W4P4P2

അധ്യായം 6

പ്രകീർണ്ണനമാനകങ്ങൾ
(Measures of Dispersion)

പഠനനേട്ടങ്ങൾ

- ശരാശരികളുടെ പരിമിതികൾ മനസിലാക്കുന്നു.
- പ്രകീർണ്ണനമാനകങ്ങളുടെ ആവശ്യകത മനസിലാക്കുന്നു.
- പ്രകീർണ്ണനമാനകങ്ങളുടെ വ്യത്യസ്ത രീതികൾ കണക്കാക്കുന്നു.
- വിവിധ രീതിയിലുള്ള പ്രകീർണ്ണന മാനകങ്ങൾ കണക്കാക്കി അവയെ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നു.
- കേവലവ്യതിയാനമാനങ്ങളും ആപേക്ഷിക വ്യതിയാനമാനകങ്ങളും വേർതിരിച്ചറിയുന്നു.

1. ആമുഖം

ബൃഹത്തായ ദത്തങ്ങളെ ഒറ്റ പ്രാതിനിധ്യ മൂല്യമായി മാറ്റുന്നതെങ്ങനെ എന്നതാണല്ലോ മുൻ അധ്യായത്തിൽ നാം പഠിച്ചത്. എന്നാൽ, ദത്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യതിയാനത്തെക്കുറിച്ച് ഇത്തരം മൂല്യങ്ങൾ വിവരങ്ങൾ നൽകാറില്ല. ആയതിനാൽ ദത്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യതിയാനത്തെ കൃത്യമായി സംഖ്യാരൂപത്തിൽ അളക്കുന്നതിനുള്ള വ്യത്യസ്ത രീതികളാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ പഠന വിധേയമാക്കുന്നത്.

റാം, റഹീം, മരിയ എന്നീ സുഹൃത്തുക്കൾ അവരുടെ ചായകുടിക്കിടയിലുള്ള സംഭാഷണത്തിൽ ഓരോരുത്തരുടെയും കുടുംബവരുമാനത്തെക്കുറിച്ച് പരാമർശിച്ചു. തന്റെ കുടുംബത്തിൽ 4 അംഗങ്ങളുണ്ടെന്നും ഓരോ അംഗത്തിന്റെയും ശരാശരി വരുമാനം 15,000 രൂപയാണെന്നും റാം പറഞ്ഞു. ഇത് കേട്ട് റഹീം, തന്റെ കുടുംബത്തിൽ 6 അംഗങ്ങളുണ്ടെങ്കിലും ഓരോ അംഗത്തിന്റെയും ശരാശരി വരുമാനം 15,000 തന്നെയാണെന്ന് പറഞ്ഞു.

തുടർന്ന് മരിയ, തന്റെ കുടുംബത്തിൽ 5 അംഗങ്ങളാണെന്നും അതിൽ ഒരാൾ തൊഴിൽരഹിതനാണെന്നും, എന്നാൽ തന്റെ കുടുംബത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ ശരാശരി വരുമാനവും 15,000 രൂപയാണെന്ന് സമർഥിച്ചു. എന്നാൽ, മരിയയുടെ പിതാവിന് ഉയർന്ന ശമ്പളമുണ്ടെന്നറിയാവുന്ന റാമിനും റഹീമിനും ഈ വാർത്ത ആശ്ചര്യമുണ്ടാക്കി. അവർ അവരുടെ വരുമാനത്തിന്റെ വിശദാംശങ്ങളിലേക്ക് പോകുകയും താഴെപ്പറയുന്ന വിവരങ്ങൾ ശേഖരിക്കുകയും ചെയ്തു.

കുടുംബത്തിന്റെ വരുമാനം

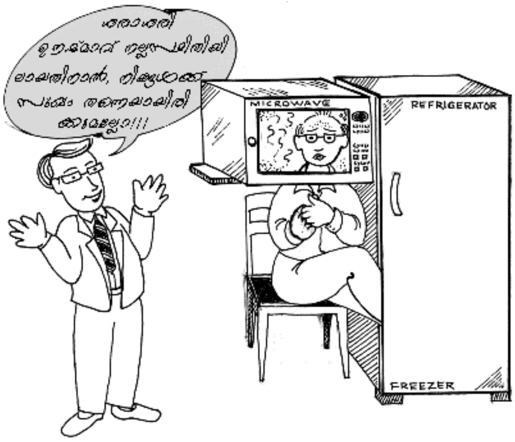
ക്രമനം.	റാം	റഹീം	മരിയ
1.	12,000	7.000	0
2.	14,000	10,000	7,000
3.	16,000	14,000	8,000
4.	18,000	17.000	10,000
5.	-----	20.000	50,000
6.	-----	22,000	------
മൊത്തം വരുമാനം	60,000	90,000	75,000
ശരാശരി വരുമാനം	15,000	1.000	15,000

ശരാശരി വരുമാനം ഒരുപോലെ ആണെങ്കിലും വ്യക്തിഗതവരുമാനത്തിലെ പ്രകടമായ വ്യത്യാസം മുകളിലത്തെ പട്ടികയിൽ നിന്നും മനസിലാക്കാവുന്നതാണല്ലോ?

ശരാശരി എന്നത് വിതരണം ചെയ്യപ്പെട്ട ദത്തങ്ങളുടെ ഒരു ഭാഗമായ പ്രാതിനിധ്യ മൂല്യം മാത്രമാണ്. എന്നാൽ, വിതരണം ചെയ്യപ്പെട്ട മൂല്യങ്ങളുടെ വ്യാപനം കൂടി മനസിലാക്കിയാൽ മാത്രമേ ഈ ചിത്രം വ്യക്തമാകുകയുള്ളൂ.

മരിയയുടെ കുടുംബത്തിലെ വരുമാന വ്യത്യാസമാണ് ഏറ്റവും കൂടുതലെന്നും, റഹീമിന്റെ കുടുംബത്തിന്റെ വരുമാന വ്യത്യാസം മരിയയുടെ കുടുംബത്തിനേക്കാൾ കുറവും, എന്നാൽ റാമിന്റെ കുടുംബത്തിലെ വരുമാനവ്യത്യാസമാണ് ഏറ്റവും കുറവെന്നും പട്ടികയിൽ നിന്ന് മനസിലാക്കാമല്ലോ? അതായത്, ശരാശരി മൂല്യം എന്നത് വിതരണത്തെ മനസിലാക്കാൻ അപര്യാപ്തമാണെന്ന് ഇതിൽ നിന്നും മനസിലാക്കാവുന്നതാണ്. വിതരണം ചെയ്യപ്പെട്ട മൂല്യങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം കാണിക്കുന്ന മറ്റൊരു മൂല്യം തന്നാൽ വിതരണവ്യാപനത്തെക്കുറിച്ച് കൂടുതൽ വ്യക്തത ലഭിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി, ആളോഹരിവരുമാനം (Per capita Income) എന്നത് ശരാശരിവരുമാനത്തെ മാത്രമാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. പ്രകീർണനമാനകങ്ങൾ (Measures of Dispersion) വരുമാന അസമത്വത്തിന്റെ തോതിനെക്കുറിച്ച് വിവരങ്ങൾ നൽകുന്നതിനാൽ സമൂഹത്തിലെ ജനങ്ങളുടെ ആപേക്ഷികജീവിതനിലവാരം മനസിലാക്കാൻ ഇത് സഹായിക്കുന്നു.

വിതരണമൂല്യങ്ങൾ അതിന്റെ ശരാശരി



യിൽ നിന്നും എത്രമാത്രം വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്നതാണ് പ്രകീർണനം (Dispersion)സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. പ്രകീർണന വ്യതിയാനത്തിന്റെ വ്യാപ്തി അളക്കുന്നതി

നുള്ള രീതികൾ താഴെ പറയുന്നവയാണ്.

(i) റേഞ്ച് (Range),

(ii) ചതുർഥകവ്യതിയാനം (Quartile Deviation),

(iii) മാധ്യവ്യതിയാനം (Mean Deviation),

(iv) മാനകവ്യതിയാനം (Standard Deviation).

ഇതുകൂടാതെ വ്യതിയാനത്തെ അളക്കുന്നതിനുള്ള ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ചുള്ള രീതിയുമുണ്ട്.

വിതരണം ചെയ്ത മൂല്യങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള വ്യാപനത്തിന്റെ വ്യാപ്തി മനസിലാക്കുന്നതിനുള്ള പ്രകീർണ്ണന അളവുകളാണ് റേഞ്ചും (Range) ചതുർഥകവ്യതിയാനവും (Quartile Deviation). എന്നാൽ, ശരാശരിയിൽ നിന്നും ഓരോ മൂല്യങ്ങളും എത്രമാത്രം വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്നതാണ് മാധ്യവ്യതിയാനം (Mean Deviation), മാനകവ്യതിയാനം (Standard Deviation) എന്നിവ അളക്കുന്നത്.

2. മൂല്യങ്ങളുടെ വ്യാപനവ്യാപ്തിയുടെ മാനകങ്ങൾ (Measures Based upon Spread of Values)

റേഞ്ച് (Range)

ഒരു വിതരണത്തിലെ ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യവും (L) ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യവും (S) തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമാണ് റേഞ്ച് (Range). ഇതിന്, R = L - S എന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുന്നു. റേഞ്ചിന്റെ മൂല്യം ഉയർന്നതാണെങ്കിൽ ഉയർന്ന വ്യതിയാനത്തെയും, മൂല്യം കുറവാണെങ്കിൽ കുറഞ്ഞ വ്യതിയാനത്തെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

പ്രവർത്തനങ്ങൾ

- താഴെപ്പറയുന്ന മൂല്യങ്ങൾ ശ്രദ്ധിച്ച് നോക്കൂ:

  20, 30, 40, 50, 200

  റേഞ്ച് കണക്കാക്കുക
- തന്നിരിക്കുന്ന മൂല്യങ്ങളിൽ '200' എന്ന മൂല്യത്തിന്റെ അഭാവത്തിൽ റേഞ്ച് എത്രയായിരിക്കും.
- തന്നിരിക്കുന്ന മൂല്യങ്ങളിൽ '50'-ന് പകരം '150' എന്ന മൂല്യം നൽകിയാൽ റേഞ്ച് എത്രയായിരിക്കം?

