1. **ગાણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પરિણામ સાબિત કરો :**
શ્રેણી $a_1, a_2, a_3,$....... ના પદ $a_1 = 3$ અને $a_k = 7a_{k-1}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે. જ્યાં $k > 2$. સાબિત કરો કે $a_n = 3 \cdot 7^{n-1}, n \in N$.

➡ $P(n) = a_n = 3 \cdot 7^{n-1}, n \in N$

સૌ પ્રથમ n = 2 માટે ચકાસતાં,

$\therefore P(2) : a_2 = 3(7^{2-1})$

$= 3(7)$

$a_2 = 21$ જે સત્ય છે.

($\because a_1 = 3$ છે અને $a_k = 7\ a_{k-1}$)

$\therefore a_2 = 7\ (a_{2-1})$

$= 7(a_1)$

$a_2 = 7(3) \quad (\because a_1 = 3)$

$\therefore a_2 = 21$ થાય છે.

ધારો કે, આપેલ વિધાન $n = k \in N$ માટે સત્ય છે.

અર્થાત્ $P(k) : a_k = 3 \cdot 7^{k-1}, k \in N$ સત્ય છે.

હવે $n = k + 1 \in N$ માટે સાબિત કરતાં,

$P(k + 1) : a_{k+1} = 3 \cdot 7^{k+1-1}$ બતાવવું પડે.

$\therefore a_{k+1} = 7 \cdot (a_{k+1-1})$

$= 7 \cdot a_k$

$= 7 \cdot 3\ (7^{k-1})$

$\therefore a_{k+1} = 3 \cdot 7^{k-1+1}$

આમ, $P(k + 1) : a_{k+1} = 3 \cdot 7^{k+1-1}$

$\therefore$ વિધાન $n = k + 1$ માટે પણ સત્ય છે.

$\therefore P(k) \Rightarrow P(k + 1)$

$\therefore$ આપેલ વિધાન $\forall n \in N$ માટે ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ સત્ય છે.

2. **ગાણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પરિણામ સાબિત કરો : $b_0 = 5$ અને $b_k = 4 + b_{k-1}, \forall k \in N$ માટે શ્રેણી $b_0, b_1, b_2, b_5,$..... મુજબ વ્યાખ્યાયિત થયેલ છે. ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ $\forall k \in N$ માટે બતાવો કે, $b_n = 5 + 4n$.**

➡ $P(n) : b_n = 5 + 4n$ જ્યાં $n \in N$ અને $b_0 = 5$ તથા $b_k = 4 + b_{k-1}, k \in N$.

હવે $n = 1$ માટે સાબિત કરતાં,

$P(1) : b_1 + 4(1)$

પરંતુ $b_k = 4 + b_{k-1}$

$\therefore b_1 = 4 + b_0$

$= 4 + 1$

$= 5$

$\therefore P(1) : 5 + 4 = 9 \in N$

$\therefore$ આપેલ વિધાન n = 1 માટે સત્ય છે.

હવે ધારો કે આપેલ વિધાન $n = k \in N$ માટે સત્ય છે.

અર્થાત્ $P(k) : b_k = 5 + 4k, k \in N$ સત્ય છે. $k \in N$.
હવે $n = k + 1 \in N$ માટે સાબિત કરતાં,
આમ, $P(k + 1) : b_{k+1} = 5 + 4 (k + 1)$ સાબિત કરતાં,

$\therefore$ ડા.બા. : $b_{(k+1)} = 4 + b_{(k+1)-1}$
$= 4 + b_k$
$= 4 + 5 + 4k$
$= 5 + 4(k + 1)$
$=$ જ.બા.

આમ, વિધાન $n = k + 1 \in N$ માટે પણ સત્ય છે.
$\therefore P(k) \Rightarrow P(k + 1)$
$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ આપેલ વિધાન
$\forall n \in N$ માટે સત્ય છે.

3. **ગાણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પરિણામ સાબિત કરો : $d_1 = 2$ અને $d_k = \dfrac{d_{k-1}}{k}, k \in N$ દ્વારા શ્રેણી $d_1, d_2, d_3, \ldots\ldots$ ના પદો વ્યાખ્યાયિત થાય છે. જ્યાં $k \geq 2$ તો ગાણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી બતાવો કે, $d_n = \dfrac{2}{n!}, n \in N.$**

➡ $P(n) : d_n = \dfrac{2}{n!}\ n \in N$

જ્યાં $d_1 = 2$ અને $d_2 = \dfrac{d_{k-1}}{k}$
સૌ પ્રથમ $n = 2$ માટે સાબિત કરતાં,

$P(2) : d_2 = \dfrac{2}{2!}$
$= \dfrac{2}{1 \cdot 2}$
$= 1$

હવે $d_k = \dfrac{d_{k-1}}{k}$ હવે $k = 2$ મૂકો.

