ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ

(QUADRATIC EQUATIONS)

2.1 ଉପକ୍ରମ (Introduction) :

$P(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ ଗୋଟିଏ **ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Quadratic Polynomial),** ଯେଉଁଠାରେ a ଓ b ଯଥାକ୍ରମେ x^2, x ର ସହଗ ଏବଂ c ଏକ ଧ୍ରୁବ ସଂଖ୍ୟା ।

$ax^2 + bx + c = 0,\ (a \neq 0)$ କୁ **ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ (Quadratic Equation)** କୁହାଯାଏ ।

ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ $ax + b = 0, (a \neq 0)$ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ଏବଂ ଏହାର ସମାଧାନ ସଂପର୍କରେ ମଧ୍ୟ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର କେବଳ ଗୋଟିଏ ବୀଜ ବା ମୂଳ ଥାଏ ଏବଂ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ଦୁଇଟି ବୀଜ ଥାଏ ।

ମନେରଖ : ଗୋଟିଏ n ଘାତୀ ସମୀକରଣ $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0, (a_n \neq 0)$ ର n ସଂଖ୍ୟକ ବୀଜ ବା ମୂଳ ଅଛି । ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟଟି "ବୀଜଗଣିତରେ ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ' **(Fundamental Theorem of Algebra)** ରୂପେ ପରିଚିତ ।

ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଆଲୋଚିତ $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ସଂପର୍କିତ ଏକ ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ ।

ମନେକର ସମୀକରଣଟି $x^2 - 5x + 6 = 0$ । ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ପାଇବା,

$\Rightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 = 0 \Rightarrow x(x-3) - 2(x-3) = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2$ କିମ୍ବା $x = 3$

$\therefore$ ମୂଳଦ୍ୱୟ 2 ଓ 3 ।

ଯଦି $x = \alpha$ ପାଇଁ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $ax^2 + bx + c$ ର ମାନ ଶୂନ ହୁଏ, ତେବେ α କୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଶୂନ (zero) କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, 3, $x^2 - 5x + 6$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଶୂନ, କାରଣ $x = 3$ ପାଇଁ

x^2–5x+6 ର ମାନ 0 ଅଟେ । ଏଠାରେ ମନେରଖିବାକୁ ହେବ ଯେ, **ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର 'ଶୂନ' ଉକ୍ତ ସମୀକରଣର ଏକ ମୂଳ (root) ଅଟେ ।** ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟରେ 'ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ସମାଧାନ କରିବା ପ୍ରଣାଳୀ' ଅବଲମ୍ବନରେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କିପରି ହୁଏ, ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ସହ ସଂପୃକ୍ତ ଅଟେ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ: ax^2+bx+c ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $ax^2 + bx + c =0, a \neq 0$ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ସହ ସଂପୃକ୍ତ ।

2.2. ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ (Solution by Completing the squares):

ମନେକର ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି $ax^2 + bx + c =0, a \neq 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ (ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱକୁ 'a' ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଗଲା ।)

$\Rightarrow x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} = -\frac{c}{a}$ ($\frac{c}{a}$ ଧ୍ରୁବକର ପାର୍ଶ୍ୱ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରାଗଲା ।)

$\Rightarrow x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$ (ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱରେ $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ଯୋଗ କରାଗଲା ।)

$$\Rightarrow \left\{x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\pm\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\right)^2$$

(ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରାଯାଇଛି ।)

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$\Rightarrow x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ କିମ୍ବା, $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ତେଣୁ ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\alpha = \frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$; $\beta = \frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$ ।

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$

$\Rightarrow ax^2 + bx = -c$ ('c' କୁ ପାର୍ଶ୍ୱ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରାଗଲା)

$\Rightarrow 4a\ (ax^2 + bx) = -4ac$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ 4a ଗୁଣନ କଲେ)

$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

$\Rightarrow (2ax)^2 + 2.\ 2ax.\ b = -4ac$

$\Rightarrow (2ax)^2 + 2\ .\ 2ax.\ b + b^2 = b^2 - 4ac$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ b^2 ଯୋଗ କରାଗଲା)

$\Rightarrow (2ax + b)^2 = \left(\pm\sqrt{(b^2 - 4ac)}\right)^2$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରାଗଲା)

$\Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{(b^2 - 4ac)} \Rightarrow 2ax = -b \pm\sqrt{(b^2 - 4ac)}$

$\Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$ କିମ୍ବା $x = \dfrac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$

ଅତଏବ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳ α ଓ β ହେଲେ :

$\alpha = \dfrac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$ ଏବଂ $\beta = \dfrac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$ .... (i)

(i) ରେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ସୂତ୍ରକୁ **ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର (Quadratic Formula)** କୁହାଯାଏ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ପ୍ରଥମ କରି ଦଶମ ଶତାବ୍ଦିରେ ପ୍ରସିଦ୍ଧ ଭାରତୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞ ଶ୍ରୀଧର ଆଚାର୍ଯ୍ୟଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସମ୍ପାଦିତ ହୋଇଥିଲା ।

ଉଦାହରଣ - 1 :

ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି $6x^2 + 11x + 3 = 0$ ସମୀକରଣଟିର ସମାଧାନ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a = 6$, $b = 11$ ଓ $c = 3$

4a ଅର୍ଥାତ୍ 24 ଦ୍ୱାରା $6x^2 + 11x = -3$ ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଗୁଣନ କଲେ ଆମେ ପାଇବା