റേഞ്ച് : വിലയിരുത്തൽ

അറ്റമൂല്യങ്ങൾ റേഞ്ചിനെ സാരമായി ബാധിക്കുന്നു. മാത്രമല്ല, റേഞ്ച് എല്ലാ മൂല്യങ്ങളെയും അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ളതല്ല. ആയതിനാൽ, വിതരണത്തിലെ ഏറ്റവും വലിയതും ചെറിയതുമായ മൂല്യങ്ങൾക്ക് മാറ്റമില്ലാതെ മറ്റ് മൂല്യങ്ങൾ മാത്രം മാറുമ്പോൾ റേഞ്ചിന് വ്യത്യാസം വരുന്നില്ല. അറ്റം തുറന്ന ആവൃത്തി (open ended frequency) വിതരണത്തിൽ റേഞ്ച് കണക്കാക്കാൻ സാധ്യമല്ല.

റേഞ്ചിന് ചില പോരായ്മകൾ ഉണ്ടെങ്കിലും വളരെ ലളിതവും ഏതൊരാൾക്കും എളുപ്പത്തിൽ മനസിലാക്കാവുന്നതുമായതിനാൽ ഈ രീതി വ്യാപകമായി ഉപയോഗിച്ചുവരുന്നു. ഉദാഹരണമായി, വിവിധനഗരങ്ങളിലെ കുറഞ്ഞതും കൂടിയതുമായ താപനില ദിവസേന ടെലിവിഷൻസ്ക്രീനിൽ നാം കാണാറുണ്ടല്ലോ. ഇതിൽ നിന്നും താപനിലയിലെ വ്യതിയാനത്തെക്കുറിച്ച് വിലയിരുത്താവുന്നതാണ്.

ഏറ്റവും ചെറിയ ക്ലാസിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധിയും (Lower Limit) ഏറ്റവും ഉയർന്ന ക്ലാസിന്റെ ഉയർന്ന പരിധിയും (Upper Limit) തരാതിരിക്കുകയോ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടും വ്യക്തമാക്കാതിരിക്കുകയോ ചെയ്യുന്ന ആവൃത്തിവിതരണത്തെയാണ് അറ്റം തുറന്നവിതരണം (Open ended distribution) എന്നുപറയുന്നത്.

പ്രവർത്തനം

- പത്രത്തിൽ നിന്നും 10 കമ്പനികളുടെ ഓഹരിവിലയിൽ 52 ആഴ്ചയിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയ ഉയർന്ന/താഴ്ന്ന വിലകൾ ശേഖരിക്കുക. ഓഹരി വിലയുടെ റേഞ്ച് കണക്കാക്കുക. ഏത് കമ്പനിയുടെ ഓഹരിക്കാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ വ്യതിയാനം ഉണ്ടായത്, ഏത് ഓഹരിയാണ് കൂടുതൽ സ്ഥിരതയുള്ളത്?

ചതുർഥകവ്യതിയാനം (Quartile Deviation)

ഒരു വിതരണത്തിലെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന മൂല്യത്തിന്റെ (Extremely high value) അല്ലെങ്കിൽ ഏറ്റവും താഴ്ന്ന മൂല്യത്തിന്റെ (Extremely low value) സാന്നിദ്ധ്യം പ്രകീർണന മാനകം എന്ന നിലയിലുള്ള റേഞ്ചിന്റെ ഉപയോഗം പരിമിതപ്പെടുത്തുന്നു. ആയതിനാൽ, അറ്റമൂല്യങ്ങളുടെ വില സ്വാധീനിക്കപ്പെടാത്ത പ്രകീർണനമാനകം ആവശ്യമാണ്.

ഒരു വിതരണത്തെ നാല് തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിച്ചാൽ ഓരോന്നിലും 25% മൂല്യങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്നു. അങ്ങനെ നമുക്ക് ചതുർഥകങ്ങൾ, മധ്യാങ്കമൂല്യം എന്നിവ ലഭിക്കുന്നു (അദ്ധ്യായം 5-ൽ നിങ്ങൾ ഇവയെക്കുറിച്ച് പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ?).

ഉയർന്ന ചതുർഥകവും (Q_3) താഴ്ന്ന ചതുർഥകവും (Q_1) തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമാണ് ചതുർഥകാന്തഃപരിധി (Inter Quartile Range).

അതായത് $Q_3 - Q_1$

ഒരു വിതരണത്തിന്റെ മധ്യത്തിലുള്ള 50% മൂല്യങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ളതാണ് ചതുർഥകാന്തപരിധി. ആയതിനാൽ, അറ്റമൂല്യങ്ങൾ ഇവയെ സ്വാധീനിക്കുന്നില്ല. ചതുർഥകാന്തപരിധിയുടെ പകുതിയാണ് ചതുർഥകവ്യതിയാനം (Quartile Deviation).

അതായത്,

$$Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Q.D എന്നത് അർധചതുർഥകാന്തഃപരിധി (Semi-Inter quartile range) എന്നും അറിയപ്പെടുന്നു.

ഗ്രൂപ്പായി തിരിക്കാത്ത ദത്തങ്ങളുടെ റേഞ്ച്, ചതുർത്ഥകവ്യതിയാനം എന്നിവ കണക്കാക്കൽ (Calculation of Range and Q.D for Ungrouped Data)

ഉദാഹരണം 1

താഴെത്തന്നിരിക്കുന്ന നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ റേഞ്ച്, ചതുർത്ഥകവ്യതിയാനം എന്നിവ കണക്കാക്കുക.

20, 25, 29, 30, 35, 39, 41, 48, 51, 60, 70

റേഞ്ച് = 70-20=50

ചതുർത്ഥകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്നതിനായി ആദ്യം Q_3, Q_1 എന്നിവ കണ്ടെത്തേണ്ടതുണ്ട്.

$$Q_1 = \frac{n+1}{4} \text{ -ാമത്തെ മൂല്യം}$$

'n' എന്നത് തന്നിരിക്കുന്ന മൂല്യങ്ങളുടെ എണ്ണം = 11

Q_1 എന്നത് വിതരണത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ മൂല്യത്തിന്റെ വിലയാണ്.

മൂല്യങ്ങളെ ആരോഹണക്രമത്തിൽ ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നതിനാൽ, മൂന്നാമത്തെ മൂല്യം '29' ആണ് (തന്നിരിക്കുന്ന മൂല്യങ്ങൾ ക്രമത്തിൽ അല്ലെങ്കിൽ നിങ്ങൾ എന്ത് ചെയ്യും?).

അതുപോലെ, $Q_3 = \frac{3(n+1)}{4}$ -ാമത്തെ മൂല്യം

അതായത് '9'-ാമത്തെ മൂല്യം '51' ആണ്.

$$Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{51 - 29}{2} = 11$$

മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്നും ചതുർഥകങ്ങളിലേക്കുള്ള വ്യത്യാസത്തിന്റെ ശരാശരിയാണ് ചതുർത്ഥക വ്യതിയാനം എന്ന് നിങ്ങൾക്ക് മനസിലായിക്കാണുമല്ലോ.

പ്രവർത്തനം

- മധ്യാങ്കം കണക്കാക്കി മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവന ശരിയാണോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

ആവൃത്തിവിതരണത്തിന്റെ റേഞ്ച്, ചതുർത്ഥകവ്യതിയാനം എന്നിവ കണക്കാക്കുന്ന വിധം (Calculation of Range and Q.D for a Frequency Distribution)

ഉദാഹരണം 2

ഒരു ക്ലാസിലെ 40 കുട്ടികളുടെ മാർക്ക് താഴെതന്നിരിക്കുന്നു. ഇതിൽ നിന്നും റേഞ്ച്, ചതുർത്ഥക വ്യതിയാനം എന്നിവ കണക്കാക്കുക.

പട്ടിക 6.1

ക്ലാസ് ഇടവേളകൾ C I (Class Internal)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം (f)
0-10	5
10-20	8
20-40	16
40-60	7
60-90	4
	40

റേഞ്ച് എന്നത് ഉയർന്ന ക്ലാസിന്റെ ഉയർന്ന പരിധിയും (Upper limit) താഴ്ന്ന ക്ലാസിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധിയും (Lower limit) തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമാണ്. ആയതിനാൽ റേഞ്ച് = 90–0=90

ചതുർത്ഥകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്നതിന് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ സഞ്ചിതാവൃത്തി (Cumulative Frequency) കണക്കാക്കേണ്ടതുണ്ട്.

ക്ലാസ് ഇടവേളകൾ CI	ആവൃത്തികൾ (Frequencies)	സഞ്ചിതാവൃത്തികൾ (Comulative Frequencies)
0 10	5	05
10 – 20	8	13
20 – 40	16	29
40 60	7	36
60 90	4	40
	n – 40	

സന്തതശ്രേണിയിൽ (Continuous Series)

Q_1 എന്നത് $n/4$ -ാമത്തെ മൂല്യമാണ്. അതായത് 10–ാമത് മൂല്യത്തിന്റെ വിലയാണ്. 10–ാമത്തെ മൂല്യം 10–20 എന്ന ക്ലാസിലാണ് ഉൾപ്പെടുന്നത്. ആയതിനാൽ Q_1 ക്ലാസ് 10–20 ആണ്. താഴെത്തന്നിരിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് Q_1-ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - cf}{f} \times i$$

ഇവിടെ, L = 10 (പ്രസ്തുത ചതുർത്ഥ ക്ലാസിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധി), cf = 5 (Q_1 ക്ലാസിന്റെ തൊട്ടു മുകളിലുള്ള സഞ്ചിതാവൃത്തിയുടെ മൂല്യം), i = 10 (Q_1 ക്ലാസിന്റെ ഇടവേള), f = 8 (Q_1 ക്ലാസിന്റെ ആവൃത്തി)

$$Q_1 = 10 + \frac{10-5}{8} \times 10 = 16.25$$

അതുപോലെ, $Q_3 = \frac{3n}{4}$ -ാമത്തെ മൂല്യം.

