાશને સાપેક્ષ ચલન પણ ધ્યાનમાં લેવાય તેવા માપથી આ ખામી દૂર કરી શકાય છે. સરેરાશ વિચલન (Average Deviation or Mean Deviation)માં આ બાબતોની પૂર્તિ થાય છે. અવલોકનની કિંમત અને તેના મધ્યક વચ્ચેના તફાવતને વિચલન (Deviation) કહે છે. આ વિચલનો ઋણ, શૂન્ય અથવા ધન હોઈ શકે અને આવાં વિચલનોનો સરવાળો શૂન્ય થાય છે તે બાબત આપણે પ્રકરણ 3માં જોઈ ગયાં. આ પરિસ્થિતિ નિવારવા આ વિચલનોના માનાંક (Absolute Value) લેવામાં આવે છે. એટલે કે ઋણ વિચલનોનાં ઋણ ચિહ્નની અવગણના કરવામાં આવે છે. આ વિચલનોના માનાંકોને આધારે માહિતીના પ્રસારનું માપ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

આમ, સરેરાશ વિચલન એટલે માહિતીનાં અવલોકનોના તેમના મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોના માનાંકોની સરેરાશ કિંમત. તેને સંકેતમાં *MD* (Mean Deviation) વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

MD ને મધ્યક $\bar{x}$ વડે ભાગવાથી મળતા સાપેક્ષ માપ $\frac{MD}{\bar{x}}$ ને માહિતીનો સરેરાશ વિચલનાંક (Co-efficient of Mean Deviation) કહેવામાં આવે છે.

$\therefore$ સરેરાશ વિચલનાંક $= \frac{MD}{\bar{x}}$

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી

આંકડાશાસ્ત્રમાં મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપ તરીકે મધ્યકનો ઉપયોગ ખૂબ જ બહોળા પ્રમાણમાં કરવામાં આવે છે. તેથી સરેરાશ વિચલનની ગણતરીમાં આપણે અવલોકનોના વિચલનો ફક્ત મધ્યકમાંથી જ લઈશું. પરંતુ કેટલાક કિસ્સાઓમાં માહિતીને અનુરૂપ સરેરાશ વિચલન મેળવવા માટે અવલોકનોના વિચલનો તેના મધ્યસ્થ કે બહુલકમાંથી પણ લેવામાં આવે છે.

સરેરાશ વિચલનની ગણતરીની રીત

આપણે અવર્ગીકૃત અને વર્ગીકૃત માહિતી માટે સરેરાશ વિચલનની ગણતરી કરવાની રીત અને તેનાં સૂત્રો વિશે ચર્ચા કરીશું.

અવર્ગીકૃત માહિતી

ધારો કે અવર્ગીકૃત માહિતીનાં અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ છે અને અવલોકનોનો મધ્યક $\bar{x}$ છે. સૌપ્રથમ માહિતીના પ્રત્યેક અવલોકન x_iના મધ્યક $\bar{x}$ સાપેક્ષ તફાવતના માનાંક (એટલે કે $|x_i - \bar{x}|$) મેળવવામાં આવે છે. હવે આવાં બધાં જ માનાંક વિચલનોનો સરવાળો કરી તેને અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગવાથી સરેરાશ વિચલન મળે છે. આમ, અવર્ગીકૃત માહિતી માટે સરેરાશ વિચલન MD નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે :

$$MD = \frac{\Sigma|x_i - \bar{x}|}{n}$$

જ્યાં $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$

$|x_i - \bar{x}|$ = મધ્યકમાંથી અવલોકન x_i ના વિચલન $x_i - \bar{x}$ નો માનાંક

n = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

નોંધ : દાખલાઓમાં ગણતરી કરતી વખતે સરળતા ખાતર આપણે અનુગ (suffix)ને મૂકીશું નહિ, જેમકે x_iને બદલે x, d_i ને બદલે d અને f_iને બદલે f મૂકીશું.

વર્ગીકૃત માહિતી

અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ :

ધારો કે અસતત આવૃત્તિ-વિતરણના અસતત ચલ xની ચલ કિંમતો $x_1, x_2, ..., x_k$ને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ અનુક્રમે $f_1, f_2 ...., f_k$ છે, તો અસતત આવૃત્તિ-વિતરણના સરેરાશ વિચલનની ગણતરી નીચે જણાવેલ સૂત્ર દ્વારા કરવામાં આવે છે :

$$MD = \frac{\Sigma f_i|x_i - \bar{x}|}{n}$$

જ્યાં x_i = ચલ xની i મી કિંમત

$f_i = x_i$ ની આવૃત્તિ

$n = \Sigma f_i$ = કુલ આવૃત્તિ અથવા આવૃત્તિઓનો સરવાળો

$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{n}$ = મધ્યક

સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

ધારો કે સતત આવૃત્તિ-વિતરણના k વર્ગોની મધ્યકિંમતો અનુક્રમે $x_1, x_2, ..., x_k$ છે અને આ મધ્યકિંમતોને અનુરૂપ વર્ગોની આવૃત્તિ અનુક્રમે $f_1, f_2, ..., f_k$ છે, તો સતત આવૃત્તિ-વિતરણના સરેરાશ વિચલનની ગણતરી નીચે જણાવેલ સૂત્રની મદદથી કરવામાં આવે છે :

$$MD = \frac{\Sigma f_i |x_i - \bar{x}|}{n}$$

જ્યાં $x_i = i$ મા વર્ગની મધ્યકિંમત

$f_i = i$ મા વર્ગની આવૃત્તિ

$n = \Sigma f_i =$ કુલ આવૃત્તિ અથવા તમામ આવૃત્તિઓનો સરવાળો

$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{n} =$ મધ્યક

ઉપર્યુક્ત જણાવેલા કોઈ પણ સૂત્ર દ્વારા સરેરાશ વિચલન (MD) મેળવ્યા બાદ, સરેરાશ વિચલનાંક નીચે મુજબ મેળવાય છે :

સરેરાશ વિચલનાંક $= \frac{MD}{\bar{x}}$

ઉદાહરણ 8 : કોઈ એક શાળાના એક વર્ગના આઠ વિદ્યાર્થીઓના વજન (કિગ્રામાં) નીચે પ્રમાણે છે :

46, 58, 60, 43, 75, 66, 51, 81

આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીઓના વજનનું સરેરાશ વિચલન અને સરેરાશ વિચલનાંક શોધો.

	વજન (કિગ્રા) x	વિચલન $x-\bar{x}$ $\bar{x}=60$	વિચલનનો માનાંક $\lvert x-\bar{x}\rvert$
	46	–14	14
	58	– 2	2
	60	0	0
	43	– 17	17
	75	15	15
	66	6	6
	51	– 9	9
	81	21	21
કુલ	**480**	**0**	**84**

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{480}{8} = 60$ કિગ્રા

સરેરાશ વિચલન $MD = \frac{\Sigma|x-\bar{x}|}{n}$

$= \frac{84}{8}$

$= 10.5$

$\therefore$ $MD = 10.5$ કિગ્રા

આમ, વિદ્યાર્થીઓના વજનનું સરેરાશ વિચલન 10.5 કિગ્રા છે.

સરેરાશ વિચલનાંક $= \frac{MD}{\bar{x}}$

$= \frac{10.5}{60}$

$= 0.175$

$\therefore$ સરેરાશ વિચલનાંક ≈ 0.18

આમ, વિદ્યાર્થીઓના વજનનો સરેરાશ વિચલનાંક 0.18 છે.

ઉદાહરણ 9 : 32 ટાઈપિસ્ટને એક રિપોર્ટ ટાઈપ કરતાં લાગતા સમય (મિનિટમાં)ની નીચે આપેલ માહિતી પરથી ટાઈપ કરતા લાગતા સમયનું સરેરાશ વિચલન અને સરેરાશ વિચલનાંક ગણો.

ટાઈપ કરતા લાગતો સમય (મિનિટ)	10	11	12	13	14
ટાઈપિસ્ટની સંખ્યા	2	8	12	8	2

ટાઈપ કરતાં લાગતો સમય (મિનિટ) x	ટાઈપિસ્ટની સંખ્યા f	fx	વિચલન $x-\bar{x}$ $\bar{x}=12$	વિચલનનો માનાંક $\lvert x-\bar{x}\rvert$	$f\lvert x-\bar{x}\rvert$
10	2	20	− 2	2	4
11	8	88	− 1	1	8
12	12	144	0	0	0
13	8	104	1	1	8
14	2	28	2	2	4
કુલ	**32**	**384**	**–**	**–**	**24**

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$= \frac{384}{32}$

$= 12$

$\therefore$ $\bar{x} = 12$ મિનિટ

સરેરાશ વિચલન $MD = \frac{\Sigma f|x-\bar{x}|}{n}$

$= \frac{24}{32}$

$= 0.75$

$\therefore$ $MD = 0.75$ મિનિટ

આમ, રિપોર્ટ ટાઇપ કરતા લાગતા સમયનું સરેરાશ વિચલન 0.75 મિનિટ છે.

સરેરાશ વિચલનાંક $= \frac{MD}{\bar{x}}$

$= \frac{0.75}{12}$

$= 0.0625$

$\therefore$ સરેરાશ વિચલનાંક ≈ 0.06

આમ, રિપોર્ટ ટાઇપ કરતા લાગતા સમયનો સરેરાશ વિચલનાંક 0.06 છે.

ઉદાહરણ 10 : જિલ્લા કક્ષાએ લેવાતી ઇંગ્લિશ શબ્દોની એક જોડણી કસોટીમાં પસંદગી પામેલાં વીસ બાળકોએ 50 ગુણની કસોટીમાં મેળવેલ ગુણનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે :

ગુણ	0 - 9	10 - 19	20 - 29	30 - 39	40 - 49
બાળકોની સંખ્યા	1	3	8	6	2

આ માહિતી પરથી બાળકોના ગુણનું સરેરાશ વિચલન શોધો.

ગુણ	બાળકોની સંખ્યા f	મધ્યકિંમત x	fx	$x-\bar{x}$ $\bar{x}=27$	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$f\lvert x-\bar{x}\rvert$
0 - 9	1	4.5	4.5	– 22.5	22.5	22.5
10 - 19	3	14.5	43.5	– 12.5	12.5	37.5
20 - 29	8	24.5	196	– 2.5	2.5	20
30 - 39	6	34.5	207	7.5	7.5	45
40 - 49	2	44.5	89	17.5	17.5	35
કુલ	**20**	–	**540**	–	–	**160**

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$= \frac{540}{20} = 27$

$\therefore$ $\bar{x} = 27$ ગુણ

સરેરાશ વિચલન $MD = \frac{\Sigma f|x-\bar{x}|}{n}$

$= \frac{160}{20}$

$= 8$

$\therefore \quad MD = 8$ ગુણ

આમ, બાળકોએ મેળવેલા ગુણનું સરેરાશ વિચલન 8 ગુણ છે.

ઉદાહરણ 11 : એક શહેરનાં દ્વિચક્રી વાહનોના 30 વિક્રેતાના એક પખવાડિયાના વેચાણના આંકડાની નીચેની માહિતી પરથી 'વેચાયેલા દ્વિચક્રી વાહનોની સંખ્યા'નું સરેરાશ વિચલન શોધો :

દ્વિચક્રી વાહનોની સંખ્યા	12 - 16	17 - 21	22 - 26	27 - 31	32 - 36
વિક્રેતાની સંખ્યા	2	3	14	8	3

દ્વિચક્રી વાહનોની સંખ્યા	**વિક્રેતાની સંખ્યા f**	**મધ્યકિંમત x**	fx	$x-\bar{x}$ $\bar{x} = 25.17$	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$f\lvert x-\bar{x}\rvert$
12 - 16	2	14	28	– 11.17	11.17	22.34
17 - 21	3	19	57	– 6.17	6.17	18.51
22 - 26	14	24	336	– 1.17	1.17	16.38
27 - 31	8	29	232	3.83	3.83	30.64
32 - 36	3	34	102	8.83	8.83	26.49
કુલ	**30**	–	**755**	–	–	**114.36**

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$= \frac{755}{30}$

$= 25.1667$

$\therefore \bar{x} \approx 25.17$ દ્વિચક્રી વાહનો

સરેરાશ વિચલન $MD = \frac{\Sigma f|x-\bar{x}|}{n}$

$= \frac{114.36}{30}$

$= 3.812$

$\therefore MD \approx 3.81$ દ્વિચક્રી વાહનો

આમ, વેચાયેલા દ્વિચક્રી વાહનોનું સરેરાશ વિચલન 3.81 દ્વિચક્રી વાહનો છે.

