ষষ্ঠ অধ্যায়

সম্ভাৱিকতা
(PROBABILITY)

ভূমিকা আৰু অৰ্থ ঃ

আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত এনেকুৱা কিছুমান সমস্যা আছে যিবিলাকৰ ফলাফল সম্বন্ধে আমি নিশ্চিতভাৱে একো ক'ব নোৱাৰোঁ। খুব সম্ভৱতঃ মই কলেজলৈ নাযাওঁ, ভাৰতে আফ্ৰিকাৰ বিৰুদ্ধে অহাকালিৰ এদিনীয়া ক্ৰিকেট খেলখন জিকিব, আবেলিৰ ফালে বৰষুণ হ'ব পাৰে ইত্যাদি।

ওপৰৰ মন্তব্যখিনিত এটা অনিশ্চয়তাৰ সুৰ আছে অৰ্থাৎ ঘটনাটো সংঘটিত হ'ব নে নহ'ব এই বিষয়ে কোনেও নিশ্চিতভাৱে ক'ব নোৱাৰে।

অংক আৰু পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানত কিছুমান অভিধাৰণাৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি ওপৰৰ ঘটনাবোৰৰ সম্বন্ধে বিজ্ঞানসন্মতভাৱে বাস্তৱ ধৰণৰ মন্তব্য দাঙি ধৰাৰ প্ৰচেষ্টা চলোৱা হৈছে। সাংখ্যিকীয় দৃষ্টিভংগীত সম্ভাৱিকতাৰ সংজ্ঞাৰ সহায়ত অনিশ্চিত ঘটনাবোৰ অধ্যয়ন কৰা হয়। সেয়েহে সাংখ্যিকীয় মন্তব্যবোৰ অনুমানৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ নকৰে।

ব্যৱহাৰ ঃ প্ৰথম অৱস্থাত সম্ভাৱিকতা তত্ত্বৰ ব্যৱহাৰ অনিশ্চিত ফলাফল থকা খেল-ধেমালিৰ লগত সীমাবদ্ধ আছিল। মানৱীয় সভ্যতাৰ ক্ৰমবিকাশৰ লগে লগে আৰ্থ-সামাজিক, ব্যৱসায়িক আৰু প্ৰকৃতি বিজ্ঞানৰ বিভিন্ন সমস্যাবোৰৰ ক্ষেত্ৰত সম্ভাৱিকতা তত্ত্বৰ ব্যৱহাৰ অনস্বীকাৰ্য। এটা ঘটনা সংঘটিত হোৱা কিমানদূৰ সম্ভৱ সম্ভাৱিকতা তত্ত্বই এই বিষয়ে সাংখ্যিকীয়ভাৱে বুজ লয়। অৱশ্যে কিছু পৰিমাণৰ ঝুঁকি নথকা নহয়।

আজিৰ যুগত আমাৰ বিভিন্ন সমস্যাবোৰ বিশেষকৈ আৰ্থ-সামাজিক, ব্যৱসায়িক সমস্যাবোৰৰ ফলাফল যে অনিশ্চিত এই বিষয়ে সন্দেহৰ অৱকাশ নাই। সেয়েহে সম্ভাৱিকতা তত্ত্বই এই বিষয়ে কিছু ঝুকিৰ বিনিময়ত হ'লেও এটি বাস্তৱসন্মত মন্তব্য দাঙি ধৰাত যথেষ্ট অৰিহণা যোগায়। ফলত সম্ভাৱিকতা তত্ত্বই হৈ পৰিছে এটি গুৰুত্বপূৰ্ণ আহিলাস্বৰূপ। সাংখ্যিকীয় তথ্যৰ ওপৰত মন্তব্য দাঙি ধৰাৰ মূল ভিত্তি হ'ল সম্ভাৱিকতা তত্ত্ব। কাৰণ সাংখ্যিকীয় তথ্যখিনি প্ৰতিদৰ্শ নিৰ্ভৰ আৰু যাদৃচ্ছিক বিক্ষেপণৰ দ্বাৰা প্ৰভাৱান্বিত।

কিছুমান ব্যৱসায়িক সমস্যা, যেনে— কোনো এটা নতুন দ্ৰব্যৰ চাহিদা, উৎপাদন খৰচ, শস্যৰ ফলন, বাজেট প্ৰস্তুতকৰণ ইত্যাদি বিষয়বোৰৰ ফলাফল অনিশ্চিত হোৱাৰ সম্ভাৱনা থকাৰ ফলত ভৱিষ্যৎ মন্তব্য দাঙি ধৰাটো জটিল, সেয়েহে সম্ভাৱিকতা তত্ত্বই এই বিষয়বোৰ অধ্যয়নৰ ক্ষেত্ৰত যথেষ্ট বৰঙণি আগবঢ়ায় আৰু মন্তব্য দিয়াত সহায় কৰে।

একেই পৰিস্থিতি বা অৱস্থাত এটা পৰীক্ষা বাৰে বাৰে সংঘটিত কৰিলে ফলাফল দুই ধৰণৰ হ'ব পাৰে, যেনে— (a) নিশ্চিত, (b) অনিশ্চিত অৰ্থাৎ পৰীক্ষাটোৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰা কেইটামান (সমান বা বিভিন্ন সম্ভাৱিকতা থকা) ফলাফল।

যিবিলাক পৰীক্ষাৰ ফলাফল আগতীয়াকৈ নিশ্চিত বুলি ক'ব পাৰি সেইবোৰক নিশ্চিত ধৰণৰ (Deterministic) পৰীক্ষা বুলি কোৱা হয়। আনহাতে যিবিলাক পৰীক্ষাৰ ফলাফল নিশ্চিত ধৰণৰ নহয় অৰ্থাৎ আগতীয়াকৈ ফলাফল সম্বন্ধে কোৱা টান সেইবোৰক সম্ভাৱিকতা নিৰ্ভৰ (Probabilistic) পৰীক্ষা বুলি কোৱা হয়।

আমি অৱশ্যে সম্ভাৱিকতা নিৰ্ভৰ পৰীক্ষা সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

সম্ভাৱিকতা তত্ত্ব অধ্যয়ন মূলতঃ দুটা ভাগত বিভক্ত।

(a) ধ্ৰুপদী বা চিৰায়ত (classical) পদ্ধতি আৰু (b) ব্যৱহাৰিক বা পৰীক্ষালব্ধ (Empirical) পদ্ধতি।

(a) যদি সংশ্লিষ্ট পৰীক্ষাটোৰ ফলাফলবোৰ সম্ভাৱিকতাৰ লগত জড়িত থকা হয়, যেনে— মুদ্ৰা, বা লুডুগুটি দলিওৱা, তাচৰ পেকেটৰ পৰা তাচ উলিওৱা, বেগত বিভিন্ন ৰঙৰ বল থকা বলৰ পৰা বল লোৱা ইত্যাদি। এইবোৰ ক্ষেত্ৰত ধ্ৰুপদি পদ্ধতি ব্যৱহাৰ হয়।

(b) এই পদ্ধতিত পৰীক্ষাটো সংঘটিত হোৱাৰ পিছত ফলাফলৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি ঘটনাৰ সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা হয়। এই পদ্ধতিক সাংখ্যিকীয় পদ্ধতিও বোলা হয়। অৱশ্যে পৰীক্ষাটো কেইবাবাৰো কৰিব লাগে আৰু ঘটনাৰ সম্ভাৱিকতা নিৰ্ভৰ কৰে ঘটনাটোৰ আপেক্ষিক বাৰংবাৰতাৰ ওপৰত।

এই পদ্ধতি অৱলম্বনৰ ক্ষেত্ৰত কেইটামান প্ৰয়োজনীয় কথা ঃ

1. ঘটনাটো সংগঠিত হোৱাৰ প্ৰকৃতমানৰ আকলক (estimate) হে সম্ভাৱিকতাৰ মান।
2. পৰীক্ষাটো যিমান বেছি বাৰ কৰা হ'ব, ফলাফলৰ সম্ভাৱিকতাৰ মানো সিমানে বেছি ফলপ্ৰসূ হ'ব।
3. একেই অৱস্থাত বা পৰিস্থিতিত পৰীক্ষাটো চলোৱা উচিত।

ওপৰত উল্লিখিত পদ্ধতি দুটাৰ বাহিৰেও অইন এটা পদ্ধতি আছে যেনে— ব্যক্তিগত অভিজ্ঞতাৰ আধাৰত সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয়। আলোচ্য অধ্যায়ত অৱশ্যে এই পদ্ধতিৰ বিষয়ে আমাৰ আলোচনাৰ থল নাই। অভিজ্ঞতাৰ মূল্যবোধ নথকা নহয়। সেয়েহে কোনো কোনো সমস্যাৰ ক্ষেত্ৰত এই পদ্ধতি ফলপ্ৰসূ। সম্ভাৱিকতাৰ সংজ্ঞা দিয়াৰ আগতে কেইটামান লাগতিয়াল কথা সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰা প্ৰয়োজন, যেনে— পৰীক্ষা (Trial or experiment), যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা (Random experiment), ঘটনা (Event or Sample point), সৰল আৰু যৌগিক ঘটনা (Simple and Compound Composite Event), পৰস্পৰ বিবৰ্জিত ঘটনা (Mutually exclusive events), সমানকৈ সম্ভৱ থকা ঘটনা (Equally likely events), সম্পূৰ্ণ বা বিস্তৃত ঘটনা (Sample space or Exhauctive events), নিশ্চিত আৰু অসম্ভৱ ধৰণৰ ঘটনা (Certain and impossible events), আৰু স্বতন্ত্ৰ আৰু পৰতন্ত্ৰ ঘটনা (Independent and dependent events)।

পৰীক্ষা ঃ কোনো এটা কাম কৰাকেই সাধাৰণভাৱে পৰীক্ষা বুলি ক'ব পাৰি। কামটোৰ ফলাফল নিশ্চিত অথবা অনিশ্চিত ধৰণৰ হ'ব পাৰে। যেনে— হাতত ৰাসায়নিক দ্ৰব্য নোলোৱাকৈ হাতখন জুইৰ ওপৰত ধৰিলে হাতখন নিশ্চিতভাৱে পুৰিব বা জ্বলিব অৰ্থাৎ পৰীক্ষাটোৰ ফলাফল নিশ্চিত। আনহাতে মুদ্ৰা এটা দলিয়ালে ফলাফল দুটা মুণ্ড বা পুচ্ছ আৰু আগতীয়াকৈ সিহঁতৰ আৱিৰ্ভাৱৰ কথা খাটাংকৈ ক'ব নোৱাৰি। সেয়েহে সিহঁত অনিশ্চিত ঘটনা। অৱশ্যে এই ক্ষেত্ৰত মুদ্ৰাটো ত্ৰুটি নথকা হ'ব লাগিব আৰু পৰীক্ষাটো একেই চৰ্তত বা অৱস্থাত কৰিব লাগিব।

যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা ঃ যিটো পৰীক্ষা একে চৰ্তত বা পৰিস্থিতিত বাৰে বাৰে সংগঠিত কৰা হয় আৰু ফলাফলবোৰ সম্বন্ধে জ্ঞাত থাকিলেও কোনো ফলাফল সম্বন্ধে আগতীয়াকৈ একো ক'ব নোৱাৰি তেনেধৰণৰ পৰীক্ষাক যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা বোলা যায়। যেনে— মুদ্ৰা বা লুডুগুটি দলিওৱা পৰীক্ষা, কোনো বস্তুৰ দৈনিক উৎপাদন, বিভিন্ন মাহত কোনো বস্তুৰ মূল্য, চাহিদা, বিক্ৰী ইত্যাদি এইবোৰৰ প্ৰত্যেকেই যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা কিয়নো ফলাফল সম্বন্ধে সঠিকভাৱে কোৱা টান। এইবোৰ পৰীক্ষাৰ ফলাফলৰ লগত সম্ভাৱিকতা শব্দটো জড়িত হৈ আছে।

ঘটনা (Event or Sample point) **ঃ** কোনো যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ সম্ভাব্য ফলাফলবোৰৰ প্ৰত্যেককে ঘটনা বোলা হয়।

সৰল আৰু যৌগিক ঘটনা ঃ এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ এটা ফলাফলকেই সৰল ঘটনা বোলা হয়। এই ফলাফলটোক বিভিন্ন অংশত ভগাব নোৱাৰি। আনহাতে, কেইটামান সৰল ঘটনাৰ সমষ্টিক যৌগিক ঘটনা বোলা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, মুদ্ৰা এটা দলিয়ালে এটা সৰল ঘটনা হ'ল মুণ্ড আৰু অইন সৰল ঘটনাটো হ'ল পুচ্ছ। কিন্তু মুণ্ড অথবা পুচ্ছ হ'ল যৌগিক ঘটনা। কিয়নো ইয়াক দুটা সৰল ঘটনাত যেনে— মুণ্ড আৰু পুচ্ছত ভাগ কৰা যায়। দুটা মুদ্ৰা একেলগে দলিয়ালে— ঘটনা দুয়োটা মুণ্ড বা দুয়োটা ঘটনা পুচ্ছ সৰল ঘটনা কিন্তু ঘটনা এটা মুণ্ড আৰু এটা পুচ্ছ যৌগিক ঘটনা। যেনে— (মুণ্ড পুচ্ছ) বা (পুচ্ছ মুণ্ড)।

বেলেগ এটা উদাহৰণ দিয়া হ'ল—

দুটা লুডুগুটি একেলগে দলিয়ালে ঘটনা মুঠ 12 অৰ্থাৎ (6, 6) এটা সৰল ঘটনা। আনহাতে ঘটনা মুঠ 7 এটা যৌগিক ঘটনা কিয়নো ঘটনা মুঠ 7 ক কেইবাটাও সৰল ঘটনাত ভাগ কৰা যায়। যেনে (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (4, 3) আৰু (3, 4)।

সমান সম্ভৱ ঘটনা (Equally likely event) **ঃ**

যদি কোনো এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত ফলাফলবোৰ (ঘটনাবোৰ) এনে ধৰণৰ যে কোনো এটা ঘটনা সংগঠিত হোৱাটো নিশ্চিতভাৱে ক'ব নোৱাৰি অৰ্থাৎ ঘটনাবোৰৰ যিকোনো এটা ঘটনা সংঘটিত হ'ব পাৰে— তেনেধৰণৰ ঘটনাবোৰক সমান সম্ভৱ ঘটনা বোলা হয়। এইক্ষেত্ৰত কোনো ঘটনাক অইন ঘটনাবোৰৰ পৰা আগতীয়াকৈ বাছনি কৰাৰ থল নাই।

উদাহৰণস্বৰূপে, মুদ্ৰা এটা দলিৱালে ঘটনা মুণ্ড অথবা পুচ্ছ যিকোনো এটা ঘটনা সংঘটিত হ'ব পাৰে, অৱশ্যে যদি মুদ্ৰাটো ত্ৰুটিমুক্ত আৰু পৰীক্ষাটো একেই চৰ্ত বা পৰিস্থিতিত সংঘটিত কৰা হয়।

সম্পূৰ্ণ ঘটনা ঃ এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ সকলো সম্ভাব্য ঘটনাবোৰক সম্পূৰ্ণ ঘটনা বোলা হয়। যেনে— লুডুগুটি এটা দলিয়ালে 6 টা ঘটনাৰ আৱিৰ্ভাৱ হয়, যেনে— 1, 2, 3, 4, 5, 6 আৰু সেয়েহে সম্পূৰ্ণ ঘটনাৰ সংখ্যা = 6.