അതായത് 30-ാമത്തെ മൂല്യം, ഇത് 40-60 ക്ലാസിൽ ഉൾപ്പെടുന്നു. താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് Q_3 കണ്ടെത്താം.

$$Q_3 \quad L + \frac{\frac{3n}{4} - c.f}{f} \times i$$

$$Q_3 = 40 + \frac{30-29}{7} \times 20$$

$$Q_3 = 42.87$$

$$Q.D = L + \frac{42.87 - 16.25}{2} \times 13.31$$

വ്യക്തിഗതശ്രേണി (Individual Series), അസന്തതശ്രേണി (Discrete series) എന്നിവയിൽ $Q_1 = \frac{n+1}{4}$ന്റെ മൂല്യമാണ്. എന്നാൽ ഇത് സന്തതശ്രേണിയിൽ (Continuous distribution) $\frac{n}{4}$ന്റെ മൂല്യമാണ്. അതുപോലെ മധ്യാങ്കം, Q_3 എന്നിവയിൽ 'n+1' ന് പകരം 'n'ആണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

ഒരു ഗ്രൂപ്പിനെ രണ്ട് തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിച്ച് ഓരോ ഭാഗത്തിന്റെയും മധ്യാങ്കം കണക്കാക്കുന്നു. പഠനനിലവാരം കൂടിയവരുടെയും, പഠനനിലവാരം കുറഞ്ഞവരുടെയും മധ്യാങ്കങ്ങൾ കണക്കാക്കിയാൽ ഈ രണ്ട് മധ്യാങ്കങ്ങളും ഗ്രൂപ്പിന്റെ മൊത്തം മധ്യാങ്കവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിന്റെ തുക, ശരാശരി 13.31 ആയിരിക്കും. ഒരു നഗരത്തിലെ ജനങ്ങളുടെ മൊത്തം വരുമാനം സൂചിപ്പിക്കുന്ന ദത്തങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ ആദ്യം ആളുകളുടെ മധ്യാങ്കവരുമാനം കണക്കാക്കുക. തുടർന്ന് സമ്പന്നർ, പാവപ്പെട്ടവർ എന്ന് രണ്ട് ഗ്രൂപ്പായി തിരിച്ച് ഓരോ ഗ്രൂപ്പിന്റെയും മധ്യാങ്കം കണക്കാക്കുന്നു. ഗ്രൂപ്പിന്റെ മൊത്തം മധ്യാങ്കത്തിന്റെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ ശരാശരി എത്രയാണെന്ന് ചതുർഥകവ്യതിയാനത്തിലൂടെ (Quartile Deviation) കണ്ടെത്താൻ സാധിക്കും.

അറ്റമൂല്യങ്ങൾ സ്വാധീനിക്കപ്പെടുന്നില്ല എന്നതിനാൽ, അറ്റം തുറന്ന വിതരണങ്ങൾക്ക് അനുയോജ്യമായ മാനകമാണ് ചതുർഥകവ്യതിയാനം (Quartile Deviation).

3. ശരാശരിയിൽ നിന്നുള്ള പ്രകീർണന മാനങ്ങൾ (Measures of Disper sion from Averages)

മൂല്യങ്ങൾ അവയുടെ ശരാശരിയിൽ നിന്നും എത്രമാത്രം വ്യത്യാസപ്പെട്ട് കിടക്കുന്നു എന്നതാണല്ലോ പ്രകീർണന മാനകങ്ങൾ (Measures of Dispersion). ശരാശരിയിൽ നിന്നും മൂല്യങ്ങൾ എത്രമാത്രം വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്ന് കണക്കാക്കാൻ റേഞ്ച്, ചതുർഥക വ്യതിയാനം എന്നിവയ്ക്ക് സാധ്യമല്ല. എന്നിരുന്നാലും

മൂല്യങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യാപനം മനസ്സിലാക്കാൻ ഈ രണ്ട് രീതികൾക്ക് സാധിക്കും. ശരാശരിയിൽ നിന്നും മൂല്യങ്ങൾക്കുള്ള വ്യത്യാസം അളക്കുന്നതിനുള്ള രീതികളാണ് മാധ്യവ്യതിയാനം (Mean Deviation), മാനക വ്യതിയാനം (Standard Deviation) എന്നിവ.

ശരാശരി എന്നത് കേന്ദ്രമൂല്യമായതിനാൽ ശരാശരിയിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനങ്ങൾ ചിലപ്പോൾ പോസിറ്റീവും, മറ്റ് ചിലപ്പോൾ നെഗറ്റീവും ആയിരിക്കും. ഈ പോസിറ്റീവ്, നെഗറ്റീവ്മൂല്യങ്ങൾ അതേപടി കൂട്ടുകയാണെങ്കിൽ ലഭിക്കുന്ന ആകെത്തുക ഒരു തരത്തിലുള്ള വിശകലനങ്ങൾക്കും പര്യാപ്തമല്ല. യഥാർഥത്തിൽ, മാധ്യവും വ്യതിയാനങ്ങളുടെ ആകെത്തുകയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം പൂജ്യമാണ്.

താഴെത്തന്നിരിക്കുന്ന 2 സെറ്റ് മൂല്യങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കുക.

സെറ്റ് A : 5, 9, 16

സെറ്റ് B : 1, 9, 20

സെറ്റ് B - യിലെ മൂല്യങ്ങൾ അതിന്റെ ശരാശരിയിൽ നിന്നും വളരെ വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ആയതിനാൽ സെറ്റ് A - യിലെ മൂല്യങ്ങളെക്കാളും കൂടുതൽ വ്യാപനം സെറ്റ് B - യിലെ മൂല്യങ്ങൾക്കാണ്. സമാന്തരമാധ്യത്തിൽ (Arithmetic Mean) നിന്നുള്ള വ്യത്യാസം കണക്കാക്കി, അവയുടെ ആകെതുക കണ്ടെത്തുക. എന്താണ് നിങ്ങൾക്ക് കാണാൻ കഴിയുന്നത്? ഈ പ്രവൃത്തി മധ്യാങ്കം ഉപയോഗിച്ചും തുടരുക. കണക്കാക്കിയ മൂല്യങ്ങളിൽ നിന്നും വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവ് എത്രയാണെന്ന് പറയാൻ സാധിക്കുമോ?

വ്യതിയാനത്തിന്റെ ചിഹ്നം ഒഴിവാക്കികൊണ്ട് മാധ്യവ്യതിയാനം (Mean Deviation) ഈ പ്രശ്നം പരിഹരിക്കുന്നു. അതായത് എല്ലാ വ്യതിയാനങ്ങളും പോസിറ്റീവായാണ് മാധ്യവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്നത്. മാനകവ്യതിയാനത്തിൽ (Standard Deviation) വ്യതിയാനങ്ങളുടെ വർഗം (Square), ശരാശരി എന്നിവ കണക്കാക്കിയശേഷം ശരാശരിയുടെ വർഗമൂലം (Square root) കണക്കാക്കുന്നു. ഈ രീതികൾ നമുക്ക് വിശദമായി പരിചയപ്പെടാം.

മാധ്യവ്യതിയാനം (Mean Deviation)

ഒരു റോഡിലെ A,B,C,D,E എന്നീ ക്രമത്തിൽ വരുന്ന അഞ്ച് നഗരങ്ങൾക്കായി ഒരു കോളേജ് സ്ഥാപിക്കാൻ തീരുമാനിച്ചു എന്ന് വിചാരിക്കുക. 'A' എന്ന നഗരത്തിൽ നിന്നും മറ്റ് നഗരങ്ങളിലേക്കുള്ള ദൂരവും ഓരോ നഗരങ്ങളിലെയും കുട്ടികളുടെ എണ്ണവും ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

നഗരം	നഗരം A-യിൽ നിന്നുള്ള ദൂരം	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
A	0	90
B	2	150
C	6	100
D	14	200
E	18	80
		620

'A' എന്ന നഗരത്തിലാണ് കോളേജ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതെങ്കിൽ 'B' എന്ന നഗരത്തിലെ 150 വിദ്യാർഥികൾ കോളേജിലേക്കും തിരിച്ചുമായി 2 കി.മീ. വീതം സഞ്ചരിക്കണം (മൊത്തം 300 കി.മീ.). കോളേജ് സ്ഥാപിക്കുന്നതിനുള്ള സ്ഥാനം കണ്ടെത്തുന്നതിന്റെ പ്രധാനലക്ഷ്യം വിദ്യാർ

ഥികൾ യാത്ര ചെയ്യേണ്ട ശരാശരി ദൂരം പരമാവധി എന്നതാണ്.

കോളേജ് സ്ഥാപിക്കുന്നത് ‘A’ എന്ന നഗരത്തിലോ ‘E’ എന്ന നഗരത്തിലോ ആണെങ്കിൽ ശരാശരി യാത്രാദൂരം കൂടുതലായിരിക്കും. എന്നാൽ കോളേജ് സ്ഥാപിക്കുന്നത് ഏകദേശം മധ്യത്തിലായി കിടക്കുന്ന നഗരത്തിലാണെങ്കിൽ വിദ്യാർഥികളുടെ ശരാശരി യാത്രാദൂരം കുറവായിരിക്കും. വിദ്യാർഥികൾ യാത്ര ചെയ്യുന്ന ശരാശരി ദൂരം കണക്കാക്കാനുള്ള ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ സാംഖ്യക ഉപാധിയാണ് മാധ്യവ്യതിയാനം (Mean Deviation). ഓരോ മൂല്യവും ശരാശരിയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിന്റെ സമാന്തരമാധ്യമാണ് (Arithmetic Mean) മാധ്യവ്യതിയാനം (Mean Deviation). ശരാശരിയായി സമാന്തരമാധ്യമോ മധ്യാങ്കമോ ഉപയോഗിക്കാം. (ശരാശരി എന്ന നിലയിൽ ബഹുലകത്തിന്റെ സ്ഥിരത കുറവായതിനാൽ മാധ്യവ്യതിയാനം കണക്കാക്കാൻ ഇത് ഉപയോഗിക്കാറില്ല).