સરેરાશ વિચલનના લાભ તથા ગેરલાભ

લાભ :

(1) સરેરાશ વિચલન એ સ્પષ્ટ રીતે વ્યાખ્યાયિત થયેલ પ્રસારનું માપ છે.

(2) તેની ગણતરીમાં બધાં જ અવલોકનોનો ઉપયોગ થાય છે. તેથી વિસ્તાર અને ચતુર્થક વિચલન કરતાં તે ચઢિયાતું માપ છે.

(3) તેની કિંમત પર અંતિમ અવલોકનો (એટલે કે અતિ મોટાં અને અતિ નાનાં અવલોકનો)ની અસર પ્રસારનાં અન્ય કેટલાંક માપની સરખામણીએ ઓછી હોય છે.

(4) અવલોકનનું મધ્યકથી અંતર માપવા માટે અવલોકન અને મધ્યકના તફાવતના માનાંકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે, જે અંતર માટેનું યોગ્ય માપ છે.

ગેરલાભ :

(1) વિસ્તાર અને ચતુર્થક વિચલનની ગણતરી કરતાં સરેરાશ વિચલનની ગણતરી અઘરી છે.

(2) આ માપ બૈજિક ક્રિયાઓ માટે અનુકૂળ નથી.

(3) આ માપ માનાંક પર આધારિત હોવાથી આંકડાશાસ્ત્રના ઉચ્ચ અભ્યાસમાં તેનો ઉપયોગ ઓછો થાય છે.

(4) ખુલ્લા છેડાવાળા આવૃત્તિ-વિતરણ માટે તેની ગણતરી થઈ શકતી નથી.

નોંધ : સામાજિકશાસ્ત્રોના અભ્યાસમાં તે વિશેષ ઉપયોગી માપ છે અને ખાસ કરીને અર્થશાસ્ત્રમાં આર્થિક અસમાનતા નક્કી કરવામાં, સમુદાય અથવા દેશની વ્યક્તિગત સંપત્તિના વિતરણની ગણતરીમાં, હવામાન અને વેપારચક્રોના પૂર્વાનુમાન વગેરેમાં તે ઉપયોગી છે.

સ્વાધ્યાય 4.3

1. દસ સૈનિકોની ઊંચાઈ (સેમીમાં) નીચે મુજબ છે :

160, 175, 158, 165, 170, 166, 173, 176, 163, 168

આ માહિતી પરથી સૈનિકોની ઊંચાઈના માપનું સરેરાશ વિચલન શોધો.

2. એક કારખાનામાં રહેલાં યંત્રોમાં વપરાતી બૉલબેરિંગની સંખ્યાનું વિતરણ નીચે મુજબ છે :

બૉલબેરિંગની સંખ્યા	2	4	6	8	10	12	14	16
યંત્રોની સંખ્યા	2	2	4	5	3	2	1	1

આ માહિતી પરથી યંત્રમાં વપરાતી બૉલબેરિંગની સંખ્યાનું સરેરાશ વિચલન અને સરેરાશ વિચલનાંક શોધો.

3. નીચે આપેલા કૉલદીઠ વાતચીતના સમય (પૂરી મિનિટમાં)ના વિતરણ પરથી કૉલદીઠ વાતચીતના સમયનું સરેરાશ વિચલન અને સરેરાશ વિચલનાંક શોધો :

વાતચીતનો સમય (મિનિટ)	3	5	10	12	15
કૉલની સંખ્યા	4	7	6	2	1

4. છેલ્લા 16 મહિનામાં થયેલા ટી.વી. સેટના વેચાણના નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી ટી.વી.ના માસિક વેચાણનું સરેરાશ વિચલન અને સરેરાશ વિચલનાંક શોધો.

ટી.વી. સેટની સંખ્યા	10 - 30	30 - 50	50 - 70	70 - 90	90 - 110
મહિનાની સંખ્યા	1	4	6	4	1

5. એક ફૅક્ટરીમાં બૉક્સદીઠ જુદી જુદી સંખ્યામાં કોઈ વસ્તુના એકમો મૂકેલા છે. 50 બૉક્સમાં મૂકેલા કોઈ વસ્તુના એકમોનું વિતરણ નીચે મુજબ છે, તો તે પરથી બૉક્સદીઠ એકમોની સંખ્યાનું સરેરાશ વિચલન શોધો.

એકમોની સંખ્યા	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
બૉક્સની સંખ્યા	6	5	8	15	7	6	3

*

4.3.4 પ્રમાણિત વિચલન (Standard Deviation)

સરેરાશ વિચલનની વ્યાખ્યા, માહિતીનાં અવલોકનોના મધ્યકથી મેળવેલ વિચલનોના માનાંકને આધારે આપવામાં આવે છે તે આપણે જોયું. તેમાં વિચલનોનાં બૈજિક ચિહ્નો અવગણવામાં આવે છે તેથી આંકડાશાસ્ત્રના ઉચ્ચ અભ્યાસમાં તેનો ઉપયોગ ઓછો થાય છે. પ્રસારના એક અગત્યના માપ 'પ્રમાણિત વિચલન'માં આ મર્યાદા દૂર કરવામાં આવે છે. માહિતીના પ્રત્યેક અવલોકનના મધ્યકથી લીધેલા વિચલનના માનાંકને બદલે વિચલનનો વર્ગ લઈ બધાં વિચલનોના વર્ગોના સરવાળાને અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગતાં આપણને પ્રસારનું એક અગત્યનું માપ મળે છે. પ્રસારના આ માપને વિચરણ (Variance) કહે છે. તેને સંકેતમાં s^2 વડે દર્શાવવામાં આવે છે. વિચરણના ધન વર્ગમૂળને પ્રમાણિત વિચલન (Standard Deviation) કહેવામાં આવે છે. તેને સંકેતમાં s વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

કાર્લ પિયર્સન (Karl Pearson) નામના પ્રસિદ્ધ આંકડાશાસ્ત્રીએ પ્રમાણિત વિચલનની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપી છે : ''માહિતીનાં અવલોકનોના તેના મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોના વર્ગોની સરેરાશનું ધન વર્ગમૂળ એટલે પ્રમાણિત વિચલન.''

સમષ્ટિમાંના એકમોની કિંમતો વિશે માહિતી આપતાં માપોમાં મધ્યક પછી પ્રમાણિત વિચલન સૌથી વિશેષ ઉપયોગી માપ છે.

પ્રમાણિત વિચલનએ પ્રસારનું નિરપેક્ષ માપ છે. જો પ્રમાણિત વિચલનને માહિતીના મધ્યક વડે ભાગવામાં આવે તો, આપણને પ્રસારનું સાપેક્ષ માપ મળે છે. તેને પ્રમાણિત વિચલનાંક (Co-efficient of Standard Deviation) કહેવામાં આવે છે.

$\therefore$ પ્રમાણિત વિચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}}$

નોંધ : પ્રમાણિત વિચલન પ્રસારનાં બધાં માપોમાં સૌથી અગત્યનું અને બહોળો ઉપયોગ ધરાવતું માપ છે. ભૌતિકશાસ્ત્ર, કૃષિવિજ્ઞાન, મેડિકલ જેવાં પ્રયોજિત ક્ષેત્રોમાં થતાં પ્રયોગાત્મક સંશોધનમાં વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલનનો ઉપયોગ વ્યાપક પ્રમાણમાં થાય છે. તદુપરાંત આંકડાશાસ્ત્રીય અનુમાન, સહસંબંધ, નિદર્શન અને અન્ય ક્ષેત્રોના અભ્યાસ માટે વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન ખૂબ જ ઉપયોગી માપ છે.

"જેમ કઠિયારાને તેના કામ માટે કુહાડી અને કરવત એ પાયાનાં સાધનો છે તેમ આંકડાશાસ્ત્રી માટે 'મધ્યક' અને 'પ્રમાણિત વિચલન' છે."

– M. M. Blair

પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી

અવર્ગીકૃત માહિતી પરથી પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી :

જો અવર્ગીકૃત માહિતીનાં અવલોકનો $x_1, x_2, \ldots, x_n$ હોય અને $\bar{x}$ તેનો મધ્યક હોય તો પ્રમાણિત વિચલનની વ્યાખ્યામાં આપણે ચર્ચા કરી તે પ્રમાણે અવલોકનના i માં અવલોકન x_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$)નું મધ્યકથી વિચલન $x_i - \bar{x}$ મેળવવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ વિચલનોના વર્ગો લઈ વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો $\Sigma(x_i - \bar{x})^2$ મેળવવામાં આવે છે. આ સરવાળાને અવલોકનની કુલ સંખ્યા વડે ભાગવાથી વિચરણ s^2 મળે છે.

$\therefore$ વિચરણ $s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}$

આ વિચરણનું ધન વર્ગમૂળ લેવાથી પ્રમાણિત વિચલન મળે છે અને તેનું સૂત્ર નીચે મુજબ છે :

પ્રમાણિત વિચલન $s = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}}$

ઉદાહરણ 12 : એક બૅટ્સમૅનના છેલ્લી સાત મૅચમાં નીચે મુજબ રન થાય છે :

52, 58, 40, 60, 54, 38, 48

આ માહિતી પરથી બૅટ્સમૅનના રનનું વિચરણ શોધો તથા પ્રમાણિત વિચરણ પણ શોધો.

	રન x	$x-\bar{x}$ $\bar{x}=50$	$(x-\bar{x})^2$
	52	2	4
	58	8	64
	40	– 10	100
	60	10	100
	54	4	16
	38	– 12	144
	48	– 2	4
કુલ	**350**	**0**	**432**

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

$= \frac{350}{7}$

$= 50$ રન

વિચરણ $s^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}$

$= \frac{432}{7}$

$= 61.7143$

$\therefore \quad s^2 \approx 61.71$ (રન)^2

પ્રમાણિત વિચલન $s = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$

$= \sqrt{61.7143}$

$= 7.8558$

$\therefore \quad s \approx 7.86$ રન

આમ, બૅટ્સમૅનના રનનું પ્રમાણિત વિચલન 7.86 રન છે.

નોંધ : પ્રમાણિત વિચલનને અવલોકનોના એકમમાં દર્શાવવામાં આવે છે. આપણે જાણીએ છીએ કે વિચરણ એ પ્રમાણિત વિચલનનો વર્ગ છે, તેથી વિચરણનો એકમ પ્રમાણિત વિચલનના 'એકમનો વર્ગ' થાય છે.

દા.ત., અવલોકનનો એકમ કિગ્રા હોય તો પ્રમાણિત વિચલનનો એકમ પણ કિગ્રા થાય છે. જ્યારે વિચરણનો એકમ (કિગ્રા)^2 થાય છે.

નોંધ : જ્યારે મધ્યક $\bar{x}$ની કિંમત અપૂર્ણાંક સંખ્યા હોય અને અવલોકનોની કિંમત બહુ મોટી ન હોય, તો પ્રમાણિત વિચલન sની ગણતરી નીચેના સૂત્રથી થોડી સરળ બનાવી શકાય :

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

ઉદાહરણ 13 : પાંચ વિદ્યાર્થીઓને એક કોયડો ઉકેલતાં લાગતો સમય (મિનિટમાં) અનુક્રમે 5, 8, 3, 6, 10 છે. આ માહિતી પરથી કોયડો ઉકેલતા લાગતા સમયનું પ્રમાણિત વિચલન ગણો.

