गणित के अध्ययन के दौरान हमें इस प्रकार के अनेक वाक्य मिलते हैं। कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं:

दो धन दो बराबर चार।

दो धन संख्याओं का योगफल धन होता है।

सभी अभाज्य संख्याएँ विषम संख्याएं होती हैं।

इनमें से प्रथम दो वाक्य सत्य हैं और तीसरा वाक्य असत्य है। इन वाक्यों के बारे में कोई भी संदिग्धता नहीं है। अत: ये (वाक्य) कथन हैं।

क्या आप किसी ऐसे वाक्य का उदाहरण सोच सकते हैं जो अस्पष्ट हो? निम्नलिखित वाक्य पर विचार कीजिए:

x और y का योगफल 0 से अधिक है।

यहाँ हम यह सुनिश्चित नहीं कर सकते कि वाक्य सत्य है अथवा असत्य है, जब तक हमें यह ज्ञात न हो कि x और y क्या हैं। उदाहरणार्थ, $x = 1, y = -3$ के लिए यह असत्य है तथा $x = 1, y = 0$ के लिए यह सत्य है। अत: यह वाक्य एक कथन नहीं है। किंतु निम्नलिखित वाक्य एक कथन है

प्रत्येक प्राकृत संख्याओं x और y का योगफल 0 से अधिक है, एक कथन है।

अब निम्नलिखित वाक्यों पर विचार कीजिए:

आहा, कितना सुंदर!

द्वार (दरवाजा) खोलिए।

आप कहाँ जा रहे हैं?

क्या ये कथन हैं? नहीं, क्योंकि पहला विस्मयादिबोधक (विस्मयबोधक) वाक्य है, दूसरा एक आदेश है तथा तीसरा एक प्रश्न है। गणितीय भाषा में इनमें से किसी को भी कथन नहीं माना जाता है। ऐसे वाक्य जिनमें चर (अनिश्चित) समय हो जैसे "आज", "कल" "बीता हुआ कल", कथन नहीं होते हैं। यह इसलिए कि हमें यह ज्ञात नहीं होता कि किसी समय की चर्चा हो रही है।

उदाहरणार्थ, वाक्य

'कल शुक्रवार है।'

एक कथन नहीं है।

यह वाक्य किसी बृहस्पतिवार के लिए तो सत्य होगा परंतु अन्य दिनों के लिए सत्य नहीं होगा। यह बात उन वाक्यों के लिए भी लागू होती है जिनमें सर्वनाम का प्रयोग बिना संबंधित संज्ञा को बताए किया गया हो और ऐसे वाक्यों के लिए भी जिनमें चर (अनिश्चित) स्थानों का प्रयोग किया गया हो, जैसे 'यहाँ', 'वहाँ' आदि। तात्पर्य यह हुआ कि वाक्य

वह गणित की एक स्नातक है

कश्मीर यहाँ से बहुत दूर है।

कथन नहीं है।

यहाँ एक अन्य वाक्य पर विचार कीजिए:

एक महीने (माह) में 40 दिन होते हैं।

क्या आप इसे एक कथन कहेंगे? नोट कीजिए कि यहाँ पर उल्लिखित समय "अनिश्चित (चर)" है अर्थात् 12 महीनों में से कोई एक। किंतु हमें ज्ञात है कि यह वाक्य सदैव (महीने का ध्यान किए बिना) असत्य होता है क्योंकि एक महीने में दिनों की संख्या 31 से अधिक नहीं हो सकती है। अत: यह वाक्य एक कथन है। इसलिए यह तथ्य कि एक वाक्य या तो सत्य हो या असत्य हो किंतु दोनों न हो सके एक कथन बनाता है।

सामान्यत: हम कथनों को छोटे अक्षर $p, q, r, \ldots$ से निरूपित (निर्दिष्ट) करते हैं

उदाहरण के लिए, कथन *"आग सदैव गर्म होती है"* को हम p द्वारा दर्शाते हैं। इस बात को निम्नलिखित प्रकार से भी दर्शाते हैं:

p : *आग सदैव गर्म होती है।*

उदाहरण 1 जाँचिए कि क्या निम्नलिखित वाक्य कथन हैं। अपने उत्तर को कारण सहित लिखिए।

(i) 8, 6 से कम है।

(ii) प्रत्येक समुच्चय एक परिमित समुच्चय होता है।

(iii) सूर्य एक तारा है।

(iv) गणित एक कौतुक है।

(v) बिना बादल के वर्षा नहीं होती।

(vi) यहाँ से चेन्नई कितनी दूर है?