പ്രവർത്തനങ്ങൾ

- A,C,E എന്നീ നഗരങ്ങളിലോ A, E എന്നീ നഗരങ്ങളുടെ മധ്യത്തിലോ ആണ് കോളേജ് സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതെങ്കിൽ വിദ്യാർഥികൾ യാത്ര ചെയ്യേണ്ട മൊത്തം ദൂരം കണക്കാക്കുക.
- നിങ്ങളുടെ അഭിപ്രായത്തിൽ ഏത് നഗരമാണ് കോളേജ് സ്ഥാപിക്കുന്നതിന് അനുയോജ്യമായത്? ഓരോ നഗരത്തിലും ഓരോ വിദ്യാർഥികൾ മാത്രമാണ് ഉള്ളതെങ്കിൽ ഈ അഭിപ്രായത്തിന് എന്തെങ്കിലും മാറ്റം ഉണ്ടാകുമോ?

തരംതിരിച്ചിട്ടില്ലാത്ത ദത്തങ്ങളുടെ മാധ്യവ്യതിയാനം സമാന്തരമാധ്യത്തിൽ നിന്നും കണക്കാക്കുന്ന രീതി (Calculation of Mean Deviation from Arithmetic Mean for Ungrouped Data)

നേരിട്ടുള്ള രീതി (Direct Method)

ഘട്ടങ്ങൾ

(i) മൂല്യങ്ങളുടെ സമാന്തരമാധ്യം (Arithmetic Mean) കണക്കാക്കുക.

(ii) ഓരോ മൂല്യവും സമാന്തരമാധ്യവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കണക്കാക്കുക. എല്ലാ വ്യത്യാസങ്ങളും പോസിറ്റീവ് സംഖ്യയായി പരിഗണിക്കുന്നു. ഇതിനെ $|d|$ എന്നത് കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

(iii) ഈ വ്യത്യാസങ്ങളുടെ (വ്യതിയാനങ്ങളുടെ) സമാന്തരമാധ്യമാണ് മാധ്യവ്യതിയാനം (Mean Deviation)

അതായത് $M.D = \frac{\sum |d|}{n}$

ഉദാഹരണം 3

താഴെത്തന്നിരിക്കുന്ന മൂല്യങ്ങളുടെ മാധ്യവ്യതിയാനം (Mean Deviation) കണക്കാക്കുക.

2, 4, 7, 8, 9

സമാന്തരമാധ്യം $(A.M) = \frac{\sum X}{n} = 6$

X	d|
2	4
4	2
7	1
8	2
9	3
	12

$$M.D._{(x)} = \frac{12}{5} = 2.4$$

അഭ്യൂഹമാധ്യരീതി (Assumed Mean Method)

അഭ്യൂഹമാധ്യത്തിൽ (Assumed Mean) നിന്നുള്ള വ്യതിയാനം കണക്കാക്കിക്കൊണ്ടും മാധ്യവ്യതിയാനം (Mean Deviation) കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്. യഥാർഥ മാധ്യം ഭിന്നസംഖ്യയാണെങ്കിൽ ഈ രീതിയാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത് (അഭ്യൂഹമാധ്യം യഥാർഥ മാധ്യത്തിന്റെ അടുത്തു നിൽക്കുന്ന സംഖ്യയായിരിക്കും).

ഉദാഹരണം 3-ന്റെ മാധ്യവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്നതിനായി '7' എന്ന മൂല്യത്തെ അഭ്യൂഹമാധ്യമായി സങ്കൽപ്പിക്കുന്നു. മാധ്യ വ്യതിയാനം (M.D) താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 4

X	d=|X-മധ്യാങ്കം|
2	5
4	3
7	0
8	1
9	2
	11

ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ താഴെപറയുന്ന സൂത്രവാക്യമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

$$M.D_{\text{മാധ്യം}} = \frac{\sum|d| + (\overline{X} - A\overline{X})(\sum f_B - \sum f_A)}{n}$$

ഇവിടെ, $\sum|d|$ എന്നത് അഭ്യൂഹമാധ്യത്തിൽ നിന്നും കണ്ടെത്തുന്ന കേവലവ്യതിയാനത്തിന്റെ തുകയാണ്.

$\overline{X}$ = യഥാർത്ഥ മാധ്യം

$A\overline{X}$ = വ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്നതിനായി ഉപയോഗിക്കുന്ന അഭ്യൂഹമാധ്യം

$\sum f_B$= യഥാർത്ഥ മൂല്യമുൾപ്പെടെ യഥാർത്ഥ മാധ്യത്തിനു താഴെയുള്ള മൂല്യങ്ങൾ

$\sum f_A$= യഥാർത്ഥ മാധ്യത്തിനു മുകളിലുള്ള മൂല്യങ്ങൾ

ഈ മൂല്യങ്ങൾ മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യത്തിൽ നൽകുമ്പോൾ

$$M.D_{\text{മാധ്യം}} = \frac{11 + (6-7)(2-3)}{5} = \frac{12}{5} = 2.4$$

തരംതിരിക്കാത്ത ദത്തങ്ങളുടെ മാധ്യവ്യതിയാനം മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്ന് കണക്കാക്കുന്ന രീതി (Mean Deviation from Median for Ungrouped Data)

നേരിട്ടുള്ള രീതി (Direcct Method)

ഉദാഹരണം 3 -ലെ മൂല്യങ്ങളുടെ മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്നുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്

(i) മധ്യാങ്കം കണക്കാക്കുക, മധ്യാങ്കം = 7

(ii) മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്നുള്ള കേവല വ്യതിയാനം കാണക്കാക്കുക. ഇത് |d| എന്നതു കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

(iii) കേവലവ്യതിയാനങ്ങളുടെ ശരാശരി കണക്കാക്കുക. ഇത് മാധ്യവ്യതിയാനം (Mean Deviation) ആണ്.

ഉദാഹരണം 5

X	d=|X-മധ്യാങ്കം|
2	5
4	3
7	0
8	1
9	2
	11

മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്നുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം (M.D From Median)

$$M.D_{മധ്യാങ്കം} = \frac{\sum|d|}{n} = \frac{11}{5} = 2.2$$

എളുപ്പവഴി (Shortcut Method)

എളുപ്പവഴിയിൽ മാധ്യവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്നതിനായി, (A) എന്ന മൂല്യത്തെ വ്യതിയാനം കാണുന്നതിനായി ഉപയോഗിക്കുന്നു. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് ഈ രീതിയിൽ മാധ്യവ്യതിയാനം കണക്കാക്കാം.

$$M.D_{മധ്യാങ്കം} = \frac{\sum|d| + (മധ്യാങ്കം - A)(\sum f_b - \sum f_a)}{n}$$

ഇവിടെ, A = വ്യതിയാനങ്ങൾ കണക്കാക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന സറിരമൂല്യം (മറ്റു ചരങ്ങളെല്ലാം അഭ്യൂഹമാധ്യ രീതിയിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നതുപോലെ തന്നെയാണ്).

തുടർവിതരണത്തിൽ മാധ്യത്തിൽ നിന്നും മാധ്യവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്ന രീതി (Mean Deviation from Mean for continuous Distribution);

ഘട്ടങ്ങൾ

(i) തന്നിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

(ii) മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള മധ്യബിന്ദുക്കളുടെ കേവലവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുക.

(iii) ഓരോ |d| യുടെ മൂല്യത്തെയും അതിന് സമാന്തരമായ ആവൃത്തികൊണ്ട് ഗുണിക്കുക (f|d|). $\sum f|d|$ കണ്ടെത്താൻ ഇവയുടെ തുക കണ്ടെത്തുക.

(iv) താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം പ്രയോഗിക്കുക.

$$M.D_{(\bar{x})} = \frac{\sum f|d|}{\sum f}$$

പട്ടിക 6.2

കമ്പനികളുടെ ലാഭം (ലക്ഷം രൂപയിൽ) ക്ലാസ് ഇടവേളകൾ	കമ്പനികളുടെ എണ്ണം (ആവൃത്തി)
10 – 20	5
20 – 30	8
30 – 50	16
50 – 70	8
70 – 80	3
	40

പട്ടിക 6.2-ലെ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യവ്യതിയാനം താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 6

ക്ലാസ് ഇടവേളകൾ	ആവൃത്തികൾ	മധ്യ ബിന്ദു	|d	f|d
10 20	5	15	25.5	127.5
20–30	8	25	15.5	124.0
30 50	16	40	0.5	8.0
50 70	8	60	19.5	156.0
70–80	3	75	34.5	103.5
	40			519.0

$$M.D_{(\bar{x})} = \frac{\sum f|d|}{\sum f} = \frac{519}{40} = 12.975$$

മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്നുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം (Mean Deviation from Median)

പട്ടിക 6.3

ക്ലാസ് ഇടവേളകൾ	ആവൃത്തികൾ
20–30	5
30–40	10
40–60	20
60–80	9
80–90	6
	50

മാധ്യത്തിൽ നിന്നും മാധ്യവ്യതിയാനം കാണുന്നതിനുള്ള നടപടിക്രമങ്ങൾ തന്നെയാണ് മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്നും മാധ്യവ്യതിയാനം കാണുന്നതിനുള്ള നടപടിക്രമങ്ങൾ. എന്നാൽ മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്നാണ് ഇവിടെ വ്യതിയാനം കാണേണ്ടത്.

ഉദാഹരണം 7

ക്ലാസ് ഇടവേളകൾ	ആവൃത്തികൾ	മധ്യബിന്ദു	|d|	f |d|
20–30	5	25	25	125
30–40	10	35	15	150
40–60	20	50	0	0
60–80	9	70	20	180
80–90	6	85	35	210
50				665

$$M.D_{(\text{മധ്യാങ്കം})} = \frac{\sum f|d|}{\sum f} = \frac{665}{50} = 13.3$$

മാധ്യവ്യതിയാനം : വിലയിരുത്തൽ

എല്ലാ മൂല്യങ്ങളെയും അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ളതാണ് മാധ്യവ്യതിയാനം. ആയതിനാൽ, ഒരു മൂല്യത്തിൽ വരുന്ന മാറ്റം പോലും മാധ്യവ്യതിയാനത്തെ ബാധിക്കാറുണ്ട്. മാധ്യത്തിൽ നിന്നും മാധ്യവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുമ്പോൾ മാധ്യവ്യതിയാനത്തിന്റെ മൂല്യം കുറവും മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്നും മാധ്യവ്യതിയാനം കണക്കാക്കിയാൽ കൂടുതലും ആയിരിക്കും. എന്നിരുന്നാലും ഇവിടെ വ്യതിയാനത്തിന്റെ ചിഹ്നങ്ങൾ ഒഴിവാക്കുന്നു. കൂടാതെ അറ്റം തുറന്ന വിതരണത്തിന്റെ മൂല്യം കണക്കാക്കാൻ ഈ രീതിയിൽ സാധ്യമല്ല.