	સમય (મિનિટ) x	x^2
	5	25
	8	64
	3	9
	6	36
	10	100
કુલ	**32**	**234**

$$\text{મધ્યક } \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{32}{5}$$

$$= 6.4 \text{ મિનિટ}$$

અહીં, મધ્યક $\bar{x}$ની કિંમત અપૂર્ણાંક હોવાથી આપણે પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી કરવા નીચે આપેલ વૈકલ્પિક સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{234}{5} - (6.4)^2}$$

$$= \sqrt{46.8 - 40.96}$$

$$= \sqrt{5.84}$$

$$= 2.4166$$

$\therefore \quad s \approx 2.42$ મિનિટ

આમ, વિદ્યાર્થીને કોયડો ઉકેલતાં લાગતા સમયનું પ્રમાણિત વિચલન 2.42 મિનિટ છે.

ટૂંકી રીત :

પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી સરળ બનાવવા માટે નીચે મુજબ ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ કરી શકાય :

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$$

જ્યાં, $d_i = x_i - A$

A = ધારેલો મધ્યક

n = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

ઉદાહરણ 14 : નીચે એક કંપનીના શૅરના છેલ્લા પાંચ દિવસના બંધભાવ (₹ માં) આપેલા છે :

132, 147, 120, 152, 125

ટૂંકી રીતે શૅરના ભાવનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

અહીં આપણે ધારેલો મધ્યક $A = 135$ લઈશું.

શૅરનો ભાવ (₹) x	$d = x-A$ $A = 135$	d^2
132	– 3	9
147	12	144
120	– 15	225
152	17	289
125	– 10	100
કુલ	**1**	**767**

પ્રમાણિત વિચલન

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{767}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{153.4 - 0.04}$$

$$= \sqrt{153.36}$$

$$= 12.3839$$

$\therefore \quad s \approx$ ₹ 12.38

આમ, શૅરના ભાવનું પ્રમાણિત વિચલન ₹ 12.38 છે.

વર્ગીકૃત માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી

અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

ધારો કે અસતત આવૃત્તિ-વિતરણના ચલ xની કિંમતો $x_1, x_2, ..., x_k$ છે અને તેને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ અનુક્રમે $f_1, f_2, ..., f_k$ છે, તો અસતત આવૃત્તિ-વિતરણના પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી નીચે જણાવેલ સૂત્રથી કરવામાં આવે છે :

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma f_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

જ્યાં f_i = ચલ x ની i મી ચલકિંમત x_iની આવૃત્તિ

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{n}$$

$x_i - \bar{x}$ = ચલકિંમત x_iનું મધ્યક $\bar{x}$થી વિચલન

$n = \Sigma f_i$ = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

ટૂંકી રીત :

ટૂંકી રીતમાં, અસતત આવૃત્તિ-વિતરણના પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી નીચે જણાવેલ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી મેળવવામાં આવે છે.

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{n}\right)^2}$$

જ્યાં, f_i = ચલની i મી કિંમત x_iની આવૃત્તિ

A = ધારેલો મધ્યક

$d_i = x_i - A$ = ચલકિંમત x_iનું ધારેલ મધ્યક A થી વિચલન

$n = \Sigma f_i$ = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

નોંધ : ધારેલા મધ્યક A ની કિંમત અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_k$ પૈકીની એક અથવા અનુકૂળતા પ્રમાણે ગમે તે લઈ શકાય.

ઉદાહરણ 15 : એક વર્ગના 15 વિદ્યાર્થીઓની જાન્યુઆરી મહિનામાં ગેરહાજરીના દિવસોની સંખ્યાનું વિતરણ નીચે મુજબ છે તે પરથી વિદ્યાર્થીના ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યાનું પ્રમાણિત વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલનાંક શોધો.

ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યા	0	1	2	3	4
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	1	3	7	3	1

x	f	fx	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$f(x - \bar{x})^2$	fx^2
0	1	0	– 2	4	4	0
1	3	3	– 1	1	3	3
2	7	14	0	0	0	28
3	3	9	1	1	3	27
4	1	4	2	4	4	16
કુલ	**n = 15**	**30**	**0**	**–**	**14**	**74**

$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{30}{15} = 2$ દિવસો

$s = \sqrt{\frac{\Sigma f(x-\bar{x})^2}{n}}$

$s = \sqrt{\frac{14}{15}}$

$s = \sqrt{0.9333}$

$= 0.9661$

$\therefore \quad s \approx 0.97$ દિવસો

પ્રમાણિત વિચલનની કિંમત નીચે મુજબ વૈકલ્પિક સૂત્ર દ્વારા મેળવી શકાય છે :

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{74}{15} - (2)^2}$$

$$= \sqrt{4.9333 - 4}$$

$$= \sqrt{0.9333}$$

$$= 0.9661$$

$\therefore \quad s \approx 0.97$ દિવસો

આમ, વિદ્યાર્થીના ગેરહાજરીના દિવસોનું પ્રમાણિત વિચલન 0.97 છે.

પ્રમાણિત વિચલનાંક $\frac{s}{\bar{x}} = \frac{0.97}{2}$

$$= 0.485$$

$$\approx 0.49$$

આમ, ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યાનો પ્રમાણિત વિચલનાંક 0.49 છે.

ઉદાહરણ 16 : મોબાઈલની એક દુકાનમાં છેલ્લા 35 દિવસમાં વેચાયેલા મોબાઈલની વિગત નીચે આપી છે. તે પરથી વેચાયેલાં મોબાઈલની સંખ્યાનો પ્રમાણિત વિચલનાંક શોધો. (ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ કરો.)

વેચાયેલ મોબાઈલની સંખ્યા	5	6	7	8	9	10
દિવસોની સંખ્યા	2	5	8	12	7	1

ધારેલો મધ્યક A = 8

x	f	$d = x - A$ $A = 8$	fd	fd^2
5	2	– 3	– 6	18
6	5	– 2	– 10	20
7	8	– 1	– 8	8
8	12	0	0	0
9	7	1	7	7
10	1	2	2	4
કુલ	$n = 35$	–	**– 15**	**57**

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n}$$

$$= 8 + \frac{(-15)}{35}$$

$$= 8 - 0.4286$$

$$= 7.5714$$

$\therefore \quad \bar{x} \approx 7.57$ મોબાઈલ

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{57}{35} - \left(\frac{-15}{35}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1.6286 - 0.1837}$$

$$= \sqrt{1.4449}$$

$$= 1.2020$$

$\therefore \quad s \approx 1.20$ મોબાઈલ

આમ, વેચાયેલાં મોબાઈલની સંખ્યાનું પ્રમાણિત વિચલન 1.20 મોબાઈલ છે.

પ્રમાણિત વિચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}}$

$$= \frac{1.20}{7.57}$$

$$= 0.1585$$

$\therefore$ પ્રમાણિત વિચલનાંક ≈ 0.16

આમ, વેચાયેલાં મોબાઈલની સંખ્યાનો પ્રમાણિત વિચલનાંક 0.16 છે.

સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

ધારો કે સતત આવૃત્તિ-વિતરણના k વર્ગોની મધ્યકિંમત અનુક્રમે x_1 x_2, ..., x_k છે અને k વર્ગોની આવૃત્તિઓ અનુક્રમે $f_1, f_2, ..., f_k$ છે, તો સતત આવૃત્તિ-વિતરણના પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી નીચે જણાવેલ સૂત્ર દ્વારા કરવામાં આવે છે :

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

જ્યાં $f_i = i$ માં વર્ગની આવૃત્તિ

$x_i = i$ માં વર્ગની મધ્યકિંમત

$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{n}$

$x_i - \bar{x} = i$ મી મધ્યકિંમત x_iનું મધ્યક $\bar{x}$થી વિચલન

$n = \Sigma f_i =$ અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

ટૂંકી રીત :

ટૂંકી રીતમાં સમાન વર્ગલંબાઈવાળા સતત આવૃત્તિ-વિતરણના પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી નીચે જણાવેલ સૂત્રની મદદથી કરવામાં આવે છે :

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{n}\right)^2} \times c$$

જ્યાં x_i = i માં વર્ગની મધ્યકિંમત

A = ધારેલો મધ્યક

f_i = i માં વર્ગની આવૃત્તિ

c = વર્ગલંબાઈ

$$d_i = \frac{x_i - A}{c}$$

$n = \Sigma f_i$ અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

નોંધ : ● ધારેલા મધ્યક Aની કિંમત વર્ગની મધ્યકિંમતો પૈકીની એક અથવા અનુકૂળતા પ્રમાણે ગમે તે લઈ શકાય.

● માહિતીને અનુરૂપ પ્રમાણિત વિચલનના કોઈ પણ સ્વરૂપના સૂત્રથી પ્રમાણિત વિચલનની કિંમત સમાન મળે છે.

ઉદાહરણ 17 : એક શાળાના 200 વિદ્યાર્થીઓના એક પરીક્ષામાં મેળવેલા ગુણના નીચે આપેલા આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી ગુણનું પ્રમાણિત વિચલન ગણો.

ગુણ	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	5	12	30	45	50	37	21

અહીં ફક્ત પ્રમાણિત વિચલન મેળવવાનું છે તેથી મધ્યકની કિંમતની જરૂર પડે નહિ. આ સંજોગોમાં ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ કરી શકાય.

અહીં ધારેલો મધ્યક $A = 35$ અને વર્ગલંબાઈ $c = 10$

ગુણ	**વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા f**	**મધ્યકિંમત x**	$d = \frac{x - A}{c}$ $A = 35, c = 10$	fd	fd^2
0 - 10	5	5	– 3	– 15	45
10 - 20	12	15	– 2	– 24	48
20 - 30	30	25	– 1	– 30	30
30 - 40	45	35	0	0	0
40 - 50	50	45	1	50	50
50 - 60	37	55	2	74	148
60 - 70	21	65	3	63	189
કુલ	$n = 200$	–	–	**118**	**510**

પ્રમાણિત વિચલન

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{510}{200} - \left(\frac{118}{200}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{2.55 - 0.3481} \times 10$$

$$= \sqrt{2.2019} \times 10$$

$$= 14.8388$$

$\therefore \quad s \approx 14.84$ ગુણ

આમ, વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણનું પ્રમાણિત વિચલન 14.84 ગુણ છે.

ઉદાહરણ 18 : એક ફેક્ટરીના કામદારોના દૈનિક વેતન (₹માં)ની નીચે આપેલી માહિતી પરથી કામદારોના દૈનિક વેતનનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

દૈનિક વેતન (₹)	130થી વધુ	150થી વધુ	170થી વધુ	190થી વધુ	210થી વધુ	230થી વધુ
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	150	142	116	57	14	0

અહીં "થી વધુ" પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ આપેલું છે. તેને સામાન્ય આવૃત્તિ-વિતરણમાં ફેરવતા, નીચે મુજબનું આવૃત્તિ-વિતરણ મળે :

દૈનિક વેતન (₹)	130 - 150	150 - 170	170 - 190	190 - 210	210 - 230
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	150 – 142 = 8	142 – 116 = 26	116 – 57 = 59	57 – 14 = 43	14 – 0 = 14

દૈનિક વેતન(₹)	**વ્યક્તિઓની સંખ્યા** f	**મધ્યકિંમત** x	$d = \frac{x-A}{c}$ $A = 180, c = 20$	fd	fd^2
130 - 150	8	140	– 2	– 16	32
150 - 170	26	160	– 1	– 26	26
170 - 190	59	180	0	0	0
190 - 210	43	200	1	43	43
210 - 230	14	220	2	28	56
કુલ	$n = 150$	–	–	**29**	**157**

પ્રમાણિત વિચલન

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{157}{150} - \left(\frac{29}{150}\right)^2} \times 20$$

$$= \sqrt{1.0467 - (0.1933)^2} \times 20$$

$$= \sqrt{1.0467 - 0.0374} \times 20$$

$$= \sqrt{1.0093} \times 20$$

$$= 20.0928$$

$\therefore \quad s \approx 20.09$ ₹

આમ, ફેક્ટરીના કામદારોના દૈનિક વેતનનું પ્રમાણિત વિચલન 20.09 ₹ છે.