$24 (6x^2 + 11x) = (-3) \times 24$

$\Rightarrow 144 x^2 + 264x = -72 \Rightarrow (12x)^2 + 2 (12x) \times 11 = -72$

$\Rightarrow (12x)^2 + 2 (12x) \times 11 + (11)^2 = (-72) + (11)^2$

$\Rightarrow (12x + 11)^2 = -72 + 121 = 49 = (\pm 7)^2$

$\Rightarrow 12x + 11 = \pm 7 \Rightarrow 12x = -11 \pm 7$

$\Rightarrow 12x = -11 + 7$ କିମ୍ବା $-11 - 7$

$\Rightarrow 12x = -4$ କିମ୍ବା -18

$\Rightarrow x = \dfrac{-4}{12} = -\dfrac{1}{3}$ କିମ୍ବା $\dfrac{-18}{12} = \dfrac{-3}{2}$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ମୂଳଦ୍ୱୟ $-\dfrac{1}{3}$ ଓ $\dfrac{-3}{2}$ । (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି $6x^2 + 11x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + \dfrac{11}{6}x + \dfrac{1}{2} = 0$ (6 ଦ୍ୱାରା ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଭାଗ କରାଗଲା)

$$\Rightarrow x^2 + 2.x.\frac{11}{12} + \left(\frac{11}{12}\right)^2 = \left(\frac{11}{12}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left\{x^2 + 2.x.\frac{11}{12} + \left(\frac{11}{12}\right)^2\right\} = \frac{121}{144} - \frac{1}{2} = \frac{49}{144}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{11}{12}\right)^2 = \left(\pm\frac{7}{12}\right)^2 \Rightarrow x + \frac{11}{12} = \pm\frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-11}{12} \pm \frac{7}{12} \Rightarrow x = \frac{-11}{12} + \frac{7}{12} \text{ କିମ୍ବା } \frac{-11}{12} - \frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \text{ କିମ୍ବା } \frac{-18}{12} = \frac{-3}{2}$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ମୂଳଦ୍ୱୟ $\frac{-1}{3}$ ଓ $\frac{-3}{2}$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 2 : ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି $x^2 + 2x - 63 = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ α ଓ β ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a = 1, b = 2$ ଓ $c = -63$

ଅତଏବ $\alpha = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{(2^2 - 4 x 1 x (-63)}}{2 x 1} = \frac{-2 + \sqrt{(4 + 252)}}{2} = \frac{-2 + 16}{2} = 7$

ଓ $\beta = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{\{2^2 - 4 x 1 x (-63)\}}}{2 x 1} = \frac{-2 - \sqrt{(4 + 252)}}{2} = \frac{-2 - 16}{2} = \frac{-18}{2} = -9$

ଅତଏବ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବୀଜ ଦ୍ୱୟ $\alpha = 7$ ଓ $\beta = -9$ । (ଉତ୍ତର)

2.3. ପ୍ରଭେଦକ (Discriminant) :

$b^2 - 4ac$ କୁ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0$ ର ପ୍ରଭେଦକ କୁହାଯାଏ ଓ ଏହାକୁ 'D' ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ $D = b^2 - 4ac$ ।

ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0$ କୁ ବିଚାରକୁ ନେଲାବେଳେ, ସେଥିରେ a, b ଓ c ରାଶିତ୍ରୟ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଓ $a \neq 0$ ।

ମୂଳ ଦ୍ୱୟକୁ D ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ, $\alpha = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

ଏବଂ $\beta = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ ।

2.4 ମୂଳଦ୍ୱୟର ସ୍ୱରୂପ (Nature of roots) :

ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ପ୍ରଭେଦକ (D) କୁ ବିଚାରକୁ ନେଇ ସମୀକରଣଟିର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସ୍ୱରୂପ ନିରୂପଣ କରାଯାଏ ।

(i) $D > 0$ ହେଲେ, ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପରସ୍ପରଠାରୁ ପୃଥକ ହେବେ । ଅର୍ଥାତ୍ $\alpha \neq \beta$ ।

(ii) $D = 0$ ହେଲେ ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ହେବେ । ଅର୍ଥାତ୍ $\alpha = \beta$ ।

(iii) $D < 0$ ହେଲେ ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ବାସ୍ତବ ହେବେ ନାହିଁ ।

ଆମର ଆଲୋଚନାର ପରିସରଭୁକ୍ତ ସମସ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କ ପ୍ରଭେଦକ $D \geq 0$ ଅର୍ଥାତ୍ ସେମାନଙ୍କ ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା ପରସ୍ପରଠାରୁ ପୃଥକ କିମ୍ବା ଅଭିନ୍ନ ହେବେ ।

ବି.ଦ୍ର. : (i) $D > 0$ ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, ମୂଳଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ଏବଂ ପୃଥକ୍ ହେବେ,

(ii) $D > 0$ ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ନ ହେଲେ, ମୂଳଦ୍ୱୟ ଅପରିମେୟ ଏବଂ ପୃଥକ୍ ହେବେ,

D ର ମାନ	ମୂଳଦ୍ୱୟର ସ୍ୱରୂପ	ବୀଜଦ୍ୱୟ
1. $D > 0$	ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଏବଂ ଅସମାନ	$\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$
(i) ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା	ମୂଳଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ଏବଂ ଅସମାନ	
(ii) ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ	ମୂଳଦ୍ୱୟ ଅପରିମେୟ ଏବଂ ଅସମାନ	
2. $D = 0$	ବାସ୍ତବ (ପରିମେୟ) ଏବଂ ସମାନ	$\frac{-b}{2a}$
3. $D < 0$	ଅବାସ୍ତବ ଅର୍ଥାତ୍ ବାସ୍ତବ ମୂଳ ନାହିଁ	

ଉଦାହରଣ - 3 : $x^2 - 2x - 8 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସ୍ୱରୂପ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a = 1, b = -2$ ଓ $c = -8$

$\therefore$ ପ୍ରଭେଦକ $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 4 + 32 = 36$

ଯେହେତୁ $D > 0$, ମୂଳଦ୍ୱୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପରସ୍ପର ପୃଥକ ଅଟନ୍ତି । (ଉତ୍ତର)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : 36 ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେତୁ ମୂଳଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ଏବଂ ଅସମାନ ହେବେ ।