অসম্ভৱ ঘটনা ঃ যদি কোনো এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত কোনো এটা ঘটনা সংঘটিত হ'বই নোৱাৰে তেন্তে তেনেকুৱা ঘটনাক অসম্ভৱ ঘটনা বুলি কোৱা হয়। যেনে— মুদ্ৰা এটা দলিয়ালে কমলাটেঙা এটা পোৱা অবাস্তৱ।

পৰস্পৰ বিবৰ্জিত ঘটনা ঃ যদি কোনো এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত এটা ঘটনা সংঘটিত হ'লে অইন এটা

ঘটনা সংঘটিত হ'বই নোৱাৰে তেনেহ'লে ঘটনা দুটাক পৰস্পৰ বিৰ্জিত ঘটনা বুলি কোৱা হয়। যেনে— মুদ্ৰা এটা দলিয়ালে মুণ্ড পোৱা হ'লে পুচ্ছ ঘটনাটো সংঘটিত হ'ব নোৱাৰে। সেয়েহে ঘটনা দুটা পৰস্পৰ বিৰ্জিত।

এটা ঘটনাৰ অনুকূল ঘটনা ঃ এটা ঘটনাৰ যিমান ধৰণে সংঘটিত হ'ব পাৰে তাকেই ঘটনাটোৰ অনুকূল ঘটনা বোলা হয়। যেনে— মোনা এটাত 5 টা বগা বল আৰু 4 টা ৰঙা বল আছে। মোনাটোৰ পৰা এটা বগা বল 5 ধৰণে উলিয়াব পাৰি। সেয়েহে ঘটনাটোৰ (বগা বল) অনুকূল ঘটনা 5 টা। ইয়াত মন কৰিবলগীয়া যে বলবিলাকক 1, 2, 3, 4, 5 নম্বৰেৰে সূচিত কৰা হৈছে। তাচৰ পেকেট এটাৰ পৰা এখিলা পাত লোৱা হ'লে পাতখন ৰঙা, কলাপাণ, ৰজা হোৱাৰ অনুকূল ঘটনা ক্ৰমে 26, 13 আৰু 4 হ'ব। আনহাতে দুখিলা পাত একেলগে লোৱা হ'লে পাতখন ৰজা হোৱাৰ অনুকূল ঘটনা হ'ব $4_{C_2} = 6$টা।

স্বতন্ত্ৰ আৰু পৰতন্ত্ৰ ঘটনা ঃ যদি কোনো এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত এটা ঘটনাৰ আৱিৰ্ভাৱ অইন কোনো ঘটনাৰ দ্বাৰা প্ৰভাৱান্বিত নহয়, তেন্তে উল্লিখিত ঘটনাটো স্বতন্ত্ৰ। আনহাতে পৰীক্ষাটোত যদি কোনো এটা ঘটনা সংঘটিত হ'লেহে অইন এটা ঘটনা সংঘটিত হ'ব তেন্তে দ্বিতীয় ঘটনাটোক পৰতন্ত্ৰ ঘটনা বোলা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, লুডুগুটি দলিওৱাৰ প্ৰত্যেকটো ঘটনা স্বতন্ত্ৰ।

আনহাতে বেগ এটাত 5 টা বগা আৰু 4 টা ৰঙা বল আছে। যদি এটাৰ পিছত এটা অৰ্থাৎ 2 টা বল উলিওৱা হ'ল আৰু বল দুটাৰ প্ৰথমটো বগা আৰু দ্বিতীয়টো ৰঙা বল পোৱা গ'ল। তেনেহ'লে দ্বিতীয় বলটো ৰঙা হ'বলৈ হ'লে প্ৰথমটো বগা হ'ব লাগিব। অৰ্থাৎ দ্বিতীয় বলটোৰ আৱিৰ্ভাৱ প্ৰথম বলটোৰ বগা হোৱাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে। সেয়েহে দ্বিতীয় বলটো ৰঙা— এই ঘটনাটো পৰতন্ত্ৰ আৰু প্ৰথমটো স্বতন্ত্ৰ।

বিন্যাস আৰু জোঁটৰ ধাৰণা (Concept of Permutation and Combination) ঃ

বিন্যাস ঃ

বিভিন্ন বস্তুৰ পৰা এক বা ততোধিক বস্তু লৈ সজোৱাকেই বিন্যাস বুলি কোৱা হয়। বস্তুবোৰ সজোৱাৰ সময়ত সজোৱাৰ ক্ৰম বিবেচনা কৰা হয়। যেনে— ৰঙা, নীলা আৰু বগা এই তিনিবিধ ৰঙৰ দুবিধ ৰঙ একেলগে লৈ সজোৱা হ'লে ৰঙা, নীলা; নীলা, ৰঙা; নীলা, বগা; বগা, নীলা; ৰঙা, বগা; বগা, ৰঙা এই ছয়ধৰণে সজাব পাৰি।

ওপৰৰ উদাহৰণটো সাংকেতিক চিন 3_{p_2} ধৰণে লিখা হয়। 'P' হ'ল বিন্যাস (Permutation)

অৰ্থাৎ, $3_{p_2} = 6$

বিন্যাসৰ সূত্ৰ ঃ

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুৰ পৰা r–সংখ্যক ($r \leq n$) বস্তু লৈ বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ল—

$$= n_{p_r} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$$

টোকা ঃ

$\underline{|n} = 1 \times 23 \ldots . n = n(n+1)(n-2) \ldots 3.2$

'$\underline{|}$' চিনটোক ক্ৰমগুণিতক চিন বোলা হয় (factorial notation)

উদাহৰণ 1 ঃ (i) $3_{p_2} = \frac{\lfloor 3}{\lfloor 3-2} = \frac{3.2.1}{\lfloor 1=1} = 6$

(ii) $8_{p_3} = \frac{\lfloor 8}{\lfloor 8-3} = \frac{\lfloor 8}{\lfloor 5} = \frac{8.7.6\lfloor 5}{\lfloor 5} = 336$

বিন্যাসৰ এটা প্ৰয়োজনীয় বিধি ঃ

যদি কোনো এটা কাম ‘m’ ধৰণে কৰা হয় আৰু ইয়াৰ প্ৰত্যেক ধৰণৰ লগত দ্বিতীয় এটা কাম ‘n’ ধৰণে কৰা হয় তেন্তে দুয়োটা কাম একেলগে $m \times n$ ধৰণে কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ ঃ দুটা লুডুগুটি একেলগে নিক্ষেপ কৰিলে দুয়োটা লুডুগুটি একেলগে 6×6 ধৰণে =36 ধৰণে নিক্ষেপ কৰিব পৰা যাব। কিয়নো প্ৰথম লুডুগুটিটোৱে 1 বা 2 বা 3 বা 4 বা 5 বা 6 সংখ্যা দেখুৱাব। অৰ্থাৎ 6 ধৰণে পৰিব আৰু ইয়াৰ প্ৰত্যেক ধৰণৰ লগত দ্বিতীয় লুডুগুটি 6 ধৰণে পৰিব। অৰ্থাৎ, (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) 6 ধৰণে পৰিব।

এতেকে দুয়োটা লুডুগুটি একেলগে 6×6=36 ধৰণে পৰিব।

জোঁটৰ ধাৰণা ঃ জোঁটৰ অৰ্থ হ’ল বিভাগ কৰা বা বাছনি কৰা। যেনে— ৰঙা, নীলা আৰু বগা— এই তিনিবিধ ৰঙৰ দুবিধ ৰঙ একেলগে লৈ ৰঙা, নীলা; নীলা, বগা আৰু বগা, নীলা— এই তিনিটা বিভাগ বা তিনি ধৰণে বাছনি কৰিব পাৰি)।

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুৰ পৰা r সংখ্যক $(r \leq n)$ বস্তু লৈ জোঁটৰ সংখ্যা হ’ব—

$$n_{C_r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \; \lfloor n-r}$$

যেনে ঃ $$5_{C_2} = \frac{\lfloor 5}{\lfloor 2 \; \lfloor 5-2} = \frac{5.4\lfloor 3}{2 \times 1 \times \lfloor 3} = 10$$

টোকা ঃ $\lfloor O = 1$

সম্পূৰ্ণ ঘটনাৰ কেইটামান উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1 ঃ তিনিটা মুদ্ৰা একেলগে দলিয়ালে সম্পূৰ্ণ ঘটনাবোৰ দেখুউৱা।

সমাধান ঃ সম্পূৰ্ণ ঘটনাবোৰ তলত দিয়া ধৰণৰ হ’ব—

{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H T T), (T T T), (T T H), (T H T), (T H H)}

অৰ্থাৎ 8 টা ঘটনা অৰ্থাৎ 3 টা মুদ্ৰা একেলগে $2^3=8$ ধৰণে কৰিব পাৰে।

উদাহৰণ 2 ঃ বেগ এটাত 4টা বগা আৰু 3 টা ক'লা বল আছে। 3 টা বল একেলগে যাদৃচ্ছিক ধৰণে লোৱা হ'লে সম্পূৰ্ণ ঘটনাকেইটা হ'ব? বল দুটাৰ ভিতৰত (i) 2টা বগা আৰু 1 টা ক'লা (ii) 2 টা ক'লা আৰু 1টা বগা বল কিমান ধৰণে লোৱা যাব? (iii) প্ৰথম আৰু দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰত অনুকূল ঘটনাৰ সংখ্যা কিমান হ'ব?

সমাধান ঃ ইয়াত মুঠ বলৰ সংখ্যা $=4+3=7$ টা

7 টা বলৰ পৰা 3টা বল $7_{C_3} = \frac{\underline{|7}}{\underline{|3}\ \underline{|7-3}} \times \frac{7.6.5\underline{|4}}{3.2.1\underline{|4}} = 35$ ধৰণে ল'ব পাৰি অৰ্থাৎ

সম্পূৰ্ণ ঘটনাৰ সংখ্যা $=35$

(i) 2টা বগা আৰু 1টা ক'লা বল $4_{C_2} \times 3_{C_1} = \frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\ \underline{|4-2}} \times \frac{\underline{|3}}{\underline{|1}\ \underline{|3}-1}$

$= \frac{4.3.\underline{|2}}{\underline{|2}\ .2\times 1} \times \frac{3\underline{|2}}{1\underline{|2}}$

$=$ 18 ধৰণে লোৱা যাব।

(ii) 2টা ক'লা আৰু 1টা বগা বল $3_{C_2} \times 4_{C_1} = 3 \times 4 = 12$ ধৰণে লোৱা যাব।

(iii) যদি 3 টা বল একেলগে যাদৃচ্ছিক ধৰণে লোৱা হয়, তেন্তে প্ৰথম ক্ষেত্ৰত অনুকূল ঘটনা = 18 আৰু দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰত অনুকূল ঘটনা =12

সম্ভাৱিকতাৰ সংজ্ঞা (Mathamatical or Classical Definition of Probability) ঃ

সংজ্ঞা ঃ যদি এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত পৰস্পৰ বিবৰ্জিত, সমান সম্ভাৱনা থকা n সংখ্যক সম্পূৰ্ণ ফলাফল পোৱা হয় আৰু ফলাফলবোৰৰ ভিতৰত m সংখ্যক ফলাফল কোনো এটা ঘটনা A ৰ অনুকূল হয় তেনেহ'লে A ঘটনাটোৰ সম্ভাৱিকতা হ'ব—

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{A ঘটনাটোৰ সপক্ষে অনুকূল ঘটনা}}{\text{সম্পূৰ্ণ (মুঠ) ঘটনা}}$$

টোকা ঃ

(1) ঘটনাবোৰক ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ ডাঙৰ আখৰেৰে চিহ্নিত কৰা হয় আৰু ঘটনাৰ সম্ভাৱনাক P (ঘটনা)ৰে লিখা হয়।

(2) A-ৰ পৰিপূৰক (A ঘটনাটো সংগঠিত নোহোৱা) ঘটনাক $\overline{A}$ বা A^c বা A' আখৰেৰে চিহ্নিত কৰা হয়।

$$\therefore\ P(\overline{A}) = \frac{\text{A-ঘটনাটোৰ প্ৰতিকূল ঘটনা}}{\text{মুঠ ঘটনা}}$$

$$= \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$$

এতেকে, $\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$

$\because$ m আৰু n ঋণাত্মক সংখ্যা নহয়, সেয়েহে $P(A) \geq 0$, [$P(A) \nless 0$ A ঘটনাৰ সম্ভাৱিকতা ঋণাত্মক নহয়।]

আৰু $\because\ m \leq n$ হয়, সেয়েহে $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$ হ'ব।

টোকা ঃ

1. নিশ্চিত ঘটনাৰ সম্ভাৱিকতা 1 হ'ব।
2. অস্বাভাৱিক বা অবাস্তৱ ঘটনাৰ সম্ভাৱিকতা '0' হ'ব।
3. অনিশ্চিত ঘটনাৰ সম্ভাৱিকা 0 আৰু 1 ৰ মাজত থাকে যদি A ঘটনাটো অনিশ্চিত হয় তেনেহ'লে— $0 < P(A) < 1$ অৰ্থাৎ, ঘটনা এটাৰ সম্ভাৱিকতাৰ সৰ্বোচ্চ মান 1 আৰু সৰ্বনিম্ন মান 0 হয়।
4. এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ আটাইকেইটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিকতাৰ যোগফল =1 হ'ব।

উদাহৰণস্বৰূপে,

1. মুদ্ৰা এটা এবাৰ দলিয়ালে, মুণ্ড বা পুচ্ছ পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $= \frac{1}{2}$
2. লুডুগুটি এটা এবাৰ দলিয়ালে যিকোনো এটা মান 1 বা 2 বা 3 বা 4 বা 5 বা 6 ৰ সম্ভাৱিকতা $= \frac{1}{6}$
3. তাচৰ পেকেট এটাৰ পৰা এখিলা পাত যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল—

   (a) পাতখন ৰজা বা ৰাণী বা টেক্কা বা গোলাম হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $= \frac{4_{C_2}}{52_{C_1}} = \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$

   (b) আনহাতে পাতখন ৰঙা বা ক'লা ৰঙৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $= \frac{26_{C_1}}{52_{C_1}} = \frac{1}{2}$

   (c) পাতখন লালপাণ বা কলাপাণ বা ইটা বা কলাফুল হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $= \frac{13_{C_1}}{52_{C_1}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

   (d) পাতখনৰ নম্বৰ 10 হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $= \frac{4_{C_1}}{52_{C_1}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

কোনো ঘটনাৰ অনুকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনা আৰু ঘটনাটোৰ অনুকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনা (Odds in favour and against an event) ঃ

কোনো ঘটনাৰ অনুকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনা হ'ল ঘটনাটো যিমান ধৰণে সংগঠিত হ'ব পাৰে আৰু যিমান ধৰণে সংগঠিত হ'ব নোৱাৰাৰ অনুপাত। উদাহৰণস্বৰূপে, n সংখ্যক ঘটনাৰ ভিতৰত ঘটনাটোৰ অনুকূলে 'm' টা ঘটনা থাকে, তেনেহ'লে ঘটনাটোৰ অনুকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনা $=\frac{m}{n-m}$