$\therefore d_2 = \dfrac{d_{2-1}}{2}$
$= \dfrac{d_1}{2}$
$= \dfrac{2}{2}$ (અહીં $d_1 = 2$ આપેલ છે.)

$\therefore d_2 = 1$ થાય.
આમ, આપેલ વિધાન $n = 2$ માટે સત્ય છે.
હવે ધારો કે, આપેલ વિધાન $n = k \in N$ માટે સત્ય છે.

$\therefore P(k) : d_k = \dfrac{2}{k!}$ સત્ય છે તેમ સ્વીકારતાં,
હવે $n = k + 1 \in N$ માટે સાબિત કરતાં,

➡ $P(n) : d_n = \dfrac{2}{n!}\ n \in N$

જ્યાં $d_1 = 2$ અને $d_2 = \dfrac{d_{k-1}}{k}$
સૌ પ્રથમ $n = 2$ માટે સાબિત કરતાં,

$P(2) : d_2 = \frac{2}{2\,!}$

$= \frac{2}{1 \cdot 2}$

$= 1$

હવે $d_k = \frac{d_{k-1}}{k}$ હવે $k = 2$ મૂકો.

$\therefore d_2 = \frac{d_{2-1}}{2}$

$= \frac{d_1}{2}$

$= \frac{2}{2}$ (અહીં $d_1 = 2$ આપેલ છે.)

$\therefore d_2 = 1$ થાય.

આમ, આપેલ વિધાન $n = 2$ માટે સત્ય છે.

હવે ધારો કે, આપેલ વિધાન $n = k \in N$ માટે સત્ય છે.

$\therefore P(k) : d_k = \frac{2}{k!}$ સત્ય છે તેમ સ્વીકારતાં,

હવે $n = k + 1 \in N$ માટે સાબિત કરતાં,

4. **ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી સાબિત કરો : $\cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \dots + \cos[\alpha + (n - 1)\beta] = \dfrac{\cos\left[\alpha + \left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right]\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}, \quad \forall n \in N.$**

➡ $P(n) : \cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \dots\dots +$

$$\cos(\alpha + (n-1)\beta) = \frac{\cos\left[\alpha + \left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right]\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \quad \forall n \in N$$

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. $= \cos\alpha$

$$\text{જ.બા.} = \frac{\cos\left(\alpha + \left(\frac{1-1}{2}\right)\beta\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$= \cos\alpha$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore P(1)$ સત્ય છે.

ધારો કે $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$P(k) : \cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \dots + \cos(\alpha + (k-1)\beta)$

$$= \frac{\cos\left(\alpha + \left(\frac{k-1}{2}\right)\beta\right) \cdot \sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \quad \dots \text{(i)}$$

$n = k + 1$ લેતાં,

$P(k+1) : \cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \dots + \cos(\alpha + (k-1)\beta) \ \cos(\alpha + k\beta)$

$$= \frac{\cos\left(\alpha+\left(\frac{k-1}{2}\right)\beta\right)\cdot\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} + \cos(\alpha + k\,\beta) \quad (\because \text{ પરિણામ (i) પરથી})$$

$$= \frac{\cos\left(\alpha+\left(\frac{k-1}{2}\right)\beta\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha+k\beta)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\cos\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}+\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

➥ $P(n) : \cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \dots\dots + $

$$\cos(\alpha + (n-1)\beta) = \frac{\cos\left[\alpha+\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right]\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \quad \forall\, n \in N$$

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. $= \cos\alpha$

$$\text{જ.બા.} = \frac{\cos\left(\alpha+\left(\frac{1-1}{2}\right)\beta\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$= \cos\alpha$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$P(k) : \cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \dots + \cos(\alpha + (k-1)\beta)$

$$= \frac{\cos\left(\alpha+\left(\frac{k-1}{2}\right)\beta\right)\cdot\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \qquad \dots \text{(i)}$$