2.5 ମୂଳଦ୍ୱୟ ଓ ସହଗ ମଧ୍ୟରେ ସଂପର୍କ (Relation between roots and coefficients) :

ମନେକର ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ ଓ ଏହାର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β । ଅତଏବ

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} \text{ ଏବଂ } \beta = \frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

(a ଓ b ଯଥାକ୍ରମେ x^2 ଓ x ର ସହଗ ଏବଂ c ଏକ ଧ୍ରୁବକ)

(I) ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି :

$$\alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} = -\frac{\text{x ର ସହଗ}}{\text{x}^2 \text{ ର ସହଗ}}$$ ।

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ ଅର୍ଥାତ୍ **ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି = $\frac{-b}{a}$**

(II) ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ : $\alpha\beta = \left[\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\right]\left[\frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\right]$

$$= \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{(b^2-4ac)}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} = \frac{\text{ଧ୍ରୁବକ ରାଶି}}{\text{x}^2 \text{ ର ସହଗ}}$$ ।

$\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ଅର୍ଥାତ୍ **ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ = $\frac{c}{a}$**

ଉଦାହରଣ - 4 :

ଯଦି $25x^2 + 30x + 7 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଏ, ତେବେ $\alpha + \beta$ ଓ $\alpha\beta$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ a = 25, b = 30 ଓ c = 7 ।

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{30}{25} = -\frac{6}{5}$ ଏବଂ $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{7}{25}$ (ଉତ୍ତର)

2.6 କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଜ୍ଞାତବ୍ୟ ଫଳାଫଳ (Some known results) :

ମନେକର ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ ଏବଂ ଏହାର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ।

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ଏବଂ $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

(I) $\alpha - \beta = \pm\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \pm\sqrt{\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}\right\}} = \pm\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{a}$

(II) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2-2ac}{a^2}$

(III) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{a} = \frac{-b\sqrt{(b^2-4ac)}}{a^2}$$

(IV) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} = \frac{-b(b^2 - 3ac)}{a^3}$$

(V) $$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b^2 - 2ac}{ca}$$

ଉଦାହରଣ - 5 : ଯଦି $2x^2 - 6x + 3 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଏ,

ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 3\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + 2\alpha\beta = 13$ ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣରେ, $a = 2, b = -6, c = 3$ ।

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-6)}{2} = 3$ ଏବଂ $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta} = \frac{3}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{3 \times 2}{3} = 2$ ଏବଂ $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$$= \frac{(3)^2 - 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{(9-3) \times 2}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 3\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + 2\alpha\beta = 4 + (3 \times 2) + 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)$

$= 4 + 6 + 3 = 13 =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

2.7 ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ଗଠନ (Formation of a quadratic equation) :

ମନେକର ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ।

ତେବେ $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ଏବଂ $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ (ଅନୁଚ୍ଛେଦ 2.5)

ବର୍ତ୍ତମାନ, $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ (a ଦ୍ୱାରା ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଭାଗ କଲେ)

$\Rightarrow x^2 - (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

ଅର୍ଥାତ୍ ଆବଶ୍ୟକ **ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ : x^2 –(ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି)x+ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ = 0 ।**

ସୂଚନା : ମୂଳଦ୍ୱୟ ଜଣାଥିଲେ, ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ରକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କରାଯାଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ - 6 : ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି - 5 ଓ ଗୁଣଫଳ 3 ହେଲେ, ସମୀକରଣଟି ଗଠନ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର α ଓ β ଆବଶ୍ୟକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ।

ଏଠାରେ $\alpha + \beta = -5$ ଓ $\alpha\beta = 3$ (ଦତ୍ତ)

ଆବଶ୍ୟକ ସମୀକରଣ : $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 - (-5)x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 3 = 0$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 7 : $ax^2 - 4x + (4a + 1) = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ 2 ହେଲେ a ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ।

ଏଠାରେ $\alpha\beta = \frac{4a+1}{a} = 2 \Rightarrow 4a + 1 = 2a \Rightarrow 4a - 2a = -1 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 8 : ଯଦି $ax^2 + 4x + 6a = 0, a \neq 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ଓ ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ, a ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $\alpha + \beta = -\frac{x \text{ ର ସହଗ}}{x^2 \text{ ର ସହଗ}} = -\frac{4}{a}$, $\alpha\beta = \frac{x \text{ ବିହୀନ ପଦ}}{x^2 \text{ ର ସହଗ}} = \frac{6a}{a} = 6$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ, $\alpha + \beta = \alpha\beta \Rightarrow -\frac{4}{a} = 6 \Rightarrow a = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2 (a)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତି ଗୁଡ଼ିକରେ ଥିବା ତ୍ରୁଟିକୁ ସଂଶୋଧନ କରି ଲେଖ ।

(i) $x^2 - 4x + 4 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଓ ଭିନ୍ନ ।

(ii) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ସମୀକରଣର ପ୍ରଭେଦକ 2 ଅଟେ ।

(iii) $ax^2 + bx - c = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି $\frac{c}{a}$ ।

(iv) $ax^2 + bx + c = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ $\frac{b}{a}$ ।

(v) 1 ଓ –1 ମୂଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି $x^2 + 1 = 0$ ।

(vi) $x^2 = 0$ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳ ସମାନ ନୁହଁନ୍ତି ।

(vii) $3x^2 - 2x - 1 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି $-\frac{3}{2}$ ।

(viii) $3x^2 - 2x - 1 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ $\frac{1}{3}$ ।

2 . ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ 3 ଓ –5 ହେଲେ, ସମୀକରଣଟି ନିରୂପଣ କର ।

(ii) $mx^2 - 2x + (2m-1) = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ 3 ହେଲେ, m ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(iii) $x^2 - px + 2 = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ 2 ହେଲେ, p ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(iv) $4x^2 - 2x + c = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ହେଲେ, c ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(v) $5x^2 + 2x + k = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ –2 ହେଲେ, k ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(vi) $x^2 - kx + 6 = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ 3 ହେଲେ, k ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(vii) $2x^2 + kx + 3 = 0$ ସମୀକରଣର ଦୁଇଟି ମୂଳ ବାସ୍ତବ ଓ ସମାନ ହେଲେ, k ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

3. ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଶ୍ନ ପାଇଁ ଥିବା ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତରଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଲେଖ ।

(i) ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି x ରେ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ?