മാനകവ്യതിയാനം (Standard Deviation)

മാനകവ്യതിയാനം എന്നത് മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വർഗവ്യതിയാനത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് വർഗമൂലമാണ്. ഇത് എങ്ങനെയാണ് കണക്കാക്കുന്നത് എന്ന് നമുക്ക് പരിശോധിക്കാം.

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, എന്നീ അഞ്ച് മൂല്യങ്ങളുണ്ടെന്ന് വിചാരിക്കുക. ആദ്യം അവയുടെ മാധ്യം കണക്കാക്കുന്നു. തുടർന്ന് ഓരോ മൂല്യങ്ങൾക്കും മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യത്യാസം കാണുകയും ഈ വ്യത്യാസങ്ങളുടെ വർഗം കണക്കാക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. വർഗ്ഗ വ്യതിയാനത്തിന്റെ മാധ്യമാണ് വിചരണം (Variance).

വിചരണത്തിന്റെ (variance) പോസിറ്റീവ് വർഗമൂലത്തെയാണ് മാനകവ്യതിയാനം (Standard deviation) എന്ന് പറയുന്നത്.

(കുറിപ്പ് - മാധ്യത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി മാത്രമാണ് മാനകവ്യതിയാനം (Standard deviation) കണക്കാക്കുന്നത്).

തരംതിരിക്കാത്ത ദത്തങ്ങളുടെ മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കൽ (Computation of Standard Deviation for Ungrouped Data)

വ്യക്തിഗതമൂല്യങ്ങളുടെ മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്നതിന് നാല് വ്യത്യസ്തമാർഗ

ങ്ങളുണ്ട്. എന്നാൽ, എല്ലാ രീതികളിലും മാനകവ്യതിയാനം ഒരേ മൂല്യം തന്നെയാണ് നൽകുന്നത്. ഈ രീതികൾ താഴെ പറയുന്ന വയാണ്.

(i) യഥാർഥമാധ്യരീതി (Actual Mean Method)

(ii) അഭ്യൂഹമാധ്യരീതി (Assumed Mean Method)

(iii) നേരിട്ടുള്ള രീതി (Direct Method)

(iv) പാദവ്യതിയാനരീതി (Step Deviation Method)

യഥാർഥമാധ്യരീതി (Actual Mean Method)

താഴെത്തന്നിരിക്കുന്ന മൂല്യങ്ങളുടെ മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കണം എന്ന് കരുതുക.

5, 10, 25, 30, 50

$$\overline{X} = \frac{5 \times 10 \times 25 \times 30 \times 50}{5} = \frac{120}{5} = 24$$

ഉദാഹരണം 8

X	d(x-$\overline{x}$)	d^2
5	–19	361
10	–14	196
25	+1	1
30	+6	36
50	+26	676
	0	1270

താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1270}{5}} = \sqrt{254} = 15.937$$

മുകളിലത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ വ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്നതിനായി ഉപയോഗിച്ച പൊതുമൂല്യം നിങ്ങൾ ശ്രദ്ധിച്ചിരുന്നോ? ഇത് യഥാർഥമാധ്യമാണോ?

അഭ്യൂഹമാധ്യരീതി (Assumed Mean Method)

ഈ രീതിയനുസരിച്ച് തന്നിരിക്കുന്ന മൂല്യങ്ങളിൽ നിന്ന് ഏത് മൂല്യത്തെയും മാധ്യമായി സങ്കൽപിച്ച് വ്യതിയാനം കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്.

ഇവിടെ, $d = X - A\overline{x}$ ആയിരിക്കും

$A\overline{x} = 25$ ആയി സങ്കൽപിച്ചാൽ, താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 9

X	d (x-A$\overline{x}$)	d^2
5	–20	400
10	–15	225
25	0	0
30	+5	25
50	+25	625
	–5	1275

മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം താഴെ പറയുന്നതാണ്.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1275}{5} - \left(\frac{-5}{5}\right)^2} = \sqrt{254} = 15.937$$

യഥാർഥമാധ്യത്തിൽ നിന്നല്ലാതെ ഏതൊരു മൂല്യത്തിൽ നിന്നുമുള്ള വ്യതിയാനങ്ങളുടെ തുകയും പൂജ്യം ആയിരിക്കില്ല.

നേരിട്ടുള്ള രീതി (Direct Method)

തന്നിരിക്കുന്ന മൂല്യങ്ങളിൽ നിന്ന് നേരിട്ടും മാനകവ്യതിയാനം (Standard Deviation) കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്. അതായത്, വ്യതിയാനങ്ങളുടെ സഹായമില്ലാതെയും കണക്കാക്കാം. താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണം ശ്രദ്ധിച്ചു നോക്കൂ.

ഉദാഹരണം 10

X	X^2
5	25
10	100
25	625
30	900
50	2500
120	4150

(പൂജ്യത്തിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയിട്ടുള്ള മൂല്യങ്ങളുടെ വ്യതിയാനമാണ് കണക്കാക്കിയിട്ടുള്ളത്).

അതിലേക്കായി, താഴെപ്പറയുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\overline{X})^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{4150}{5} - (24)^2} = \sqrt{254} = 15.937$$

പാദവ്യതിയാനരീതി (Step Deviation Method)

മൂല്യങ്ങളെ ഒരു പൊതുഘടകം കൊണ്ട് വിഭജിക്കാൻ കഴിയുമെങ്കിൽ, ഇപ്രകാരം വിഭജനം നടത്തി, താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്.

> വ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്നതിനായി പരിഗണിക്കുന്ന സ്ഥിരമൂല്യം മാനക വ്യതിയാനത്തെ ബാധിക്കാറില്ല. മാനക വ്യതിയാനത്തിന്റെ സൂത്രവാക്യത്തിൽ സ്ഥിരമൂല്യം ഉൾപ്പെടുന്നില്ല. ആയതിനാൽ മാനകവ്യതിയാനം ഉൽഭവമൂല്യത്തിൽ നിന്നും സ്വതന്ത്രമാണ് (Independent of Origin).

ഉദാഹരണം 11

തന്നിരിക്കുന്ന അഞ്ച് മൂല്യങ്ങളെ പൊതുഘടകമായ '5' കൊണ്ട് ഹരിക്കാമെങ്കിൽ, മാനകവ്യതിയാനം താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ കണ്ടെത്താവുന്നതാണ്.

x	x'	d (x'-A$\overline{x}$)	d^2
5	1	–3.8	14.44
10	2	–2.8	7.84
25	5	+0.2	0.04
30	6	+1.2	1.44
50	10	+5.2	27.04
		0	50.80

(യഥാർഥ മാധ്യരീതിയുടെ ഘട്ടങ്ങൾ തന്നെയാണ് ഈ രീതിയിലും അനുവർത്തിക്കുന്നത്)

ഈ രീതിയിൽ മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം താഴെത്തന്നിരിക്കുന്നു.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} \times c$$

$$x' = \frac{x}{c}$$

c = പൊതുഘടകം

ഈ സൂത്രവാക്യത്തിൽ മൂല്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$\sigma = \sqrt{\frac{50.80}{5}} \times 5 = \sqrt{10.16} \times 5 = 15.937$$

മൂല്യങ്ങളെ പൊതുഘടകം കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതിന് പകരം വ്യതിയാനങ്ങളെ പൊതുഘടകം കൊണ്ട് ഹരിക്കാവുന്നതാണ്. താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കാം

ഉദാഹരണം 12

x	d (x-25)	d' (d/5)	d'^2
5	–20	–4	16
10	–15	–3	9
25	0	0	0
30	+5	+1	1
50	+25	+5	25
		–1	51

സൗകര്യാർഥം 25 എന്ന മൂല്യത്തിൽ നിന്നാണ് വ്യതിയാനം കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നത്. ഈ വ്യതിയാനങ്ങളെ '5' എന്ന പൊതുഘടകം കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നു.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d'^2}{n} - \left(\frac{\sum d'}{n}\right)^2} \times c$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{51}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \times 5$$

$$\sigma = \sqrt{10.16} \times 5 = 15.937$$

> മാനകവ്യതിയാനം തോതിൽ നിന്നും സ്വതന്ത്രമല്ല. അതായത് മൂല്യങ്ങളെയോ, വ്യതിയാനങ്ങളേയോ ഒരു പൊതുഘടകം കൊണ്ട് ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ മാനകവ്യതിയാനത്തിന്റെ മൂല്യം ലഭിക്കാൻ ആ പൊതുഘടകത്തിന്റെ മൂല്യം സൂത്രവാക്യത്തിൽ ഉപയോഗിക്കേണ്ടതുണ്ട്.

സന്തത ആവൃത്തിവിതരണത്തിന്റെ മാനകവ്യതിയാനം (Standard Deviation in Continuous Frequency Distribution)

തരം തിരിക്കാത്ത ദത്തങ്ങളുടെ (Ungrouped data) മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കിയതുപോലെ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏത് രീതി ഉപയോഗിച്ചും തരം തിരിച്ച ദത്തങ്ങളുടെ (Grouped data) മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്.

(i) യഥാർഥമാധ്യരീതി (Actual Mean Method).

(ii) അഭ്യൂഹമാധ്യരീതി (Assumed Mean Method).

(iii) പാദവ്യതിയാനരീതി (Step Deviation Method).

യഥാർഥമാധ്യരീതി (Actual Mean Method)

പട്ടിക 6.2 – ൽ തന്നിരിക്കുന്ന മൂല്യങ്ങളുടെ മാനകവ്യതിയാനം താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ കണക്കാക്കാം.