$n = k+1$ લેતાં,

$P(k+1) : \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \dots + \cos(\alpha + (k-1)\beta)\ \ \cos(\alpha + k\beta)$

$$= \frac{\cos\left(\alpha+\left(\frac{k-1}{2}\right)\beta\right)\cdot\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} + \cos(\alpha + k\,\beta) \quad (\because \text{ પરિણામ (i) પરથી})$$

$$= \frac{\cos\left(\alpha+\left(\frac{k-1}{2}\right)\beta\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha+k\beta)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\cos\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}+\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

➥ $P(n) : \cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \dots\dots + $

$$\cos(\alpha + (n-1)\beta) = \frac{\cos\left[\alpha + \left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right]\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \quad \forall\, n \in N$$

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. $= \cos\alpha$

જ.બા. $= \dfrac{\cos\left(\alpha + \left(\frac{1-1}{2}\right)\beta\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$

$= \cos\alpha$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$P(k) : \cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \ldots + \cos(\alpha + (k-1)\beta)$

$$= \frac{\cos\left(\alpha + \left(\frac{k-1}{2}\right)\beta\right) \cdot \sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \qquad \ldots \text{(i)}$$

$n = k + 1$ લેતાં,

$P(k+1) : \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \ldots + \cos(\alpha + (k-1)\beta) \;\; \cos(\alpha + k\beta)$

$$= \frac{\cos\left(\alpha + \left(\frac{k-1}{2}\right)\beta\right) \cdot \sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} + \cos(\alpha + k\beta) \quad (\because \text{ પરિણામ (i) પરથી})$$

$$= \frac{\cos\left(\alpha + \left(\frac{k-1}{2}\right)\beta\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right) + \sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha + k\beta)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\cos\left(\alpha + \frac{k\beta}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right) + \sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\left(\alpha + \frac{k\beta}{2} + \frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

5. ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે, $\cos\theta \cos 2\theta \cos 2^2\theta \cos 2^3\theta \ldots \cos 2^{n-1}\theta = \dfrac{\sin 2^n\theta}{2^n \cdot \sin\theta}$, $\forall\, n \in N$.

➡ $P(n) : \cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 2^2\theta \cos 2^3\theta \ldots \cos 2^{n-1}\theta$

$= \dfrac{\sin 2^n\theta}{2^n \sin\theta}$, $\forall\; n \in N$

$n = 1$ માટે ડા.બા. $= \cos\theta$

જ.બા. $= \dfrac{\sin 2\theta}{2\sin\theta}$

$= \dfrac{2\sin\theta \cos\theta}{2\sin\theta}$

$= \cos\theta$

\ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

$n = k$, $k \in N$ માટે ધારો કે $P(k)$ સત્ય છે.

$P(k) : \cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 2^2\theta \ldots \cos 2^{k-1}\theta = \dfrac{\sin 2^k\theta}{2^k \cdot \sin\theta}$ ... (i)

$n = k + 1$ માટે,

$P(k+1) : \cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 2^2\theta \ldots\ldots \cos 2^{k-1}\theta \cdot \cos 2^k\theta$

$= \dfrac{\sin 2^k\theta}{2^k \cdot \sin\theta}\cos 2^k\theta$ (∵ પરિણામ (i) પરથી)

$= \dfrac{2}{2} \times \dfrac{\sin 2^k\theta \cdot \cos 2^k\theta}{2^k \sin\theta}$

$= \dfrac{\sin(2 \cdot 2^k\theta)}{2^{k+1} \cdot \sin\theta}$

$= \dfrac{\sin(2^{k+1}\theta)}{2^{k+1} \cdot \sin\theta}$

∴ $P(k+1)$ સત્ય છે.

$P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow P(k+1)$ સત્ય છે.

∴ ગણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પરથી $P(n)$, $\forall n \in N$ સત્ય છે.

6. ગાણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પરિણામ સાબિત કરો :

સાબિત કરો કે, $\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots\ldots + \sin n\theta = \dfrac{\sin\frac{n\theta}{2}\,\sin\frac{(n+1)}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$, $\forall n \in N$.

➥ ધારો કે $P(n) : \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots\ldots + \sin n\theta =$

$\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2} \cdot \sin\dfrac{n\theta}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{\theta}{2}\ n \in N$

$n = 1$ માટે

ડા.બા. $= \sin\theta$,

જ.બા. $= \sin\dfrac{(1+1)\theta}{2} \cdot \sin\dfrac{\theta}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{\theta}{2}$

$= \sin\theta \cdot \sin\dfrac{\theta}{2} \cdot \dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$

$= \sin\theta$

∴ ડા.બા. = જ.બા.