(a) $x^2 - x - 12 = 0$ (b) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$

(c) $x + \frac{3}{x} = x^2$ (d) $x(x-1)(x+5) = 0$

(ii) $7x^2 - 9x + 2 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସ୍ୱରୂପ କ’ଣ ?

(a) ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପରସ୍ପରଠାରୁ ପୃଥକ୍ । (b) ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ।

(c) ବାସ୍ତବ ହେବେ ନାହିଁ । (d) ଏଥିରୁ କେଉଁଟି ନୁହେଁ ।

(iii) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି –6 ଓ 8 ମୂଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ?

(a) $(x + 6)(x + 8) = 0$ (b) $(x + 6)(x - 8) = 0$

(c) $(x - 6)(x + 8) = 0$ (d) $(x - 6)(x - 8) = 0$

(iv) $3x^2 + 2\sqrt{5}x - 5 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\alpha\beta$ ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

(a) 3 (b) $2\sqrt{5}$ (c) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (d) $\frac{-5}{3}$

(v) $4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\alpha+\beta$ ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

(a) $\frac{1}{16}$ (b) 4 (c) $\frac{1}{2}$ (d) –8

(vi) $4x^2 + 3x + 7 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

(a) $\frac{3}{7}$ (b) $-\frac{3}{7}$ (c) $\frac{7}{3}$ (d) $-\frac{7}{3}$

(vii) ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ଓ ଗୁଣଫଳ ଯଥାକ୍ରମେ 4 ଓ $\frac{5}{2}$ ହେଲେ ସମୀକରଣଟି ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ?

(a) $2x^2 + 8x + 5 = 0$ (b) $2x^2 - 8x + 5 = 0$

(c) $2x^2 + 8x - 5 = 0$ (d) $2x^2 - 8x - 5 = 0$

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କୁ ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ସମାଧାନ କର ।

(i) $x^2 + x - 6 = 0$ (ii) $2x^2 - 9x + 4 = 0$

(iii) $14x^2 + x - 3 = 0$ (iv) $3x^2 - 32x + 12 = 0$

(v) $x^2 + 2px - 3qx - 6pq = 0$ (vi) $\sqrt{3}x^2 + 10x + 8\sqrt{3} = 0$

(vii) $25x^2 + 30x + 7 = 0$ (viii) $3a^2x^2 + 8abx + 4b^2 = 0$ $(a \neq 0)$

(ix) $x^2 + ax + b = 0$ (x) $x^2 + bx = a^2 - ab$

5. ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କର ବୀଜ ବା ମୂଳ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $4x^2 - 11x + 6 = 0$ (ii) $(2x - 1)(x - 2) = 0$

(iii) $x^2 - (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ (iv) $a(x^2+1) = x(a^2 + 1)$, $a \neq 0$

(v) $6x^2 + 11x + 3 = 0$ (vi) $2x^2 + 41x - 115 = 0$

(vii) $12x^2 + x - 6 = 0$ (viii) $(6x + 5)(x - 2) = 0$

(ix) $15x^2 - x - 28 = 0$ (x) $(x + 5)(x - 5) = 39$

6. ଯଦି $4x^2 - 13x + k = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ ଅପରଟିର 12 ଗୁଣ ହେଲେ k ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

7. $x^2 - 5x + p = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ ଅପରଟି ଅପେକ୍ଷା 3 ଅଧିକ ହେଲେ p ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

8. ଯଦି $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଏ ତେବେ $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

9. ଯଦି $2x^2 - 6x + 3 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଏ ତେବେ $(\alpha+1)(\beta+1)$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

10. ଯଦି $2x^2 - (p+1)x + p - 1 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର ଓ ଗୁଣଫଳ ସମାନ ହେଲେ p ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

11. ଯଦି $5x^2 - 3x - 2 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\alpha^3 + \beta^3 = \frac{117}{125}$

12. ଯଦି $5x^2 + 17x + 6 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦୟ α ଓ β ହୁଏ ତେବେ $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

13. $x^2 - 8x + 16p = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ ପରିପ୍ରକାଶକୁ p ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

14. ଯଦି $x^2 - 2(5+2m)x + 3(7 + 10m) = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ହୁଏ, m ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

15. (i) ଯଦି $a = b = c$ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସମୀକରଣ

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ ର ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଏବଂ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ।

(ii) ଯଦି $a + b + c = 0$ ଏବଂ $a, b, c \in Q$ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$(b+c-a)x^2 + (c+a-b)x + (a+b-c) = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ହେବେ ।

16. ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି 3 ଓ ମୂଳଦ୍ୱୟର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି 29 ହେଲେ, ସମୀକରଣଟି ନିରୂପଣ କର ।

17. ଯଦି $2x^2 - 4x + 2 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 4\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + 2\alpha\beta = 12$$

18.(i) ଯଦି $ax^2 + bx + c = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ ଅପରଟିର 4 ଗୁଣ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $4b^2 = 25ac$ ।

(ii) ଯଦି $x^2 - px + q = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ ଅପରଟିର 2 ଗୁଣ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $2p^2 = 9q$ ।

19.(i) ଯଦି $41x^2 - 2(5a+4b)x + (a^2+b^2) = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ସମାନ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\frac{a}{b} = \frac{5}{4}$

