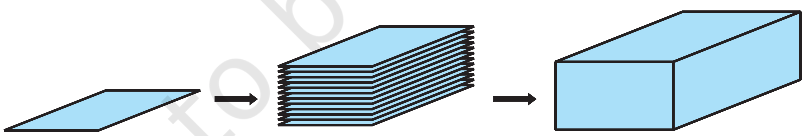
باب 13

سطحی رقبہ اور حجم (SURFACE AREAS AND VOLUMES)

13.1 تعارف (Introduction)

ہم جہاں بھی دیکھتے ہیں ہمیں ٹھوس اشیاء نظر آتی ہیں۔ ابھی تک ہم اپنے مطالعہ میں ان اشکال کا ذکر کر رہے تھے جن کو کاپی یا بلیک بورڈ پر آسانی سے بنایا جاسکتا ہے۔ یہ مستوی اشکال کہلاتی ہیں ہم سمجھ چکے ہیں کہ مستطیل مربع اور دائرہ وغیرہ؟ ان کے احاطہ اور رقبہ سے کیا مراد ہے اور ہم ان کی تحسیب کیسے کرتے ہیں ہم ان کو پچھلی کلاسوں میں بھی پڑھ چکے ہیں۔ بہت دلچسپ ہوگا یہ دیکھنا کہ جب ایک ہی شکل اور سائز کی مستوی اشکال کو گننے کی ایک شیٹ سے کاٹ کر عمودی طور پر ایک دوسرے پر رکھ دیں تو کیا ہوتا ہے۔ اس عمل سے ہمیں کچھ ٹھوس اشکال (مختصراً ان کو ٹھوس کہتے ہیں) حاصل ہوتی ہیں۔ جیسے کعب نما استوانہ وغیرہ۔ پچھلی کلاسوں میں ہم کعب نما' مکعب اور استوانہ وغیرہ کے سطحی رقبہ اور حجم نکالنا سیکھ چکے ہیں۔ اب ہم کعب نما اور



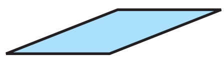
شکل 13.1

استوانہ کے حجم اور وسطی رقبہ کا تفصیل سے مطالعہ کریں گے اور اس کی توسیع دوسرے ٹھوس جیسے مخروط اور کرّوں تک کریں گے۔

13.2 کعب نما اور مکعب کا سطحی رقبہ (Suface Area of Cuboid and a Cube)

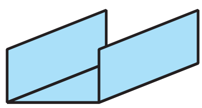
آپ نے بہت سی کاغذ کی شیٹوں کا ایک بنڈل دیکھا ہے؟ یہ کیسا دکھتا ہے؟ کیا یہ ایسا دکھتا ہے جیسا شکل 13.1 میں دکھایا گیا ہے؟ یہ ایک کعب نما کی تشکیل کرتا ہے۔ اس کعب نما کو ڈھکنے کے لئے آپ کو کتنے کاغذ کی ضرورت ہوگی؟

آیئے دیکھتے ہیں:



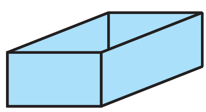
(a)

بنڈل کے نچلے حصہ کو ڈھکنے کے لئے پہلے ہمیں ایک مستطیل نما کاغذ کا ایک ٹکڑا چاہیئے۔ جو شکل (a)13. 2 میں دکھایا گیا ہے۔



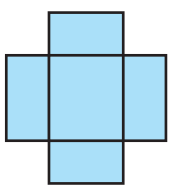
(b)

پھر ہم کو سائڈوں کے سروں کو ڈھکنے کے لئے دو لمبے مستطیل نما کاغذ کے ٹکڑے چاہئیں اب یہ شکل (b) 13.2 کی طرح نظر آئے گی۔



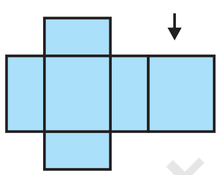
(c)

آگے اور پیچھے کے سروں کو ڈھکنے کے لیے ہمیں مختلف سائز کے دو اور مستطیل نما ٹکڑوں کی ضرورت ہوگیا۔ ان سے ہمیں شکل حاصل ہوگی وہ شکل 13.2 (c) میں دکھائی گئی ہے۔



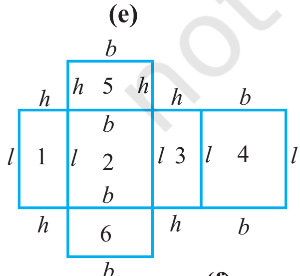
(d)

اس شکل کو جب کھولا جاتا ہے تو یہ شکل (d) .13 کی طرح نظر آتی ہے۔



(e)

آخر میں جب ہمیں بنڈل کی اوپری سطح کو ڈھکنا ہو جو بالکل ایسی ہے جیسے کہ نچلی سطح ہے، تو ہمیں ایک اور مستطیل نما ٹکڑے کی ضرورت ہوگی۔ جب ہم اس کو سیدھی طرف لگائیں گے تو یہ شکل (e) 13.2 کی طرح نظر آئے گی۔



(f) شکل 13.2

اس طرح سے کعب نما کی باہری سطحوں کو پوری طرح سے ڈھکنے کے لئے ہم نے چھ مستطیل نما ٹکڑے استعمال کئے۔

© NCERT not to be republished

اس سے پتا چلتا ہے کہ کعب نما کی باہری سطح چھ مستطیلوں سے (درحقیقت مستطیل خطہ) سے ملکر بنتی ہے۔ جن کا رقبہ ہم ہر ایک کی لمبائی اور چوڑائی کو جذب کر کے اور حاصل چھ رقبوں کو ایک ساتھ جمع کر کے حاصل کر سکتے ہیں۔

اب اگر ہم کعب نما کی لمبائی l ' چوڑائی b اور اونچائی h لیں تب ان ابھار والی شکلیں ایسی ہی ہوں گی جیسی آپ شکل 13.2 (f) میں دیکھتے ہیں۔

اس لئے چھ مستطیلوں کے رقبہ کا حاصل جمع ہے:

مستطیل کا رقبہ 1 $(= l \times h)$

+

مستطیل کا رقبہ 2 $(= l \times b)$

+

مستطیل کا رقبہ 3 $(= l \times h)$

+

مستطیل کا رقبہ 4 $(= l \times b)$

+

مستطیل کا رقبہ 5 $(= b \times h)$

+

مستطیل کا رقبہ 6 $(= b \times h)$

$$= 2\,(l \times b) + 2\,(b \times h) + 2\,(l \times h)$$

$$= 2\,(lb + bh + hl)$$

اس سے حاصل ہوتا ہے

کعب نما کا کل سطحی رقبہ = 2(lb+bh+hl)

جہاں l ' b اور h بالترتیب کعب نما کے تین کنارے ہیں۔

نوٹ: رقبہ کی اکائی ہم مربع اکائی لیتے ہیں کیوں کہ ہم اس خطہ کی قدر کی پیمائش اس میں اکائی لمبائی کے مربع بھر کر کرتے ہیں۔

© NCERT not to be republished

مثال کے طور پر اگر ہمارے پاس ایک مربع نما ہے جس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 15cm، 10cm اور 20cm ہے تب اس کا سطحی رقبہ ہوگا۔

$$2\ [(15\times10) + (20\times15)\{(10\times20)]\ cm^2$$

$$= 2(150 + 200 + 300)\ cm^2$$

$$== 2\times650cm^2$$

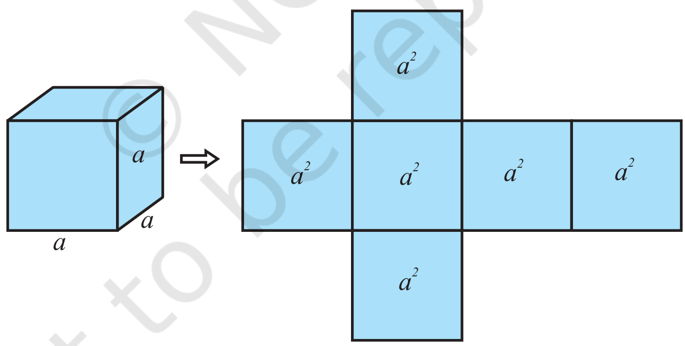
$$= 1300\ \ cm^2$$

یاد کیجیے کہ ایسا کعب نما جس کی لمبائی چوڑائی اور اونچائی برابر ہو مکعب کہلاتا ہے۔ اگر مکعب کا ہر ایک کنارہ a ہے تب مکعب کا سطحی رقبہ ہوگا:

(شکل 13.3 دیکھیے) $6a^2$ یعنی $2(a\times a + a\times a + a\times a)$ اس لئے ہمیں ملتا ہے۔

مکعب کا سطحی رقبہ $= 6a^2$

جہاں a مکعب کا کنارا ہے

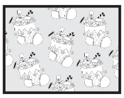


شکل 13.3

فرض کیجیے مکعب نما کے چھ رخوں میں سے ہم صرف چار رخوں، اوپر اور نیچے کے رخوں کو چھوڑ کر، کا رقبہ معلوم کریں۔ ایسی حالت میں ان چار رُخوں کا رقبہ کعب نما کا خمیدہ سطح (یا کرول سطح) کا رقبہ کہلاتا ہے۔ اس لئے لمبائی l، چوڑائی b اور اونچائی h والے کعب کا خمیدہ سطح کا رقبہ 2 lh +2b h یا 2(l + b) h کے برابر ہے۔ اسی طرح سے مکعب (cube) کی خمیدہ سطح کا رقبہ $4a^2$ ہے۔

اوپر کی باتوں کو نظر میں رکھتے ہوئے کبھی کبھی ہم کعب نما (یا مکعب) کے سطحی رقبہ کو ہم کل سطحی رقبہ بھی کہتے ہیں۔ آ یئے کچھ مثالوں

کو حل کرتے ہیں۔



شکل 13.4

مثال 1: میری اپنے کرسمس کے درخت کو سجانا چاہتی ہے وہ اس درخت کو رنگین کاغذ سے ڈھکے ہوئے لکڑی ایک بلاک پر رکھتی ہے جس پر سانتا کلوس کی تصویر بنی ہوتی ہے۔ شکل (13.4 دیکھیے) وہ جاننا چاہتی ہے کہ اس مقصد کو پورا کرنے کے لئے اسے کتنا کاغذ خریدنا ہے۔ اگر بلاک کی لمبائی چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 80cm، 40cm اور 20cm ہے تو اُسے 40cm ضلع والے کتنے مربع شیٹ کاغذ کی ضرورت ہوگی؟

حل: کیوں کہ میری کاغذ کو بکس کی باہری سطح پر چپکانا چاہتی ہے۔ اس لئے اسے اتنے کاغذ کی ضرورت ہے جتنا اس بکس کا سطحی رقبہ جو ایک کعب نما کی شکل کا ہے، بکس کی ابعاد ہیں:

لمبائی = 80cm، چوڑائی = 40cm اور اونچائی = 20cm

بکس کا سطحی رقبہ = 2(lb+bh+hl)

$$=2\,[(80\times 40)+40\times 20)\,(20\times 80)]\ \text{cm}^2$$

$$=2[3200+800+1600]\ \text{cm}^2$$

$$=2\times 5600\ \text{cm}^2 = 11200\text{cm}^2$$

کاغذ کی ہر ایک شیٹ کا رقبہ = $40\times 40\ \text{cm}^2 = 1600\ \text{cm}^2$

اس لئے درکار شیٹ کی تعداد = $\dfrac{\text{بکس کا سطحی رقبہ}}{\text{کاغذ کی ایک شیٹ کا رقبہ}}$

$$=\frac{11200}{1600}=7$$

اس لیے، اسے 7 شیٹوں کی ضرورت ہوگی۔

مثال 2: حامد نے اپنے گھر کے لئے مکعب کی شکل کی ایک ڈھکن سمیت پانی کی ٹنکی بنوائی جس کا ہر کنارہ 1.50 m لمبا ہے اس نے ٹنکی کی باہری سطح، قاعدہ کو چھوڑ کر (ہر) کو 25cm ضلع والے مربع ٹائلوں سے ڈھکا۔ (شکل 13.5 دیکھیے) اگر ٹائیلوں کا

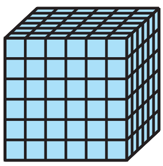
فی درجن خرچ 360 روپے ہو تو بتایئے اس نے ٹائلوں پر کل کتنا خرچ کیا۔

حل: کیوں کہ حامد ٹنکی کے پانچ رُخوں کو ٹائلوں سے ڈھکنا چاہتا ہے اس لئے اُسے ٹائلوں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے ٹنکی کا سطحی رقبہ معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