∴ P (1) સત્ય છે.

ધારો કે P (k) સત્ય છે, $k \in N$

∴ $P(k) : \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots\ldots + \sin k\theta = \sin\dfrac{(k+1)\theta}{2} \cdot \sin\dfrac{k\theta}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{\theta}{2}$

$n = k + 1$ માટે

ડા.બા. $= \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots\ldots + \sin k\theta + \sin(k+1)\theta$

$= \sin\dfrac{(k+1)\theta}{2} \cdot \sin\dfrac{k\theta}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{\theta}{2} + \sin(k+1)\theta$

$= \sin\dfrac{(k+1)\theta}{2} \cdot \sin\dfrac{k\theta}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{\theta}{2} + 2\sin\dfrac{(k+1)\theta}{2} \cdot \cos\dfrac{(k+1)\theta}{2}$

$= \sin\dfrac{(k+1)\theta}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{\theta}{2}\left[\sin\dfrac{k\theta}{2} + 2\cos\dfrac{(k+1)\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}\right]$

➥ ધારો કે $P(n) : \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots\ldots + \sin n\theta =$

$\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2} \cdot \sin\dfrac{n\theta}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{\theta}{2}\ n \in N$

$n = 1$ માટે

ડા.બા. $= \sin\theta$,

જ.બા. $= \sin\dfrac{(1+1)\theta}{2} \cdot \sin\dfrac{\theta}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{\theta}{2}$

$= \sin\theta \cdot \sin\dfrac{\theta}{2} \cdot \dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$

$= \sin\theta$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P (1) સત્ય છે.

ધારો કે P (k) સત્ય છે, $k \in$ N

$\therefore P(k) : \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots\ldots + \sin k\theta = \sin\dfrac{(k+1)\theta}{2} \cdot \sin\dfrac{k\theta}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{\theta}{2}$

$n = k + 1$ માટે

ડા.બા. $= \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots\ldots + \sin k\theta + \sin(k+1)\theta$

$= \sin\dfrac{(k+1)\theta}{2} \cdot \sin\dfrac{k\theta}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{\theta}{2} + \sin(k+1)\theta$

$= \sin\dfrac{(k+1)\theta}{2} \cdot \sin\dfrac{k\theta}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{\theta}{2} + 2\sin\dfrac{(k+1)\theta}{2} \cdot \cos\dfrac{(k+1)\theta}{2}$

$= \sin\dfrac{(k+1)\theta}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{\theta}{2}\left[\sin\dfrac{k\theta}{2} + 2\cos\dfrac{(k+1)\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}\right]$

7. **ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પરિણામ સાબિત કરો : સાબિત કરો કે $\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{7n}{15}$ જ્યાં $n \in$ N.**

➡ અહીં $P(n) : \dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{7n}{15}, n \in N$ આપેલ છે.

હવે $n = 1$ માટે સાબિત કરતાં,

$P(1) : \dfrac{(1)^5}{5} + \dfrac{1^3}{3} + \dfrac{7(1)}{15} = \dfrac{3+5+7}{15} = \dfrac{15}{15} = 1$

જે પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે. $\therefore$ $n = 1$ માટે P(1)

હવે ધારો કે આપેલ વિધાન $k \in$ N માટે સત્ય છે.

આમ, $P(k) : \dfrac{k^5}{5} + \dfrac{k^3}{3} + \dfrac{7k}{15}$ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

તેમ સ્વીકારતાં,

હવે $n = k + 1 \in$ N માટે સાબિત કરતાં,

$\therefore P(k+1) : \dfrac{(k+1)^5}{5} + \dfrac{(k+1)^3}{3} + \dfrac{7(k+1)}{15}$

$= \dfrac{k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1}{5} + \dfrac{k^3 + 1 + 3k(k+1)}{3} + \dfrac{7k+7}{15}$

$= \dfrac{k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1}{5} + \dfrac{k^3 + 1 + 3k^2 + 3k}{3} + \dfrac{7k+7}{15}$

$= \dfrac{k^5}{5} + \dfrac{k^3}{3} + \dfrac{7k}{15} + \dfrac{5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1}{5} + \dfrac{3k^2 + 3k + 1}{3} + \dfrac{7k+7}{15}$

$= \dfrac{k^5}{5} + \dfrac{k^3}{3} + \dfrac{7k}{15} + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + k^2 + k + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{15}$

$= \dfrac{k^5}{5} + \dfrac{k^3}{3} + \dfrac{7k}{15} + k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1$

જે પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

$\therefore$ વિધાન $P(k+1)$ પણ સત્ય છે.