(ii) ଯଦି $x^2 + px + q = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ସେମାନଙ୍କର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $2q = p(p+1)$ ।

(iii) ଯଦି $x^2 + px + q = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ବୀଜ ଅନ୍ୟଟିର ବର୍ଗ ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $p^3 + q^2 + q = 3pq$

20. ଯଦି $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ ସମାନ ହୁଏ ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$

2.8 ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପରେ ରୂପାନ୍ତରଣ : (Equations reducible to quadratic form)

ଏପରି ଅନେକ ସମୀକରଣ ଅଛନ୍ତି, ଯେଉଁମାନଙ୍କ ରୂପ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ରୂପ ଯଥା $ax^2 + bx + c = 0$ ନୁହେଁ। ମାତ୍ର ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିକୁ ଉପଯୁକ୍ତ ଭାବେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି ଏମାନଙ୍କୁ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପକୁ ଆଣି ସମାଧାନ କରିହେବ । ଏପରି କେତେଗୁଡ଼ିଏ ସମୀକରଣର ଉଦାହରଣ ଦିଆଯାଇଛି ।

ଉଦାହରଣ - 9 : $4x^4 - 21x^2 + 20 = 0$ ସମୀକରଣଟିର ମୂଳ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟିର ଘାତ 4 ଓ ଏହା ଦ୍ୱିଘାତ ନୁହେଁ । ମାତ୍ର $x^2 = y$ ଲେଖିଲେ ଏହାର ରୂପ

$$4y^2 - 21y + 20 = 0 \text{ .... (i)}$$

ସମୀକରଣ (i) ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି y ରେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଅଟେ ।

ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରଥମେ ସମୀକରଣ (i) ର ମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯିବ ।

ସମୀକରଣ (i) ରେ $a = 4, b = -21$ ଓ $c = 20$ ।

ପ୍ରଭେଦକ $(D) = b^2 - 4ac = (-21)^2 - 4 \times 4 \times 20 = 441 - 320 = 121$

$$\therefore y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-21) \pm \sqrt{121}}{2 \times 4} = \frac{21 \pm 11}{8} = \frac{21+11}{8} \text{ କିମ୍ବା } \frac{21-11}{8} = 4 \text{ କିମ୍ବା } \frac{5}{4}$$

$y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

ପୁନଶ୍ଚ $y = \frac{5}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ମୂଳଗୁଡ଼ିକ ହେଲା $2, -2, \frac{1}{2}\sqrt{5}, -\frac{1}{2}\sqrt{5}$ ବା $(\pm 2, \pm \frac{1}{2}\sqrt{5})$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 10 : ସମାଧାନ କର : $4\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 8(x + \frac{1}{x}) - 29 = 0$

ସମାଧାନ : ଯେହେତୁ $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ $\Rightarrow 4\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + 8(x+\frac{1}{x}) - 29 = 0$

$$\Rightarrow 4\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 4\right\} + 8\left(x+\frac{1}{x}\right) - 29 = 0$$

$$\Rightarrow 4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + 8\left(x+\frac{1}{x}\right) - 45 = 0 \quad ....(i)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $x + \frac{1}{x} = y$ ଲେଖିଲେ ସମୀକରଣର ରୂପାନ୍ତରିତ ରୂପ $4y^2 + 8y - 45 = 0$ ହେବ ।

ଏଠାରେ, $a = 4, b = 8$ ଓ $c = -45$ ।

ପ୍ରଭେଦକ $(D) = b^2 - 4ac = (8)^2 - 4 \times 4 \times (-45) = 64 + 720 = 784 = (28)^2$ ।

$\therefore$ ମୂଳଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ଏବଂ ଅସମାନ ହେବ ($\because$ D ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା) ।

$\therefore \quad y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{784}}{2 \times 4} = \frac{-8 \pm 28}{8} = \frac{-8+28}{8}$ କିମ୍ବା $\frac{-8-28}{8} = \frac{5}{2}$ କିମ୍ବା $\frac{-9}{2}$ ।

ଯଦି $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ ହୁଏ, ତେବେ $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$

$= \frac{5+3}{4}$ କିମ୍ବା $\frac{5-3}{4} = 2$ କିମ୍ବା $\frac{1}{2}$ ।

ସେହିପରି ଯଦି $x + \frac{1}{x} = \frac{-9}{2}$ ତେବେ $2x^2 + 9x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81-16}}{4} = \frac{-9 \pm \sqrt{65}}{4}$ ।

(ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ଯେ ଉକ୍ତ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ ଅପରିମେୟ ଓ ଅସମାନ)

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ $2, \frac{1}{2}, \frac{-9+\sqrt{65}}{4}, \frac{-9-\sqrt{65}}{4}$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 11 :

ସମାଧାନ କର : $\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{13}{6}$

ସମାଧାନ : ମନେକର $\sqrt{\frac{x}{1-x}} = y$

ତେବେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି ହେବ $y + \frac{1}{y} = \frac{13}{6} \Rightarrow 6y^2 - 13y + 6 = 0$

$\therefore\ y = \dfrac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \times 6 \times 6}}{2 \times 6} = \dfrac{13 \pm \sqrt{169-144}}{12} = \dfrac{13 \pm \sqrt{25}}{12} = \dfrac{13 \pm 5}{12}$

$\therefore\ y = \dfrac{18}{12}$ କିମ୍ବା $\dfrac{8}{12}$ $\Rightarrow y = \dfrac{3}{2}$ କିମ୍ବା $y = \dfrac{2}{3}$ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{9}{4} \Rightarrow 4x = 9 - 9x \Rightarrow 13x = 9 \Rightarrow x = \dfrac{9}{13}$ ।

ପୁନଶ୍ଚ $y = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{4}{9}$

$\Rightarrow 9x = 4 - 4x \Rightarrow 13x = 4 \Rightarrow x = \dfrac{4}{13}$ ।

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ମୂଳଗୁଡ଼ିକ ହେଲା $\dfrac{9}{13}$ ଓ $\dfrac{4}{13}$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 12 : ସମାଧାନ କର : $x(x+5)(x+7)(x+12) + 150 = 0$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ $x(x+5)(x+7)(x+12) + 150 = 0$

$\Rightarrow \{x(x+12)\}\{(x+5)(x+7)\} + 150 = 0$ (କାହିଁକି ?)