مکعبی ٹنکی کا کنارہ $=1.5\text{m} \ =150\text{cm} \ (=a)$

اس لئے، ٹنکی کا سطحی رقبہ $= 5\times150\times150 \text{ cm}^2$

ہر ایک مربع ٹائل کا رقبہ = ضلع × ضلع $=25\times25 \text{ cm}^2$



شکل 13.5

اس لیے مطلوبہ ٹائلوں کی تعداد = $\dfrac{\text{ٹنکی کا سطحی رقبہ}}{\text{ہر ایک ٹائل کا رقبہ}}$

$$= \frac{5\times150\times150}{25\times25} = 180$$

360 روپے = 12 ٹائلوں کی قیمت یعنی ایک درجن ٹائلوں کی قیمت

اس لئے ایک ٹائل کی قیمت = $\frac{360}{12}$ روپے = 30 روپے

اس لئے 180 ٹائلوں کی قیمت = 180 × 30 روپے = 5400

مشق 13.1

1. 1.5cm لمبا، 1.25cm چوڑا اور 65cm گہرا پلاسٹک کا ایک بکس بنانا ہے جو اوپر سے کھلا ہوا ہے۔ پلاسٹک شیٹ کی موٹائی کو نظر انداز کرتے ہوئے معلوم کیجیے:

   (i) بکس بنانے کے لئے درکار شیٹ کا رقبہ　　(ii) اگر 1m^2 شیٹ کی قیمت 20 روپیہ ہو تو شیٹ پر کل خرچ

2. ایک کمرہ کی لمبائی چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 5m، 4m اور 3m ہے۔ 7.50 روپے فی مربع میٹر کی شرح سے کمرہ کی دیواروں اور چھتوں پر سفیدی کرانے کا خرچ معلوم کیجیے۔

3. ایک مستطیل نما ہال کا احاطہ 250m ہے۔ ہال کی اونچائی معلوم کیجیے اگر 10 روپے فی مربع میٹر کی شرح سے اس کی چار دیواروں کو پینٹ کرنے کا کل خرچ 15000 روپئے ہے۔

© NCERT not to be republished

4. ایک ڈبّے میں اتنا پینٹ ہے کہ جس سے 9.375m رقبہ والے علاقہ کو پوری طرح پینٹ کیا جاسکتا ہے۔
22.5cm×10cm×7.5cm2.2 ابعاد والی کتنی اینٹیں اس پینٹ سے رنگی جاسکتی ہی؟

5. ایک مکعبی بکس کا کنارہ 10 cm ہے اور ایک دوسرا کعب نما بکس 12.5cm لمبا، 10cm چوڑا اور 8cm اونچا ہے
(i) کون سے بکس کی خمیدہ سطح کا رقبہ زیادہ ہوگا اور کتنا؟ (ii) کون سے بکس کا کل سطحی رقبہ کم ہوگا اور کتنا؟

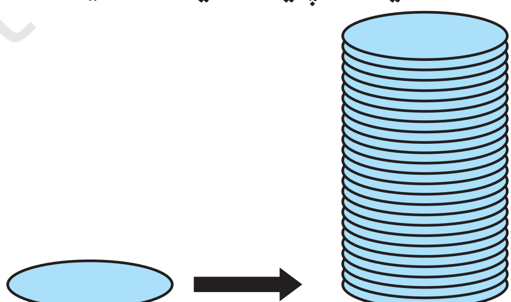
6. ایک چھوٹا گرین ہاؤس (ہربیرئسم herbarism) پورا کا پورا گلاس پن (glass panes) کا بنا ہوا ہے (قاعدہ سمیت) جس کو ٹیپ سے چپکایا ہوا ہے۔ یہ 30cm لمبا، 25cm چوڑا اور 25cm اونچا ہے
(i) گلاس کا رقبہ کیا ہے؟ (ii) تمام 12 کناروں کے لئے کتنے ٹیپ کی ضرورت ہوگی؟

7. شانتی مٹائی والا اپنی مٹھائی کو پیک کرنے کے لئے گتے کے ڈبّوں کا ایک (order) دیتا ہے۔ اسے دو سائز کے ڈبّے درکار ہیں۔ بڑے ڈبّے کی ابعاد 25cm×20cm×5cm اور چھوٹے ڈبّے کی ابعاد 15cm × 12cm × 5cm ہیں۔ کل سطحی رقبہ کا 5% زائد ڈبّہ بند کرنے کے لئے چاہئے۔ ہر ایک قسم کے 250 ڈبّوں کے لئے مطلوبہ گتّے کا خرچ معلوم کیجئے۔

8. پروین اپنی کار کے لیے ایک عارضی سائبان Shelter بنانا چاہتی ہے۔ وہ اپنی اس چاہت کو تارپولین کا سلہ نما مک ڈھانچہ جو کار کے چاروں طرف اور اس کے چھت (جس کا اگلا حصّہ ایک فلیٹ کی شکل کا ہے۔ جس کو موڑا جاسکے) کو پوری طرح ڈھک سکے۔ بنا کر پورا کرنا چاہتی ہے۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ سلائی کا مارجن بہت کم ہے اس لیے اس کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ سائبان بنانے کے لیے اسے کتنی تارپولین درکار ہے جب کہ اس کی اونچائی 2.5m, اور قاعدہ کے ابعاد 4m×3m تھیں۔

13.3 ایک قائم دائری استوانہ کا سطحی رقبہ (Surface Area of a Right Circular Cylinder)

اگر ہم کاغذ کی کچھ دائری شیٹ لیں اور ان کو ایک کے اوپر ایک رکھ کر ایک بنڈل بنائیں جیسا کہ مستطیل شیٹ کے ساتھ کیا تھا، تو

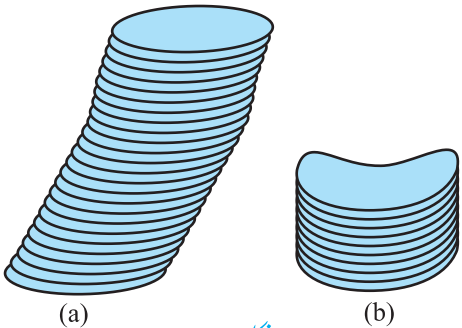


شکل 13.6

© NCERT not to be republished

آپ کو کیا حاصل ہوتا ہے۔(شکل 13.6 دیکھیے)