আকৌ ঘটনাটোৰ প্ৰতিকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনা হ'ল ঘটনাটো যিমান ধৰণে নঘটে আৰু যিমান ধৰণে ঘটাৰ অনুপাত।

আগৰ উদাহৰণটোত ঘটনাটোৰ প্ৰতিকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনা $=\frac{n-m}{m}$

ওপৰৰ সূত্ৰকেইটা বেলেগ ধৰণেও দিব পাৰি—

(1) A ঘটনাটোৰ অনুকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনা $=\frac{P(A)}{p(\overline{A})}=\frac{\frac{m}{n}}{\frac{n-m}{n}}=\frac{m}{n}\times\frac{n}{n-m}=\frac{m}{n-m}$

(2) A ঘটনাটোৰ প্ৰতিকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনা $=\frac{P(\overline{A})}{P(A)}=\frac{\frac{n-m}{n}}{\frac{m}{n}}=\frac{n-m}{n}\times\frac{n}{m}=\frac{n-m}{m}$

উদাহৰণ ঃ X-এ অংক এটা সমাধা কৰাৰ প্ৰতিকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনাটো 4:3-ত সংগঠিত হয়, আৰু Y-এ অংকটো সমাধা কৰাৰ অনুকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনাটো 7:8-ত সংঘটিত হ'লে X আৰু Y- এ অংকটো সমাধা কৰা আৰু নকৰাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

সমাধান ঃ X-এ অংকটো সমাধা কৰাৰ সম্ভাৱিকতা $=\frac{3}{4+3}=\frac{3}{7}$

X-এ অংকটো সমাধা নকৰাৰ সম্ভাৱিকতা $=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

Y-এ অংকটো সমাধা কৰাৰ সম্ভাৱিকতা $=\frac{7}{7+8}=\frac{7}{15}$

Y-এ অংকটো সমাধা নকৰাৰ সম্ভাৱিকতা $=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$

সম্ভাৱিকতাৰ প্ৰথম সংজ্ঞাটোৰ সীমাবদ্ধতা ঃ

1. যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাটোৰ ফলাফল অসীম সংখ্যক হ'লে সংজ্ঞাটো প্ৰযোজ্য নহয়।
2. সকলো ফলাফলবোৰ সমান সম্ভাৱনাপূৰ্ণ নহ'বও পাৰে।
3. সংজ্ঞাটো পৰীক্ষা নকৰাকৈ ফলাফলবোৰৰ সম্বন্ধে অভিধাৰণাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল।

2. সম্ভাৱিকতাৰ পৰিসাংখ্যিকীয় বা আপেক্ষিক বাৰংবাৰতা নিৰ্ভৰ সংজ্ঞা (Statistical defn or Relative frequency approach to probability) ঃ

সংজ্ঞা ঃ একেই পৰিস্থিতিত আৰু একেই ধৰণে এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা বাৰংবাৰতা সংগঠিত কৰিলে মুঠ n/ সংখ্যক ঘটনা (ফলাফল) ৰ ভিতৰত যদি এটা ঘটনা 'A', m সংখ্যক বাৰ আৱিৰ্ভাব হয় তেন্তে $\frac{m}{n}$ অনুপাতটোৰ সীমামূৰীয়া মানক (n-ৰ মান অসীম হ'লে) ঘটনাটোৰ সম্ভাৱিকতাৰ মান বোলা হয়, অৱশ্যে সীমামূৰীয়া মানটো সসীম বুলি ধৰা হৈছে। প্ৰতীক চিনত লিখিলে—

$$P(A)= \underset{n\to\alpha}{\text{সীমা}} \left(\frac{m}{n}\right), \frac{m}{n}\text{-ক আপেক্ষিক বাৰংবাৰতা বোলা হয়।}$$

সুবিধা ঃ

1. যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা কৰাৰ পিছতহে কোনো ঘটনাৰ সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা হয়।
2. পৰিসাংখ্যিকীয় সংজ্ঞাটোৰ দ্বাৰা নিৰ্ণয় কৰা কোনো ঘটনাৰ সম্ভাৱিকতাই গাণিতিক সংজ্ঞাটোৰ সত্যাপন কৰে। উদাহৰণস্বৰূপে, মুদ্ৰা 20 বাৰ দলিয়ালে প্ৰথম সংজ্ঞা মতে 10 টা মুণ্ড আৰু 10 টা পুচ্ছ পাব লাগিব, কিয়নো মুণ্ড বা পুচ্ছ পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $\frac{1}{2}$। কিন্তু প্ৰকৃততে 14 টা মুণ্ড আৰু 6 টা পুচ্ছ পোৱা গ'ল। এতেকে, 20 বাৰ দলিওৱাৰ পিছত মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা হ'ল $\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$ অৱশ্যে পৰীক্ষাটো অসীম সংখ্যক বাৰ সংগঠিত কৰিলে সম্ভাৱিকতাৰ গাণিতিক আৰু পৰিসাংখ্যিকীয় সংজ্ঞাৰ মাজত পাৰ্থক্য বেছি নাথাকে।
3. পৰীক্ষাটো সসীম সংখ্যক বাৰ সংগঠিত কৰা নহয় আৰু প্ৰত্যেকটো ফলাফল (ঘটনা) সমান সম্ভাৱনাপূৰ্ণ নহয়।

সীমাবদ্ধতা ঃ

1. পৰীক্ষাটো একেই অৱস্থাত আৰু একেই পৰিস্থিতিত কৰা সম্ভৱ নহ'বও পাৰে, কিয়নো পৰীক্ষাটো অসীম সংখ্যক বাৰ কৰিব লাগিব।
2. $\frac{m}{n}$ অনুপাতটোৰ মান সসীম নহ'বও পাৰে যদি n-ৰ মান অসীম হয়।
3. বাস্তৱ জগতৰ যিকোনো সমস্যাৰ ফলাফল সসীম (অসীম নহয়)।
4. পৰীক্ষাটো অসীম সংখ্যক বাৰ কৰিব লাগে— এই কথাষাৰ এটা অভিধাৰণাহে।

কেইটামান ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

1. ত্ৰুটি নথকা লুডুগুটি এটা দলিয়াই (a) যুগ্ম সংখ্যা (b) 4 তকৈ ডাঙৰ সংখ্যা (c) 4 সংখ্যাটো পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

2. এযোৰ ত্ৰুটি নথকা লুডুগুটি দলিওৱা হ'ল। সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা—

   (a) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 7 (b) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 8 (c) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল <10

   (d) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল < 5 (e) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 10 ৰ কম নহয়।

   (f) সংখ্যা দুটাৰ গুণফল 4 (g) সংখ্যা দুটা যুগ্ম (h) সংখ্যা দুটা অযুগ্ম।

   (i) সংখ্যা দুটাৰ এটা যুগ্ম আৰু অইনটো অযুগ্ম।

3. 52 খন পাত থকা তাচৰ পেকেট এটাৰ পৰা 3 খন পাত যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'লে সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা—

   (a) পাতকেইখন ৰজা, ৰাণী আৰু গোলাম (b) আটাইকেইখন টেক্কা

   (c) আটাইকেইখন কলাপাণৰ পাত (d) দুখন ৰঙা আৰু এখন ক'লা

   (e) আটাইকেইখন ছবি পাত থকা পাত (f) দুটা টেক্কা আৰু এজনী ৰাণী

   (g) পাতকেইখন ছবি থকা নহয় (h) দুখন ক'লাপাণৰ আৰু এখন ৰজা

   (i) এখন লালপাণ আৰু দুখন টেক্কা।

4. 20 জন মানুহৰ ভিতৰত 5 জন বি. কম পাছ 120 জন মানুহৰ পৰা 3 জনক যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হ'ল। সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা।

   (a) 3 জনেই বি. কম পাছ (b) অতি কমেও 31 জন বি. কম. পাছ।

5. লিপিয়েৰ/লিপিয়াৰ নহয় বছৰ দুটাত 53 টা দেখুৱা থকাৰ সম্ভাৱনা কিমান?

6. 100 জন ল'ৰা-ছোৱালীৰ ভিতৰত 55 জন হ'ল ছোৱালী। 36 জন ল'ৰাই সংখ্যা বিজ্ঞান পঢ়ে আৰু 13 জনী ছোৱালীয়ে সংখ্যাবিজ্ঞান নপঢ়ে। ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলৰ পৰা এজন ল'ৰা ছাত্ৰ বাছনি কৰা হ'ল। বাছনি কৰা ল'ৰাজনে সংখ্যাবিজ্ঞান নপঢ়াৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

7. তাচৰ পেকেট এটাৰ পৰা এখিলা পাত যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল। পাতখন

   (i) ৰজা অথবা ৰাণী হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

   (ii) পাতখন স্পেড (ক'লাপাণ) অথবা লালপাণ হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

8. বেগ এটাত 13 টা বল আছে। বলকেইটাক 1 ৰ পৰা 13 নম্বৰেৰে সূচিত কৰা হৈছে। বেগটোৰ পৰা এটা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল। বলটোৰ নম্বৰ 3 অথবা 4 ৰ কোনো গুণিতক সংখ্যা হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

9. তলৰ তথ্যখিনিত 6 জন বনুৱাৰ দৈনিক মজুৰি দিয়া হ'ল—

   67, 89, 78, 79, 63, 82 (টকা)

   ইয়াৰে 2 জন বনুৱাক যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল।

   সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা— অতি কমেও এজন বনুৱাৰ মজুৰি গড় মজুৰিতকৈ কম।

10. 3 জন অৰ্থনীতিবিদ, 4 জন অভিযন্তা, 2 জন পৰিসংখ্যানবিদ আৰু 1 জন ডাক্তৰৰ পৰা 4 জনীয়া কমিটী এখন গঠন কৰিব লাগে। সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা।
(i) কমিটীত প্ৰত্যেক বিধ মানুহৰ এজন অন্তৰ্ভুক্ত হৈছে।
(ii) কমিটীত অতি কমেও এজন অৰ্থনীতিবিদ অন্তৰ্ভুক্ত হ'ব।
(iii) কমিটীত ডাক্তৰজন আৰু বেলেগ বিধৰ 3 জন মানুহ অন্তৰ্ভুক্ত হ'ব।

11. বেগ এটাত 10 টা বগা আৰু 8 টা ৰঙা বল আছে। বেগটোৰ পৰা 2 টা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল। বল দুটাৰ এটা বগা আৰু এটা ৰঙা হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

সমাধান ঃ

1. লুডুগুটি এটাত যুগ্ম সংখ্যা 3 টা (যেনে— 2, 4 আৰু 6)

(a) যুগ্ম সংখ্যাটো 3 ধৰণে (অৰ্থাৎ ঃ সংগঠিত হ'ব পাৰে।

$\therefore$ সংখ্যাটো যুগ্ম হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $=\frac{3}{6}$ ইয়াত মুঠ ঘটনা $=6$ টা$=\frac{1}{2}$

(b) 4-তকৈ ডাঙৰ সংখ্যা দুটা (যেনে— 5 আৰু 6) আছে।

$\therefore$ সংখ্যাটো 4 তকৈ ডাঙৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(c) সংখ্যাটো 4 হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $=1$

2. এযোৰ লুডুগুটি দলিওৱা হ'ল।

(a) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 7 তলত দিয়া ধৰণে সংগঠিত হ'ব পাৰে—

(2,5), (5,2), (3,4), (4,3), (1,6) আৰু (6,1) অৰ্থাৎ 6 ধৰণে হ'ল অনুকূল ঘটনা

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{6}{36}$, ইয়াত মুঠ ঘটনা$=6\times6=36=\frac{1}{6}$

(b) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 8 তলত দিয়া ধৰণে সংগঠিত হ'ব পাৰে—

(2,6), (6,2), (3,5), (5,3) আৰু (4,4) অৰ্থাৎ 5 ধৰণ হ'ল অনুকূল ঘটনা।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{5}{36}$

(c) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল >10 দুইধৰণে হ'ব পাৰে যেনে— যোগফল H

সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 11, দুই ধৰণে অৰ্থাৎ (5,6) আৰু (6,5) সংগঠিত হ'ব পাৰে।

সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 12, এক ধৰণে অৰ্থাৎ (6, 6) সংগঠিত হ'ব পাৰে।

এতেকে, ইয়াত মুঠ অনুকূল ঘটনা হ'ল (2+1)=3 টা

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(d) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল <5 অৰ্থাৎ যোগফল 2 অথবা 3 অথবা 4 হ'ব।

সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 2 ৰ অনুকূল ঘটনা 1 {অৰ্থাৎ (1,1)}

সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 3 ৰ অনুকূল ঘটনা 2 {অৰ্থাৎ (1,2), (2,1)}

সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 4 ৰ অনুকূল ঘটনা 3 {অৰ্থাৎ (1,3), (3,1) আৰু (2,2)}

$\therefore$ মুঠ অনুকূল ঘটনা = 1+2+3=6

সেয়েহে, নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{3}{36}=\frac{1}{6}$

(e) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 10 ৰ কম নহয় বুলিলে যোগফল 10, 11 অথবা 12 বুজায়।

সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 10 ৰ অনুকূল ঘটনা 3 টা {অৰ্থাৎ (5,5), 6,4) আৰু (4,6)}

সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 11 ৰ অনুকূল ঘটনা 2 টা {অৰ্থাৎ (6,5), (5,6)}

সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 12 ৰ অনুকূল ঘটনা 1 টা {অৰ্থাৎ (6,6)}

$\therefore$ মুঠ অনুকূল ঘটনা = 3+2+1=6 টা

সেয়েহে, নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(f) সংখ্যা দুটাৰ গুণফল 4 ৰ অনুকূল ঘটনা 3 টা {অৰ্থাৎ, (2,2), (1,4), (4,1)}

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(g) ইয়াত যুগ্ম সংখ্যা হ'ল 3 টা, অৰ্থাৎ (2, 4, 6)

সংখ্যা দুটা যুগ্ম তলত দিয়া ধৰণে সংগঠিত হ'ব পাৰে—

(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (4, 4), (6, 6) অৰ্থাৎ অনুকূল ঘটনা 9 টা।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

(h) ইয়াত অযুগ্ম সংখ্যা 3 টা অৰ্থাৎ (1, 3, 5)

আগৰ দৰে, নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

(i) সংখ্যা দুটাৰ 1 টা যুগ্ম আৰু অইনটো অযুগ্ম তলত দিয়া ধৰণে সংগঠিত হ'ব পাৰে —

(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (4, 1), (6, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (2, 3), (4, 3), (6, 3), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (2, 5), (4, 5), (6, 5) অৰ্থাৎ অনুকূল ঘটনা 18 টা

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

3. (a) তাচৰ পেকেটত 4 জন ৰজা, 4 জনী ৰাণী আৰু 4 জন গোলাম আছে। তাচৰ পেকেটৰ পৰা 3 খন পাত যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'লে—

∴ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \frac{4_{C_1} \times 4_{C_1} \times 4_{C_1}}{52_{C_3}}$, ভগ্নাংশটোত লব হ'ল অনুকূল ঘটনা আৰু হৰ হ'ল মুঠ ঘটনা