$\Rightarrow (x^2 + 12x)(x^2 + 12x + 35) + 150 = 0$

$\Rightarrow y(y + 35) + 150 = 0$ (ଏଠାରେ $x^2 + 12x = y$ ହେଲେ)

$\Rightarrow y^2 + 35y + 150 = 0$

$\Rightarrow y = \dfrac{-35 \pm \sqrt{(35)^2 - 4 \times 1 \times 150}}{2 \times 1}$ (ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କଲେ)

$= \dfrac{-35 \pm \sqrt{1225 - 600}}{2} = \dfrac{-35 \pm \sqrt{625}}{2} = \dfrac{-35 \pm 25}{2} = -5$ କିମ୍ବା -30

$y = -30 \Rightarrow x^2 + 12x = -30 \Rightarrow x^2 + 12x + 30 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{144 - 120}}{2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{24}}{2} = \dfrac{-12 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -6 \pm \sqrt{6}$

ପୁନଶ୍ଚ $y = -5 \Rightarrow x^2 + 12x = -5 \Rightarrow x^2 + 12x + 5 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{144 - 20}}{2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{124}}{2} = \dfrac{-12 \pm 2\sqrt{31}}{2} = -6 \pm \sqrt{31}$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟିର ମୂଳ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲା $-6 + \sqrt{6}$, $-6 - \sqrt{6}$, $-6 + \sqrt{31}$, $-6 - \sqrt{31}$

ବା $-6 \pm \sqrt{6}$, $-6 \pm \sqrt{31}$ । (ଉତ୍ତର)

2.9 ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ପ୍ରୟୋଗ (Application of Quadratic Equation) :

କେତେକ ପାଟୀଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନରେ 'ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ'ର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡ଼ିଥାଏ । ପାଟୀଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନର ତର୍ଜମା ଏବଂ ଅନୁଶୀଳନରେ ଆବଶ୍ୟକ ଥିବା ଉତ୍ତରକୁ ଏକ ଅଜ୍ଞାତରାଶି ରୂପେ ନେଇ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କରାଯାଏ । ତତ୍ପରେ ଉକ୍ତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ପରେ ଇପ୍ସିତ ଉତ୍ତର ମିଳିଥାଏ । ବେଳେବେଳେ ସମୀକରଣର ସମାଧାନରେ ମିଳୁଥିବା ଦୁଇଟି ଉତ୍ତର ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ, ସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରୁଥିବା ବେଳେ ଅନ୍ୟଟି ସିଦ୍ଧ କରୁନଥାଏ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସିଦ୍ଧ କରୁଥିବା ମୂଳଟି ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ହୋଇଥାଏ । ଉକ୍ତ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ଘଟୁଥିବା ଘଟଣା ସଂପର୍କିତ କିଛି ପାଟୀଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନର ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଉଦାହରଣ - 13 : ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାର ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳର ସମଷ୍ଟି 90 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି x^2

$\therefore x^2$ ର ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳ x ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ, $x^2 + x = 90 \Rightarrow x^2 + x - 90 = 0 \Rightarrow x^2 + 10x - 9x - 90 = 0$

$\Rightarrow x\ (x + 10) - 9\ (x + 10) = 0$

$\Rightarrow (x + 10)\ (x - 9) = 0 \Rightarrow x = -10$ କିମ୍ବା $x = 9$ ।

ଯେହେତୁ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳ ଧନାତ୍ମକ, x ର ମାନ -10 ହେବ ନାହିଁ । ତେବେ $x = 9$ ।

$\therefore$ ସଂଖ୍ୟାଟି $x^2 = 9^2 = 81$ । (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି x ।

$\therefore x$ ର ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳ $\sqrt{x}$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $x + \sqrt{x} = 90 \Rightarrow \sqrt{x} = 90 - x$

$\Rightarrow x = (90 - x)^2 \Rightarrow x = 8100 - 180x + x^2 \Rightarrow x^2 - 181x + 8100 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 100x - 81x + 8100 = 0 \Rightarrow (x - 100)(x - 81) = 0$

$\Rightarrow x - 100 = 0$ କିମ୍ବା $x - 81 = 0 \Rightarrow x = 100$ କିମ୍ବା $x = 81$

$x = 100$ ପାଇଁ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହେବ ନାହିଁ । (ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

କିନ୍ତୁ $x = 81$ ହେଲେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହୁଏ ।

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି 81 । (ଉତ୍ତର)

ସୂଚନା : ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ପରିମେୟ ମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଅବଲମ୍ବନରେ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କରାଯାଇପାରେ ।)

ଉଦାହରଣ - 14 : ଦୁଇଗୋଟି ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି 15 ଓ ସେମାନଙ୍କ ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ରାଶିଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି $\frac{3}{10}$ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ x ଓ (15 –x)

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ : $\frac{1}{x}+\frac{1}{15-x}=\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{15-x+x}{x(15-x)}=\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{15}{15x-x^2}=\frac{3}{10}$

$\Rightarrow 150 = 45x - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 - 45x + 150 = 0$ (ପାର୍ଶ୍ୱପରିବର୍ତ୍ତନ କଲେ)

$\Rightarrow x^2 - 15x + 50 = 0$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ 3 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ)

(ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ଯେ ଉକ୍ତ ସମୀକରଣର ପ୍ରଭେଦକ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା, ତେଣୁ ସମୀକରଣର ପରିମେୟ ମୂଳ ସମ୍ଭବ)

$= x^2 - 10x - 5x + 50 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 10$ କିମ୍ବା $x = 5$

ଯଦି ସଂଖ୍ୟାଟି 10 ହୁଏ ତେବେ ଅନ୍ୟଟି 5 ହେବ । ସେହିପରି ସଂଖ୍ୟାଟି 5 ହେଲେ ଅନ୍ୟଟି 10 ହେବ ।

$\therefore$ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ 5 ଓ 10 । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 15 :

ଏକ ନୌକାର ବେଗ ସ୍ଥିର ଜଳରେ ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି 11 କି.ମି. । ଏହା ସ୍ରୋତର ପ୍ରତିକୂଳରେ 12 କି.ମି. ଯାଇ ପୁନଶ୍ଚ (ଅନୁକୂଳରେ) ଫେରିଆସିବାକୁ 2 ଘଣ୍ଟା 45 ମିନିଟ୍ ସମୟ ନେଲା । ତେବେ ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସ୍ରୋତର ବେଗ ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି x କି.ମି. ।

ପ୍ରତିକୂଳ ସ୍ରୋତରେ ନୌକାର ବେଗ = (11– x) କି.ମି. ପ୍ରତି ଘଣ୍ଟା

ଅନୁକୂଳ ସ୍ରୋତରେ ନୌକାର ବେଗ = (11+ x) କି.ମି. ପ୍ରତି ଘଣ୍ଟା ।

$\therefore$ 12 କି.ମି. ସ୍ରୋତର ପ୍ରତିକୂଳରେ ଯିବା ପାଇଁ ଏବଂ 12 କି.ମି. ସ୍ରୋତର ଅନୁକୂଳରେ ଯିବା ପାଇଁ ଯଥାକ୍ରମେ $\frac{12}{11-x}$ ଘଣ୍ଟା ଏବଂ $\frac{12}{11+x}$ ଘଣ୍ଟା ସମୟ ଲାଗିବ ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ : $\frac{12}{11+x}+\frac{12}{11-x}=2\frac{3}{4}$ [2 ଘଣ୍ଟା 45 ମିନିଟ୍ = $2\frac{45}{60}$ ଘଣ୍ଟା = $2\frac{3}{4}$ ଘଣ୍ଟା]

$$\Rightarrow \frac{12(11-x)+12(11+x)}{121-x^2}=\frac{11}{4} \Rightarrow \frac{264}{121-x^2}=\frac{11}{4} \Rightarrow \frac{24}{121-x^2}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 121 - x^2 = 96 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5 \text{ ।}$$

$\therefore$ ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ 5 କି.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(b)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମର ସମଷ୍ଟି 2 । ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ x ନେଇ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ।

(ii) ଦୁଇଗୋଟି କ୍ରମିକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ 20 । ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକୁ y ନେଇ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ।

(iii) ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି 18 ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ 72 । ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାକୁ x ନେଇ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ।

(iv) କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା, ତାହାର ବର୍ଗ ସମାନ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(v) ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି $S = \frac{n(n+1)}{2}$ । ଯଦି S = 120 ହୁଏ ତେବେ n ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କରିବା ପାଇଁ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ।

(vi) $\sqrt{x} + x = 6$ କୁ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(vii) $\sqrt{x+9} + 3 = x$ କୁ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(viii) $x - 2\sqrt{2} - 6 = 0$ ସମୀକରଣକୁ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ।

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ଗୋଟିଏ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ତାହାର ବର୍ଗମୂଳ ଅପେକ୍ଷା 12 ଅଧିକ ହେଲେ, ସଂଖ୍ୟାଟି ନିରୂପଣ କର ।

(ii) ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ତାହାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମର ସମଷ୍ଟି $\frac{41}{20}$ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି ସ୍ଥିର କର ।

(iii) ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳ $\frac{11}{30}$ ହେଲେ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟଙ୍କୁ ନିରୂପଣ କରିବା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି ଗଠନ କରି ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ନିରୂପଣ କର ।

(iv) ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟୁତକ୍ରମର ସମଷ୍ଟି $\frac{23}{132}$ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(v) ଯଦି 51 କୁ ଦୁଇଭାଗ କଲେ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ 378 ହୁଏ, ତେବେ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଏକ ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା, ତାହାର ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳର 3 ଗୁଣ । ଏକକ ସ୍ଥାନରେ ଥିବା ଅଙ୍କଟି ଦଶକ ସ୍ଥାନରେ ଥିବା ଅଙ୍କ ଠାରୁ 2 ବୃହତ୍ତର । ସଂଖ୍ୟାଟି ନିରୂପଣ କର ।

4. ଗୋଟିଏ ପରିବାରରେ, ଆଲ୍‌ଫାର ବୟସ, ବିଟା ଓ ଗାମାର ବୟସର ଗୁଣଫଳ ସହ ସମାନ । ଯଦି ବିଟା, ଗାମା ଠାରୁ 1 ବର୍ଷ ବଡ଼ ହୁଏ ଏବଂ ଆଲ୍‌ଫାର ବୟସ 42 ହୁଏ, ତେବେ 5 ବର୍ଷ ପରେ ବିଟାର ବୟସ କେତେ ହେବ ?

5. କୌଣସି ଏକ ଅରଣ୍ୟରେ ବାସ କରୁଥିବା ମର୍କଟମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ସେମାନଙ୍କ ସଂଖ୍ୟାର ଏକ ଅଷ୍ଟମାଂଶର ବର୍ଗ କ୍ରୀଡ଼ାରତ ଏବଂ ଅବଶିଷ୍ଟ ବାରଟି ମର୍କଟ ଏକ ଶୃଙ୍ଗ ଉପରେ ବସିଥିଲେ । ଅରଣ୍ୟରେ ସମ୍ଭବତଃ କେତେ ମର୍କଟ ଥିଲେ ?

6. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 30 ବ.ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା, ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ 7 ସେ.ମି. ଅଧିକ ହେଲେ, ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।

7. ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସମକୋଣର ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 5x ସେ.ମି. ଓ (3x–1) ସେ.ମି. ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 60 ବର୍ଗ ସେ.ମି. । ତେବେ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. n ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା $\frac{1}{2}n(n-3)$ । ଯଦି ବହୁଭୁଜର 54 ଟି କର୍ଣ୍ଣ ରହିବ, ତେବେ ବହୁଭୁଜର ବାହୁର ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

9. ଦୁଇଟି ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି 468 ବ.ମି. ଏବଂ ପରିସୀମାଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର 24 ମି. ହେଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

10. ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତି ତାଙ୍କ ଚାଲିବାର ବେଗକୁ ଯଦି ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି 1 କି.ମି. ବୃଦ୍ଧି କରେ ତେବେ 2 କି.ମି. ରାସ୍ତା ଅତିକ୍ରମ କରିବା ପାଇଁ 10 ମିନିଟ୍ କମ୍ ସମୟ ନେଇଥାନ୍ତା । ତେବେ ବ୍ୟକ୍ତିର ଚାଲିବାର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ସ୍ଥିର କର ।

11. ଏକ ନୌକାର ବେଗ ସ୍ଥିର ଜଳରେ 15 କି.ମି. ପ୍ରତି ଘଣ୍ଟା। ଏହା ସ୍ରୋତର ପ୍ରତିକୂଳରେ 30 କି.ମି. ଅତିକ୍ରମ କରି ପୁନଶ୍ଚ (ଅନୁକୂଳରେ) ଫେରି ଆସିବାକୁ 4 ଘଣ୍ଟା 30 ମି. ସମୟ ନେଲା । ତେବେ ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. ଗୋଟିଏ ଶ୍ରେଣୀର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟକ ଛାତ୍ରଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ 250 ଟଙ୍କାକୁ ସମାନ ଭାଗରେ ବଣ୍ଟାଗଲା । ଯଦି 25 ଜଣ ଛାତ୍ର ଅଧିକ ହୋଇଥାନ୍ତେ, ତେବେ ପ୍ରତ୍ୟେକ 0.50 ଟଙ୍କା ଲେଖାଏଁ କମ୍ ପାଇଥାନ୍ତେ । ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।

13. ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଅପେକ୍ଷା 8 ମିଟର ଅଧିକ । କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 240 ବର୍ଗ ମିଟର ହେଲେ କ୍ଷେତ୍ରଟିର ପରିସୀମା କେତେ ?

14. ଏକ ରେଳଗାଡ଼ି 300 କି.ମି. ଦୀର୍ଘ ଯାତ୍ରା ପଥରେ ସମାନ ବେଗରେ ଗତି କରୁଥିଲା । ଯଦି ଗାଡ଼ିର ବେଗ ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି 5 କି.ମି. ଅଧିକ ହୋଇଥାନ୍ତା, ତେବେ ଗାଡ଼ିଟି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମୟର 2 ଘଣ୍ଟା ପୂର୍ବରୁ ଯଥା ସ୍ଥାନରେ ପହଞ୍ଚିଥାନ୍ତା । ତେବେ ଗାଡ଼ିର ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି ବେଗ ନିରୂପଣ କର ।

15. ଏକ ଆୟତାକାର ପଡ଼ିଆର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 25 ମିଟର, ପ୍ରସ୍ଥ 16 ମିଟର ଓ ପଡ଼ିଆର ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ସମାନ ଚଉଡ଼ାର ଏକ ରାସ୍ତା ଅଛି । ଯଦି ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ରାସ୍ତାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 230 ବର୍ଗମିଟର ହୁଏ ତେବେ ରାସ୍ତାର ଚଉଡ଼ା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. କେତେକ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀ ଏକ ବଣ ଭୋଜିର ଆୟୋଜନ କଲେ । ଖାଦ୍ୟ ଅଟକଳ (Budget) 480 ଟଙ୍କା ଥିଲା । ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 8 ଜଣ ବଣ ଭୋଜିକୁ ଗଲେ ନାହିଁ; ଯାହା ଫଳରେ ଖାଦ୍ୟ ବାବଦ ଖର୍ଚ୍ଚ ଜଣପିଛା 10 ଟଙ୍କା ବଢ଼ିଗଲା । ତେବେ କେତେଜଣ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀ ବଣ ଭୋଜିକୁ ଯାଇଥିଲେ ?

17. ସମାଧାନ କର :

(i) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$

(ii) $5\sqrt{\frac{3}{x}} + 7\sqrt{\frac{x}{3}} = 22\frac{2}{3}$

(iii) $3x + \frac{5}{16x} - 2 = 0$

(iv) $\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^4 - 6\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^2 + 8 = 0$

(v) $(3x^2 - 8)^2 - 23(3x^2 - 8) + 76 = 0$

(vi) $5(5^x + 5^{-x}) = 26$

(vii) $(x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) + 3 = 0$

(viii) $x^{-4} - 5x^{-2} + 4 = 0$

(ix) $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$

(x) $\frac{3}{\sqrt{2x}} - \frac{\sqrt{2x}}{5} = 5\frac{9}{10}$

(xi) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{34}{15}$ $(x \neq 0, x \neq -1)$

(xii) $x(2x+1)(x-2)(2x-3) = 63$

(xiii) $\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} = 6\frac{6}{7}$ $(x \neq -3, 3)$

(xiv) $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$

(xv) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 3 = 0$

(xvi) $\sqrt{2x+9} + x = 13$

(xvii) $\sqrt{2x + \sqrt{2x+4}} = 4$