આમ, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$\therefore$ આપેલ વિધાન ગાણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ

$\forall n \in N$ માટે સત્ય છે.

8. ગાણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પરિણામ સાબિત કરો :

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24},\ n>1,\ n\in N.$$

➡ $P(n):\ \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}, n>1, n\in N$

$n=2$ લેતાં, $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}>\frac{13}{24}$

$\therefore$ $P(2)$ સત્ય છે.

ધારો કે $P(k)$, $k\in N$ સત્ય છે.

$\therefore$ $P(k):\ \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{k+k}>\frac{13}{24}$ ... (i)

$n=k+1$ લેતાં,

$P(k+1):\ \frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$

$$P(k+1)-P(k) = \frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$$

પરંતુ $\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}>0$

$\therefore$ $P(k+1)-P(k)>0$

$\therefore$ $P(k+1)>P(k)$

પરંતુ $P(k)>\frac{13}{24}$ ($\because$ પરિણામ (i) પરથી)

$\therefore$ $P(k+1)>\frac{13}{24}$

$\therefore$ $P(k+1)$ સત્ય છે.

$P(k)$ સત્ય છે $\Rightarrow P(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પ્રમાણે $P(n)$, $\forall\ n\in N$ સત્ય છે.

9. ગાણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પરિણામ સાબિત કરો : n ઘટક ધરાવતા કોઈપણ ગણને 2^n ઉપગણ હોય તેમ બતાવો. જ્યાં $n \in N$.

➡ $P(n)$: n ઘટકો ધરાવતા કોઈપણ ગણને 2^n ઉપગણ છે. $n \in N$.

વિધાન $n = 1$ માટે સાબિત કરતાં,

ધારો કે, એક ઘટક ધરાવતો ગણ A છે.

આમ, $A = \{x\}$

$\therefore$ A ના ઉપગણ = ϕ, A

$\therefore$ A ના ઉપગણની સંખ્યા = 2

આમ ગણમાં એક ઘટક હોય તો તેના ઉપગણ 2^1 થાય અર્થાત્ 2 ઉપગણ થાય.

$\therefore$ આમ વિધાન $n = 1$ માટે સત્ય છે.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે આપેલ વિધાન $n = k \in$ N માટે સત્ય છે.

આમ, P(k) : k ઘટકો ધરાવતા ગણના ઉપગણોની સંખ્યા 2^k છે તેમ સ્વીકારતાં, હવે $n = k + 1 \in$ N માટે સાબિત કરતાં, અહીં બે પ્રકારનાં ઉપગણનો વિચાર કરીએ.

પ્રથમ એવો ઉપગણ લઈએ જેમાં a_{k+1} સભ્ય ન હોય અને તથા એવો ઉપગણ જેમાં a_{k+1} સભ્ય હોય.

જો a_{k+1} સભ્ય ન હોય તેવા ઉપગણોની સંખ્યા k ઘટકોથી બનતા ઉપગણોની સંખ્યા એટલે કે 2^k ($\because$ વિધાન P(k) સત્ય છે) થાય. તથા આજ બધા ઉપગણોમાં એક ઘટક a_{k+1} ઉમેરતાં નવા a_{k+1} સભ્ય હોય તેવા ઉપગણોની સંખ્યા પણ 2^k થાય.

આમ, A ના $k + 1$ સભ્ય ધરાવતા ઉપગણોની સંખ્યા = a_{k+1} સભ્ય ન હોય તેવા ઉપગણોની સંખ્યા + a_{k+1} સભ્ય હોય તેવા ઉપગણોની સંખ્યા,

$= 2^k + 2^k$

$= 2 \cdot 2^k$

$= 2^{k+1}$

$\therefore$ A માં (k + 1) સભ્ય હોય તેવા ઉપગણોની સંખ્યા = 2^{k+1}.

$\therefore$ વિધાન $n = k + 1 \in$ N માટે સભ્ય છે.

$\therefore$ P(k) $\Rightarrow$ P(k + 1)

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી આપેલ વિધાન $n \in$ N માટે સત્ય છે.