નોંધ : અભ્યાસ હેઠળના ચલનાં બધાં જ અવલોકનો સમાન હોય એટલે કે, $x_1 = x_2 = x_3 = ... x_n = k$; જ્યાં k કોઈ અચલ સંખ્યા હોય, તો પ્રસારનાં બધાં જ માપની કિંમત શૂન્ય થાય છે.

સ્વાધ્યાય 4.4

1. ગણિતની 100 ગુણની કસોટીમાં નવ વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ નીચે મુજબ છે :
   64, 63, 72, 65, 68, 69, 66, 67, 69
   આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.
2. એક વિસ્તારનાં પાંચ સર્વિસ સ્ટેશનમાં કોઈ એક દિવસે સર્વિસ માટે આવેલી કારની સંખ્યા અનુક્રમે 7, 3, 11, 8, 9 છે. આ માહિતી પરથી એક દિવસમાં સર્વિસ માટે આવતી કારની સંખ્યાનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.
3. એક બેન્કમાં થાપણની રકમ (હજાર ₹માં) અને થાપણદારોની સંખ્યા દર્શાવતી માહિતી નીચે મુજબ છે. તે પરથી થાપણની રકમનો પ્રમાણિત વિચલનાંક શોધો.

થાપણની રકમ (હજાર ₹)	5	10	15	20	25	30	35
થાપણદારોની સંખ્યા	2	7	11	15	10	4	1

4. 50 પેઢીના છેલ્લા વર્ષમાં થયેલા નફા (લાખ ₹માં)ની વિગત નીચે આપેલ છે. આ માહિતી પરથી પેઢીઓના નફાનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

નફો (લાખ ₹)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
પેઢીઓની સંખ્યા	7	6	15	12	10

5. એક સોસાયટીમાં રહેતા 125 વ્યક્તિઓની ઉંમર (વર્ષમાં)નું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી વ્યક્તિની ઉંમરનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો અને પ્રમાણિત વિચલનાંક પણ શોધો.

વ્યક્તિની ઉંમર (વર્ષ)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	15	15	23	22	25	10	5	10

*

ચલનાંક (Co-efficient of Variation) :

આપણે અગાઉ જોઈ ગયાં કે પ્રમાણિત વિચલન એ નિરપેક્ષ માપ છે અને તે અવલોકનોના એકમમાં દર્શાવવામાં આવે છે. તેથી બે કે વધુ જુદા જુદા એકમો ધરાવતા માહિતી સમૂહોના પ્રસારમાનની સરખામણી કરવા માટે નિરપેક્ષ માપનો ઉપયોગ કરી શકાય નહિ. આવી સરખામણી કરવા માટે સાપેક્ષ માપ પ્રમાણિત વિચલનાંક $\left(\frac{s}{\bar{x}}\right)$નો ઉપયોગ કરવો પડે. મોટે ભાગે પ્રમાણિત વિચલનાંક $\left(\frac{s}{\bar{x}}\right)$નું મૂલ્ય અપૂર્ણાંક સ્વરૂપમાં મળે છે, તેથી સામાન્ય સમજ ધરાવતા લોકોને પણ સમજ પડે તેવા યોગ્ય સાપેક્ષ માપ તરીકે કાલ પિયર્સને 'ચલનાંક (Co-efficient of Variation)' સૂચવેલ છે, જે પ્રમાણિત વિચલનાંકને 100 વડે ગુણવાથી મળે છે.

$\therefore$ ચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100$

અહીં ચલનાંકને ટકાવારીમાં દર્શાવાય છે. એટલે કે ચલનાંક એ મધ્યકની સાપેક્ષમાં પ્રમાણિત વિચલનને ટકાવારીમાં દર્શાવતું માપ છે.

બે કે તેથી વધુ માહિતી સમૂહોના પ્રસારમાનની સરખામણી માટે ચલનાંક ખૂબ જ ઉપયોગી સાપેક્ષ માપ છે. જે શ્રેણી માટે ચલનાંક ઓછો હોય તે શ્રેણી વધુ સ્થિર (Stable) અને તેમાં પ્રસારમાન ઓછું છે તેમ કહેવાય. આવી શ્રેણી પ્રસારમાનના સંદર્ભમાં વધુ સુસંગત (Consistent) છે તેમ પણ કહેવાય. જે શ્રેણી માટે ચલનાંક વધુ હોય તે શ્રેણી ઓછી સ્થિર અને તેમાં પ્રસારમાન વધુ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 19 : નીચે બે બૅટ્સમૅન A અને B એ છેલ્લા દસ દાવમાં કરેલા રનની માહિતી આપેલી છે. તે પરથી કયો બૅટ્સમૅન વધુ સુસંગત રમત રમે છે, તે નક્કી કરો :

બૅટ્સમૅન A ના રન	25	50	45	30	70	42	36	48	34	60
બૅટ્સમૅન B ના રન	10	70	50	20	95	55	42	60	48	80

કયા બૅટ્સમૅનની રમત સુસંગત છે તે જાણવા આપણે બંને બેટ્સમૅનના રનના ચલનાંક મેળવીશું.

બૅટ્સમૅન A

	રન x	$x-\bar{x}$ $\bar{x}=44$	$(x-\bar{x})^2$
	25	− 19	361
	50	6	36
	45	1	1
	30	− 14	196
	70	26	676
	42	− 2	4
	36	− 8	64
	48	4	16
	34	− 10	100
	60	16	256
કુલ	**440**	**0**	**1710**

બૅટ્સમૅન B

	રન x	$x-\bar{x}$ $\bar{x}=53$	$(x-\bar{x})^2$
	10	− 43	1849
	70	17	289
	50	− 3	9
	20	− 33	1089
	95	42	1764
	55	2	4
	42	− 11	121
	60	7	49
	48	− 5	25
	80	27	729
કુલ	**530**	**0**	**5928**

બૅટ્સમૅન A	બૅટ્સમૅન B
મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$	મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$
$= \frac{440}{10} = 44$	$= \frac{530}{10} = 53$
$\therefore \bar{x} = 44$ રન	$\therefore \bar{x} = 53$ રન
પ્રમાણિત વિચલન $s = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$	પ્રમાણિત વિચલન $s = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$
$= \sqrt{\frac{1710}{10}}$	$= \sqrt{\frac{5928}{10}}$
$= \sqrt{171}$	$= \sqrt{592.8}$
$= 13.0767$	$= 24.3475$
$\therefore s \approx 13.08$ રન	$\therefore s \approx 24.35$ રન
ચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100$	ચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100$
$= \frac{13.08}{44} \times 100$	$= \frac{24.35}{53} \times 100$
$= \frac{1308}{44}$	$= \frac{2435}{53}$
$= 29.7272$ %	$= 45.9434$ %
$\therefore$ ચલનાંક ≈ 29.73 %	$\therefore$ ચલનાંક ≈ 45.94 %

બૅટ્સમૅન Aનો ચલનાંક ઓછો હોવાથી તેની રમત વધુ સુસંગત છે.

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી

બૅટ્સમૅનના રનનો મધ્યક સમાન કે લગભગ સમાન હોય ત્યારે વધુ સુસંગત એટલે બૅટ્સમૅન રમતમાં વધુ સારો છે એમ કહી શકાય. પરંતુ બંને બૅટ્સમૅનના મધ્યક અલગ હોય તો આવું કહી શકાય નહિ.

ઉદાહરણ 20 : નીચે એક ફેક્ટરીના બે કામદારો વિશે માહિતી આપેલી છે :

વિગત	કામદાર A	કામદાર B
કાર્ય પૂરું કરવા લાગતો સરેરાશ સમય (મિનિટ)	30	25
પ્રમાણિત વિચલન (મિનિટ)	6	4

કયા કામદારના કાર્ય પૂરું કરવા લાગતા સમયમાં વધુ સાપેક્ષ પ્રસાર છે ?

બંને કામદારોના ચલનાંક સરખાવી ઉપર્યુક્ત બાબતનો નિર્ણય લઈશું.

કામદાર A

$\bar{x}$ = 30 મિનિટ, s = 6 મિનિટ

ચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{6}{30} \times 100$

= 20 %

કામદાર B

$\bar{x}$ = 25 મિનિટ, s = 4 મિનિટ

ચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{4}{25} \times 100$

= 16 %

કામદાર Aનો ચલનાંક વધુ હોવાથી તેના સમયમાં પ્રસાર વધુ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 21 : એક વર્ગના 50 વિદ્યાર્થીઓના વજન અને ઊંચાઈના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન નીચે મુજબ છે :

વિગત	વજન	ઊંચાઈ
મધ્યક	56.2 કિગ્રા	62.5 ઇંચ
પ્રમાણિત વિચલન	4.8 કિગ્રા	9.3 ઇંચ

ઊંચાઈ અને વજનમાંથી શેમાં પ્રસાર વધુ જણાય છે ?

અહીં વજન અને ઊંચાઈના એકમો જુદા જુદા છે તેથી સરખામણી કરવા માટે પ્રસારનું સાપેક્ષ માપ જ ઉપયોગમાં લેવું પડે અને માહિતી જોતાં માલૂમ પડે છે કે ચલનાંક એ સૌથી યોગ્ય માપ છે.

વજન

$\bar{x}$ = 56.2 કિગ્રા s = 4.8 કિગ્રા

ચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{4.8}{56.2} \times 100$

= 8.54 %

ઊંચાઈ

$\bar{x}$ = 62.5 ઇંચ, s = 9.3 ઇંચ

ચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{9.3}{62.5} \times 100$

= 14.88 %

ઊંચાઈ માટે ચલનાંક વધુ હોવાથી, આપણે કહી શકીએ કે વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈમાં પ્રસાર વધુ છે.

પ્રમાણિત વિચલનના લાભ તથા ગેરલાભ

લાભ :

(1) તેની વ્યાખ્યા સ્પષ્ટ અને ચોક્કસ છે.

(2) તેની ગણતરીમાં બધાં જ અવલોકનોનો ઉપયોગ થાય છે.

(3) પ્રસારના અન્ય માપોની સરખામણીમાં પ્રમાણિત વિચલન વધારે સક્ષમ માપ છે.

(4) પ્રમાણિત વિચલન અન્ય બૈજિક ક્રિયાઓ માટે અનુકૂળ માપ છે. દા.ત., જો બે માહિતી સમૂહોના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન આપેલા હોય તો બે માહિતી સમૂહોને ભેગાં કરવાથી મળતા નવા સમૂહનું મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન મેળવી શકાય છે. આ પ્રકારની બૈજિક ક્રિયા કરી પ્રસારના અન્ય માપ માટે મિશ્ર માપ મેળવી શકાતું નથી.

(5) પ્રસારનાં અન્ય માપોની સરખામણીમાં પ્રમાણિત વિચલનનો ઉપયોગ વિશેષ થાય છે.

ગેરલાભ :

(1) પ્રસારનાં અન્ય માપોની સરખામણીમાં પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી અઘરી છે.

(2) આ માપમાં અંતિમ અવલોકનોને વધુ મહત્ત્વ મળે છે.

(3) જો આવૃત્તિ-વિતરણ ખુલ્લા છેડાવાળું હોય તો પ્રમાણિત વિચલન શોધી ન શકાય.

સ્વાધ્યાય 4.5

1. બે શૅર A અને Bના ભાવની વધઘટ નીચે દર્શાવી છે : કયા શૅરના ભાવમાં સાપેક્ષ ચલન વધારે છે ?