اگر اس بنڈل کو عمودی طور پر رکھیں تو ہمیں ایک قائم دائری استوانہ حاصل ہوتا ہے۔ کیونکہ اس کو زاویہ قائمہ پر رکھا گیا ہے اور اس کا قاعدہ دائری شکل کا ہے۔ آیئے دیکھیں کہ کس قسم کا استوانہ قائم دائری نہیں ہوتا۔



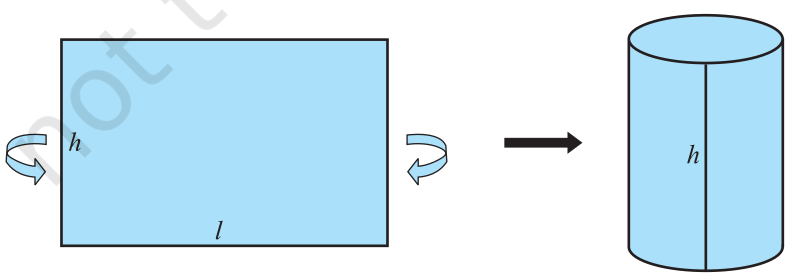
شکل 13.7

شکل 13.7(a) میں آپ ایک استوانہ دیکھ رہے ہیں جو یقیناً دائری ہے لیکن یہ قاعدہ پر قائم زاوی نہیں ہے اس لیے ہم یہ نہیں کہ سکتے کہ یہ قائم دائری استوانہ ہے۔

اور اسی طرح سے اگر قاعدہ دائری نہ ہو جیسا کہ آپ شکل 13.7(b) میں دیکھ رہے ہیں تب ہم اس کو قائم دائری استوانہ نہیں کہہ سکتے۔

ریمارک: یہاں ہم صرف قائم دائری استوانہ کا تذکرہ کریں گے اس لیے جب تک کہ وضاحت نہ کی جائے' لفظ استوانہ سے مراد قائم دائری استوانہ ہی ہوگا اب اگر ایک استوانہ کو رنگین کاغذ سے ڈھکا جائے ایسا ہم کم سے کم کاغذ سے کیسے کر سکتے ہیں؟ پہلے کاغذ کی ایک مستطیل نما کاغذ کی شیٹ لیتے ہیں جس کی لمبائی استوانہ کے چاروں طرف سے ڈھک لے اور اس کی چوڑائی استوانہ کی اونچائی کے برابر ہو جیسا کہ شکل 13.8 میں دکھایا گیا ہے۔

شیٹ کا رقبہ ہمیں استوانہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ دیتا ہے۔نوٹ کیجیے کہ شیٹ کی لمبائی استوانہ کے دائرہ قاعدہ کے محیط کے برابر ہے جو $2\pi r$ کے برابر ہے۔



شکل 13.8

اس لیے، استوانہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ ہے

= مستطیل شیٹ کا رقبہ = لمبائی × چوڑائی

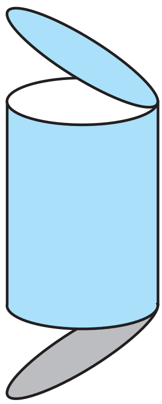
= استوانہ کے قاعدہ کا محیط × h

$= 2\pi r \times h$

اس لیے،

استوانہ کا کل سطحی رقبہ $= 2\pi r(r+h)$

جہاں r استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر ہے اور h استوانہ کی اونچائی ہے۔



شکل 13.9

ریمارک: استوانہ کے لیے، جب تک وضاحت نہ کی جائے: استوانہ کا نصف قطر سے مراد استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر ہے۔

اگر استوانہ کی اوپری اور نچلی سطح کو بھی ڈھکنا ہو تب ہمیں دو دائروں کی ضرورت ہوتی ہے (درحقیقت دائری خطوں کی) جس میں ہر ایک کا نصف قطر r ہو اور اس طرح سے ہر ایک کا رقبہ πr^2 (شکل 13.9 دیکھیے) اس سے ہمیں کل سطحی رقبہ حاصل ہوتا ہے

$$2\pi rh + 2\pi r^2 + 2\pi r(r+h)$$

جہاں h استوانہ کی اونچائی اور اس کا نصف قطر ہے۔

اس لیے، استوانہ کا کل سطحی رقبہ $= 2\pi r(r+h)$

ریمارک: باب 1 میں آپ نے پڑھا تھا کہ π ایک غیر ناطق عدد ہے تو π کی قدر ایک غیر مختتم اور غیر π اعشاریہ ہے۔ جب تحسیب میں ہم اس کی قدر کو استعمال کرتے ہیں تو ہم اکثر اس کو تقریباً $\frac{22}{7}$ یا 3.14 لیتے ہیں اور اس کو لکھتے $\pi = \frac{22}{7}$ یا $\pi = 3.14$

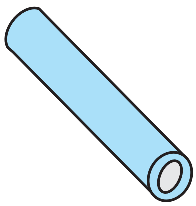
مثال کے طور پر اگر ہمیں استوانہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ معلوم کرنا ہو جس کا نصف قطر 2.1m اور اونچائی 3m ہو تب $\pi = \frac{22}{7}$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

© NCERT not to be republished

$$2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 3m^2 = 39.6m^2$$

مثال 3: ساوتری اپنے سائنس کے پروجیکٹ کے لئے استوانہ شکل کے کیلیڈواسکوپ (Kaeleidoscope) کا موڈل بنانا چاہتی ہے وہ کیلنڈراسکوپ کی خمیدہ سطح کے لئے چارٹ پیپر کا استعمال کرنا چاہتی ہے۔

شکل 13.10 دیکھیے۔ اگر وہ 25cm لمبا اور 3.5cm نصف قطر والا کیلیڈواسکوپ بنانا چاہتی ہو تو اسے درکار چارٹ پیپر کا رقبہ کیا ہوگا؟ آپ $\pi = \frac{22}{7}$ لے سکتے ہیں۔



شکل 13.10

حل: استوانہ کیلیڈواسکوپ کے قاعدہ کا نصف قطر $r = 3.5m$

کیلیڈواسکوپ کی اونچائی $h = 25m$

مطلوبہ چارٹ پیپر کا رقبہ = کیلیڈواسکوپ کی خمیدہ سطح کا رقبہ

$$= 2\pi rh$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 25cm^2$$

$$= 550cm^2$$

مشق 13.2

جب تک کچھ اور نہ دیا ہوا ہو $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے۔