ഉദാഹരണം 13

[illegible]	ആവൃത്തി	മധ്യ ബിന്ദു	fm	d	fd	fd^2
10–20	5	15	75	–25.5	–127.5	3251.25
20 30	8	25	200	15.5	124.0	1922.00
30–50	16	40	640	–0.5	–8.0	4.00
50 70	8	60	480	+19.5	+156.0	3042.00
70–80	3	75	225	134.5	1103.5	3570.75
	40		1620		0	11790.00

ഘട്ടങ്ങൾ

1. വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം കണക്കാക്കുക

$$\overline{X} = \frac{\sum fm}{\sum f} = \frac{1620}{40} = 40.5$$

2. മധ്യമൂല്യങ്ങളിൽ നിന്നും മാധ്യത്തിലേക്കുള്ള വ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്നു. അതായത്,

$$d = m - \bar{x}$$ (കോളം 5)

3. 'fd' യുടെ മൂല്യം ലഭിക്കാൻ ഒരോ വ്യതിയാനമൂല്യത്തെയും (deviations) അതിന് നേരെയുള്ള ആവൃത്തി (Frequency) കൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നു (കോളം 6). (കുറിപ്പ് $\sum fd = 0$).

4. 'fd' യുടെ മൂല്യത്തെ അതിന് നേരെയുള്ള 'd' യുടെ മൂല്യം കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് 'fd^2' കണക്കാക്കുന്നു (കോളം 7). ഇതിന്റെ മൊത്തമൂല്യം എടുത്താൽ $\sum fd^2$ ലഭിക്കുന്നു.

5. താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n}} = \sqrt{\frac{11790}{40}} = 17.168$$

അഭ്യൂഹമാധ്യ രീതി (Assumed Mean Method)

ഉദാഹരണം 13 – ലെ മൂല്യങ്ങളുടെ മാനകവ്യതിയാനം അഭ്യൂഹമാധ്യരീതിയിലും കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്. അഭ്യൂഹമാധ്യം 40 ആയി പരിഗണിച്ചാണ് വ്യതിയാനം കണക്കാക്കിയിട്ടുള്ളത്. ഇത് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 14

ക്ലാസ്സ് ഇട വേളകൾ	ആവൃത്തികൾ	മധ്യ ബിന്ദു	d	fd	fd^2
10 20	5	15	-25	125	3125
20 30	8	25	-15	120	1800
30 50	16	40	0	0	0
50 70	8	60	+20	160	3200
70 80	3	75	+35	105	3675
	40			20	11800

1. ക്ലാസുകളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ കണക്കാക്കുക (കോളം 3).

2. മധ്യബിന്ദുവിൽ നിന്നും അഭ്യൂഹമാധ്യത്തിലേക്കുള്ള വ്യത്യാസം കണക്കാക്കുക.

$$d = m - A$$ (കോളം 4)

അഭ്യൂഹമാധ്യം = 40

3. 'fd' യുടെ മൂല്യം ലഭിക്കാൻ 'd' യുടെ മൂല്യത്തെ അതിന് നേരെയുള്ള ആവൃത്തി (Frequency) കൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നു (കോളം 5).

(കുറിപ്പ്: അഭ്യൂഹമാധ്യത്തിൽ നിന്നും വ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്നു എന്നതിനാൽ കോളം 5 – ന്റെ ആകെ തുക പൂജ്യമായിരിക്കില്ല)

4. 'fd' യുടെ മൂല്യത്തെ (കോളം 5) അതിന് നേരെയുള്ള 'd' യുടെ മൂല്യം (കോളം 4) കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് fd^2 ന്റെ മൂല്യം കണക്കാക്കുന്നു (കോളം 6). തുടർന്ന് $\sum fd^2$ കണക്കാക്കുന്നു.

അങ്ങനെയെങ്കിൽ താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{11800}{40} - \left(\frac{20}{40}\right)^2} = \sqrt{294.75} = 17.168$$

പാദവ്യതിയാനരീതി (Step Deviation Method)

വ്യതിയാനങ്ങളുടെ മൂല്യത്തെ ഒരു പൊതുഘടകം കൊണ്ട് വിഭജിക്കാൻ കഴിയുമെങ്കിൽ മാനകവ്യതിയാനത്തിന്റെ മൂല്യം താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ ലളിതമായി കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 15

ക്ലാസ് ഇടവേളകൾ	ആവൃത്തികൾ	മധ്യബിന്ദു	d	d'	fd'	fd'^2
10 20	5	15	25	5	25	125
20 30	8	25	15	3	24	72
30 50	16	40	0	0	0	0
50 70	8	60	−20	+4	+32	128
70–80	3	75	35	+7	+21	147
	40				−4	472

ഘട്ടങ്ങൾ

1. ക്ലാസിന്റെ മധ്യബിന്ദു കണക്കാക്കുന്നു (കോളം 3). തുടർന്ന് ഇഷ്ടാനുസരണം തെരഞ്ഞെടുത്ത ഒരു മൂല്യത്തിൽ നിന്നും മധ്യബിന്ദുക്കളുടെ മൂല്യം കുറച്ച് അഭ്യൂഹമാധ്യരീതിയിലേതുപോലെ വ്യതിയാനം കണ്ടെത്തുന്നു. മുകളിലത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ 40 എന്ന മൂല്യത്തിൽ നിന്നാണ് വ്യതിയാനം കണക്കാക്കിയിട്ടുള്ളത് (കോളം 4).

   വ്യതിയാനങ്ങളെ പൊതുഘടകമായ 'c' കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നു. മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണത്തിൽ പൊതുഘടകം, c = 5 ആണ്. ഇത്തരത്തിൽ ലഭിക്കുന്ന മൂല്യമാണ് d' (കോളം 5).

3. fd' – ന്റെ മൂല്യം ലഭിക്കാൻ ഓരോ വ്യതിയാനമൂല്യത്തെയും അതിന് നേരെയുള്ള ആവൃത്തി (f) കൊണ്ട് (കോളം 2) ഗുണിക്കുന്നു (കോളം 6).
4. fd' – ന്റെ മൂല്യത്തെ അതിന് നേരെയുള്ള d' ന്റെ മൂല്യം കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് fd'^2 കണക്കാക്കുന്നു (കോളം 7).
5. കോളം 6 – ന്റെ മൊത്തം മൂല്യം കണക്കാക്കിയാൽ $\sum fd'$ മൂല്യവും, കോളം 7ന്റെ മൊത്തം മൂല്യം കണക്കാക്കിയാൽ $\sum fd'^2$ മൂല്യവും ലഭിക്കുന്നു.
6. താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd'}{\sum f}\right)^2} \times c$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{472}{40} - \left(\frac{4}{40}\right)^2} \times 5$$

$$\sigma = \sqrt{11.8 - 0.01} \times 5 = \sqrt{11.79} \times 5 = 17.168$$

മാനകവ്യതിയാനം : വിലയിരുത്തൽ

വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്ന പ്രകീർണനത്തിന്റെ അളവാണ് മാനകവ്യതിയാനം (Standard deviation) ഇത് എല്ലാ മൂല്യങ്ങളെയും അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ളതാണ്. ആയതിനാൽ ഒരു മൂല്യത്തിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റം പോലും മാനകവ്യതിയാനത്തിന്റെ മൂല്യത്തെ ബാധിക്കുന്നു. മാനകവ്യതിയാനം അതിന്റെ ഉത്ഭവ മൂല്യത്തിൽ നിന്ന് സ്വതന്ത്രമാണെങ്കിലും തോതിൽ നിന്ന് സ്വതന്ത്രമല്ല. ഉയർന്ന തലത്തിലുള്ള സാംഖ്യകപ്രശ്നങ്ങൾ പഠനവിധേയമാക്കാൻ ഇത് വളരെ ഉപയോഗപ്രദമാണ്.

4. പ്രകീർണനത്തിന്റെ കേവല ആപേക്ഷിക അളവുകൾ (Absolute and Relative Measures of Dispersion)

ഇതുവരെ വിശദീകരിച്ച അളവുകളെല്ലാം കേവല അളവുകളാണ്. ഇത്തരം അളവുകളിൽ നിന്ന് കണക്കാക്കുന്ന മൂല്യങ്ങൾ വ്യാഖ്യാനിക്കാൻ പ്രയാസമാണ്. ഉദാഹര

ണമായി, താഴെപ്പറയുന്ന വിവരശേഖരം ശ്രദ്ധിച്ച് നോക്കൂ.

സെറ്റ് A	500	700	1000
സെറ്റ് B	1,00,000	1,20,000	1,30,000

സെറ്റ്-Aയിലെ മൂല്യങ്ങൾ ഒരു ഐസ്ക്രീം വിൽപനക്കാരന്റെ ദിവസേനയുള്ള വിൽപനയെ സൂചിപ്പിക്കുമ്പോൾ, സെറ്റ്-B എന്നത് വലിയ ഒരു കച്ചവട സറാപനത്തിന്റെ വിറ്റുവരവാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് (Departmental Store). ഇവിടെ സെറ്റ്-A യുടെ റേഞ്ച് 500, സെറ്റ്-Bയുടെ റേഞ്ച് 30,000 എന്നിങ്ങനെയാണ്. സെറ്റ്-Bയുടെ റേഞ്ചിന്റെ മൂല്യം വളരെ വലുതാണ്. ആയതിനാൽ വലിയ കച്ചവട സറാപനത്തിന്റെ (Departmental Store) വിൽപനയിലെ വ്യതിയാനം വളരെ കൂടുതലാണെന്ന് നമുക്ക് പറയാൻ കഴിയുമോ? സെറ്റ്-A യിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യത്തിന്റെ ഇരട്ടിയാണ് ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യം. എന്നാൽ സെറ്റ്-Bയിലെ ചെറിയ മൂല്യത്തിന്റെ 30 ശതമാനം മാത്രം കൂടുതലാണ് സെറ്റ്-B യിലെ വലിയ മൂല്യം എന്ന് നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാം. ആയതിനാൽ, വ്യതിയാനത്തിന്റെ വ്യാപ്തിയെ സംബന്ധിച്ച് പ്രത്യേകിച്ചും ശരാശരികൾ തമ്മിൽ വലിയ അന്തരമുള്ളപ്പോൾ, കേവല അളവുകൾ (Absolute Measures) നൽകുന്ന മൂല്യം തെറ്റിദ്ധാരണ ഉണ്ടാക്കുന്നതാണ്.