શૅર Aનો ભાવ (₹)	321	322	325	322	324	320	323	316	319	318
શૅર Bનો ભાવ (₹)	141	146	130	146	142	145	132	134	132	152

2. બે કંપનીના વહીવટી કર્મચારીઓના દૈનિક પગાર વિશે નીચે મુજબ માહિતી મળે છે :

વિગત	કંપની A	કંપની B
સરેરાશ પગાર (₹)	600	2100
પ્રમાણિત વિચલન (₹)	30	84

કઈ કંપનીમાં પગાર વધુ સ્થિર છે ?

3. બે શ્રેણીઓ માટે ચલનાંક 30 % અને 25 % છે અને તેમના પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 15 અને 9 છે, તો બંને શ્રેણીના મધ્યક શોધો.

*

4.4 મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન (Combined Standard Deviation)

ધારો કે સમષ્ટિમાંથી મેળવેલા બે માહિતી સમૂહો G_1 અને G_2માંથી નીચે મુજબ માહિતી મળે છે :

વિગત	સમૂહ G_1 માટે	સમૂહ G_2 માટે
અવલોકનોની સંખ્યા	n_1	n_2
મધ્યક	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
પ્રમાણિત વિચલન	s_1	s_2

હવે માહિતી સમૂહો G_1 અને G_2નાં અવલોકનો ભેગાં કરી એક નવો સમૂહ G મેળવવામાં આવે છે. આ નવા સમૂહના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે મિશ્ર મધ્યક $\bar{x}_c$ અને મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન s_c તરીકે ઓળખાય છે અને તેનાં સૂત્રો નીચે મુજબ છે :

મિશ્ર મધ્યક $\bar{x}_c = \dfrac{n_1\bar{x}_2 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન $s_c = \sqrt{\dfrac{n_1(s_1^2 + d_1^2) + n_2(s_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}}$

જ્યાં, n_1 = સમૂહ G_1નાં અવલોકનોની સંખ્યા

n_2 = સમૂહ G_2નાં અવલોકનોની સંખ્યા

s_1 = સમૂહ G_1નું પ્રમાણિત વિચલન

s_2 = સમૂહ G_2નું પ્રમાણિત વિચલન

$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_c$

$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}_c$

ઉદાહરણ **22 :** બે માહિતી સમૂહ G_1 અને G_2 પ્રત્યેકમાં પાંચ અવલોકનો નીચે મુજબ છે :

સમૂહ G_1 : 1, 3, 5, 7, 9

સમૂહ G_2 : 2, 4, 6, 8, 10

બંને સમૂહના મધ્યક તથા વિચરણ શોધો અને તે પરથી મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન મેળવો.

સમૂહ G_1 માટે

	x	$(x - \bar{x})$ $\bar{x} = 5$	$(x - \bar{x})^2$
	1	– 4	16
	3	– 2	4
	5	0	0
	7	2	4
	9	4	16
કુલ	**25**	**0**	**40**

સમૂહ G_2 માટે

	x	$(x - \bar{x})$ $\bar{x} = 6$	$(x - \bar{x})^2$
	2	– 4	16
	4	– 2	4
	6	0	0
	8	2	4
	10	4	16
કુલ	**30**	**0**	**40**

સમૂહ G_1નો મધ્યક

$$\bar{x}_1 = \frac{\Sigma x}{n_1} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\therefore \quad \bar{x}_1 = 5$$

સમૂહ G_2નો મધ્યક

$$\bar{x}_2 = \frac{\Sigma x}{n_2} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\therefore \quad \bar{x}_2 = 6$$

સમૂહ G_1નું વિચરણ

$$s_1^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x}_1)^2}{n_1} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\therefore \quad s_1^2 = 8$$

સમૂહ G_2નું વિચરણ

$$s_2^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x}_2)^2}{n_2} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\therefore \quad s_2^2 = 8$$

મિશ્ર મધ્યક $\bar{x}_c = \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{5\,(5)+5\,(6)}{5+5}$$

$$= \frac{25+30}{10}$$

$$= \frac{55}{10}$$

$$= 5.5$$

$$\therefore \quad \bar{x}_c = 5.5$$

$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_c = 5 - 5.5 = -0.5$

$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}_c = 6 - 5.5 = 0.5$

મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન

$$s_c = \sqrt{\frac{n_1(s_1^2 + d_1^2) + n_2(s_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{5\,(8 + (-0.5)^2) + 5\,(8 + (0.5)^2)}{5+5}}$$

$$= \sqrt{\frac{5(8.25) + 5(8.25)}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{41.25 + 41.25}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{82.5}{10}}$$

$$= \sqrt{8.25}$$

$$= 2.8712$$

$\therefore \quad s_c \approx 2.87$

પ્રવૃત્તિ

ઉદાહરણ 22 માંથી બંને સમૂહ G_1 અને G_2નાં બધાં જ અવલોકનો ભેગાં કરો. આમ કરવાથી તમને દસ અવલોકનો 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8, 10 મળશે. આ દસ અવલોકનોનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો. તમે જોઈ શકશો કે તેના જવાબો ઉદાહરણ 22માં મેળવેલા મિશ્ર મધ્યક અને મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન જેટલા જ આવશે.

ઉદાહરણ 23 : એક ફેક્ટરીમાં બે પાળીમાં કોઈ વસ્તુનું ઉત્પાદન થાય છે. કારીગરો દ્વારા લાગતા ઉત્પાદન સમયની વિગત નીચે મુજબ છે. નીચેની માહિતી પરથી મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

વિગત	પાળી I	પાળી II
કારીગરોની સંખ્યા	60	40
સરેરાશ ઉત્પાદન સમય (મિનિટ)	25	20
પ્રમાણિત વિચલન (મિનિટ)	5	3

સૌપ્રથમ આપણે મિશ્ર મધ્યક શોધીએ.

$$\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{60(25) + 40(20)}{60 + 40}$$

$$= \frac{1500 + 800}{100}$$

$$= \frac{2300}{100}$$

$= 23$ મિનિટ

આમ, બંને પાળીના બધા જ કારીગરો દ્વારા વસ્તુનું ઉત્પાદન કરવા સરેરાશ 23 મિનિટ લાગે છે તેમ કહેવાય.

$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_c = 25 - 23 = 2$

$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}_c = 20 - 23 = -3$

મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન

$$s_c = \sqrt{\frac{n_1(s_1^2 + d_1^2) + n_2(s_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{60(5^2 + 2^2) + 40(3^2 + (-3)^2)}{60 + 40}}$$

$$= \sqrt{\frac{60(25 + 4) + 40(9 + 9)}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{60(29) + 40(18)}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{1740 + 720}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{2460}{100}}$$

$$= \sqrt{24.6}$$

$$= 4.9598$$

$\therefore \quad s_c \approx 4.96$ મિનિટ

આમ, બંને પાળીના બધા જ કારીગરોને વસ્તુનું ઉત્પાદન કરતાં લાગતા સમયનું પ્રમાણિત વિચલન 4.96 મિનિટ છે.

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી

મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકને ''પ્રથમ ક્રમની સરેરાશનાં માપો'' કહેવાય છે. જ્યારે પ્રસારના મોટા ભાગનાં માપ "બીજા ક્રમની સરેરાશ"નાં માપો તરીકે ઓળખાય છે.

સ્વાધ્યાય 4.6

1. એક શાળાના બે વર્ગોના વિદ્યાર્થીઓના ગુણ વિશે નીચે મુજબ વિગત આપેલી છે. આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીઓના ગુણનું મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

વિગત	વર્ગ A	વર્ગ B
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	50	60
સરેરાશ ગુણ	60	48
પ્રમાણિત વિચલન	10	12

2. એક ફેક્ટરીમાં બે ઉત્પાદન વિભાગો વિશે નીચે મુજબ વિગત આપેલી છે. તે પરથી બંને વિભાગોમાં ઉત્પાદિત થતા એકમોના ઉત્પાદન સમયનું મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

વિગત	વિભાગ A	વિભાગ B
કારીગરોની સંખ્યા	10	40
એકમદીઠ સરેરાશ ઉત્પાદન-સમય (મિનિટ)	25	20
વિચરણ	16	25

*

ઉદાહરણ 24 : એક રસ્તા પર 10 દિવસમાં થતાં અકસ્માતની માહિતી નીચે મુજબ છે, તે પરથી તે રસ્તા પર એક દિવસમાં થતા અકસ્માતનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો. કેટલા ટકા દિવસોમાં અકસ્માતની સંખ્યા $\bar{x} \pm s$ ની મર્યાદામાં સમાયેલી છે ?

અકસ્માતની સંખ્યા	1	2	3	4	5
દિવસોની સંખ્યા	2	3	3	1	1

અકસ્માતની સંખ્યા x	દિવસોની સંખ્યા f	fx	fx^2
1	2	2	2
2	3	6	12
3	3	9	27
4	1	4	16
5	1	5	25
કુલ	n **= 10**	**26**	**82**

મધ્યક

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$$

$$= \frac{26}{10}$$

$$= 2.6$$

$\therefore \quad \bar{x} = 2.6$ અકસ્માત

પ્રમાણિત વિચલન

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{82}{10} - (2.6)^2}$$

$$= \sqrt{8.2 - 6.76}$$

$$= \sqrt{1.44}$$

$$= 1.2$$

$\therefore \quad s = 1.2$ અકસ્માત

હવે, $\bar{x} - s = 2.6 - 1.2 = 1.4$ અકસ્માત

$\bar{x} + s = 2.6 + 1.2 = 3.8$ અકસ્માત

આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી જોઈ શકાશે કે 1.4 અને 3.8ની વચ્ચે આવતા દિવસોની સંખ્યા 2 અને 3 છે અને તેને અનુરૂપ અકસ્માતની સંખ્યા અનુક્રમે 3 અને 3 છે. તેથી $\bar{x} - s = 1.4$ અને $\bar{x} + s = 3.8$ ની મર્યાદામાં આવતા દિવસોની સંખ્યા $3 + 3 = 6$ છે. કુલ દિવસો 10 હોવાથી $\bar{x} \pm s$ ની મર્યાદામાં આવતા દિવસોની ટકાવારી $\frac{6}{10} \times 100 = 60$ છે.

ઉદાહરણ 25 : 100 કારીગરો દ્વારા એક કારખાનામાં ઉત્પાદિત થતી કોઈ વસ્તુના એકમોની સંખ્યાનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 60 અને 10 છે. પાછળથી માલૂમ પડ્યું કે બે કારીગરો દ્વારા ખરેખર અનુક્રમે 30 અને 20 એકમો બનાવવામાં આવ્યા હતા પરંતુ ભૂલથી તે અનુક્રમે 5 અને 45 છે તેમ નોંધવામાં આવેલા હતા. આ બાબત ધ્યાનમાં લેતાં 100 કારીગરો દ્વારા ઉત્પાદિત થયેલ વસ્તુના એકમોનો સુધારેલો મધ્યક અને સુધારેલું પ્રમાણિત વિચલન શું થશે ?