1. 14cm اونچائی والے ایک قائم دائروں استوانہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ $88cm^2$ ہے۔ استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

2. دھات کی شیٹ کی 1m اونچائی والی ایک بند استوانہ شکل کی ٹنکی بنانا مطلوب ہے اگر اس کے قاعدہ کا قطر 140cm ہو۔ اس کے لئے کتنے مربع میٹر شیٹ درکار ہوگی؟

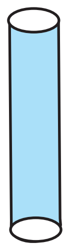
3. دھات کا ایک پائپ 77cm لمبا ہے۔ اس کا اندرونی قطر 4cm اور باہری قطر 4.4cm ہے (شکل 13.11 دیکھیے)

اسکی (i) اندرونی خمیدہ سطح کا رقبہ

(ii) باہری خمیدہ سطح کا رقبہ

(iii) کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

© NCERT not to be republished



شکل 13.11

4. ایک رولر کا قطر 84cm ہے اور اسکی لمبائی 120cm، ایک کھیل کے میدان کو ایک مرتبہ ہموار کرنے کے لیے پورے 500 چکر لگانے پڑتے ہیں کھیل کے میدان کا m^2 میں رقبہ معلوم کیجیے۔

5. استوانہ شکل کا پلر کا قطر 1.5cm اور اونچائی 3.5cm ہے۔ 12.50 روپیہ فی مربع میٹر کی شرح سے اس کی خمیدہ سطح کو پینٹ کرانے کا خرچ معلوم کیجیے۔

6. ایک قائم دائری استوانہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ $4.4\ m^2$ ہے اگر استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر 0.7m ہے تو اس کی اونچائی معلوم کیجیے۔

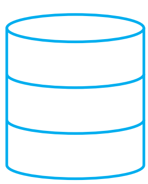
7. ایک کنویں (دائری) کا اندرونی قطر 3.5m ہے ۔ یہ 10m گہرا ہے۔(i) اس کی خمیدہ سطح کا رقبہ معلوم کیجیے ۔
(ii) 40 روپیہ فی مربع کی شرح سے اسکی خمیدہ سطح کا پلاسٹر کروانے کا خرچ معلوم کیجیے۔

8. ایک گرم پانی کے حرارتی نظام (Hoting System) 28m لمبا ایک استوانہ پائپ ہے۔ جس کا قطر 5cm ہے اس نظام کی کل (Radiating) سطح معلوم کیجیے۔

9. معلوم کیجیے

(i) ایک ٹنکی میں پٹرول جمع کیا جاتا ہے کی خمیدہ سطح کا رقبہ جب کہ اسکا قطر 4.2m اور اونچائی 4.5m

(ii) اس میں درحقیقت کتنی اسٹیل استعمال ہوئی اور اگر بند ٹنکی بنانے میں استعمال اسٹیل کا $\frac{1}{2}$ برباد ہو گیا ہو۔



شکل 13.12

10. شکل 13.2 میں لیمپ شیڈ کا فریم دیکھ رہے ہیں۔ اس کو ہمیں ایک سجاوٹی کپڑے سے ڈھکنا ہے۔ فریم کے قاعدہ کا قطر 20cm اور اونچائی 30cm ہے ۔ کپڑے میں 2.5m کا مارجن دیا جائے تاکہ اسکی فریم کے اوپری اور نچلے حصہ پر موڑ سکیں ۔ لیمپ شیڈ کو ڈھکنے کے لیے کتنا کپڑا درکار ہے۔

11 اسکول کے کچھ طلبا نے گتے کو استعمال کر کے استوانہ شکل کے سجاوٹی پن ہولڈر (Pen Holder) بنانے کے ایک مقابلہ میں حصہ لینے والوں کے لیے گتہ مہیا کرنا اسکول کی ذمہ داری ہے۔ اگر مقابلہ میں حصہ لینے والوں کی تعداد 35 ہو تو مقابلہ کے لیے کتنا گتہ خریدنا پڑے گا۔

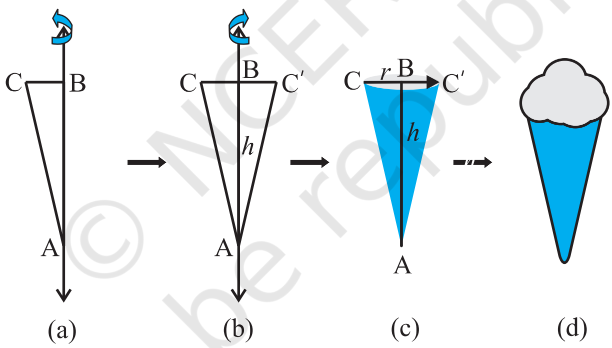
© NCERT not to be republished

13.4 ایک قائم دائری مخروط کا سطحی رقبہ (Surface area of a Right Circular Cone)

اب تک ہم متماثل اشکال کو اکٹھا کر کر ٹھوس اشیاء بنا رہے تھے۔ یہ تمام اشکال منشور کہلاتی ہیں۔

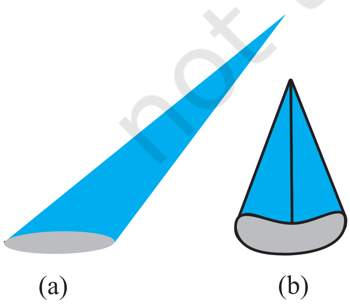
آیئے اب ایک اور قسم کے ٹھوس پر غور کرتے ہیں۔ جو منشور نہ ہو۔ (اس قسم کے ٹھوس احرام Pyramids کہلاتے ہیں) آیئے ہم دیکھتے ہیں کہ ان کی تشکیل کیسے ہوتی ہے۔