$= \frac{64}{22100} = \frac{16}{5525}$

$\left\{ 52_{C_3} = \frac{^{26}\not{52}.\not{51}^{17}.50}{\not{6}_2} = 22,100 \right.$

(b) তাচৰ পেকেটত 4 টা টেক্কা আছে।

∴ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \frac{4_{C_3}}{52_{C_3}} = \frac{4}{22100} \times \frac{1}{5525}$

(c) তাচৰ পেকেটত 13 খন কলাপাণৰ পাত আছে

∴ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \frac{13_{C_3}}{52_{C_3}} = \frac{286}{22100} = \frac{143}{11050}$

(d) তাচৰ পেকেটত 26 খন ৰঙা পাত আৰু 26 খন ক'লা পাত আছে।

∴ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \frac{26_{C_2} \times 26_{C_1}}{52_{C_3}}$ (ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে নিজে গণনা কৰিব)

(e) তাচৰ পেকেটত 12 খন ছবি থকা পাত আছে (ৰজা 4 জন, ৰাণী 4 জনী আৰু গোলাম 4 জন)

∴ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা$= \frac{12_{C_3}}{52_{C_3}}$

(f) তাচৰ পেকেটত 4 টা টেক্কা আৰু 4 জনী ৰাণী আছে।

∴ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \frac{4_{C_2} \times 4_{C_1}}{52_{C_3}}$

(g) নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \frac{40_{C_3}}{52_{C_3}}$

(h) নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা$= \frac{12_{C_2} \times 3_{C_1}}{52_{C_3}}$

(i) নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \frac{12_{C_1} \times 3_{C_2}}{52_{C_3}}$

4. 20 জন মানুহৰ ভিতৰত 5 জন বি. কম পাছে আৰু 15 জন অইন মানুহ আৰু 20 জনৰ পৰা 3 জন মানুহক যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হৈছে।

(a) নিৰ্ণেয় সম্ভাৰিকতা $= \frac{5_{C_3}}{20_{C_3}}$

(b) বি. কম পাছ নথকা মানুহৰ সম্ভাৰিকতা $= \frac{15_{C_3} \times 5_{C_0}}{20_{C_3}}$ $\because 5_{C_0} = 1$

$\therefore$ অতি কমেও 1 জন বি. কম পাছ থকা মানুহৰ সম্ভাৰিকতা $= 1 - \frac{15_{C_3}}{20_{C_3}}$

5. লিপিয়াৰ বছৰত দিনৰ সংখ্যা =366=52 সপ্তাহ +2 দিন 52 সপ্তাহত 52 টা দেওবাৰ আছে, অতিৰিক্ত 2 টা দিন (দেওবাৰ, সোম), (সোম, মঙল), (মঙল, বুধ), (বুধ, বৃহস্পতি), (বৃহস্পতি, শুক্ৰ), (শুক্ৰ, শনি), (শনি, দেওবাৰ) হ'ব পাৰে। অৰ্থাৎ মুঠ ঘটনা = 7 টা। ইয়াৰে দুটা ঘটনা যেনে (দেওবাৰ, সোম) আৰু (শনি, দেওবাৰ)ৰ ভিতৰত 1টা দেওবাৰ আছে।

$\therefore$ অনুকূল ঘটনা = 2

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৰিকতা $= \frac{2}{7}$

লিপিয়াৰ নোহোৱা বছৰত 365 দিন অৰ্থাৎ (52 সপ্তাহ + 1 দিন)

$\therefore$ বছৰটোত 53 টা দেওবাৰ হ'বলৈ হ'লে অতিৰিক্ত দিনটো দেওবাৰ হ'ব লাগিব।

$\therefore$ অনুকূল ঘটনা $= 1$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৰিকতা$= \frac{1}{7}$

6. ইয়াত, ল'ৰাৰ সংখ্যা $= 45$

ছোৱালীৰ সংখ্যা $= 55$

সংখ্যা বিজ্ঞান পঢ়া ল'ৰাৰ সংখ্যা = 36, সংখ্যাবিজ্ঞান পঢ়া ছোৱালীৰ সংখ্যা = 55–13 = 42

$\therefore$ সংখ্যাবিজ্ঞান নপঢ়া ল'ৰাৰ সংখ্যা =9 সংখ্যাবিজ্ঞান নপঢ়া ছোৱালীৰ সংখ্যা = 13

ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলৰ পৰা এজন ল'ৰা ছাত্ৰক বাছনি কৰা হ'ল।

$\therefore$ বাছনি কৰা ল'ৰা ছাত্ৰজনে সংখ্যাবিজ্ঞান পঢ়াৰ সম্ভাৰিকতা $\frac{36_{C_1}}{45_{C_1}} = \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$

এতেকে, ল'ৰা ছাত্ৰজনে সংখ্যাবিজ্ঞান নপঢ়াৰ সম্ভাৰিকতা $= 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

7. তাচৰ পেকেটত 4 জন ৰজা, 4 জনী ৰাণী, 13 খন কলাপাণ আৰু 13 খন লালপাণৰ পাত আছে।

(i) নিৰ্ণেয় সম্ভাৰিকতা $= \frac{4_{C_1} + 4_{C_1}}{52_{C_1}}$

$= \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$

ইয়াত, অনুকূল ঘটনা $= 4_{C_1} + 4_{C_1} = 8$

মুঠ ঘটনা $= 52_{C_1} = 52$

(ii) নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\dfrac{13_{C_1}+13_{C_1}}{52_{C_1}}=\dfrac{26}{52}=\dfrac{1}{2}$

8. ইয়াত, বলৰ সংখ্যা 13 টা (বলকেইটাক 1 ৰ পৰা 13 নম্বৰেৰে সূচিত কৰা হৈছে) আৰু 1 টা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হৈছে।

এতিয়া, 3 ৰ গুণিতক সংখ্যা হ'ল— 3, 6, 9, 12 অৰ্থাৎ 4 টা

4 ৰ গুণিতক সংখ্যা হ'ল— 4, 8, 12 অৰ্থাৎ 3 টা

কিন্তু 12 নম্বৰ বলটো 3 আৰু 4 ৰ দুয়োৰে গুণিতক

সেয়েহে, অনুকূল ঘটনা = 4+3–1=6 টা

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\dfrac{6}{13}$, মুঠ ঘটনা $=13_{C_1}=13$

9. ইয়াত, মজুৰি সংখ্যা $=6$

গড় মজুৰি $=\dfrac{67+89+78+79+63+82}{6}=\dfrac{458}{6}=76.33$ (প্ৰায়) টকা

গড় মজুৰি 76.33 টকাতকৈ কম পোৱা মজুৰৰ সংখ্যা =2 জন

আৰু মজুৰি 76.33 টকাতকৈ বেছি পোৱা মজুৰৰ সংখ্যা = 4 জন

$\therefore$ মজুৰ এজনে মজুৰি 76.33 টকা বা বেছি পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $=\dfrac{4_{C_2}}{6_{C_2}}=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$

$\therefore$ অতি কমেও এজন বনুৱাৰ মজুৰি গড় মজুৰিতকৈ কম হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $=1-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$

10. ইয়াত,

অৰ্থনীতিবিদৰ সংখ্যা	=	3
অভিযন্তাৰ সংখ্যা	=	4
পৰিসংখ্যানবিদৰ সংখ্যা	=	2
ডাক্তৰৰ সংখ্যা	=	1
∴ মুঠ মানুহৰ সংখ্যা	=	10

মানুহবিলাকৰ পৰা 4 জনীয়া কমিটী এটা গঠন কৰিব লাগে।

(i) নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\dfrac{3_{C_1}\times 4_{C_1}\times 2_{C_1}\times 1_{C_1}}{10_{C_4}}$ $\because 10_{C_1}=\dfrac{10.9^3.8.7}{4.3.2}=210$

$=\dfrac{24}{210}=\dfrac{4}{35}$

(ii) অতি কমেও এজন অৰ্থনীতিবিদ অন্তৰ্ভুক্ত হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা

= 1– কমিটীত এজনো অৰ্থনীতিবিদ অন্তৰ্ভুক্ত নোহোৱাৰ সম্ভাৱিকতা

যদি কমিটীত এজনো অৰ্থনীতিবিদ অন্তৰ্ভুক্ত কৰিব নালাগে, তেনেহ'লে কমিটীত 4 জন সদস্যক 4 জন অভিযন্তা, 2 জন পৰিসংখ্যানবিদ আৰু 1 জন ডাক্তৰৰ পৰা ল'ব লাগিব। অৰ্থাৎ বাকী থকা 7 জনৰ (4+2+1) পৰা 4 জনক ল'ব লাগিব আৰু 7 জনৰ পৰা 4 জনক $7_{C_4} = 35$ ধৰণে ল'ব পাৰি।

$\therefore$ কমিটীত অৰ্থনীতিবিদ অন্তৰ্ভুক্ত নোহোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $= \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$

এতেকে, কমিটীত অতি কমেও এজন অৰ্থনীতিবিদ অন্তৰ্ভুক্ত হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

(iii) কমিটীত 1 জন ডাক্তৰ আৰু অইন 3 জন সদস্য অন্তৰ্ভুক্ত হোৱাৰ অনুকূল ঘটনা—

$= 1 \times 9_{C_3} = 84$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \frac{84}{210} = \frac{2}{5}$

11. ইয়াত, বগা বলৰ সংখ্যা = 10

ৰঙা বলৰ সংখ্যা = 80

$\therefore$ মুঠ বলৰ সংখ্যা = 18

$\therefore$ বেগটোৰ পৰা 2 টা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হৈছে।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \frac{10_{C_1} \times 8_{C_1}}{18_{C_2}} = \frac{80}{153}$

অনুশীলনী

1. সম্ভাৱিকতাৰ অৰ্থ কি? আৰ্থ-সামাজিক ব্যৱসায়িক আৰু প্ৰকৃতি বিজ্ঞানত ইয়াৰ ভূমিকা কি?
2. **টোকা লিখা ঃ** পৰীক্ষা, যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা, ঘটনা, পৰস্পৰ বিবৰ্জিত ঘটনা, (উদাহৰণেৰে ব্যাখ্যা কৰা) সম্পূৰ্ণ ঘটনা, কোনো ঘটনাৰ অনুকূল ঘটনা, অসম্ভৱ ঘটনা, সৰল আৰু যৌগিক ঘটনা, স্বতন্ত্ৰ আৰু পৰতন্ত্ৰ ঘটনা।
3. সম্ভাৱিকতাৰ গাণিতিক আৰু সাংখ্যিকীয় সংজ্ঞা লিখা। সংজ্ঞা দুটাৰ সীমাবদ্ধতা কি কি?
4. প্ৰমাণ কৰা ঃ $0 \leq P(A) \leq 1$
5. দুটা পৰস্পৰ বিবৰ্জিত ঘটনাৰ উদাহৰণ দিয়া।
6. তলৰ প্ৰশ্নকেইটাৰ সম্পূৰ্ণ ঘটনা আৰু অনুকূল ঘটনাবোৰ নিৰ্ণয় কৰা —
   (a) লুডুগুটি দুটা একেলগে দলিয়ালে এটাত 6 আনটোত 2 দেখুৱাৰ ——
   (b) বেগ এটাত 8 টা বগা আৰু 5 টা ৰঙা বল আছে। 3 টা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'লে দুটা বগা আৰু 1 টা ৰঙা বল পোৱাৰ, 3 টা বগা বল পোৱাৰ ——
   (c) তাচৰ পেকেট এটাৰ পৰা 4 খন পাত যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'লে 3 খন পাত লালপাণৰ আৰু এখন ক'লাপাণৰ; 2 খন পাত ৰজা আৰু 2 খন পাত ৰাণী; এখন পাত টেক্কা আৰু 3 খন পাত লালপাণৰ; এখন পাত কলাপান, এখন পাত ৰজা, এখন পাত লালপানৰ আৰু অইনখন লালপাণৰ ৰাণী ......, ..., ..., ..., ..., ...
7. এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ আটাইকেইটা ঘটনাৰ মুঠ সম্ভাৱিকতাৰ মান কিমান? অতি কমেও এটা ঘটনা সংগঠিত হোৱা আৰু খুব বেছি হ'লে এটা ঘটনা সংগঠিত হোৱা— এই দুষাৰ কথাৰ পাৰ্থক্য কি?

   সম্ভাৱিকতা তত্ত্বৰ উদ্ভাৱণ মূলতঃ কি ধৰণৰ সমস্যাৰ পৰা আৱিষ্কাৰ হৈছে? সম্ভাৱিকতাতত্ত্বৰ উন্নতিৰ বাবে বৰঙণি আগবঢ়োৱা কেইজনমান গণিতজ্ঞ নাম উল্লেখ কৰা।
8. খালীঠাই পূৰ কৰা ঃ

   (a) $P(A) \geq \frac{\cdots\cdots}{}$ (b) .... $\leq P(A) \leq$ .... (C) $n_{C_r} = \frac{\cdots\cdots}{}$

   (d) $10_{C_3} = \frac{\cdots\cdots}{}$ (e) $5_{C_2} \times 7_{C_3} =$.........

   (f) দুটা মুদ্ৰ আৰু দুটা লুডুগুটি একেলগে —— ধৰণে পৰিব পাৰে।

   (g) $P(\overline{A}) =$—— (h) $P(A) = 1-$ (............) (i) $n_{C_r} + n_{C_{r-1}} =$——

   (j) $5_{C_0} =$......... (k) $\underline{|n}$ =...........

   (l) এটা পৰীক্ষা p- ধৰণে আৰু অইন এটা পৰীক্ষা q- ধৰণে সংগঠিত হ'লে দুয়োটা পৰীক্ষা একেলগে —— ধৰণে সংগঠিত হ'ব।

(m) তাচৰ পেকেট এটাত ৰজাৰ সংখ্যা ——, ৰাণীৰ সংখ্যা ——, টেক্কাৰ সংখ্যা ——, গোলামৰ সংখ্যা ——।

(n) তাচৰ পেকেট এটাত —— বিধৰ পাত আছে; যেনে ——

(o) $\frac{10_{C_3} \times 7_{C_2}}{17_{C_5}}$ =......... (p) $\underline{|0}$ = ...

(q) $P(\overline{A})$ ৰ সূত্ৰটো হ'ল ———

(r) তিনিটা মুদ্ৰা একেলগে দলিয়ালে ঘটনাকেইটা হ'ল ক্ৰমে ——

(s) A, B, C-তিনি পৰস্পৰ বিবৰ্জিত আৰু সম্পূৰ্ণ ঘটনা যদি $P(A)=\frac{1}{2}$ P(B) আৰু $P(B)=\frac{2}{3}P(C)$ হয় তেন্তে P(A)=..........., P(B)=.........., P(C)=...............

(t) এটা লিপিয়াৰ বছৰত মুঠ দিনৰ সংখ্যা ....

(u) তাচ পেকেট এটাত মুঠ তাচ পাতৰ সংখ্যা ....