આપણને $n = 100$, $\bar{x} = 60$, $s = 10$ આપેલા છે.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} \qquad s = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$60 = \frac{\Sigma x}{100} \qquad 10 = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{100} - (60)^2}$$

$$\therefore \quad \Sigma x = 6000 \qquad 100 = \frac{\Sigma x^2}{100} - 3600$$

$$3700 = \frac{\Sigma x^2}{100}$$

$$\therefore \quad \Sigma x^2 = 3{,}70{,}000$$

પરંતુ, Σx અને Σx^2 ની મળેલી આ કિંમતો સાચી નથી. હવે, કારીગરોના ઉત્પાદિત એકમોની સાચી સંખ્યા તેમની ખોટી સંખ્યાના સ્થાને મૂકતા,

$$\text{સુધારેલ } \Sigma x = 6000 - 5 - 45 + 30 + 20 = 6000$$

$$\begin{aligned}\text{સુધારેલ } \Sigma x^2 &= 3{,}70{,}000 - (5)^2 - (45)^2 + (30)^2 + (20)^2 \\ &= 3{,}70{,}000 - 25 - 2025 + 900 + 400 \\ &= 3{,}69{,}250\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{ સુધારેલ મધ્યક } \bar{x} &= \frac{\text{સુધારેલ } \Sigma x}{n} \\ &= \frac{6000}{100} \\ &= 60 \text{ એકમો}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{સુધારેલ પ્રમાણિત વિચલન} \quad s &= \sqrt{\frac{\text{સુધારેલ } \Sigma x^2}{n} - (\text{સુધારેલ } \bar{x})^2} \\ &= \sqrt{\frac{369250}{100} - (60)^2} \\ &= \sqrt{3692.5 - 3600} \\ &= \sqrt{92.5} \\ &= 9.6177 \\ &\approx 9.62 \text{ એકમો}\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 26 : બે પેઢી A અને Bના કામદારોના દૈનિક વેતન (₹ માં)ને લગતાં પરિણામો નીચે મુજબ છે :

વિગત	પેઢી A	પેઢી B
કામદારોની સંખ્યા	20	30
સરેરાશ વેતન (₹)	250	400
વેતનનું પ્રમાણિત વિચલન (₹)	10	12

ઉપરની માહિતીનો ઉપયોગ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. કઈ પેઢી તેના કામદારોને કુલ વેતન વધુ ચૂકવે છે ?

2. કઈ પેઢીના કામદારોના વ્યક્તિગત વેતનમાં સાપેક્ષ ચલન વધુ છે ?

3. A અને B પેઢીના મિશ્ર મધ્યક અને મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

(1) **પેઢી A**

$(n_1 = 20,\ \bar{x}_1 = 250)$

કુલ દૈનિક વેતન $= n_1\bar{x}_1$

$= 20\ (250)$

$= 5000$

પેઢી B

$(n_2 = 30,\ \bar{x}_2 = 400)$

કુલ દૈનિક વેતન $= n_2\bar{x}_2$

$= 30\ (400)$

$= 12000$

તેથી પેઢી B વધારે વેતન ચૂકવે છે.

(2) **પેઢી A**

ચલનાંક $= \frac{s_1}{\bar{x}_1} \times 100$

$= \frac{10}{250} \times 100$

$= 4\ \%$

પેઢી B

ચલનાંક $= \frac{s_2}{\bar{x}_2} \times 100$

$= \frac{12}{400} \times 100$

$= 3\ \%$

પેઢી A માટે ચલનાંક વધુ છે, તેથી પેઢી Aના દૈનિક વેતનમાં ચલન વધુ છે તેમ કહેવાય.

(3) **મિશ્ર મધ્યક** $\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{20(250) + 30(400)}{20 + 30}$$

$$= \frac{5000 + 12000}{50}$$

$$\therefore\quad \bar{x}_c = \frac{17000}{50} = ₹\ 340$$

આમ, બંને પેઢીના કામદારો સંયુક્ત લઈએ તો બધા જ કામદારો માટે સરેરાશ દૈનિક વેતન ₹ 340 થાય..

$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_c = 250 - 340 = -90$

$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}_c = 400 - 340 = 60$

મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન

$$s_c = \sqrt{\frac{n_1(s_1^2 + d_1^2) + n_2(s_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{20\left((10)^2 + (-90)^2\right) + \left(30(12)^2 + (60)^2\right)}{20 + 30}}$$

$$= \sqrt{\frac{20(100 + 8100) + 30(144 + 3600)}{50}}$$

$$= \sqrt{\frac{164000 + 112320}{50}}$$

$$= \sqrt{\frac{276320}{50}}$$

$$= \sqrt{55264}$$

$$= 74.3398$$

$\therefore\quad s_c \approx ₹\ 74.34$

આમ, બંને પેઢીના કામદારો સંયુક્ત લઈએ તો બધા જ કામદારોના વેતનનું પ્રમાણિત વિચલન ₹ 74.34 થાય.

ઉદાહરણ 27 : કોઈ એક નર્સરીમાં ગુલાબના 30 છોડ પર ગુલાબની સંખ્યાની વિગત નીચે મુજબ છે. તે પરથી છોડદીઠ ગુલાબની સંખ્યાનો વિસ્તાર, વિસ્તારાંક, ચતુર્થક વિચલન, ચતુર્થક વિચલનાંક, સરેરાશ વિચલન અને સરેરાશ વિચલનાંક શોધો.

ગુલાબની સંખ્યા	1	3	5	6 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 22
છોડની સંખ્યા	1	2	5	10	8	3	1

ગુલાબની સંખ્યા	**છોડની સંખ્યા** f	cf	**મધ્યકિંમત** x	fx	$\lvert x - \bar{x} \rvert$ $\bar{x} = 8.1$	$f \lvert x - \bar{x} \rvert$
1	1	1	1	1	7.1	7.1
3	2	3	3	6	5.1	10.2
5	5	8	5	25	3.1	15.5
6-8	10	18	7	70	1.1	11
8-12	8	26	10	80	1.9	15.2
12-16	3	29	14	42	5.9	17.7
16-22	1	30	19	19	10.9	10.9
કુલ	$n = 30$	–	–	**243**	**35.1**	**87.6**

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$= \frac{243}{30}$

$= 8.1$ ગુલાબ

અહીં $x_H = 22$ અને $x_L = 1$

$\therefore$ વિસ્તાર $= x_H - x_L$

$= 22 - 1$

$= 21$ ગુલાબ

વિસ્તારાંક $= \frac{x_H - x_L}{x_H + x_L}$

$= \frac{21}{22+1}$

$= \frac{21}{23}$

$= 0.9130$

$\therefore$ વિસ્તારાંક ≈ 0.91

$Q_1 = \left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{30}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 7.5$મા અવલોકનની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિ (cf)ના સ્તંભ પરથી માલૂમ પડે છે, કે 7.5મું અવલોકન 5 છે.

$\therefore$ $Q_1 = 5$ ગુલાબ

$Q_3 = 3\left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 3(7.5)$ મા અવલોકનની કિંમત

$= 22.5$ મા અવલોકનોની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિ (cf)ના સ્તંભ પરથી માલૂમ પડે છે કે, 22.5 મું અવલોકન 8-12ના વર્ગમાં સમાયેલ છે. તેથી 8–12 એ Q_3 વર્ગ થશે.

હવે, $Q_3 = L + \frac{3\left(\frac{n}{4}\right) - cf}{f} \times c$

અહીં $L = 8$, $3\left(\frac{n}{4}\right) = 22.5$, $cf = 18$, $f = 8$, $c = 4$

$\therefore \quad Q_3 = 8 + \frac{22.5 - 18}{8} \times 4$

$= 8 + \frac{4.5}{2}$

$= 8 + 2.25$

$= 10.25$ ગુલાબ

$\therefore$ ચતુર્થક વિચલન $Q_d = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{10.25 - 5}{2}$

$= \frac{5.25}{2}$

$= 2.625$

$\therefore \quad Q_d \approx 2.63$ ગુલાબ

ચતુર્થક વિચલનાંક $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \frac{5.25}{10.25 + 5}$

$= \frac{5.25}{15.25}$

$= 0.3443$

$\therefore$ ચતુર્થક વિચલનાંક $= 0.34$

હવે, સરેરાશ વિચલન $= \frac{\Sigma f|x - \bar{x}|}{n}$

$= \frac{87.6}{30}$

$= 2.92$

$\therefore$ સરેરાશ વિચલન $MD = 2.92$ ગુલાબ

સરેરાશ વિચલનાંક $= \frac{MD}{\bar{x}}$

$= \frac{2.92}{8.1}$

$= 0.3605$

$\therefore$ સરેરાશ વિચલનાંક ≈ 0.36

કેટલાંક ઉપયોગી પરિણામો

ધારો કે અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$નો વિસ્તાર, ચતુર્થક વિચલન, સરેરાશ વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે R_x, Q_{dx}, MD_x અને s_x છે. હવે, જો પ્રત્યેક અવલોકન x_i (જ્યાં $i = 1, 2, ..., n$)ને વાસ્તવિક શૂન્યેતર અચલ 'b' વડે ગુણી તેમાં અચલ 'a' ઉમેરવામાં આવે, તો આમ કરવાથી બનતાં અવલોકનો $y_1, y_2, ..., y_n$ મળે કે જેથી -

$$y_i = bx_i + a$$

હવે y ના વિસ્તાર ચતુર્થક વિચલન, સરેરાશ વિચલન, પ્રમાણિત વિચલન અને વિચરણના માપ આપેલ અવલોકનો x ના માપ પરથી નીચે મુજબ મેળવી શકાય :

માપ	x માટે	y માટે
વિસ્તાર	R_x	$R_y = \|b\|.R_x$
ચતુર્થક વિચલન	Q_{dx}	$Q_{dy} = \|b\|.Q_{dx}$
સરેરાશ વિચલન	MD_x	$MD_y = \|b\|.MD_x$
પ્રમાણિત વિચલન	s_x	$s_y = \|b\|.s_x$
વિચરણ	s^2_x	$s^2_y = b^2.s^2_x$

નોંધ : $|b| = b$ જો $b \geq 0$

$|b| = -b$ જો $b < 0$

ઉદાહરણ 28 : ચલ x નાં અવલોકનોના વિસ્તાર ચતુર્થક વિચલન, સરેરાશ વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 10, 2, 3 અને 5 છે. જો $y = 5x + 3$ હોય, તો ચલ y ના વિસ્તાર, ચતુર્થક વિચલન, સરેરાશ વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

અહીં ચલ x માટે વિસ્તાર $R_x = 10$, ચતુર્થક વિચલન $Q_{dx} = 2$, સરેરાશ વિચલન $MD_x = 3$, પ્રમાણિત વિચલન $s_x = 5$ છે.

હવે $y = 5x + 3$ આપેલ છે તેથી આગળ ચર્ચા કરેલાં પરિણામો પરથી ચલના પ્રસારનાં માપો નીચે મુજબ મળે :

વિસ્તાર $R_y = |5| \cdot R_x = 5(10) = 50$

ચતુર્થક વિચલન $Q_{dy} = |5| \cdot Q_{dx} = 5(2) = 10$

સરેરાશ વિચલન $MD_y = |5| \cdot MD_x = 5(3) = 15$

પ્રમાણિત વિચલન $s_y = |5| \cdot s_x = 5(5) = 25$

ઉદાહરણ 29 : એક વસ્તુની માંગનું વિધેય $d = 15 - 2p$ છે. જ્યાં p = વસ્તુનો એકમદીઠ ભાવ (₹માં) અને d = વસ્તુની માંગ (એકમોમાં) છે. જો છેલ્લા એક વર્ષના દર મહિનાના અંતે રહેલા ભાવનો વિસ્તાર ₹ 5, સરેરાશ વિચલન ₹ 2 અને વિચરણ 9 (₹)^2 હોય, તો તે પરથી તે વસ્તુની માંગનો વિસ્તાર, સરેરાશ વિચલન અને વિચરણ મેળવો.