سرگرمی: ایک قائم زاوی مثلث ABC جو B پر قائم ہے۔ کاٹیے ، مثلث کے عمودی ضلعوں میں سے ایک کے ساتھ (AB کے) ایک موٹا سا دھاگا پیسٹ Paste کیجیے شکل 13.13(a) دیکھیے۔ دھاگا کو اپنے دونوں ہاتھوں سے مثلث کے دونوں طرف سے پکڑ کر مثلث کو دھاگے کے ساتھ کئی مرتبہ گھمایئے۔ ایسا کرنے سے کیا ہوتا ہے۔؟ کیا آپ اس شکل کو پہچان سکتے ہیں جو مثلث دھاگے کے اردگرد سے بنا تا ہے۔ (شکل 13.13(b) دیکھیے)؟ کیا یہ عمل آپ کو اس وقت کی یاد نہیں دلاتا جب آپ نے اس میں شکل کے ایک برتن میں آئس کریم کھائی تھی (شکل (c) اور (d) 13.13 دیکھیے)؟



شکل 13.13

یہ ایک قائم دائری مخروط کہلاتا ہے۔ (شکل 13.13(c) میں دکھائی گئی شکل ایک قائم دائری استوانہ ہے جس میں نقطہ A راس کہلاتا ہے۔ اور AB اس کی اونچائی BC نصف قطر اور AC مخروط کی ترچھی اونچائی یہاں B مخروط کے دائرہ قاعدہ کا مرکز ہے۔ مخروط کی اونچائی نصف قطر اور اونچائی کو بالترتیب ؟ اور 1 سے ظاہر کرتے ہیں۔ آیئے ایک بار پھر دیکھتے ہیں کہ کونسا مخروط دائرہ مخروط نہیں ہے۔ کیونکہ (a) میں راس کو قاعدہ کے مرکز سے ملانے والا خط، قاعدہ پر



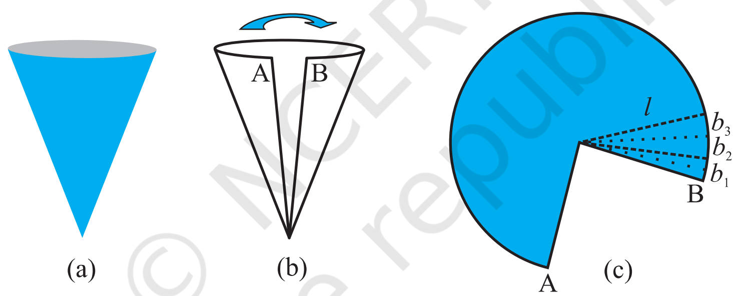
شکل 13.14

قائم زاویہ نہیں بناتا اور شکل (b) میں قاعدہ دائرہ نہیں ہے۔

استوانہ ہی کی طرح، کیونکہ ہر صرف قائم دائری مخروط کے بارے میں پڑھیں گے۔ یاد رکھیے اس باب میں مخروط سے ہماری مراد قائم دائری مخروط ہے۔

سرگرمی : (1) ایک صاف ستھرے پیپر کے ایک مخروط کو اس کے ایک ضلع کے ساتھ اس طرح کاٹتے ہیں کہ پیپر تہہ وبالا (Overlap) نہ ہو۔ اس کے کھولنے پر آپ پیپر کی وہ شکل دیکھتے ہیں جو مخروط کی سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ وہ خط جن پر سے آپ مخروط کو کاٹتے ہیں مخروط کی ترچھی اونچائی کہلاتی ہے اور اس کو ہم l سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہ ایک گول کیک کے حصہ جیسے نظر آتا ہے۔

(ii) اگر آپ A اور B پارک گئے اضلاع کی ٹیپ کو ایک ساتھ رکھیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شکل (13.15(c) کی خمیدہ سطح مخروط کے دائرہ قاعدہ کی تشکیل کرتا ہے۔



شکل 13.15

(iii) اگر شکل ((13.15(c)) کی شکل والے پیپر کو نقطہ O سے کھینچے جانے والے خطوں کے ساتھ سیکڑوں چھوٹے چھوٹے ٹکروں میں کاٹا جائے تو ایسا ہر حصہ ایک چھوٹا مثلث ہوگا۔ جس کی اونچائی مخروط کی ترچھی اونچائی l ہوگی۔

(iv) اب ہر ایک مثلث کا رقبہ $\frac{1}{2}$ ہر ایک مثلث کا قاعدہ $\times l$۔

اس لیے، پورے پیپر کا رقبہ

= تمام مثلثوں کے رقبہ کا حاصل جمع

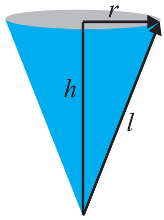
$$= \frac{1}{2}b_1l + \frac{1}{2}b_2l + \frac{1}{2}b_3l + ... = \frac{1}{2}l\left(b_1 + b_2 + b_3 + ...\right) =$$

© NCERT not to be republished

(13.15(c))= کی پوری خمیدہ باؤنڈری کی لمبائی $\times l \times \frac{1}{2} =$

= کیونکہ $b_1+b_2+b_3+....$ شکل کی خمیدہ کی سطح کی تشکیل کرتے ہیں۔

لیکن شکل کا خمیدہ مخروط کے قاعدہ کا احاطہ بناتا ہے اور مخروط کے قاعدہ کا محیط $(=2\pi r)$ ہے



شکل 13.16

اس لیے، **مخروط کی خمیدہ سطح کا رقبہ** $= \frac{1}{2}\times l\times 2\pi r = \pi rl$

جہاں r اسکے قاعدہ کا نصف قطر اور l اسکی ترچھی اونچائی۔

نوٹ کیجیے کہ $l^2=r^2+h^2$ (جیسا کہ شکل 13.16 میں دیکھا جاسکتا ہے۔)،

فیثا غورث کے مسئلہ کو استعمال کرنے پر یہاں h مخروط کی اونچائی ہے۔

اس لیے $l=\sqrt{r^2+h^2}$

اب اگر مخروط کا قاعدہ نہ ہو تو r نصف قطر والا ایک دائری پیپر اور چاہیے جب کہ رقبہ πr^2

اس لیے، **مخروط کا کل سطحی رقبہ** $= \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l+r)$

مثال 4: ایک مخروط کی خمیدہ سطح کا رقبہ معلوم کیجیے کل ترچھی اونچائی 10cm اور قاعدہ کا نصف قطر 7cm

حل: خمیدہ سطح کا رقبہ $=\pi rl$

$$=\frac{22}{7}\times 7\times 10\text{cm}^2$$

$$=220\text{cm}^2$$

مثال 5: ایک مخروط کی اونچائی 16cm اور قاعدہ کا نصف قطر 12cm ہے تو مخروط کی خمیدہ سطح اور کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: یہاں، $h=16\text{cm}$ اور $r=12\text{cm}$