(v) —— সপ্তাহত এক বছৰ।

(w) 5 জন পুৰুষ আৰু 3 জনী মহিলাৰ পৰা 4 জনৰ দল এটা গঠন কৰিব লাগে। —— ধৰণে দলটো গঠন কৰা সম্ভৱ। যদি দলটোত অতি কমেও 2 জনী মহিলা অন্তৰ্ভুক্ত কৰিব লাগে তেন্তে —— ধৰণে দলটো গঠন কৰা সম্ভৱ। খুব বেছি হ'লে এজনী মহিলা অন্তৰ্ভুক্ত কৰিবলৈ হ'লে —— ধৰণে দলটো গঠন কৰা সম্ভৱ।

(x) দুটা লুডুগুটি একেলগে এবাৰ দলিয়ালে অতি কমেও এবাৰ 6 পোৱাৰ অনুকূল ঘটনা ——।

(y) লুডুগুটি এটা এবাৰ দলিয়ালে 5 ৰ অনুকূল 3 প্ৰতিকুল ঘটনা ক্ৰমে —— আৰু ——।

(z) তাচৰ পেকেট এটাৰ পৰা দুখিলা পাত একেলগে ল'লে —— ৰজা, ৰাণী, টেক্কা, আৰু লালপাণৰ অনুকূল ঘটনা ক্ৰমে —, ——।

1. তিনিটা মুদ্ৰা একেলগে দলিয়ালে 2 টা মুণ্ড পোৱাৰ অনুকূল ঘটনা -— এটা মুণ্ড আৰু 1 টা পুচ্ছ পোৱাৰ অনুকূল ঘটনা ——।

2. বেগ এটাত 4 টা বগা আৰু 3 টা ৰঙা বল আছে। 3 টা বল একেলগে যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'লে 2 টা বগা বল পোৱাৰ অনুকূল ঘটনা— 1 টা বগা আৰু 2 টা ৰঙা বল পোৱাৰ অনুকূল ।

3. তাচ পেকেট এটাৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে 4 খন পাত লোৱা হ'লে, 2 খন লালপাণ আৰু 2 জন ৰজা পোৱাৰ অনুকূল ঘটনা ——। 2 জন ৰজা আৰু 2 জনী ৰাণী পোৱাৰ অনুকূল ঘটনা -——।

   1খন ক'লাপাণ, 1 খন লালপাণ, 1 খন ডায়মণ্ড আৰু 1 খন ক'লা ফুল পোৱাৰ অনুকূল ঘটনা ——।

4. তিনিটা মুদ্ৰা একেলগে দলিয়ালে সম্পূৰ্ণ ঘটনাৰ সংখ্যা ——

5. তিনিটা লুডুগুটি একেলগে দলিয়ালে মুঠ ঘটনাৰ সংখ্যা ——

6. বেগ এটাত 10 টা বল (1ৰ পৰা 10) সংখ্যাৰে চিহ্নিত কৰা হ'ল। বেগৰ পৰা এটা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল। বলটো (i) 2-ৰ গুণিতক অথবা 5-ৰ গুণিতক হোৱাৰ অনুকূল ঘটনা ——।

(ii) 2 ৰ গুণিতক অথবা 7 ৰ গুণিতক হোৱাৰ অনুকূল ঘটনা ——।

9. বেগ এটাত 3 টা বগা আৰু 4টা ৰঙা বল আছে। বেগটোৰ পৰা এটা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'লে সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা।

(i) বলটো বগা আৰু

(ii) বলটো ৰঙা হ'ব। বলটো ৰঙা হোৱাৰ অনুকূল আৰু প্ৰতিকুল ঘটনাৰ অনুপাত কিমান?

(উত্তৰ ঃ $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}$;4:3 আৰু 3:4)

10. (a) লুডুগুটি এটা দলিয়ালে (a) (i) 6 পৰাৰ আৰু (ii) 1, অথবা 3 অথবা 5 ৰ যিকোনো এটা সংখ্যা পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা।

(উত্তৰঃ (i) $\frac{1}{6}$ (ii)) $\frac{1}{2}$

(b) অযুগ্ম সংখ্যা (c) 4 তকৈ বেছি সংখ্যা (d) 2 পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰঃ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{6}$)

11. বেগ এটাত 3 টা বগা আৰু 4 টা সেউজীয়া ৰঙৰ বল আছে। বেগটোৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে 2 টা বল লোৱা হ'লে প্ৰতিটো ৰঙৰ বল পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰঃ $\frac{4}{7}$)

12. (a) 52 খন পাত থকা তাচৰ পেকেট এটাৰ পৰা এখিলা পাত যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'লে সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা। (i) পাতখন ক'লাপাণৰ (ii) পাতখন ডায়মণ্ড নহয় (iii) পাতখন টেক্কা (iv) পাতখন লালপাণ অথবা ক'লা ফুল নহয়।

উত্তৰ ঃ (a) (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{1}{13}$ (iv) $\frac{1}{2}$

(b) পাতখন ৰজা অথবা ৰাণী (c) পাতখন ক'লাপাণ অথবা টেক্কা

(d) পাতখন লালপাণ নহয়। (e) পাতখন ছবি থকা হ'ব

(f) পাতখন ছবি থকাৰ অনুকূল আৰু প্ৰতিকুল ঘটনাৰ অনুপাত।

(g) পাতখন ছবি থকা অথবা ডায়মণ্ডৰ পাত (h) পাতখন ক'লা ৰঙৰ অথবা টেক্কা

উত্তৰ ঃ (b) $\frac{2}{13}$ (c) $\frac{4}{13}$ (d) $\frac{3}{4}$ (e) $\frac{3}{13}$

(f) 3:10, 10:3 (g) $\frac{11}{26}$ (h) $\frac{7}{13}$

13. লিপিয়াৰ/লিপিয়াৰ নোহোৱা বছৰ এটাত 53টা দেওবাৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰ ঃ $\frac{2}{7}$ আৰু $\frac{1}{7}$)

14. চাৰিটা মুদ্ৰা একেলগে দলিওৱা হ'ল
   (i) 2 টা পুচ্ছ পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?
   (ii) 2 টা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?
   (iii) 3 টা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰ ঃ (i) $\frac{2}{8}$(ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{1}{4}$)

15. যদি $P(A) = \frac{1}{2}P(B), P(B)=\frac{4}{5}$ P(C), তেন্তে, P(A), P(B) আৰু P(C)-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(উত্তৰ ঃ$P(A) = \frac{1}{11}$, $P(B) = \frac{4}{11}$, $P(C) = \frac{5}{11}$)

16. এটা লুডুগুটিত থকা কোনো সংখ্যাৰ সম্ভাৱিকতা সংখ্যাটোৰ সমানুপাতিক হ'লে আৰু লুডুগুটিটো এবাৰ দলিয়ালে যুগ্ম সংখ্যা পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰ ঃ$\frac{4}{7}$)

17. 1 ৰ পৰা 120 লৈ সংখ্যাবোৰৰ পৰা এটা সংখ্যা যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰিলে সংখ্যাটো 8 অথবা 10ৰ গুণিতক হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰ ঃ 0.2)

18. তাচৰ পেকেট এটাৰ পৰা এখিলা পাত যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল। যদি পাতখন ছবি থকা হয় তেন্তে পাতখন ৰজা হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰ ঃ $\frac{1}{3}$)

19. এজন মানুহে 4 টা কথাৰ ভিতৰত 3 টা কথা সঁচা কয়। মানুহজনে এটা লুডুগুটি দলিয়াই 6 পৰিছে বুলি দাবী কৰিলে। তেওঁ দাবী কৰা কথাষাৰৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰ ঃ $\frac{3}{4}$)

20. 5 জন পুৰুষ আৰু 3জনী মহিলাৰ পৰা 4 জনীয়া দল এটা গঠন কৰিব লাগে।
   (a) দলটোত অতি কমেও এজনী মহিলা অন্তৰ্ভুক্ত হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰ ঃ $\frac{13}{14}$)

   (b) দলটোত 2 জন পুৰুষ আৰু 2 জনী মহিলা অন্তৰ্ভুক্ত হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰ ঃ $\frac{3}{7}$)

উত্তৰ

6. (a) 36 আৰু 1 (b) $13_{C_3}; 8_{C_2} \times 5_{C_1}; 8_{C_3}$

(c) $52_{C_4}; 13_{C_3} \times 13_{C_1}; 4_{C_2} \times 4_{C_2}; 4_{C_1} \times 13_{C_3}; 13_{C_1} \times 4_{C_1} \times 13_{C_1} \times 13_{C_1}$

8. (a) 0 (b) 0, 1 (c) $\frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}$ (d) 120

(e) 350 (f) 144 (g) 1 – P(A), 1 – $P(\overline{A})$

(h) $n+1_{C_r}$ (j) 1 (k) n(n–1)....3.2.1 (l) pq

(m) 4, 4, 4, 4 (n) 4; ক'লাপাণ, লালপাণ, ইটা, ক'লাফুল

(o) $\frac{105}{3094}$ (p) 1 (q) $\frac{n-m}{n}$

(r) (HHH), (H,H,T), (HTH), (HTT), (TTT), (TTH), (THT), (THH)

(s) $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ (t) 366 (u) 52 (v) 52

(w) 8_{C_4},35,40 (x) 11 (y) 1; 5 (z) 16, 52

8. (1) $3_{C_2} = 3$ (2) (i) $4_{C_2} = 6$ (ii) $4_{C_1} \times 3_{C_2} = 12$

(3) (i) $13_{C_2} \times 4_{C_2} = 5148$ (ii) $4_{C_2} \times 4_{C_2} = 36$

(iii) $13_{C_1} \times 13_{C_1} \times 13_{C_1} \times 13_{C_1}$

4. $2^3 = 8$ 5. $6^3 = 216$ 6. (i) = 4 (ii) 6

সহ-সম্বন্ধ
(Co-rrelation)

গড় আৰু বিচলন ঃ

গড় আৰু বিচলন অধ্যায় দুটাত আমি এটা চলক লৈ আলোচনা কৰি আহিছোঁ। এটা চলকৰ বিভাজনৰ বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যৰ কথা আমি অৱগত। আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত দুই বা ততোধিক চলকৰ বিভিন্ন সমস্যা আছে। যেনে— বস্তুৰ মূল্য আৰু ইয়াৰ চাহিদা; মূল্য আৰু যোগান ব্যৱস্থা; আয় আৰু ব্যয়; বিজ্ঞাপন খৰচ আৰু বিক্ৰীৰ পৰিমাণ; মানুহৰ উচ্চতা আৰু ওজন; প্ৰতিষ্ঠান এটাৰ উৎপাদন খৰচ আৰু লাভৰ পৰিমাণ; গ্যাসৰ চাপ আৰু আৰু আয়তন; দূৰত্ব আৰু যান-বাহনৰ গতিবেগ; স্বামী-স্ত্ৰীৰ বয়স; ইত্যাদি সমস্যাবোৰৰ ক্ষেত্ৰত দুটা চলক জড়িত।

সহসম্বন্ধ কি? ঃ

সহ-সম্বন্ধ হ'ল দুই বা ততোধিক চলকৰ এটা সম্পৰ্ক আৰু এই সম্পৰ্ক এনে ধৰণৰ যে এটা চলকৰ মানৰ পৰিৱৰ্তনৰ লগে লগে অইন চলকৰ মানৰো পৰিৱৰ্তন হয়। পৰিৱৰ্তন শব্দটো দুটা অৰ্থত ব্যৱহাৰ হয়— বৃদ্ধি অথবা হ্ৰাস অৰ্থাৎ চলক দুটাই একে দিশত অথবা বিপৰীত দিশত গতি কৰিব পাৰে। যেনে— আয় আৰু ব্যয়, উচ্চতা আৰু ওজন, গতিবেগ আৰু দূৰত্ব (অৱশ্যে সময় ধ্ৰুৱক হ'ব লাগিব), স্বামী-স্ত্ৰীৰ বয়স ইত্যাদি চলকবোৰে একে দিশত গতি কৰে। আনহাতে বস্তুৰ মূল্য আৰু চাহিদা, সময় আৰু মন্থৰ গতিৰ যানবাহনৰ চাহিদা, গ্যাসৰ চাপ আৰু আয়তন (অৱশ্যে তাপমাত্ৰা ধ্ৰুৱক হ'ব লাগিব), উলৰ সামগ্ৰী আৰু তাপমাত্ৰা ইত্যাদি চলকবোৰে বিপৰীত দিশত গতি কৰে।

ওপৰৰ কথাখিনি গড় হিচাপেহে শুদ্ধ আৰু স্বাভাৱিক অভিধাৰণাৰ ওপৰত উল্লেখ কৰা হৈছে।

বিভিন্ন ধৰণৰ সহ-সম্বন্ধ ঃ

(a) ধনাত্মক, ঋণাত্মক আৰু সহ-সম্বন্ধহীনতা।

(b) ৰৈখিক আৰু অৰৈখিক সহ-সম্বন্ধ।

(c) সৰল, তিনি বা ততোধিক চলক সহ-সম্বন্ধ আৰু আংশিক সহ-সম্বন্ধ।

(a) যদি এটা চলকৰ মান বৃদ্ধি/হ্ৰাস পোৱাৰ লগে লগে অইন চলকৰ মানো বৃদ্ধি/হ্ৰাস পায় তেন্তে চলক দুটাৰ মাজত ধনাত্মক সহসম্বন্ধ আছে বুলি জনা যায়। যেনে— আয় বাঢ়িলে ব্যয় বাঢ়ে, মানুহৰ উচ্চতা বাঢ়িলে ওজন বাঢ়ে, মটৰগাড়ীৰ গতিবেগ বৃদ্ধি পালে অতিক্ৰম কৰাৰ দূৰত্ব বাঢ়ে ইত্যাদি। যদি এটা চলকৰ মান বৃদ্ধি/হ্ৰাস পোৱাৰ লগে লগে অইন চলকৰ মানো হ্ৰাস/বৃদ্ধি পায় তেন্তে চলক দুটাৰ মাজত ঋণাত্মক সহ-সম্বন্ধ আছে বুলি কোৱা হয়। যেনে— সাধাৰণতে বস্তুৰ মূল্য বৃদ্ধি পালে চাহিদা হ্ৰাস পায়, তাপমাত্ৰা বৃদ্ধি পালে উলৰ সামগ্ৰীৰ চাহিদা হ্ৰাস পায় ইত্যাদি।

যদি এটা চলকৰ মান হ্ৰাস/বৃদ্ধি পোৱাৰ ফলত অইন চলকৰ কোনো ধৰণৰ পৰিৱৰ্তন নহয় তেন্তে চলক দুটাৰ মাজত সহ-সম্বন্ধহীনতা থকা বুলি জনা হয়। যেনে— গছৰ বয়স আৰু মটৰগাড়ীৰ গতিবেগ। এনেস্থলত চলক দুটা স্বতন্ত্ৰ চলক বুলি জনা যায়।

(b) চলক দুটাৰ মানবোৰ লেখ কাগজত (এটা চলকক মানবোৰ X অক্ষৰেখাত আৰু অইন চলকৰ মানবোৰ Y অক্ষৰেখাত) সংস্থাপন কৰাৰ পিছত যদি দেখা যায় যে সংস্থাপিত বিন্দুবোৰ এটা ৰেখাৰ দুয়োফালে সিঁচৰতি অৱস্থাত থাকে তেন্তে চলক দুটাৰ মাজত ৰৈখিক সম্বন্ধ আছে বুলি কোৱা হয়। আনহাতে সংস্থাপিত বিন্দুবোৰ তেনেকুৱা অৱস্থাত নাথাকিলে চলক দুটাৰ মাজত অৰৈখিক সম্বন্ধ থকা বুলি জনা যায়। অৰ্থাৎ সংস্থাপিত বিন্দুবোৰ এটা বক্ৰৰ দুয়োফালে সিঁচৰতি অৱস্থাত থাকে।