हल (i) यह वाक्य असत्य है क्योंकि 8 अधिक होता है 6 से। अत: यह एक कथन है।

(ii) यह वाक्य भी सदैव असत्य है क्योंकि ऐसे भी समुच्चय हैं जो कि परिमित नहीं होते हैं अत: यह एक कथन है।

(iii) यह वैज्ञानिक रूप से प्रमाणित है कि सूर्य एक तारा है और इसलिए यह वाक्य सत्य है। अत: यह एक कथन है।

(iv) यह वाक्य व्यक्तिनिष्ठ है क्योंकि जिन्हें गणित में रुचि है उनके लिए यह कौतुक हो सकता है किंतु अन्य के लिए ऐसा नहीं हो सकता है। इसका अर्थ हुआ कि यह वाक्य सत्य या असत्य नहीं है। अत: यह एक कथन नहीं है।

(v) यह वैज्ञानिक रूप से प्रमाणित प्राकृतिक तथ्य है कि वर्षा होने से पहले बादल बनते हैं। इसलिए यह सदैव सत्य है। अत: यह एक कथन है।

(vi) यह एक प्रश्न है, जिसमें शब्द 'यहाँ' भी आता है। अत: यह एक कथन नहीं है।

उपरोक्त उदाहरण यह दर्शाते हैं कि जब कभी हम किसी वाक्य को कथन कहते हैं तो हमें यह भी बतलाना चाहिए कि ऐसा क्यों है प्रश्न के उत्तर की अपेक्षा यह 'क्यों' अधिक महत्वपूर्ण है।

प्रश्नावली 14.1

1. निम्नलिखित वाक्यों में से कौन सा कथन हैं? अपने उत्तर के लिए कारण भी बतलाइए।

(i) एक महीने में 35 दिन होते हैं।

(ii) गणित एक कठिन विषय है।

(iii) 5 और 7 का योगफल 10 से अधिक है।

(iv) किसी संख्या का वर्ग एक सम संख्या होती है।

(v) किसी चतुर्भुज की भुजाएँ बराबर (समान) लंबाई की होती हैं।

(vi) इस प्रश्न का उत्तर दीजिए।

(vii) -1 और 8 का गुणनफल 8 है।

(viii) किसी त्रिभुज के सभी अंत: कोणों का योगफल 180° होता है।

(ix) आज एक तूफानी दिन है।

(x) सभी वास्तविक संख्याएं सम्मिश्र संख्याएँ होती हैं।

2. वाक्यों के तीन ऐसे उदाहरण दीजिए जो कथन नही हैं। उत्तर के लिए कारण भी बतलाइए।

14.3 पूर्व ज्ञात कथनों से नए कथन बनाना (New Statements from Old)

अब हम पूर्व ज्ञात कथनों से नए कथन बनाने की विधि पर विचार करेंगे। सन् 1854 में एक अंगरेज़ गणितज्ञ Georg Boole ने अपनी पुस्तक The laws of Thoughts में इन विधियों पर विचार-विमर्श किया है। यहाँ, हम दो तकनीकों पर विचार-विमर्श करेंगे।

कथन के अध्ययन में प्रथम चरण के रूप में हम एक महत्वपूर्ण तकनीक पर दृष्टि डालेंगे जिसके प्रयोग से हम गणितीय वाक्यों की अपनी समझ को गहन कर सकेंगे। इस तकनीक में हम अपने आप से न केवल यह प्रश्न पूछेंगे कि एक दिए हुए वाक्य के सत्य होने का क्या अर्थ होता है बल्कि यह भी कि उस वाक्य के सत्य नहीं होने का क्या अर्थ होता है।

14.3.1 ***किसी कथन का निषेधन (Negation of a statement)*** किसी कथन का नकारना उस कथन का **निषेधन** कहलाता है।

वाक्य 'नई दिल्ली एक नगर है।'

इसका निषेधन निम्नलिखित प्रकार से लिखा जा सकता है।

यह वस्तुस्थिति नहीं है कि नई दिल्ली एक नगर है।' इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं। कि

'यह असत्य है कि नई दिल्ली एक नगर है।'

सरलता से यह भी कह सकते हैं कि

'नई दिल्ली एक नगर नहीं है।'

परिभाषा 1 यदि p एक कथन है, तो p का निषेधन वह कथन है जो p को नकारता है और इसे प्रतीक $\sim p$ से दर्शाते (निर्दिष्ट करते) हैं जिसे "p-नहीं" पढ़ते हैं।

टिप्पणी किसी कथन के निषेधन की रचना करते समय 'यह वस्तु स्थिति नहीं है' अथवा 'यह असत्य है कि' यहाँ एक उदाहरण से यह स्पष्ट किया गया है कि किस प्रकार एक कथन के निषेधन का अवलोकन करके, हम उसके संबंध में अपनी समझ सुधार सकते हैं।