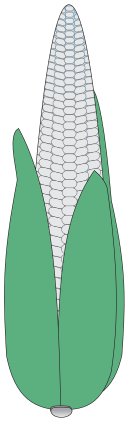
اس لیے، $l^2=h^2+r^2$

$$l=\sqrt{16^2+12^2}\text{cm}=20\text{cm}$$

اس لیے، خمیدہ سطح کا رقبہ $=\pi rl$

$$=3.14\times 12\times 20\text{cm}^2=753.6=\text{cm}^2$$

© NCERT not to be republished


شکل 13.17

کل سطحی رقبہ = $\pi rl+\pi r^2$

$=(753.6+3.14\times12\times12)cm^2$

$=(753.6+452.16)cm^2=1205.76cm^2$

مثال 6: ایک بھٹا (شکل 13.17 دیکھیے) کی شکل تقریباً ایک مخروط کی طرح ہے جس کے چوڑے سرے کا نصف قطر 2.1cm اور لمبائی (اونچائی) 20cm ہے اگر بھٹے کی ہر 1cm سطح میں 4 دانے ہوں تو بتائیے پورے بھٹے میں کل کتنے دانہ ہیں۔

حل: کیونکہ بھٹے کے دانہ صرف اس کی خمیدہ سطح پر پائے جاتے ہیں۔ اس لیے ہمیں اس کی خمیدہ سطح کا رقبہ جاننے کی ضرورت ہے اور اس پر موجود دانوں کی تعداد کی اس سوال میں ہمیں مخروط کی اونچائی دی ہوئی ہے۔ اس لیے ہمیں اس کی ترچھی اونچائی معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

یہاں، $l=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{(2.1)^2+20^2}\,cm$

$\sqrt{404.41}\,cm=20.11\,cm$

اس لیے، بھٹے کی خمیدہ سطح کا رقبہ = πrl

$=\frac{22}{7}\times2.1\times20.11\,cm^2=132.726\,cm^2=132.73\,cm^2$ تقریباً

$1cm^2$ سطح پر دانوں کی تعداد ہے = 4

اس لیے پوری خمیدہ سطح پر دانوں کی تعداد ہوگی۔

$132.73\times4=530.92=531$ تقریباً

اس لیے، بھٹے پر تقریباً 531 دانے ہونگے۔

مشق 13.3

جب تک وضاحت نہ کی جائے $\pi=\frac{22}{7}$ لیجیے۔

1. ایک مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر 10.5cm ہے اور اس کی اونچائی 10cm۔ اس کی خمیدہ سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

© NCERT not to be republished

2. ایک مخروط کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے اگر اس کی ترچھی اونچائی 9m اور قاعدہ کا قطر 24cm ہے

3. ایک مخروط کی خمیدہ سطح کا رقبہ $308 cm^2$ اور اسکی ترچھی اونچائی 14cm ہے اس کا

(i) قاعدہ کا نصف قطر اور (ii) اور مخروط کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

4. ایک مخروط نما ٹینٹ کی اونچائی 10m ہے اور قاعدہ کا نصف قطر 24m ہے تو اس کی (i) ترچھی اونچائی معلوم کیجیے (ii) ستر روپیہ فی مربع میٹر کی شرح سے ٹینٹ میں استعمال ہونے والے کینوس کا خرچ معلوم کیجیے۔

5. ایک مخروطی ٹینٹ جس کی اونچائی 8m اور قاعدہ کا نصف قطر 6m ہے۔ بنانے کے لیے 3m چوڑی کتنی تارپولین درکار ہے؟ یہ فرض کرتے ہوئے کہ سلامی میں اور کاٹنے میں ضائع ہونے والی کل تارپولین تقریباً 20cm ہے (π=3.14) استعمال کیجیے۔

6. ایک مخروطی گنبد کی ترچھی اونچائی اور قاعدہ کا قطر بالترتیب 25m اور 14m ہے۔ 210 روپیہ فی میٹر $100 m^2$ کی شرح سے اس کی خمیدہ سطح کو سفیدی کرانے کا کل خرچ معلوم کیجیے۔

7. جوکر کی ایک ٹوپی قائم دائری مخروط کی شکل کی ہے۔ جس کے قاعدہ کا نصف قطر 7cm اور اونچائی 24cm ہے ایسی دس ٹوپیاں بنانے میں درکار شیٹ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

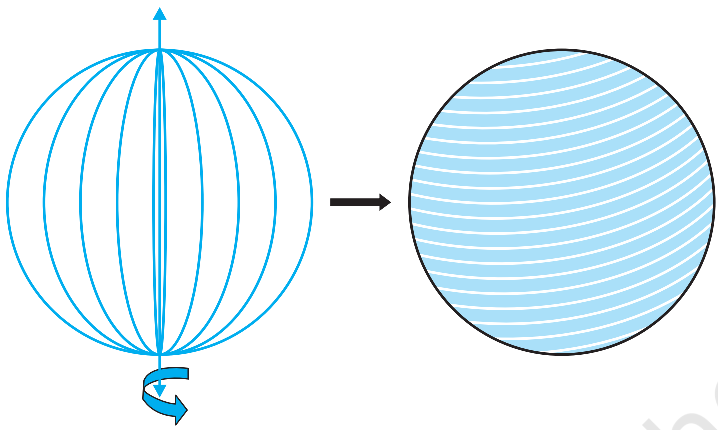
8. ایک بس اسٹاپ کو سڑک کے باقی حصہ سے الگ کرنے کے لیے گتے کے لیے 50 کھوکھلے مخروط استعمال کیے گئے ہیں ہر ایک مخروط کے قاعدہ کا قطر 40cm اور اونچائی 1m ہے اگر ہر ایک مخروط کی باہری سطحوں کو 12 روپیہ فی مربع میٹر (m^2) کی شرح سے پینٹ کیا جائے تو تمام مخروطوں کو پینٹ کرنے کا کل خرچ معلوم کیجیے؟

(π=3.14 اور $\sqrt{1.04}$=1.02) استعمال کیجیے۔

13.5 کرہ کا سطحی رقبہ (Surface Area of a Sphere)