અહીં ભાવનો વિસ્તાર $Rp = 5$ ₹, સરેરાશ વિચલન $MDp = 2$ ₹ અને વિચરણ $s_p^2 = 9$ (₹)^2 છે. હવે માંગનું વિધેય $d = 15 - 2p$ આપેલ છે. તેથી અગાઉ ચર્ચા કરેલાં પરિણામો પરથી વસ્તુની માંગ માટે

વિસ્તાર $R_d = |-2| \cdot R_p = 2(5) = 10$ એકમો

સરેરાશ વિચલન $MD_d = |-2| \cdot MD_p = 2(2) = 4$ એકમો

વિચરણ $s_d^2 = (-2)^2 \cdot s_p^2 = 4(9) = 36$ (એકમો)^2

ઉદાહરણ 30 : એક શાળાના કોઈ વર્ગના વિદ્યાર્થિઓની 100 ગુણની પ્રથમ કસોટીમાં મેળવેલા ગુણનો વિસ્તાર 80 ગુણ અને પ્રમાણિત વિચલન 20 ગુણ મળે છે. આંતરિક ગુણની ગણતરી કરવા માટે પ્રથમ કસોટીમાં મળેલા ગુણનો 4 વડે ભાગાકાર કરી તેને ઉપયોગમાં લેવામાં આવે છે, તો આમ કરવાથી પ્રથમ કસોટીના બનતા ગુણનો વિસ્તાર અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

અહીં 100માંથી મેળવેલ ગુણને x વડે દર્શાવીએ તો વિસ્તાર $R_x = 80$ ગુણ અને પ્રમાણિત વિચલન $s_x = 20$ ગુણ છે. હવે આંતરિક ગુણની ગણતરી માટે 100માંથી મેળવેલા ગુણને 4 વડે ભાગવામાં આવે છે. આમ કરવાથી મળતા ગુણને y વડે દર્શાવીએ તો $y = \frac{x}{4} = \frac{1}{4}\ x$ થાય.

તેથી અગાઉ ચર્ચા કરેલ પરિણામો પરથી y નો વિસ્તાર અને પ્રમાણિત વિચલન નીચે મુજબ મળે :

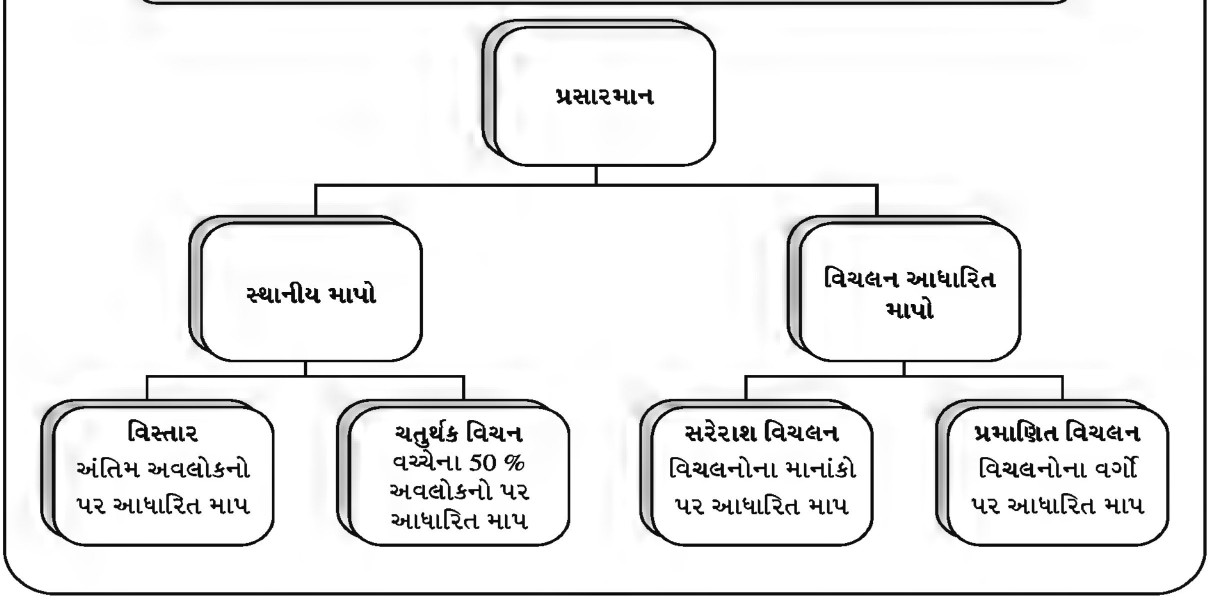
વિસ્તાર $\quad R_y = \left|\frac{1}{4}\right|\ R_x = \frac{1}{4}\ (80) = 20$ ગુણ

પ્રમાણિત વિચલન $\quad s_y = \left|\frac{1}{4}\right|\ s_x = \frac{1}{4}\ (20) = 5$ ગુણ

સારાંશ

- **પ્રસારમાન અથવા ચલન :** માહિતીના અવલોકનોનો પ્રસાર કે ફેલાવો દર્શાવતું મૂલ્ય.
- **વિસ્તાર :** માહિતીનાં સૌથી મોટાં અને સૌથી નાનાં અવલોકનોનો તફાવત લેવાથી પ્રસારનું આ સ્થાનીય માપ મળે છે.
- **ચતુર્થક વિચલન :** આ પણ પ્રસારનું એક સ્થાનીય માપ છે. તેમાં માહિતીના ફક્ત વચ્ચેનાં 50 % અવલોકનોને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. તેને અર્ધઆંતરચતુર્થક વિસ્તાર પણ કહેવામાં આવે છે.
- **સરેરાશ વિચલન :** તે માહિતીનાં અવલોકનો અને તેના મધ્યકના તફાવતો (વિચલનો)ના માનાંકોની સરેરાશ છે.
- **વિચરણ :** માહિતીનાં અવલોકનોના તેના મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો મધ્યક.
- **પ્રમાણિત વિચલન :** આ પ્રસારનું શ્રેષ્ઠ માપ છે. તે વિચરણ s^2નું ધન વર્ગમૂળ લેવાથી મળે છે.
- **સાપેક્ષ માપો :** પ્રસારના અભ્યાસ હેઠળના ચલના એકમથી મુક્ત માપને સાપેક્ષ માપ કહે છે. બે કે તેથી વધુ માહિતી સમૂહોમાં રહેલા પ્રસાર કે ચલનની સરખામણી કરવા માટે પ્રસારના સાપેક્ષ માપનો ઉપયોગ થાય છે.
- **ચલનાંક :** ચલનાંક એ પ્રમાણિત વિચલન પર આધારિત સાપેક્ષ પ્રસારનું ટકાવારી માપ છે. ચલનાંકની કિંમત જેમ ઓછી તેમ માહિતીમાં સ્થિરતા વધુ છે તેમ કહેવાય.

પ્રકરણની એક ઝલક



સૂત્રોની યાદી :

	પ્રસારનું માપ	નિરપેક્ષ માપ	સાપેક્ષ માપ
1.	વિસ્તાર	$R = x_H - x_L$	વિસ્તારાંક $= \frac{x_H - x_L}{x_H + x_L}$
2.	ચતુર્થક વિચલન	$Q_d = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$	ચતુર્થક વિચલનાંક $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$
3.	સરેરાશ વિચલન	$MD = \frac{\Sigma \lvert x - \bar{x} \rvert}{n}$ (અવર્ગીકૃત માહિતી માટે) $MD = \frac{\Sigma f \lvert x - \bar{x} \rvert}{n}$ (વર્ગીકૃત માહિતી માટે)	સરેરાશ વિચલનાંક $= \frac{MD}{\bar{x}}$
4.	પ્રમાણિત વિચલન :	**અવર્ગીકૃત માહિતી માટે** $s = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$ અથવા $\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2}$ **ટૂંકી રીત :** $s = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$ **વર્ગીકૃત માહિતી માટે :** $s = \sqrt{\frac{\Sigma f(x-\bar{x})^2}{n}}$ અથવા $\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{n} - \bar{x}^2}$ **ટૂંકી રીત :** જ્યારે $d = x - A$ હોય, $s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$ જ્યારે $d = \frac{x-A}{c}$ હોય, $s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} \times c$	પ્રમાણિત વિચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}}$ ચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100$
5.	**મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન** $s_c = \sqrt{\frac{n_1(s_1^2 + d_1^2) + n_2(s_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}}$		

સ્વાધ્યાય 4

વિભાગ A

નીચે આપેલા બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. નીચેના પૈકી કયું સૂત્ર વિસ્તારાંકનું છે ?

(a) $x_H - x_L$ (b) $\frac{x_H - x_L}{x_H + x_L}$ (c) $\frac{x_L - x_H}{x_L + x_H}$ (d) $x_L - x_H$

2. પ્રસારના કયા માપમાં અવલોકનો અને તેના મધ્યકના તફાવતના માનાંક લેવામાં આવે છે ?

(a) સરેરાશ વિચલન (b) પ્રમાણિત વિચલન (c) વિસ્તાર (d) ચતુર્થક વિચલન

3. નીચેના પૈકી કયું માપ એકમથી મુક્ત છે ?

(a) સરેરાશ વિચલન (b) ચતુર્થક વિચલન (c) વિસ્તાર (d) ચલનાંક

4. અંતિમ અવલોકનોની ન્યૂનતમ અસર થતી હોય તેવું પ્રસારમાનનું કયું માપ છે ?

(a) વિસ્તાર (b) પ્રમાણિત વિચલન (c) ચતુર્થક વિચલન (d) સરેરાશ વિચલન

5. જો સમૂહ Aનો ચલનાંક એ સમૂહ Bના ચલનાંક કરતાં ઓછો હોય, તો કયો સમૂહ ચલનની દૃષ્ટિએ વધુ સ્થિર ગણાય ?

(a) A (b) B (c) બંને (d) કહી શકાય નહિ.

6. 10 વિદ્યાર્થીઓનાં વજન (કિગ્રામાં) નીચે મુજબ છે :

53, 47, 60, 55, 71, 65, 61, 68, 63, 70 આ માહિતીનો વિસ્તાર કેટલો છે ?

(a) 17 (b) 23 (c) 24 (d) 18

7. એક માહિતીના પ્રથમ અને તૃતીય ચતુર્થકો અનુક્રમે 30 અને 50 હોય, તો ચતુર્થક વિચલનાંકની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) 0.25 (b) 50 (c) 4 (d) 20

8. અવલોકનો 5, 5, 5, 5, 5 માટે પ્રસારનું કોઈ પણ માપ શું થાય ?

(a) 1 (b) 5 (c) 0 (d) 25

9. એક ચલ માટે મધ્યક 10 અને ચલનાંક 60 % હોય, તો ચલનું વિચરણ કેટલું થાય ?

(a) 6 (b) 36 (c) 60 (d) 50

10. એક શ્રેણી $k_1, k_2, k_3, \dots k_n$ નું પ્રમાણિત વિચલન 5 છે, તો

(i) $k_1 + 2, k_2 + 2, k_3 + 2, \dots, k_n + 2$

(ii) $3k_1, 3k_2, 3k_3, \dots, 3k_n$ શ્રેણીના પ્રમાણિત વિચલન શું થશે ?

(a) (i) 7 (ii) 3 (b) (i) 5 (ii) 3 (c) (i) 5 (ii) 15 (d) (i) 7 (ii) 15

11. એક ચલ xનો મધ્યક 5 અને પ્રમાણિત વિચલન 2 છે. જો $y = 3x + 4$ હોય તો ચલ yનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે કેટલા થાય ?

(a) 19 અને 6 (b) 15 અને 49 (c) 19 અને 10 (d) 15 અને 10

12. એક માહિતીનાં અવલોકનોનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 45 અને 5 છે. જો દરેક અવલોકનોમાં અચલ સંખ્યા 5 ઉમેરવામાં આવે, તો નવી માહિતી બને તેનાં અવલોકનોનો ચલનાંક કેટલો થાય ?