(c) যদি দুটা চলকৰ সহ-সম্বন্ধ অধ্যয়ন কৰা হয় তেন্তে সেই সহ-সম্বন্ধক সৰল সহ-সম্বন্ধ বুলি কোৱা হয়। আনহাতে দুটাতকৈ বেছি চলকৰ সহ-সম্বন্ধক বহু চলকৰ সহ-সম্বন্ধ বুলি জনা যায়। আকৌ দুটাতকৈ বেছি চলকবোৰৰ ক্ষেত্ৰত যদি দুটা চলকৰ সহ-সম্বন্ধ (বাকী চলকবোৰক স্থিৰ ৰাখি) অধ্যয়ন কৰা হয় তেন্তে তেনেকুৱা সহ-সম্বন্ধক আংশিক সহ-সম্বন্ধ বোলা হয়।

সহ-সম্বন্ধ জোখাৰ প্ৰক্ৰিয়াবোৰ ঃ

সহ-সম্বন্ধ জোখাৰ মূলতঃ দুটা পদ্ধতি আছে। যেনে—

1. প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰ (Scatter diagram) পদ্ধতি 2. বীজগণিতীয় পদ্ধতি।

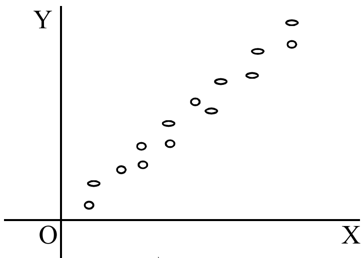
1. প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰ ঃ

সাধাৰণতে স্বতন্ত্ৰ চলক X আৰু পৰতন্ত্ৰ চলকক Y বুলি ধৰা হয়। X আৰু Y ৰ মানকেইটা ক্ৰমে X অক্ষৰেখাত আৰু Y অক্ষৰেখাত উপযুক্ত পৰিমাপ মাত্ৰা লৈ সংস্থাপন কৰি যদি দেখা যায় যে বিন্দু বাওঁফালৰ তলৰ পৰা আৰম্ভ হৈ সোঁফালৰ ওপৰকৈ গতি কৰে তেন্তে চলক দুটাৰ মাজত ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ আছে বুলি জনা যায় আৰু এনে স্থলত বিন্দুবোৰৰ মাজেৰে এডাল কাল্পনিক ৰেখাৰ দুয়োফালে সিঁচৰতি অৱস্থাত পোৱা যায় আৰু ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা (slope) ধনাত্মক হয়। এইক্ষেত্ৰত চলক দুটাৰ মাজত সম্পূৰ্ণ ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ আছে বুলি ধৰা হয়। সম্পূৰ্ণ ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধৰ ক্ষেত্ৰত চলক দুটা আনুপাতিকভাৱে হ্ৰাস বা বৃদ্ধি পায়।

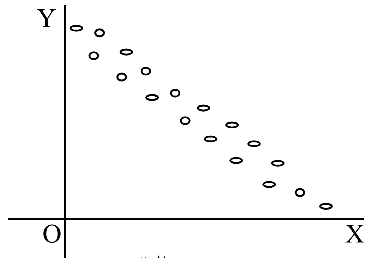
আনহাতে সংস্থাপিত বিন্দুবোৰ যদি বাওঁফালৰ ওপৰৰ পৰা আৰম্ভ হৈ সোঁফালৰ তললৈ গতি কৰে তেন্তে সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ মাজত ঋণাত্মক সহ-সম্বন্ধ আছে বুলি জনা যায় আৰু বিন্দুবোৰৰ মাজেৰে যদি এটা ৰেখা কল্পনা কৰা হয় তেন্তে ৰেখাটোৰ দুয়োফালে বিন্দুবোৰ সিঁচৰতি অৱস্থাত থাকে আৰু ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা ঋণাত্মক হয়। এনেস্থলত চলক দুটাৰ মাজত সম্পূৰ্ণ ঋণাত্মক সহ-সম্বন্ধ আছে বুলি ধৰা হয় আৰু এনেস্থলত চলক দুটা আনুপাতিকভাৱে পৰিৱৰ্তন হয়।

এই প্ৰসংগত উল্লেখ কৰিব পাৰি যে সংস্থাপিত বিন্দুকেইটা যিমানে ওচৰা-উচৰি অৱস্থান কৰে সহ-সম্বন্ধও সিমানে বেছি আৰু আনহাতে বিন্দুবোৰৰ দূৰত্ব বেছি হ'লে সহ-সম্বন্ধও সিমানে কম হয়।

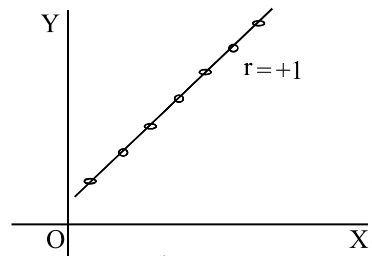
বিভিন্ন ধৰণৰ সহ-সম্বন্ধৰ প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰ লেখ ঃ



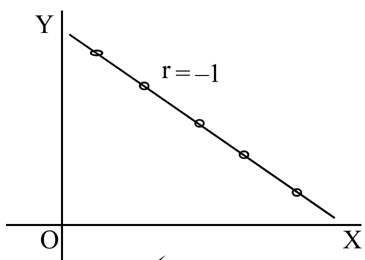
ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ



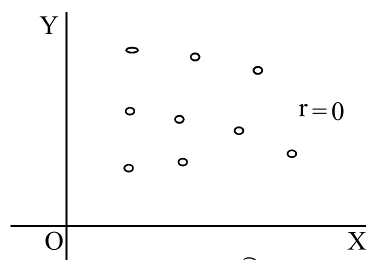
ঋণাত্মক সহ-সম্বন্ধ



সম্পূৰ্ণ ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ



সম্পূৰ্ণ ঋণাত্মক সহ-সম্বন্ধ



সহ-সম্বন্ধহীনতা

প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰই চলকৰ মাজত সম্পৰ্ক আছে নে নাই এই বিষয়ে আলোকপাত কৰে। দ্বিতীয়তে সহ-সম্বন্ধৰ প্ৰকৃতি কেনেকুৱা অৰ্থাৎ (ধনাত্মক, ঋণাত্মক অথবা কোনো সম্বন্ধ নথকা) এই বিষয়ে উনুকিয়ায়। তৃতীয়তে সহ-সম্বন্ধৰ উৎকৰ্ষৰ বিষয়ে প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰ পৰা জ্ঞান লাভ কৰিব পাৰি।

প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰ সীমাবদ্ধতা হ'ল এয়ে যে— এই চিত্ৰৰ পৰা চলক দুটাৰ সহ-সম্বন্ধৰ পৰিমাণ সংখ্যাৰে নিৰূপণ কৰিব নোৱাৰি। অৰ্থাৎ প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰে সহ-সম্বন্ধৰ গুণগত দিশৰ থূলমূলকৈ আভাস এটা পোৱা যায়।

টোকা ঃ

r=+1,–1 আৰু 0 এই প্ৰশ্নটোৰ উত্তৰ দিয়াৰ সময়ত সম্পূৰ্ণ ধনাত্মক, সম্পূৰ্ণ ঋণাত্মক আৰু সহ সম্বন্ধহীনতাৰ সংজ্ঞা লিখি প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰবোৰ অংকন কৰিবা।

সহ-সম্বন্ধৰ প্ৰয়োজনীয়তা ঃ

1. সহ-সম্বন্ধ গুণাংকই সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ পাৰস্পৰিক সম্পৰ্কৰ গভীৰতা বা প্ৰকৃতি এটা শুদ্ধ সংখ্যাৰে নিৰূপণ কৰে।
2. সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণৰ জৰিয়তে অৰ্থনৈতিক আৰু ব্যৱসায় সংক্ৰান্ত সমস্যাবোৰৰ লগত জড়িত চলকবোৰৰ সম্ভাব্য প্ৰভাৱ সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ কৰিব পাৰি। সেয়েহে সমস্যাটোৰ বাবে অভিজ্ঞতাৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি ভৱিষ্যৎ আঁচনি যুগুতোৱা সম্ভৱ।

3. সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণৰ দ্বাৰাই ভৱিষ্যৎ বাণীৰ অনিশ্চয়তা ভালেখিনি লাঘৱ কৰে।
4. অৰ্থনৈতিক সমস্যাৰ ক্ষেত্ৰত কোন কোন চলকবোৰৰ বেছি কাৰ্যকৰী এই বিষয়ে সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণৰ দ্বাৰাই অৰ্থনীতিবিদজনে বুজ লয়।

সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণৰ কেইটামান লাগতিয়াল কথা ঃ

1. সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ তথ্যখিনিত যথেষ্টসংখ্যক আৰেক্ষণ অন্তৰ্ভুক্ত হ'ব লাগিব।
2. চলক দুটাৰ গতিবিধিৰ সম্পৰ্ক গড় হিচাপেহে অধ্যয়ন কৰা হয়। এনেস্থলত চলক দুটাই আনুপাতিকভাৱে হ্ৰাস বা বৃদ্ধিৰ প্ৰশ্ন নুঠে।
3. সহ-সম্বন্ধত চলক দুটা কাৰণগত আৰু প্ৰভাৱান্বিত সম্পৰ্ক ৰূপত নাথাকিবও পাৰে।
4. সামাজিক, অৰ্থনৈতিক আৰু ব্যৱসায়িক চলকবোৰৰ ক্ষেত্ৰত চলক দুটাই আনুপাতিকভাৱে হ্ৰাস বা বৃদ্ধি নোপোৱাটো স্বাভাৱিক কিয়নো এই চলকবোৰৰ ক্ষেত্ৰত কেইবাটাও চলকে সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ ওপৰত প্ৰভাৱ বিস্তাৰ কৰে।
5. সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ সম্বন্ধ থূলমূলকৈ অধ্যয়ন কৰাটোৱেই হ'ল সহ-সম্বন্ধ জোখাৰ লক্ষ্য।

ওপৰৰ আলোচনাৰ পৰা দেখা গ'ল যে সহ-সম্বন্ধৰ ক্ষেত্ৰত এটা চলক হ'ল কাৰণ আৰু অইনটো হ'ল প্ৰভাৱান্বিত— এনেধৰণৰ সম্পৰ্ক জোখাৰ বুজ নলয়। সেয়েহে অকল সাংখ্যিকীয় বিশ্লেষণৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ সম্বন্ধ সম্পৰ্কে মন্তব্য দাঙি ধৰাটো যুক্তিযুক্ত নহয়। এই বিষয়ে ব্যক্তিগত অভিজ্ঞতা, অনুভূতি আৰু বিচাৰ ক্ষমতা যথেষ্ট ফলপ্ৰসূ।

2. বীজগণিতীয় পদ্ধতি (নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত) ঃ

অধ্যাপক কাৰ্ল পীয়াৰচনে সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ সহ-সম্বন্ধ সংখ্যাৰে জুখিবলৈ এটা সূত্ৰ দাঙি ধৰিছে আৰু তেওঁৰ নাম অনুসাৰে সূত্ৰটোক কাৰ্ল পীয়াৰচনৰ সহ-সম্বন্ধ গুণাংক বুলি জনা যায়।

সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ সংজ্ঞা ঃ

সহ-সম্বন্ধ গুণাংক হ'ল চলক দুটাৰ মাধ্যৰ পৰা মানবোৰৰ পাৰ্থক্যৰ গুণফলৰ যোগফল আৰু চলক দুটাৰ মাজত বিচলন দুটাৰ আৰু আৰেক্ষণবোৰক (চলক দুটাৰ) যোৰ হিচাপে লৈ গুণফল। সহ-সম্বন্ধ গুণাংকক *r* আখৰেৰে সূচোৱা হয় আৰু সূত্ৰটো তলত দিয়া ধৰণে উপস্থাপন কৰা হয়।

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N} xy}{N.\sigma_x.\sigma_y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

(প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি)

য'ত, $x_i = X_i - \overline{x}$

$y_i = y_i - \overline{y}$

$\overline{x}$ = x-চলকৰ মাধ্য

$\overline{y}$ = y-চলকৰ মাধ্য

σ_x = x-চলকৰ মানক বিচলন

σ_y = y-চলকৰ মানক বিচলন

N= যোৰ সংখ্যক আৰেক্ষণবোৰ

(1) নং সূত্ৰটোৰ পৰা পাওঁ—

$$r=\frac{\sum xy}{N.\sqrt{\frac{1}{N}\sum(x-\bar{x})^2.\frac{1}{N}\sum(y-\bar{y})^2}}$$

$$r=\frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2}\times\sqrt{\sum y^2}}$$

$$\therefore\quad r=\frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2\times\sum y^2}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

(2) নং সূত্ৰটোক প্ৰকৃত গড় পদ্ধতিৰ সূত্ৰ বুলি কোৱা হয়।

কাল্পনিক গড় পদ্ধতি ঃ

সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ সূত্ৰটো হ'ল—

$$r=\frac{\sum d_x d_y-\frac{\sum d_x.\sum d_y}{N}}{\sqrt{\sum(d_x)^2-\frac{(\sum d_x)^2}{N}}\times\sqrt{\sum(d_y)^2-\frac{(\sum d_y)^2}{N}}}\ \ldots\ldots\ldots\ (3)$$

য'ত, d_x = X–A, A=X-চলকৰ পৰা লোৱা কাল্পনিক গড়

d_y = Y–B, B=Y -চলকৰ পৰা লোৱা কাল্পনিক গড়

N = মোৰ সংখ্যক আৰেক্ষণবোৰ

প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতিত (1) নং সূত্ৰটো বেলেগ ধৰণে দিব পাৰি—

সূত্ৰটো হ'ল—

$$r=\frac{\sum xy-\frac{\sum\times.\sum y}{N}}{\sqrt{\sum x^2-\frac{(\sum x)^2}{N}}.\sqrt{\sum y^2-\frac{(\sum y)^2}{N}}}$$

চলক দুটাৰ প্ৰদত্ত মানবোৰ ব্যৱহাৰ কৰি ওপৰৰ সূত্ৰটো প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি।

টোকা ঃ

(a) প্ৰকৃত গড় পদ্ধতি অৰ্থাৎ (2) নং সূত্ৰ x আৰু y চলকৰ প্ৰকৃত গড় দুয়োটা পূৰ্ণ সংখ্যাত থাকিলে ব্যৱহাৰ কৰা সুবিধাজনক।

(b) (3) নং সূত্ৰটো ব্যৱহাৰৰ ক্ষেত্ৰত কোনো বাধ্যবাধকতা নাই। অৰ্থাৎ $\bar{x}$ আৰু $\bar{y}$ পূৰ্ণসংখ্যাত থাকিলে কিম্বা নাথাকিলেও (3)নং সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি।

(c) বিচ্ছিন্ন আৰু অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ সূত্ৰ বৰ্তমান পৰিসৰত অন্তৰ্ভুক্ত কৰা নহ'ল।