کرہ کیا ہے؟ کیا ایسا ہی ہے جیسے دائرہ؟ کیا آپ دائرہ کو پیپر پر بنا سکتے ہیں۔؟ ہاں آپ بنا سکتے ہیں۔ کیونکہ دائرہ ایک بند مستوی شکل ہے۔ جو ایک متعین (Fix) نقطہ سے یکساں فاصلہ پر موجود نقطوں سے بنی ہے۔ جس میں متعین نقطہ دائرہ کا مرکز کہلاتا ہے۔ اب اگر آپ ایک دائری ڈسک کے قطر کے ساتھ ایک دھاگا پیسٹ کریں اور اسکو گھمائیں جیسا کہ آپ نے پچھلے سیکشن میں مثلث کو گھمایا تھا۔ آپ کو ایک ٹھوس نظر آئے گا (شکل 13.18 دیکھیے) یہ کس سے مشابہت رکھتا ہے؟ ایک گیند ہے؟ یہ کرہ کہلاتا ہے۔

© NCERT not to be republished



شکل 13.18

کیا آپ اندازہ کر سکتے ہیں کہ دائرہ کے مرکز کا کیا ہوتا ہے ۔ جب یہ گھوم کر کرہ بناتا ہے۔؟ یقیناً یہ کرہ کا مرکز بن جاتا ہے۔ اس طرح سے کرہ ایک تین شکل ہے جو فضا میں ان تمام نقطوں سے مل کر بنی ہے جو ایک متعین نقطہ، جو کرہ کا مرکز کہلاتا ہے۔اسے یکساں فاصلہ جو نصف قطر کہلاتا ہے پر واقع ہوں۔

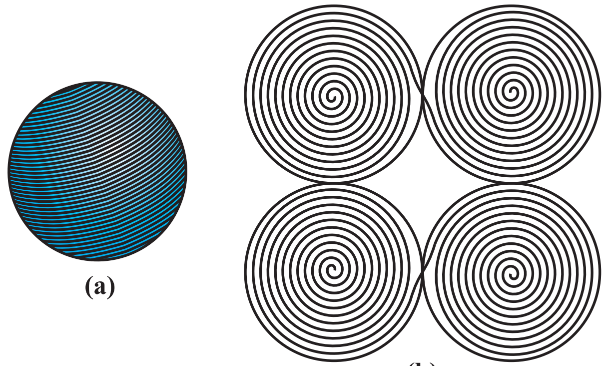
نوٹ: ایک کرہ گیند کی سطح جیسا ہوتا ہے۔لفظ ٹھوس کرہ اس ٹھوس کے لیے استعمال ہوتا ہے۔جس کی سطح کرّوی ہو۔

سرگرمی : کیا آپ نے کبھی کسی لٹو سے کھیلے ہیں یا آپ نے کبھی کسی کو اس سے کھیلتے دیکھا ہے۔؟ آپ جانتے ہونگے کہ کس طرح سے اس کے چاروں طرف دھاگا لپیٹا جاتا ہے۔آیئے ربڑ کی ایک گیند لیتے ہیں اور اس میں ایک کیل لگاتے ہیں۔کیل کے سہارے گیند کے چاروں طرف دھاگا لپیٹتے ہیں جب آپ گیند کے آخری حصہ تک پہنچ جائیں تو دھاگا کو اپنی جگہ پر روکے رکھنے کے لیے پن لگائیں اور گیند کے باقی حصہ پر دھاگا لپیٹنا جاری رکھیں ۔ جب تک آپ گیند پوری طرح سے نہ ڈھک لیں (شکل 13.19(a) دیکھیے) دھاگا کے ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر مارک کیجیے اور ابتدائیہ گیند کی سطح سے دھاگا کو ہٹائیں۔

اب اپنے استاد سے گیند کے قطر کو ناپنے کے لیے مدد لیجیے۔جس سے آپ اس کا نصف قطر آسانی سے حاصل کر سکتے ہیں اور پھر کاغذ کی ایک شیٹ پر گیند کے نصف قطر کے مساوی نصف قطر والے چار دائرہ بنایئے ۔ایک ایک کر کے ان دائروں پر وہ دھاگا لپیٹیے جو آپ نے گیند پر لپیٹا تھا۔(شکل 13.19(b) دیکھیے)۔

اس طرح سے آپ نے کیا حاصل کیا؟

© NCERT not to be republished



شکل 13.19

وہ دھاگہ جس سے کرہ کی پوری سطح کو ڈھک لیا تھا۔ چاروں دائرہ کے پورے خطہ کو بھر لیا۔ جس کے نصف قطر کرہ کے نصف قطر کے برابر ہیں۔ اس کا کیا مطلب ہے۔؟ اس سے پتہ چلتا ہے کہ کرہ کا سطحی رقبہ جس کا نصف قطر r

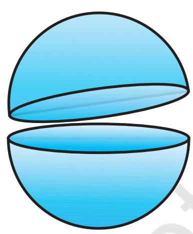
= نصف قطر والے دائرہ کے بقیہ کا 4 گنا $r = 4\times\left(\pi r^2\right)$

اس لیے، **کرہ کا سطحی رقبہ = $4\pi r^2$**

جہاں r کرہ کا نصف قطر ہے۔

کرہ کی سطح پر آپ کتنے رخ دیکھتے ہیں؟ صرف ایک جو خمیدہ ہے۔

آیئے اب ایک ٹھوس کرہ لیتے ہیں۔ اور ایک مستوی جو اس کے مرکز سے گزرتی ہے سے اسکو بیچ سے کاٹتے ہیں۔ کرہ کیسا ہو گیا؟



شکل 13.20

ہاں، یہ دو مساوی حصوں میں منقسم ہو گیا۔ (شکل 13.20 دیکھیے) ہر نصف حصہ کو کیا کہتے ہیں؟ یہ ایک نصف کرہ کہلاتا ہے۔

اور نصف کرہ کی سطح کے بارے میں کیا خیال ہے۔ اس میں کتنے رخ ہیں۔؟ دو ایک خمیدہ سطح ہے اور ایک فلٹ رخ۔

نصف کرہ کی خمیدہ سطح کا (یہ کرہ کی خمیدہ سطح کے رقبہ کا آدھا ہے۔ جو $4\pi r^2$ کا $\frac{1}{2}$ ہے۔

اس لیے، **نصف کرہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ $2\pi r^2$**

جہاں r اس کرہ کا نصف قطر ہے۔ جس کا نصف کرہ ایک حصہ ہے۔

© NCERT not to be republished