(a) 10 % (b) 50 % (c) 11.11 % (d) 900 %

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. વિસ્તારની વ્યાખ્યા આપો.
2. ચતુર્થક વિચલનની વ્યાખ્યા આપો.
3. બે કે તેથી વધુ સમૂહોની તેમના ચલનના સંદર્ભમાં સરખામણી કરવા માટે પ્રસારના કયા પ્રકારનાં માપોનો ઉપયોગ થાય છે ?
4. પ્રસારનું શ્રેષ્ઠ માપ કયું છે ?
5. જો દસ વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ સેન્ટિમીટરમાં આપેલી હોય તો તેના વિચરણનો એકમ શું થાય ?
6. એક કંપની પાઈપનું ઉત્પાદન કરે છે. પાઈપના વ્યાસ અંગે નીચે મુજબ માહિતી મળે છે, તે પરથી પાઈપના વ્યાસનો વિસ્તાર શોધો :

વ્યાસ (સેમીમાં)	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
પાઈપની સંખ્યા	15	40	75	20	11

7. એક આવૃત્તિ-વિતરણનો પચ્ચીસમો અને પંચોતેરમો શતાંશક અનુક્રમે 72.18 અને 103.99 છે. આ માહિતી પરથી ચતુર્થક વિચલન શોધો.
8. એક સમૂહના 7 વિદ્યાર્થીઓએ 25 ગુણની કસોટીમાં મેળવેલા ગુણ અનુક્રમે 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20 છે, તો તેમના ગુણનું પ્રમાણિત વિચલન શું થશે ?
9. – 1, 0, 4 અવલોકનો પરથી સરેરાશ વિચલન શોધો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. નીચેનાની વ્યાખ્યા આપો :
   (i) સરેરાશ વિચલન (ii) પ્રમાણિત વિચલન (iii) ચલનાંક
2. પ્રસારના નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપનો અર્થ જણાવો.
3. પ્રસારના નિરપેક્ષ માપોનાં નામ જણાવો.
4. અવલોકનો અને તેના મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનો પર આધારિત પ્રસારનાં કયાં માપો છે ?
5. 6, 11, – 3, 0, 8 અવલોકનો માટે વિસ્તાર અને વિસ્તારાંક શોધો.
6. નીચે આપેલાં અવલોકનો પરથી ચતુર્થક વિચલનાંક શોધો :
   8, 15, 2, 11, 20, 3, 5
7. નીચે આપેલાં અવલોકનો પરથી સરેરાશ વિચલન શોધો :
   3, 8, 1, 7, 6
8. જો $\bar{x}$ = 25 અને ચલનાંક 20 % હોય તો વિચરણ શોધો.
9. 1, 2, 3, 4, 5 અવલોકનો માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો.
10. નીચેનામાંથી કઈ ફેક્ટરી દૈનિક ઉત્પાદનના સંદર્ભમાં વધુ સ્થિર છે ?

	ફેક્ટરી A	**ફેક્ટરી B**
સરેરાશ દૈનિક ઉત્પાદન (એકમો)	50	48
પ્રમાણિત વિચલન (એકમો)	10	12

11. એક માહિતી સમૂહના 25મા અને 75મા શતાંશક અનુક્રમે 20 અને 36 છે, તો ચતુર્થક વિચલનાંક શોધો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. પ્રસારમાનનો અર્થ સમજાવો અને તેનાં જુદાં જુદાં માપો જણાવો.
2. પ્રસારમાનનાં ઇચ્છનીય લક્ષણો જણાવો.
3. વિસ્તારના લાભ તથા ગેરલાભ લખો.
4. ચતુર્થક વિચલનના લાભ તથા ગેરલાભ લખો.
5. સરેરાશ વિચલનના લાભ તથા ગેરલાભ લખો.
6. પ્રમાણિત વિચલનના લાભ તથા ગેરલાભ લખો.
7. પ્રમાણિત વિચલન એટલે શું ? તે શા માટે પ્રસારનું શ્રેષ્ઠ માપ ગણાય છે ?
8. ચલનાંક વિશે ટૂંક નોંધ લખો.
9. એક નર્સરીમાં 100 છોડ પર રહેલ ફૂલની સંખ્યા વિશે નીચે આપેલી માહિતી પરથી છોડદીઠ ફૂલની સંખ્યાનું ચતુર્થક વિચલન શોધો.

ફૂલની સંખ્યા	11	13	15	17	19	21	23	25
છોડની સંખ્યા	5	8	13	20	22	18	10	4

10. હૉકીની એક ટુર્નામિન્ટમાં 16 મૅચમાં થયેલ ગોલની સંખ્યાનું વિતરણ આપેલું છે. આ માહિતી પરથી મૅચદીઠ ગોલની સંખ્યાનું સરેરાશ વિચલન શોધો.

ગોલની સંખ્યા	1	2	3	4	5
મૅચની સંખ્યા	1	4	6	4	1

11. પ્રચલિત સંકેતોમાં $\Sigma d = 25$, $\Sigma d^2 = 272$, $n = 100$ અને ધારેલો મધ્યક 4 છે. આ માહિતી પરથી ચલનાંક શોધો.
12. નીચેની માહિતી પરથી મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન શોધો :

વિગત	માહિતીસમૂહ A	માહિતીસમૂહ B
અવલોકનોની સંખ્યા	50	60
મધ્યક	113	120
પ્રમાણિત વિચલન	6	7

13. દસ અવલોકનોનો સરવાળો 80 અને અવલોકનોના વર્ગોનો સરવાળો 800 છે. આ માહિતી પરથી ચલનાંક શોધો.

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. ભાષાની 50 ગુણની જોડણી-કસોટીમાં 30 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે, તો આવૃત્તિ-વિતરણનું સરેરાશ વિચલન શોધો.

ગુણ	12 - 16	17 - 21	22 - 26	27 - 31	32 - 36
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	3	14	8	3

2. નીચેના 50 કંપનીઓના જાહેરાત-ખર્ચના આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી કંપનીદીઠ જાહેરાત-ખર્ચનું ચતુર્થક વિચલન શોધો :

જાહેરાતનું ખર્ચ (હજાર ₹)	0 - 5	5 - 15	15 - 30	30 - 40	40 - 60	60 - 100	કુલ
કંપનીની સંખ્યા	3	8	15	10	8	6	50

3. એક બૅટ્સમૅને રમેલી 100 ક્રિકેટની વન-ડે મૅચમાં કરેલા રનની વિગત નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી બૅટ્સમૅને કરેલા રનનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

રન	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
મૅચની સંખ્યા	10	15	25	25	10	10	5

4. એક કૉલેજના 220 વિદ્યાર્થીઓએ કોઈ પરીક્ષામાં મેળવેલા ગુણની વિગત નીચે મુજબ છે. તે પરથી વિદ્યાર્થીઓના ગુણનું ચતુર્થક વિચલન શોધો.

ગુણ	0 - 9	10 - 19	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 કે તેથી વધુ
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	30	50	64	42	29	5

5. ફૂટબૉલની રમતમાં બે ટુકડીએ નીચે મુજબ ગોલ કર્યા હતા. કઈ ટુકડી વધારે સુસંગત રમત રમે છે ?

ફૂટબૉલની મૅચમાં નોંધાયેલ ગોલની સંખ્યા	**ફૂટબૉલ મૅચની સંખ્યા**	
	ટુકડી A	**ટુકડી B**
0	15	20
1	10	10
2	7	5
3	5	4
4	3	2
5	2	1

6. 100 અવલોકનોની એક શ્રેણીના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 40 અને 10 મળે છે. ગણતરીમાં બે અવલોકનોની કિંમતો ભૂલથી 3 અને 27ને બદલે 30 અને 70 લેવામાં આવી હતી. સુધારેલ મધ્યક અને સુધારેલ પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

7. એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થતી વસ્તુઓનું કુલ ખર્ચ વિધેય $y = 10 + 3x$ છે, જ્યાં, x એ ઉત્પાદિત એકમોની સંખ્યા અને y એ x એકમોનું કુલ ઉત્પાદન-ખર્ચ દર્શાવે છે. ફેક્ટરીમાં દરરોજ ઉત્પાદિત થતી વસ્તુઓના એકમોની સંખ્યાનો વિસ્તાર 50, ચતુર્થક વિચલન 5, સરેરાશ વિચલન 8 અને પ્રમાણિત વિચલન 10 છે, તો આ માહિતી પરથી કુલ ખર્ચ y નો વિસ્તાર, ચતુર્થક વિચલના, સરેરાશ વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલન મેળવો.

વિભાગ F

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. એક નગરમાં દર્દીઓ આકસ્મિક માંદગીમાં તેમના ફેમિલી ડૉક્ટરને ઘરે માંદગીની તપાસ માટે બોલાવે છે. તે નગરના 80 ડૉક્ટરની તેમના દર્દીઓની મુલાકાત (visit)ની માહિતી નીચે આપેલ છે. તે પરથી વિસ્તાર, વિસ્તારાંક, ચતુર્થક વિચલન, ચતુર્થક વિચલનાંક, સરેરાશ વિચલન અને સરેરાશ વિચલનાંક શોધો.

મુલાકાતોની સંખ્યા	3	5	8	12	17	20	24	30	35
ડૉક્ટરની સંખ્યા	1	3	7	15	20	13	10	7	4

2. નીચે આપેલ વેપારીઓના શાખ દિવસો (credit days)ના આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી કેટલા ટકા અવલોકનો $\bar{x} \pm s$ ની મર્યાદામાં સમાયેલા છે તે શોધો :

શાખના દિવસો	12	13	14	15	16	17	18	19
વેપારીઓની સંખ્યા	5	10	25	65	45	35	8	7

3. નીચેની માહિતી પરથી પ્રસારમાનનું યોગ્ય માપ શોધો તેમ જ તેનું સાપેક્ષ માપ પણ મેળવો :

ગુણ	10થી ઓછા	10 -20	20 - 30	30 - 40	40થી વધુ
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	4	10	3	1

4. એક કંપનીના 200 કર્મચારીઓના વેતનની માહિતી નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી કર્મચારીઓના વેતનનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

વેતન (હજાર ₹)	10થી ઓછું	20થી ઓછું	30થી ઓછું	40થી ઓછું	50થી ઓછું	60થી ઓછું	70થી ઓછું
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	5	17	47	92	142	179	200

5. કોઈ એક દિવસે 100 લઘુઉદ્યોગોના શૅરના બંધભાવ (₹માં)નું વિતરણ નીચે મુજબ છે, તો શૅરના બંધભાવનું સરેરાશ વિચલન શોધો.

ભાવ (₹)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90
ઉદ્યોગોની સંખ્યા	3	8	15	20	25	10	9	6	4

6. કોઈ ફેક્ટરીના 230 કારીગરોને મળતી દૈનિક મજૂરી (₹માં)ની વિગત આપેલી છે. તે માહિતી પરથી કારીગરોની દૈનિક મજૂરીનો ચલનાંક શોધો.

દૈનિક મજૂરી (₹)	કારીગરોની સંખ્યા
100થી ઓછી	12
200થી ઓછી	30
300થી ઓછી	65
400થી ઓછી	107
500થી ઓછી	157
600થી ઓછી	202
700થી ઓછી	222
800થી ઓછી	230

7. બે વિદ્યાર્થીઓ A અને B એ 10 પરીક્ષામાં મેળવેલા ગુણ નીચે મુજબ છે :

પરીક્ષા	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
વિદ્યાર્થી Aના ગુણ	44	80	76	48	52	72	68	56	60	64
વિદ્યાર્થી Bના ગુણ	48	75	54	60	63	69	72	51	57	56

કયા વિદ્યાર્થીનો અભ્યાસમાં દેખાવ વધુ સુસંગત છે ?

8. બે સમૂહ A અને Bના વિદ્યાર્થીઓના વજન (કિગ્રામાં)ના વિતરણ નીચે આપેલા છે, તો બંને સમૂહના ચલનાંક શોધો. કયા સમૂહમાં સાપેક્ષ ચલન વધુ છે ?

વજન (કિગ્રા)	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
સમૂહ A	7	10	20	18	7
સમૂહ B	5	9	21	15	6

Karl Pearson
(1857 - 1936)

Karl Pearson was a major contributor to the early development of statistics. His most famous contribution is the Pearson's chi-square test.

In 1911 he founded the world's first university statistics department at University College, London. He applied statastics to biological problems of heredity and evolution. These papers contain contributions to regression analysis, the correlation coefficeint and include the chi-square test of statistical significane (1900). He coined the term 'standard deviation' in 1893. His work was influenced by the work of Edgeworth and in turn influenced the work of Yule. He was a co-founder of the statistical journal Biometrika.