മൂല്യങ്ങളെ പ്രകടിപ്പിക്കുന്ന യൂണിറ്റിലായിരിക്കും ഉത്തരം ലഭിക്കുക എന്നത് കേവലഅളവിന്റെ പോരായ്മയാണ്. ഉദാഹരണമായി, മൂല്യങ്ങളെ കിലോമീറ്ററിലാണ് പ്രകടിപ്പിക്കുന്നതെങ്കിൽ പ്രകീർണനവും കിലോമീറ്ററിലായിരിക്കും. എന്നാൽ, അതേമൂല്യങ്ങളെ മീറ്ററിലാണ് പ്രകടിപ്പിക്കുന്നതെങ്കിൽ കേവലഅളവ് നൽകുന്ന മൂല്യം മീറ്ററിലായിരിക്കണം. ഇവിടെ പ്രകീർണനത്തിന്റെ മൂല്യം കിലോമീറ്ററിൽ ലഭിച്ചതിന്റെ 1000 മടങ്ങായിരിക്കും.

ഈ പ്രശ്നത്തെ പരിഹരിക്കുന്നതിനായി വ്യതിയാനത്തിന്റെ ആപേക്ഷിക അളവുകൾ ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. ഓരോ കേവല അളവിനും അതിനോട് ചേർന്ന് നിൽക്കുന്ന ഒരു ആപേക്ഷിക അളവുണ്ട്. ആയതിനാൽ താഴെപറയുന്ന രീതിയിൽ റേഞ്ചിന്റെ ഗുണാങ്കം കണ്ടെത്താവുന്നതാണ്.

റേഞ്ചിന്റെ ഗുണാങ്കം $= \dfrac{L-S}{L+S}$

ഇവിടെ, L = ഏറ്റവും ഉയർന്ന മൂല്യം

S = ഏറ്റവും താഴ്ന്ന മൂല്യം

അതുപോലെ, ചതുർഥകവ്യതിയാനത്തിന്റെ ഗുണാങ്കം താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ കണ്ടെത്താം.

ചതുർഥകവ്യതിയാനഗുണാങ്കം $= \dfrac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$

ഇവിടെ,

Q_3 = മൂന്നാമത്തെ ചതുർഥകം

Q_1 = ഒന്നാമത്തെ ചതുർഥകം

ഇതേ രീതിയിൽ മാധ്യവ്യതിയാനത്തിന്റെ ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കാം.

മാധ്യവ്യതിയാനത്തിന്റെ ഗുണാങ്കം =

$\dfrac{M.D(\overline{X})}{X}$ അഥവാ $\dfrac{M.D(\text{മധ്യാങ്കം})}{\text{മധ്യാങ്കം}}$

ഇവിടെ, $\overline{X}$ = മാധ്യം

M.D = മാധ്യവ്യതിയാനം

അതായത്, മാധ്യവ്യതിയാനം മാധ്യത്തിൽ നിന്നാണ് കണക്കാക്കുന്നതെങ്കിൽ, മാധ്യവ്യതിയാനത്തെ മാധ്യം കൊണ്ട് ഹരിക്കുകയും, മാധ്യവ്യതിയാനം മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്നാണ് കണക്കാക്കുന്നതെങ്കിൽ മാധ്യവ്യതിയാനത്തെ മധ്യാങ്കം കൊണ്ട് ഹരിക്കുയും ചെയ്താണ് മാധ്യവ്യതിയാന ഗുണാങ്കം കണ്ടെത്തുന്നത്.

മാനകവ്യതിയാനം കണ്ടെത്തുന്നതിന് വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം (Coefficient of Variation) ഉപയോഗിക്കുന്നു.

വ്യതിയാനഗുണാങ്കം എന്നത് മാനകവ്യതിയാനത്തിന്റെ ആപേക്ഷിക അളവാണ്.

വ്യതിയാനഗുണാങ്കം (Coefficient of variaton)

$$= \frac{\text{മാനകവ്യതിയാനം}}{\text{സമാന്തരമാധ്യം}} \times 100$$

ഇത് സാധാരണയായി ശതമാനത്തിലാണ് അവതരിപ്പിക്കാറുള്ളത്. സർവസാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന പ്രകീർണനത്തിന്റെ ആപേക്ഷിക അളവാണിത്. ഇവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ യൂണിറ്റിൽ നിന്നും സ്വതന്ത്രമായതിനാൽ വ്യത്യസ്ത യൂണിറ്റുകളുള്ള ഗ്രൂപ്പുകളെ തമ്മിൽ താരതമ്യം ചെയ്യാനും ഇത് ഉപയോഗിക്കുന്നു.

5. ലോറൻസ് വക്രം (Lorenz Curve)

ഇതുവരെ പഠനവിധേയമാക്കിയ പ്രകീർണനമാനങ്ങൾ വ്യതിയാനങ്ങളുടെ മൂല്യത്തെ സംഖ്യാരൂപത്തിൽ അവതരിപ്പിക്കുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്. എന്നാൽ, വ്യതിയാനത്തെ ഗ്രാഫിന്റെ രൂപത്തിൽ അവതരിപ്പിക്കുന്നതിനെയാണ് ലോറൻസ്വക്രം എന്ന് പറയുന്നത്. 'രാജ്യത്തിലെ മൊത്തം ജനസംഖ്യയുടെ 10 ശതമാനം ദേശീയ വരുമാനത്തിന്റെ 50% കൈവശം വച്ചിരിക്കുന്നു', 'ജനസംഖ്യയുടെ 20% ദേശീയ വരുമാനത്തിന്റെ 80% കൈവശം വച്ചിരിക്കുന്നു', തുടങ്ങിയ പ്രസ്താവനകൾ നിങ്ങൾ കേട്ടിട്ടുണ്ടായിരിക്കുമല്ലോ? അത്തരം കണക്കുകൾ വരുമാനവ്യതിയാനത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ആശയമാണ് നൽകുന്നത്. സഞ്ചിതരൂപത്തിൽ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവ് സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് ലോറൻസ് വക്രം ഉപയോഗിക്കുന്നു. രണ്ടോ അതിലധികമോ വിതരണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യതിയാനം താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിന് ഇത് വളരെ ഉപയോഗപ്രദമാണ്.

ഒരു കമ്പനിയിലെ തൊഴിലാളികളുടെ മാസവരുമാനം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു (പട്ടിക 6.4).

പട്ടിക 6.4

വരുമാനം	തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം
0-5000	5
5000-10000	10
10000-20000	18
20000-40000	10
40000-50000	7

ലോറൻസ്വക്രത്തിന്റെ നിർമിതി (Construction of Lorenz Curve)

1. ക്ലാസ് മധ്യബിന്ദുക്കൾ കണക്കാക്കി അവയുടെ സഞ്ചിതമധ്യബിന്ദുക്കൾ ഉദാഹരണം 16-ലെ കോളം 3-ൽ തന്നിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ കണ്ടെത്തുക.

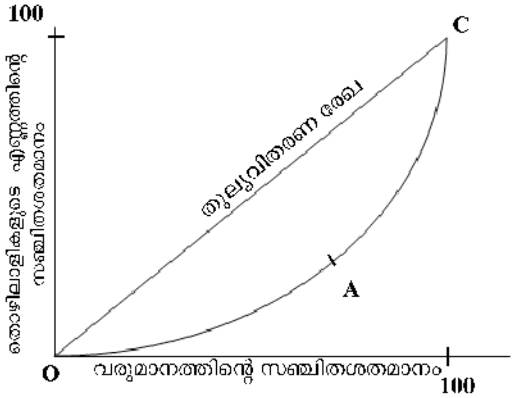
2. കോളം 6 – ൽ തന്നിരിക്കുന്നത് പോലെ സഞ്ചിതാവൃത്തി കണക്കാക്കുക.

3. കോളം 3, കോളം 6 എന്നിവയുടെ തുക 100 ആയി കണക്കാക്കുക. ഈ കോള ങ്ങളിലെ സഞ്ചിതമൂല്യങ്ങളുടെ ശത മാനം കോളം 4,7 എന്നിവയിലേതു പോലെ കണക്കാക്കുക.

4. ചരങ്ങളുടെ (വരുമാനം) സഞ്ചിത ശതമാനം ഗ്രാഫിന്റെ Y അക്ഷത്തിലും ആവൃത്തിയുടെ സഞ്ചിതശതമാനം (തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം) X അക്ഷ ത്തിലും ചിത്രം 6.1 – ലെ പോലെ രേഖ പ്പെടുത്തുന്നു. ഓരോ അക്ഷത്തിലും '0' മുതൽ '100' വരെയുള്ള മൂല്യങ്ങ ളുണ്ടായിരിക്കും.

5. (0,0), (100, 100) എന്നീ ഏകോപനബിന്ദു ക്കളെ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു നേർരേഖ വരക്കുന്നു. ഇത് തുല്യവിതരണരേഖ (Line of equal distribution) എന്നറിയ പ്പെടുന്നു. ഇത് ചിത്രം 6.1 – ൽ OC എന്ന രേഖ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

6. ചരങ്ങളുടെ സഞ്ചിതശതമാനവും അതിന് നേരെയുള്ള സഞ്ചിതാവൃത്തി ശതമാനവും യോജിപ്പിച്ച് OAC എന്ന രേഖ വരക്കുന്നു.