কাৰ্ল পীয়াৰচনৰ সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ সূত্ৰটোত লোৱা কেইটামান অভিধাৰণা ঃ

অভিধাৰণা ঃ

1. সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ সম্পৰ্ক ৰৈখিক অৰ্থাৎ চলক দুটাৰ মানবোৰ প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰে উপস্থাপন কৰিলে চিত্ৰটো সৰল ৰেখা আকৃতিৰ হ'ব।
2. যদিও প্ৰতিটো চলকৰ মান কেইবাটাও কাৰণ (factors) ৰ দ্বাৰা প্ৰভাৱান্বিত তথাপি সৰহসংখ্যক আৰেক্ষণ অন্তৰ্ভুক্ত কৰিলে সংশ্লিষ্ট বিভাজনটো শেষত সমমিত বণ্টনৰ ৰূপ ল'ব।
3. সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ এটা কাৰণ আৰু অইনটো প্ৰভাৱান্বিত ৰূপত সম্বন্ধযুক্ত আছে বুলি ধৰা হয়।

সম্ভাৱ্য ত্ৰুটি (Probable Error) ঃ

কাৰ্ল পীয়াৰচনৰ সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ সূত্ৰ অৱলম্বন কৰি চলক দুটাৰ সম্বন্ধ জুখি কোনো মন্তব্য দাঙি ধৰাৰ সময়ত কিছু সন্দেহৰ অৱতাৰণা হয়, কিয়নো সূত্ৰটো কেইটামান অভিধাৰণাৰ ওপৰত উলিওৱা হৈছে। সেয়েহে সূত্ৰটো প্ৰয়োগ কৰিলে সম্ভাৱ্য ভুল-ত্ৰুটিৰ এটা সূত্ৰ পীয়াৰচনে আগবঢ়াইছে—

$$\text{সম্ভাৱ্য ত্ৰুটি} = P.E(r) = 0.6745 \times \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

সম্ভাৱ্য ত্ৰুটিৰ ব্যৱহাৰ ঃ

1. P.E(r) ৰ মান r-ৰ লগত যোগ-বিয়োগ কৰিলে r-ৰ মান দুটা সীমা পোৱা যায়। অৰ্থাৎ যদি সমষ্টিটোৰ পৰা বেলেগ এটা যাদৃচ্ছিক প্ৰতিদৰ্শ লোৱা হয় আৰু r-ৰ মান উলিওৱা তেন্তে r-ৰ মানটো আগতে উল্লেখ কৰা দুটা সীমাৰ মাজত থাকিব বুলি আশা কৰিব পাৰি। সেয়েহে সম্ভাৱ্য ত্ৰুটিৰ গণনাই r-ৰ মানৰ সীমা নিৰ্দেশ কৰে।
2. যদি $r < PE(r)$ হয় তেন্তে r-ৰ মান তাৎপৰ্যপূৰ্ণ নহ'ব।
3. যদি $r > 6PE(r)$হয় তেন্তে r-ৰ মান তাৎপৰ্যপূৰ্ণ হ'ব।
4. অন্যান্য পৰিস্থিতি r-সম্বন্ধে নিশ্চিতভাৱে একো ক'ব নোৱাৰি।

টোকা ঃ

1. যোৰ সংখ্যক আৰেক্ষণবোৰ কম হ'লে PE(r)ৰ ব্যৱহাৰ ত্ৰুটিপূৰ্ণ হ'ব পাৰে।
2. তথ্যখিনি সমমিত বণ্টনৰ পৰা সংগৃহীত হ'ল PE(r) তত্ত্বটো প্ৰযোজ্য।
3. প্ৰতিদৰ্শ সংগ্ৰহ যাদৃচ্ছিক প্ৰতিদৰ্শ পদ্ধতি লোৱা হ'লে PE(r) তত্ত্বটো প্ৰযোজ্য।

r-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰি সহ-সম্পৰ্ক সম্বন্ধে তেনেকৈ মন্তব্য দাঙি ধৰিবা?

তলত উল্লেখ কৰা কথাখিনিৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি সাধাৰণতে চলক দুটাৰ সম্পৰ্ক সম্বন্ধে মন্তব্য দিয়া হয়।

1. $r=+1$ হ'লে, সহ-সম্বন্ধ সম্পূৰ্ণ ধনাত্মক।
2. $r=-1$, হ'লে সহ-সম্বন্ধ সম্পূৰ্ণ ঋণাত্মক।
3. $r = 0$, সহ-সম্বন্ধ খুব কম।
4. r-ৰ মান 1-ৰ সন্নিকট বা ওচৰা-উচৰি হ'লে সহ-সম্বন্ধ বেছি তাৎপৰ্যপূৰ্ণ।
5. সহ-সম্বন্ধ বেছি তাৎপৰ্যপূৰ্ণ হ'লেও চলক দুটাৰ মান আনুপাতিকভাৱে হ্ৰাস/বৃদ্ধি নাপাবও পাৰে।

সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ ধৰ্ম ঃ

1. r-ৰ মান +1 আৰু –1 ৰ মাজত থাকে অৰ্থাৎ $-1 \leq r \leq +1$
2. মূল বিন্দু (origin) আৰু মাত্ৰা (scale) ৰ পৰিৱৰ্তন হ'লেও 'r'ৰ মান অপৰিৱৰ্তিত থাকে।
3. r–ৰ এটা শুদ্ধ সংখ্যা।
4. চলক দুটাৰ যিকোনো এটাক × বা y ধৰিলেও r-ৰ মানৰ পৰিৱৰ্তন নহয়। অৰ্থাৎ $r_{xy} = r_{yx}$
5. চলক দুটাৰ সম্পৰ্ক ৰৈখিক হ'লেহে r-ৰ সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি।
6. x আৰু y-ৰ সম্বন্ধ বিপৰীত চিনৰ হয় যদি— x-আৰু y অথবা x আৰু –y হয়।
7. যদি চলক দুটা x আৰু y-ৰ মাজত এটা ৰৈখিক সম্বন্ধ যেনে $ax+by+c=0$ বৰ্তমান থাকে তেনেহ'লে 'a' & b-ৰ চিন বিপৰীত হ'লে r-ৰ মান +1 হয়। আনহাতে a আৰু b-ৰ চিন একেই হ'লে r-ৰ মান –1 হয়।

কেইটামান ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1 ঃ তলত দিয়া তথ্যৰ পৰা সহ-সম্বন্ধ গুণাংক নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(a)

মূল্য ঃ	10	12	15	20	23
পৰিমাণ ঃ	2	7	6	4	1

(b)

x :	70	50	55	58	63
y:	60	63	67	56	60

(c) দিয়া আছে : $\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2 = 120, \sum_{i=1}^{9}(y_i-\bar{y})^2 = 346$,

$$\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = 193$$

(d) দিয়া আছে : $N=10, \ \sum x=125, \ \sum y=80, \ \sum x^2=1586, \ \sum y^2=650, \ \sum xy=1007$

(e) দিয়া আছে : $N=10, \ \sum x=140, \ \sum y=150, \ \sum(x-10)^2=180, \ \sum(y-15)^2=215$,

$\sum(x-10)(y-15) = 60$

(f) দিয়া আছে : $r=0.6,\ \sum xy=130,\ \sum x^2=100,\ \sigma_y=10,$

যʼত $x = x-\bar{x},\quad y = y-\bar{y}$, N-ৰ মান কিমান?

সমাধান ঃ (a) ইয়াত মূল্যক x আৰু পৰিমাণক বুলি ধৰা হʼব।

নিৰীক্ষণ পদ্ধতিত দেখা যায় $\bar{x}$ আৰু $\bar{y}$ ৰ মান পূৰ্ণ সংখ্যা হʼব। সেয়েহে প্ৰকৃত মাধ্য পদ্ধতিত সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ মান নিৰ্ণয় কৰা হʼব।

সূত্ৰটো হʼল—

$$r=\frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2\times\sum y^2}},\qquad \text{যʼত } x = x-\bar{x},\quad y=y-\bar{y}$$

	x	x=x–16	x^2	y	y=y–4	y^2	xy
	10	–6	36	2	–2	4	12
	12	–4	16	7	3	9	–12
	15	–1	1	6	2	4	–2
	20	4	16	4	0	0	0
N=5	23	7	49	1	–3	9	–21
মুঠ	80		118	20		26	–23

$$\bar{x}=\frac{\sum x}{N}=\frac{80}{5}=16,\quad \bar{y}=\frac{\sum y}{N}=\frac{20}{5}=4$$

এতিয়া,
$$r=\frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2\times\sum y^2}}=\frac{-23}{\sqrt{118\times 26}}$$
$$\simeq-\frac{23}{55}\simeq-0.42$$

$\therefore r\cong -0.42$

(b) নিৰীক্ষণ পদ্ধতি দেখা যায় $\bar{x}$ আৰু $\bar{y}$-ৰ মান পূৰ্ণ সংখ্যাত নাথাকে। সেয়েহে কল্পিত গড় পদ্ধতি সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ মান নিৰ্ণয় কৰা হʼব।

সূত্ৰটো হʼল—

$$r=\frac{\sum d_x d_y-\frac{\sum d_x\cdot\sum dy}{N}}{\sqrt{\sum(d_x)^2-\frac{(\sum d_x)^2}{N}}\cdot\sqrt{\sum(d_y)^2-\frac{(\sum d_y)^2}{N}}}$$

য'ত $d_x = x-A$, $A = X$–চলকৰ পৰা লোৱা কাল্পনিক গড়

$d_y = Y-B$, $B = Y$,–চলকৰ পৰা লোৱা কাল্পনিক গড়

N = আৰেক্ষণবোৰৰ যোৰ।

ধৰা হ'ল X চলকৰ কাল্পনিক গড় অৰ্থাৎ, A=55, আৰু Y-চলকৰ কাল্পনিক গড় অৰ্থাৎ B=60

(টোকা ঃ কাল্পনিক গড়ৰ মান সাধাৰণতে চলকবোৰৰ মানবোৰৰ মাজৰ পৰা লোৱা সুবিধাজনক)

	x	d_x=x–55	$(d_x)^2$	y	dy=y–60	$(dy)^2$	dx.dy
	70	15	225	60	0	0	0
	50	–5	25	63	3	9	–15
	55	0	0	67	7	49	0
	58	3	9	56	–4	16	–12
ইয়াত N=5	63	8	64	60	0	0	0
মুঠ		21	323		6	74	–27

সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ—

$$r = \frac{-27 - \frac{21 \times 6}{5}}{\sqrt{323 - \frac{(21)^2}{5}} \times \sqrt{74 - \frac{(6)^2}{5}}}$$

$$= \frac{-52.2}{\sqrt{234.8 \times 66.8}}$$

$$\simeq \frac{-52}{\sqrt{235 \times 67}}$$

$$\simeq -\frac{52}{125}$$

$$\therefore\ r \simeq -0.39$$

(c) সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ

$$r = \frac{\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\overline{x})^2 \times \Sigma(y-\overline{y})^2}} = \frac{193}{\sqrt{120 \times 346}}$$

$$\simeq \frac{193}{204}$$

$$\simeq 0.95$$

(d) সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x.\sum y}{N}}{\sqrt{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}} \times \sqrt{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{N}}}$$

$$= \frac{1007 - \frac{125 \times 80}{10}}{\sqrt{1586 - \frac{(125)^2}{10}} \times \sqrt{650 - \frac{(80)^2}{10}}}$$

নিজে চেষ্টা কৰা। (উত্তৰ, r = 0.47)

(e) ইয়াত, X-ৰ কল্পিত গড় A=10

Y-ৰ কল্পিত গড় B=15

প্ৰদত্ত তথ্যখিনি সূত্ৰৰ চিন ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ

$N=10, \sum x=140, \sum y=150, \sum(d_x)^2 = 180, \sum(dy)^2=215, \sum dxdy=60,$

এতিয়া, $d_x = x-10$

$\therefore \sum dx=\sum(x-10) = \sum x-10\times 10 \because N = 10$

$= 140-100$

$\therefore \sum dx = 40$

আকৌ, $dy= y-15$

$\therefore \sum dy = \sum(y-15) = \sum y-15\times 10$

$= 150-150 = 0$

সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ—

$$r = \frac{\sum dx\, dy - \frac{\sum dx.\sum dy}{N}}{\sqrt{\sum(dx)^2 - \frac{(\sum dx)^2}{N}}\sqrt{\sum dy^2 - \frac{(\sum dy)^2}{N}}}$$

$$= \frac{60 - \frac{40 \times 0}{10}}{\sqrt{180 - \frac{(40)^2}{10}}.\sqrt{215 - \frac{(0)^2}{10}}}$$

$$= \frac{60}{\sqrt{20 \times 215}}$$

$$= \frac{60}{10\sqrt{43}} = \frac{6}{\sqrt{43}} \cong \frac{6}{6.5} \cong \frac{60^{12}}{65_{13}} \cong 0.92$$

$$\therefore \quad r = 0.92$$

(f) সূত্ৰৰ পৰা পাওঁ

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}}$$

$$\Rightarrow 0.6 = \frac{130}{\sqrt{100 \times 100N}}$$

$$= \frac{130}{100\sqrt{N}}$$

$$\therefore 0.6 = \frac{13}{10\sqrt{N}}$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{N} = 13$$

$$\Rightarrow 36N = 169 \text{ (বৰ্গ কৰি)} \qquad \therefore N = \frac{169}{36} \simeq 5$$

আমি জানো, $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma(y-\bar{y})^2}$

$$\Rightarrow 10 = \sqrt{\frac{1}{N}\sum y^2}$$

$$\Rightarrow 100 = \frac{1}{N}\sum y^2$$

$$\therefore \sum y^2 = 100N$$

উদাহৰণ 2 ঃ (a) X আৰু Yৰ 12 যোৰ আৰেক্ষণৰ তলৰ তথ্যখিনি পোৱা হ'ল। $\sum x = 30$, $\sum y = 5$, $\sum x^2 = 670$, $\sum y^2 = 285$, $\sum xy = 334$ পিছত তথ্যখিনি পুনৰ পৰীক্ষণৰ পিছত দেখা গ'ল যে এযোৰ (x=10, y=14)-ৰ সলনি লোৱা হৈছে (x=11, y=4)

শুদ্ধ সহ-সম্বন্ধ গুণাংক নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ প্ৰশ্নমতে, শুদ্ধ $\sum x = 30-11+10=29$

শুদ্ধ $\sum y = 5-4+14=15$

শুদ্ধ $\sum x^2 = 670-11^2+10^2 = 649$

শুদ্ধ $\sum y^2 = 285-4^2+14^2 = 465$

শুদ্ধ $\sum xy = 334-11\times4+10\times14 = 430$

$N = 12$

এতিয়া, সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি শুদ্ধ r-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(উত্তৰ ঃ $r = 0.78$)

(b) যদি x আৰু Y চলকৰ সম্বন্ধটো হ'ল $2x+3y=4$, x আৰু y-ৰ সহ-সম্বন্ধৰ মান কিমান?