वाक्य 'जर्मनी में हर कोई (प्रत्येक व्यक्ति) जर्मन भाषा बोलता है।' पर विचार करें।

इस वाक्य को नकारने से हमें वाक्य 'जर्मनी में हर कोई जर्मन भाषा नहीं बोलता है।' इसका यह तात्पर्य नहीं हुआ कि 'जर्मनी में कोई भी व्यक्ति जर्मन भाषा नहीं बोलता है।' यह केवल यह बतलाता है कि 'जर्मनी में कम से कम एक व्यक्ति ऐसा है जो जर्मन भाषा नहीं बोलता है।

हम कुछ और उदाहरणों पर विचार करेंगे।

उदाहरण 2 निम्नलिखित कथनों का निषेधन लिखिए।

(i) किसी आयत के दोनों विकर्णों की लंबाई समान होती है।

(ii) $\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या है।

हल (i) यह कथन यह बतलाता है कि सभी आयतों में दोनों विकर्णों की लंबाई समान होती है। इसका तत्पर्य यह हुआ कि यदि हम कोई आयत लें तो इसके दोनों विकर्णे की लंबाई समान होगी। इस कथन का निषेधन, "यह असत्य है कि किसी आयत के दोनों विकर्णों की लंबाई समान होती है" है। अर्थात् 'कम से कम एक आयत ऐसा है, जिसके दोनों विकर्णों की लंबाई समान नहीं है।'

(ii) इस कथन का निषेधन निम्नलिखित प्रकार लिखा जा सकता है

'यह वस्तुस्थिति नहीं है कि $\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या है।'

इसे निम्नलिखित प्रकार से भी लिख सकते हैं:

'$\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।'

उदाहरण 3 निम्नलिखित कथन के निषेधन लिखिए और जाँचिए कि क्या परिणामी कथन सत्य है?

(i) आस्ट्रेलिया एक महाद्वीप है।

(ii) ऐसे किसी चतुर्भुज का अस्तित्व नहीं है जिसकी चारों भुजाएँ बराबर हों।

(iii) प्रत्येक प्राकृत संख्या 0 से अधिक होती है।

(iv) 3 और 4 का योगफल 9 है।

हल (i) 'यह असत्य है कि आस्ट्रेलिया एक महाद्वीप है', दिये हुए कथन का निषेधन है। इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं कि 'आस्ट्रेलिया एक महाद्वीप नहीं है।' हमें ज्ञात है कि यह कथन असत्य है।

(ii) इस कथन का निषेधन इस प्रकार है, 'यह वस्तुस्थिति नहीं है कि किसी चतुर्भुज का अस्तित्व नहीं है जिसकी चारों भुजाएँ बराबर हैं।'
इसका तात्पर्य हुआ कि 'एक ऐसे चतुर्भुज का अस्तित्व है, जिसकी चारों भुजाएँ बराबर होती हैं। यह कथन सत्य है क्योंकि हमें ज्ञात है कि वर्ग एक ऐसा चतुर्भुज होता है, जिसकी चारों भुजाएँ बराबर होती हैं।

(iii) इस कथन का निषेधन इस प्रकार है, 'यह असत्य है कि प्रत्येक प्राकृत संख्या 0 से अधिक होती हैं।
इसको इस प्रकार भी लिख सकते हैं कि 'एक ऐसी प्राकृत संख्या का अस्तित्व है जो 0 से अधिक नहीं है।' यह कथन असत्य है।

(iv) अभीष्ट निषेधन इस प्रकार है, 'यह असत्य है कि 3 और 4 का योगफल 9 है।'
इसे इस प्रकार भी लिखा जा सकता है कि, '3 और 4 का योगफल 9 नहीं होता है।' यह कथन सत्य है।

14.3.2 *मिश्र कथन (संयुक्त कथन) (Compound statements)* 'और (तथा)', 'या (अथवा)' आदि प्रकार के संयोजक शब्दों द्वारा एक या एक से अधिक कथन को जोड़ कर अनेक गणितीय कथन प्राप्त किए जा सकते हैं। निम्नलिखित कथन पर विचार कीजिए:

'बल्ब या बिजली के तार में कुछ खराबी है' यह कथन बतलाता है कि बल्ब में कुछ खराबी है या बिजली के तार में कुछ खराबी है। इसका तात्पर्य यह है कि प्रदत्त कथन वास्तव में दो संक्षिप्त (छोटे) कथन से मिल कर बना है, जो इस प्रकार हैं:

q: 'बल्ब में कुछ खराबी है'

r: बिजली के तार में कुछ खराबी है' और

जिनको शब्द 'या' द्वारा जोड़ा गया है।

अब मान लीजिए कि निम्नलिखित दो कथन दिए हैं,

p: '7 एक विषम संख्या है।'

q: '7 एक अभाज्य संख्या है।'