ചിത്രം 6.1 : ലോറൻസ് വക്രം

ഉദാഹരണം 16

വരുമാനം പരിധി	മധ്യ ബിന്ദുക്കൾ	സഞ്ചിത മധ്യ ബിന്ദുക്കൾ	സഞ്ചിത മധ്യ ബിന്ദുക്കൾ ശതമാനത്തിൽ	തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം ആവൃത്തി	സഞ്ചിത ആവൃത്തി	സഞ്ചിത ആവൃത്തി ശതമാനത്തിൽ
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0-5000	2500	2500	2.5	5	5	10
5000-10000	7500	10000	10.0	10	15	30
10000-20000	15000	25000	25.0	18	33	66
20000-40000	30000	55000	55.0	10	43	86
40000-50000	45000	100000	100.0	7	50	100

ലോറൻസ്‌വക്രത്തിന്റെ പഠനം (Studying the Lorenz Curve)

'OC' രേഖ തുല്യവിതരണരേഖ എന്നറിയപ്പെടുന്നു. കാരണം, ഈ വക്രത്തിൽ 20% ജനങ്ങൾ 20% വരുമാനവും, 60% ജനങ്ങൾ 60% വരുമാനവും കൈവശം വയ്ക്കുന്നു. ഈ രേഖയിൽ നിന്നും OAC

വക്രം എത്രത്തോളം വ്യത്യാസപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടോ അത്രയുമാണ്, വിതരണത്തിലെ അസമത്വം. രണ്ടോ, അതിലധികമോ വക്രങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ 'OC' യിൽ നിന്ന് ഏറ്റവും അകലെയുള്ള വക്രമായിരിക്കും കൂടുതൽ പ്രകീർണനം (Dispersion) സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

6. ഉപസംഹാരം

റേഞ്ച് മനസിലാക്കാനും കണക്കാക്കാനും വളരെ ലളിതമാണെങ്കിലും അറ്റമൂല്യങ്ങൾ ഇവയുടെ മൂല്യത്തെ ബാധിക്കുന്നു എന്നത് ഇതിന്റെ പോരായ്മയാണ്. മധ്യത്തിലുള്ള 50% മൂല്യങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ളതാണ് QD എന്നതിനാൽ ഇവ അറ്റമൂല്യങ്ങളാൽ സ്വാധീനിക്കപ്പെടുന്നില്ല. M.D, S.D എന്നിവയെ വ്യാഖ്യാനിക്കാൻ പ്രയാസമാണെങ്കിലും ഇവ ശരാശരിയിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനത്തെയാണ് കണക്കാക്കുന്നത്. മാധ്യവ്യതിയാനം ശരാശരിയിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനത്തിന്റെ ശരാശരിയാണ് കണക്കാക്കുന്നത്. എന്നാൽ, ഇവ മൂല്യങ്ങളുടെ ചിഹ്നത്തെ ഒഴിവാക്കുന്നു. ആയതിനാൽ, മാധ്യവ്യതിയാനം സാധാരണ ഗണിത ശാസ്ത്രനിയമങ്ങൾ പാലിക്കുന്നില്ല. മാനകവ്യതിയാനം മാധ്യത്തിൽനിന്നുള്ള ശരാശരിവ്യതിയാനമാണ് കണക്കാ ക്കുന്നത്. മാധ്യവ്യതിയാനത്തെപ്പോലെ തന്നെ മാനകവ്യതിയാനം എല്ലാ മൂല്യങ്ങളെയും അടിസ്ഥാനമാക്കിയിട്ടുള്ളതായതിനാൽ ഇവ ഉയർന്ന നിലവാരമുള്ള സാംഖ്യകപ്രശ്നങ്ങളെ മനസിലാക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നു. കൂടാതെ ഏറ്റവും വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്ന പ്രകീർണനമാനകമാണ്

സംഗ്രഹം

- സാമ്പത്തികചരങ്ങളുടെ സ്വഭാവം കൂടുതൽ മെച്ചപ്പെട്ട രീതിയിൽ മനസ്സിലാക്കാൻ പ്രകീർണനമാനകങ്ങൾ സഹായിക്കുന്നു.
- മൂല്യങ്ങളുടെ വ്യാപനത്തിനനുസരിച്ചാണ് റേഞ്ച്, ചതുർഥകവ്യതിയാനം എന്നിവ.
- ശരാശരിയിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനമൂല്യങ്ങൾക്കനുസരിച്ചാണ് M.D, S.D എന്നിവ.
- പ്രകീർണനമാനകങ്ങൾ കേവലമോ, ആപേക്ഷികമോ ആയിരിക്കും.
- ദത്തങ്ങളെ അവതരിപ്പിച്ച ഏകകങ്ങളിൽ (units) ഉത്തരം നൽകുന്നവയാണ് കേവല അളവുകൾ.
- ആപേക്ഷികഅളവുകൾ ഏകകങ്ങളിൽ (units) നിന്ന് സ്വതന്ത്രമായതിനാൽ വ്യത്യസ്ത ചരങ്ങളെ തമ്മിൽ താരതമ്യം ചെയ്യാൻ ഇവ ഉപയോഗിക്കുന്നു.
- വക്രത്തിന്റെ ആകൃതിയിൽ നിന്നും വ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്ന ഗ്രാഫ് രീതിയാണ് ലോറൻസ്വക്രം.

അഭ്യാസങ്ങൾ

1. "ആവൃത്തിവിതരണത്തെ മനസിലാക്കുന്നതിനായുള്ള കേന്ദ്രമൂല്യത്തിന് പൂരകമാണ് പ്രകീർണ്ണനമാനകങ്ങൾ". വിശദമാക്കുക.

2. ഏത് പ്രകീർണ്ണനമാനകമാണ് മികച്ചത്. എന്തുകൊണ്ട്?

3. "ചില പ്രകീർണ്ണനമാനകങ്ങൾ മൂല്യങ്ങളുടെ വ്യാപനത്തെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ കേന്ദ്രമൂല്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനമാണ് മറ്റ് പ്രകീർണ്ണനമാനങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്നത്. ഈ പ്രസ്താവനയോട് നിങ്ങൾ യോജിക്കുന്നുണ്ടോ?

4. ഒരു നഗരത്തിലെ 25% ആളുകൾ 45,000 രൂപയിലധികം വരുമാനം ഉള്ളവരും എന്നാൽ 75% ആളുകൽ 18,000 രൂപയിലധികം വരുമാനം ഉള്ളവരുമാണ്. പ്രകീർണ്ണനത്തിന്റെ കേവല, ആപേക്ഷികമൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

ഒരു സംസ്ഥാനത്തിലെ 10 ജില്ലകളിലെ അരി, ഗോതമ്പ് എന്നിവയുടെ ഓരോ ഏക്കറിലെയും വിളവ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ജില്ല	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ഗോതമ്പ്	12	10	15	19	21	16	18	9	25	10
അരി	22	29	12	23	18	15	12	34	18	12

ഓരോ വിളകളുടെയും താഴെപ്പറയുന്ന ഏകകങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

(i) റേഞ്ച്

(ii) Q.D. (ചതുർഥകവ്യതിയാനം),

(iii) മാധ്യത്തിൽ നിന്നും മാധ്യവ്യതിയാനം,

(iv) മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്നും മാധ്യവ്യതിയാനം,

(v) മാനകവ്യതിയാനം,

(vi) ഏത് വിളയാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ വ്യതിയാനം കാണിക്കുന്നത്?,

(vii) ഓരോ വിളകയുടെയും വിവിധ രീതികളിൽ കണക്കാക്കിയ വ്യത്യസ്ത അളവുകളുടെ മൂല്യങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്യുക.

6. മുൻചോദ്യത്തിന്റെ, ആപേക്ഷികവ്യതിയാനഅളവ് കണക്കാക്കുക. നിങ്ങളുടെ അഭിപ്രായത്തിൽ കേവലവ്യതിയാനഅളവാണോ, ആപേക്ഷികവ്യതിയാന അളവാണോ കൂടുതൽ വിശ്വസനീയമായത്?

7. X,Y എന്നീ ബാറ്റ്സ്മാൻമാരുടെ 5 ടെസ്റ്റ് മത്സരങ്ങളിലെ സ്കോർ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു ബാറ്റ്സ്മാനെ ടീമിലേക്ക് തിരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടതുണ്ട്.

X	25	85	40	80	120
Y	50	70	65	45	80

(i) ഉയർന്ന റൺ നേടിയ ബാറ്റ്സമാൻ ആണ് വേണ്ടത് എങ്കിൽ ആരെ തിരഞ്ഞെടുക്കും?

(ii) സ്ഥിരത പുലർത്തുന്ന ബാറ്റ്സ്മാൻ ആണ് വേണ്ടത് എങ്കിൽ ആരെ തിരഞ്ഞെടുക്കും?

8. രണ്ട് ബ്രാന്റുകളിലുള്ള ബൾബുകളുടെ ഗുണനിലവാരം അളക്കുന്നതിനായി ഓരോ ബ്രാന്റിലേയും 100 ബൾബുകളുടെ ആയുസ് മണിക്കൂറിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ആയുസ് (മണിക്കൂറിൽ)	ബൾബുകളുടെ എണ്ണം ബ്രാൻഡ് - A	ബ്രാൻഡ് - B
0–50	15	2
50–100	20	8
100–150	18	60
150–200	25	25
200–250	22	5
	100	100

(i) ഏത് ബ്രാന്റിനാണ് കൂടുതൽ ആയുസ്?

(ii) ഏത് ബ്രാന്റാണ് കൂടുതൽ ആശ്രയിക്കാവുന്നത്?

9. ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ 50 തൊഴിലാളികളുടെ ശരാശരി ദിവസക്കൂലി 200 രൂപയാണ്. അവരുടെ മാനകവ്യതിയാനം 40 രൂപ ആണ്. ഓരോ തൊഴിലാളിയുടെയും കൂലി 20 രൂപ വർധിപ്പിക്കുന്നു. പുതിയ ശരാശരി ദിവസവേതനം, മാനകവ്യതിയാനം എന്നിവ എത്രയാണ്? കൂലികൾ ഏറെക്കുറെ ഒരു പോലെയാകുന്നുണ്ടോ?

10. മുൻചോദ്യത്തിൽ ഓരോ തൊഴിലാളിക്കും കൂലിയിൽ 10 ശതമാനത്തിന്റെ വർധനവാണ് വരുത്തുന്നതെങ്കിൽ, മാധ്യം, മാനകവ്യതിയാനം എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങളെ എങ്ങനെയാണ് അത് ബാധിക്കുന്നത്?

11. താഴെത്തന്നിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം (Mean Deviation from Mean), മാനകവ്യതിയാനം (Standard Deviation) എന്നിവ കണക്കാക്കുക.

ക്ലാസ്സുകൾ	ആവൃത്തികൾ
20–40	3
40–80	6
80–100	20
100–120	12
120–140	9
	50

12. 10 മൂല്യങ്ങളുടെ തുക 100 – ഉം അവയുടെ വർഗത്തിന്റെ തുക 1090 – ഉം ആണ്. വ്യതിയാനഗുണാങ്കം (Co-effiecient of Variation) കണക്കാക്കുക.