সমাধান ঃ x আৰু y-ৰ সম্বন্ধটো ax+by+c=0 ধৰণৰ

$\therefore$ r = +1 (যদি a আৰু b-ৰ চিন বিভিন্ন)

= –1 (যদি a আৰু b-ৰ চিন একেই হয়)

সংশ্লিষ্ট অংকটোত a>0, b>0 অৰ্থাৎ a আৰু b-ৰ চিন একেই

$\therefore$ r = –1 [সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ 7 নং ধৰ্মটো চোৱা]

(c) x আৰু y-ৰ মানবোৰ (20,5), (21.4), (22,3) হ'লে সহ-সম্বন্ধ গুণাংক কিমান?

সমাধান ঃ তথ্যখিনিৰ পৰা পাওঁ—

$$20+5=25, \quad 21+4=25, \ 22+3=25$$

অৰ্থাৎ x আৰু y-ৰ সম্বন্ধটো হ'ব— x+y=25

$\because$ x আৰু y-ৰ সহগ প্ৰত্যেকৰে +1 (অৰ্থাৎ a আৰু b-ৰ চিনে একেই)

সেয়েহে X আৰু Y-ৰ সহ-সম্বন্ধ r-ৰ মান = –1

(d) যদি x আৰু Y-চলকৰ r-ৰ মান 0.5 হয় তেন্তে 2x–4 আৰু 3–2y-ৰ সহ-সম্বন্ধ কিমান?

সমাধান ঃ a আৰু b-ৰ চিন বিভিন্ন অৰ্থাৎ x-ৰ +, y-ৰ (–)

সেয়েহে r = – 0.5

উদাহৰণ 3 ঃ তলৰ তথ্যখিনিত বয়সৰ বিভাগ, মানুহৰ সংখ্যা (হাজাৰত) আৰু অন্ধ মানুহৰ সংখ্যা দিয়া আছে।

বয়স আৰু অন্ধত্বৰ সহ-সম্বন্ধ গুণাংক নিৰ্ণয় কৰা।

বয়সৰ বিভাগ	মানুহৰ সংখ্যা (হাজাৰত)	অন্ধ মানুহৰ সংখ্যা
0–10	100	55
10–20	60	40
20–30	40	40
30–40	36	40
40–50	24	36
50–60	11	22
60–70	6	18
70–80	3	15

সমাধান সংকেত ঃ বয়সক x আৰু অন্ধত্বক Y বুলি ধৰা।

বয়সৰ বিভাগবোৰৰ মধ্যমানবোৰক x-ৰ মান ধৰা

প্ৰতি লাখত অন্ধ মানুহৰ সংখ্যাবোৰ y-ৰ মান ধৰা

যেনে— প্ৰথম বিভাগৰ অন্ধ মানুহৰ সংখ্যা $= \frac{40}{60,000} \times 100000 = 67$ (প্ৰায়) ইত্যাদি

সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি r-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। (উত্তৰ ঃ 0.898)

উদাহৰণ 4 ঃ যুক্তি দেখুৱাই তলৰ উক্তিবোৰ সঁচা নে মিছা প্ৰতিপন্ন কৰা ঃ

(i) r-ৰ মান 0 আৰু 1 ৰ মাজত থাকে।

(ii) চলক দুটাৰ সম্বন্ধ— 1.6

(iii) r=0 হ'লে চলক দুটা সম্বন্ধযুক্ত নহয়।

(iv) x আৰু y চলক দুটাৰ সহ-সম্বন্ধ গুণাংক = 0.6 হ'লে x আৰু –y চলক দুটাৰ সহ-সম্বন্ধ – 0.6

(v) x-আৰু y-চল দুটাৰ সহ-সম্বন্ধ গুণাংক 0.3 হ'লে (3x–4) আৰু (4–y)-ৰ সহ-সম্বন্ধ – 0.3 হ'ব।

(vi) x-আৰু y-চলকৰ ক্ষেত্ৰত r=0.8 হ'লে x-আৰু $\frac{1}{2}$y চলকৰ ক্ষেত্ৰত r = 0.4 হ'ব।

(vii) চলক দুটা একে একক থাকিলে r-ৰ মান উলিয়াব নোৱাৰি।

(viii) r-ৰ মান ঋণাত্মক নহয়।

(ix) r-চলক দুটাৰ সকলো ধৰণৰ সম্পৰ্কৰ বুজ লয়।

(x) –x আৰু –y চলকৰ সহ-সম্বন্ধ ধনাত্মক।

(xi) x-আৰু –y অথবা –x আৰু y-ৰ ক্ষেত্ৰত r-ৰ মান ধনাত্মক

(xii) চলক দুটা স্বতন্ত্ৰ হ'লে r=0 হ'ব?

(xiii) x-আৰু y-চলকৰ ক্ষেত্ৰত $r = \frac{1}{3}$ হ'লে $x + \frac{1}{3}$ আৰু $y + \frac{1}{3}$ চলকৰ ক্ষেত্ৰত r = 1 হ'ব।

(xiv) x-আৰু y-চলকৰ ক্ষেত্ৰত $r = \frac{1}{2}$ হ'লে 2x আৰু 3y চলক দুটাৰ ক্ষেত্ৰত r = 1 হ'ব।

(xv) x-ৰ সলনি y আৰু y-ৰ সলনি × ধৰিলে r-ৰ মান পৰিৱৰ্তন হয়।

সমাধান ঃ

(i) মিছা কাৰণ r-ৰ মান –1 আৰু 1-ৰ মাজত থাকে।

(ii) মিছা, কাৰণ r-ৰ মান –1-তকৈ কম নহয়।

(iii) মিছা কাৰণ r=0 হ'লে চলক দুটাৰ মাজত ৰৈখিক সম্পৰ্ক নাথাকে।
সঁচা তথাপি চলক দুটা সহ-সম্বন্ধযুক্ত নহয় বুলি ক'ব নোৱাৰি।

(iv) সঁচা কাৰণ যেতিয়া y-ৰ সলনি— y-হয় তেতিয়া $(y - \bar{y})$ৰ সলনি $-(y - \bar{y})$ হয়।

(v) সঁচা, কাৰণ (4–y)-ক –(y–4) লিখিব পাৰি।

(vi) মিছা, কাৰণ মাত্ৰাৰ পৰিৱৰ্তন হ'লে r-ৰ মানৰ পৰিৱৰ্তন হয়। সেয়েহে r-ৰ মান 0.8 থাকিব।

(vii) মিছা, কিয়নো r-ৰ মান এককৰ লগত জড়িত নহয়— ই এটা শুদ্ধ সংখ্যা।

(viii) মিছা, কিয়নো খুব বেছি হ'লে r-ৰ মান –1 হ'ব

(ix) মিছা, r-এ অকল চলক দুটাৰ বৈখিক সম্পৰ্কৰ বুজ লয়।

(x) সঁচা, কাৰণ x আৰু y-ৰ চিন একেই।

(xi) সঁচা, কাৰণ x আৰু y-ৰ চিন বেলেগ। অৰ্থাৎ r-ৰ চিন ধনাত্মক হ'ব।

(xii) মিছা কাৰণ r=0-এ চলক দুটাৰ মাজত বৈখিক সম্বন্ধ নাই বুলি সূচায়। চলক দুটা স্বতন্ত্ৰ নহ'বও পাৰে।

(xiii) মিছা কাৰণ r-ৰ মান মূলবিন্দু পৰিৱৰ্তন হ'লেও একেই থাকে, অৰ্থাৎ ইয়াত $r=\frac{1}{3}$ থাকিব।

(xiv) মিছা কাৰণ r-ৰ মান মাত্ৰাৰ পৰিৱৰ্তনৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল নহয়। অৰ্থাৎ $r=\frac{1}{2}$ থাকিব।

(xv) মিছা কাৰণ $r_{yx} = r_{xy}$ অৰ্থাৎ চলক দুটাৰ সাল-সলনি হ'লেও r-ৰ মান পৰিৱৰ্তন নহয়।

উদাহৰণ ঃ(i) দিয়া আছে r=0.5, N=25 একেই সমষ্টিৰ পৰা অইন এটা প্ৰতিদৰ্শ ল'লে r-ৰ মানৰ সীমা কি হ'ব?

(ii) যদি r=0.7 আৰু N=25 হয় r-ৰ মান বেছি তাৎপৰ্যপূৰ্ণ নে?

সমাধান ঃ (i) একেই সমষ্টিৰ পৰা অইন এটা প্ৰতিদৰ্শ ল'লে r-ৰ মানৰ সীমা হ'ব $r \pm PE(r)$

অৰ্থাৎ, $PE(r)=0.6745\times\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}=\frac{1-0.25}{5}\times0.6745$

$= 0.15\times0.6745=.101175$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সীমা হ'ব 0.5 ± 0.10 অৰ্থাৎ 0.40 আৰু 0.60

(ii) ইয়াত, $PE(r)= 0.6745\times\frac{1-0.49}{5} = \frac{0.6745\times0.51}{5}$

$= 0.1349 \times 0.51$

$= .068799$

এতিয়া $6PE(r) = 6\times .068799$

$= .412794$

$\because$ r= o.7> 6PE(E) i.e.> 0.41

$\therefore$ r-ৰ মান বেছি তাৎপৰ্যপূৰ্ণ।

প্ৰশ্নমালা

1. সহ-সম্বন্ধ বুলিলে কি বুজা? সহ-সম্বন্ধ অধ্যয়নৰ তাৎপৰ্য কি?
2. প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰ বুলিলে কি বুজা? বিভিন্ন ধৰণৰ সহ-সম্বন্ধ প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰে ব্যাখ্যা কৰা। প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰ সীমাবদ্ধতা কি?
3. সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ সংজ্ঞা দিয়া। সহ-সম্বন্ধ গুণাংকই কিহৰ নিৰ্দেশ দিয়ে? ইয়াৰ সীমা কি?
4. মন্তব্য দিয়া ঃ $r = +1, -1$ আৰু O
5. প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰ দ্বাৰাই সহ-সম্বন্ধৰ কি ধৰণে বুজ লোৱা হয়?
6. সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ লগত জড়িত অভিধাৰণাবোৰ কি কি? সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ ধৰ্ম কি?
7. সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণৰ মূল কথাবোৰ কি কি? আৰু সহ-সম্বন্ধ অধ্যয়নৰ প্ৰয়োজনীয়তা কি?
8. সম্ভাব্য ক্ৰটি কি আৰু ইয়াৰ ব্যৱহাৰ কেনেকৈ কৰা হয়?
9. 9-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰি সহ-সম্বন্ধ সম্পৰ্কে কেনেকৈ মন্তব্য দাঙি ধৰিবা?
10. তলৰ তথ্যখিনি কি ধৰণৰ সহ-সম্বন্ধৰ বুজ লোৱা?

    (a) বস্তুৰ মূল আৰু চাহিদা (b) বস্তুৰ মূল্য আৰু যোগান ব্যৱস্থা (c) মানুহৰ উচ্চতা আৰু ওজন (d) আয় আৰু ব্যয় (e) বাইকৰ গতিবেগ আৰু দূৰত্ব, সময় স্থিৰ থাকিলে (f) আলুৰ মূল্য আৰু জোতাৰ মূল্য (g) বিজ্ঞাপন খৰচ আৰু বিক্ৰীৰ পৰিমাণ (h) বনুৱাৰ নিযুক্তি আৰু কাম শেষ কৰাৰ সময় (i) পেপ্‌ছিৰ চাহিদা আৰু ঋতু (j) মোবাইল ফোনৰ চাহিদা আৰু মূল্য (k) গেছৰ চাপ আৰু আয়তন (তাপমাত্ৰা একেই থাকিলে)।

    (ওপৰৰ কথাখিনি সাধাৰণ অভিধাৰণাৰ ওপৰত আধাৰিত)

উত্তৰ ঃ (a) ঋণাত্মক (b) ধনাত্মক (c) ধনাত্মক (d) ধনাত্মক (e) ধনাত্মক (f) সহ-সম্বন্ধহীনতা (g) ধনাত্মক (h) ঋণাত্মক (i) ধণাত্মক অথবা ঋণাত্মক (j) ঋণাত্মক (k) ঋণাত্মক।

11. তলৰ তথ্যখিনিৰ পৰা r-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(a)

x:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y:	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34

(b)

x:	43	44	46	40	44	42	45	42	38	40	42	57
y:	29	31	19	18	19	27	27	29	41	30	26	10

(c) $\sum_{i=1}^{25} X_i = 125,\ \sum_{i=1}^{25} y_i = 100,\ \sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 650,\ \sum_{i=1}^{25} y_i^2 = 460,\ \sum_{i=1}^{25} x_i y_i = 508$

(উত্তৰ ঃ (a) 0.95 (b) – 0.733 (c) 0.207)

12. $N=25$, $\sum x=125$, $\sum x^2=650$, $\sum y=100$, $\sum y^2=460$, $\sum xy=508$
এযোৰ মান (8, 6) ৰ সলনি (6,8) লোৱা হৈছিল।
শুদ্ধ সহ-সম্বন্ধ গুণাংক নিৰ্ণয় কৰা।

(উত্তৰ ঃ 0.26)

13. r-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$N=10, \sum x=140, \sum y=150, \sum(x-10)^2=180, \sum(y-15)^2=215, \sum(x-10)(y-15)=60$

(উত্তৰ ঃ 0.92)

14. তলৰ তথ্যৰ পৰা N-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$r=1$, $\sum xy$-330, $\sum y^2=990$, x-ৰ প্ৰসৰণ =10, য'ত, $X = x - \overline{x}$
$y = Y - \overline{Y}$

(উত্তৰ ঃ N=11)

15. তলৰ তথ্যৰ পৰা r-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

x:	6	2	10	4	8
y:	9	11	?	8	7

$\overline{x} = 6,\ \overline{y} = 8$

16. তলৰ তথ্যৰ প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰ অংকন কৰি সহ-সম্বন্ধ ধনাত্মক নে ঋণাত্মক হ'ব প্ৰতিপন্ন কৰা।

উচ্চতা (ইঞ্চি) ঃ	62	72	68	58	65	70	66	63	60	72
ওজন (কিঃ গ্ৰাঃ)ঃ	50	65	63	50	54	60	61	55	54	65

(উত্তৰ ঃ ধনাত্মক)

17. x আৰু y চলকৰ 50 যোৰা আৰেক্ষণৰ তলৰ তথ্যখিনি পোৱা গ'ল—

$\overline{x} = 10,\ \sigma_x=3,\ \overline{y} = 6,\ \sigma_y=2,\ r= 0.3,$

পিছত দেখা গ'ল এযোৰ আৰেক্ষণ (x=10, y= 6) ভুলকৈ লোৱা হৈছে। ভুল আৰেক্ষণ যোৰ বাদ দি নতুন r-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(উত্তৰ ঃ 0.3)

18. x আৰু y-ৰ মানবোৰ এনে ধৰণৰ —

(a) {(x, y) = (10, 4), (11, 3), (12, 2), (14, 0), (8, 6)}
(b) {(x, y) = (15, 3), (20, 8), (25, 13), (30, 18)

এতেকে r-ৰ মান—

(i) – 1, (ii) 0.5 (iii) 1 (iv) 0

(a) আৰু (b) ঃ শুদ্ধ উত্তৰ বাছি উলিওৱা। তোমাৰ উত্তৰৰ ক্ষেত্ৰত সপক্ষে যুক্তি দাঙি ধৰা।

(উত্তৰ ঃ (a) r = –1 (b) r=+1)

* * *