इन दोनों को शब्द 'और' द्वारा जोड़ने से निम्नलिखित कथन प्राप्त होगा

r: '7 विषम और अभाज्य, दोनों ही प्रकार की संख्या है।'

यह एक मिश्र कथन है।

उपरोक्त परिचर्चा से निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है:

परिभाषा 2 एक मिश्र कथन वह है, जो दो या दो से अधिक ऐसे कथनों द्वारा बना हो, इस स्थिति में प्रत्येक कथन को घटक कथन कहते हैं।

आइए अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 4 निम्नलिखित मिश्र कथन के घटक कथन ज्ञात कीजिए।

(i) आकाश नीला है और घास हरी है।

(ii) वर्षा हो रही है और ठण्डक है।

(iii) सभी परिमेय संख्याएँ, वास्तविक संख्याएँ होती हैं और सभी वास्तविक संख्याएँ, सम्मिश्र संख्याएँ होती हैं।

(iv) 0 एक धन संख्या है या एक ॠण संख्या है।

हल इनमें से प्रत्येक पर हम बारी-बारी से विचार करेंगे।

(i) घटक कथन इस प्रकार हैं

p: आकाश नीला है।

q: घास हरी है।

संयोजक शब्द 'और' है।

(ii) घटक कथन नीचे दिए गए हैं,

p: वर्षा हो रही है।

q: ठंडक है।

संयोजक शब्द 'और' है।

(iii) घटक कथन नीचे लिखे हैं,

p: सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं।

q: सभी वास्तविक संख्याएँ सम्मिश्र संख्याएँ होती हैं।

संयोजक शब्द 'और' है।

(iv) घटक कथन इस प्रकार हैं।

p: 0 एक धन संख्या हैं।

q: 0 एक ऋण संख्या है।

संयोजक शब्द 'या' है।

उदाहरण 5 निम्नलिखित कथन के घटक कथन ज्ञात कीजिए और जाँचिए कि वे सत्य हैं या नहीं।

(i) एक वर्ग एक चतुर्भुज होता है और इसकी चारों भुजाएँ बराबर होती हैं।

(ii) सभी अभाज्य संख्याएँ या तो सम या विषम होती हैं।

(iii) एक व्यक्ति, जिसने गणित या कंप्यूटर विज्ञान का चयन किया है, कंप्यूटर अनुप्रयोग में स्नाकोत्तर डिग्री पाठ्यक्रम (MCA) में प्रवेश ले सकता है।

(iv) चंडीगढ़ हरिणाणा और उत्तर प्रदेश की राजधानी है।

(v) $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या या एक अपरिमेय संख्या है।

(vi) 2, 4, और 8 का एक गुणज 24 है।

हल (i) यहाँ घटक कथन इस प्रकार हैं,

p: 'एक वर्ग एक चतुर्भुज होता है।

q: एक वर्ग की चारों भुजाएँ बराबर होती हैं।

हमें ज्ञात है कि दोनों कथन सत्य हैं। यहाँ पर संयोजक शब्द 'और' है।

(ii) यहाँ घटक कथन इस प्रकार हैं,

p: सभी अभाज्य संख्याएँ सम होती हैं।

q: सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती हैं।

यह दोनों कथन असत्य हैं। यहाँ संयोजक शब्द 'या' है।

(iii) यहाँ घटक कथन नीचे लिखे हैं,

p: एक व्यक्ति, जिसने गणित का चयन किया है, एम.सी.ए. में प्रवेश ले सकता है।

q: एक व्यक्ति, जिसने कंप्यूटर विज्ञान का चयन किया है, एम॰सी॰ए॰ में प्रवेश ले सकता है।

यह दोनों ही कथन सत्य हैं। यहाँ संयोजक शब्द 'या' है।

(iv) यहाँ घटक कथन इस प्रकार हैं,

p: चंडीगढ़ हरियाणा की राजधानी है।'

q: चंडीगढ़ उत्तर प्रदेश की राजधानी है।'

इस प्रश्न में प्रथम घटक कथन सत्य है और दूसरा असत्य है। यहाँ संयोजक शब्द 'और' है।

(v) अभीष्ट घटक कथन नीचे लिख हैं,

p: $\sqrt{2}$ *एक परिमेय संख्या है।*

q: $\sqrt{2}$ *एक अपरिमेय संख्या है।*

यहाँ प्रथम घटक कथन असत्य है और दूसरा सत्य है। यहाँ संयोजक शब्द 'या' है।

(vi) इसमें घटक कथन नीचे लिखे हैं,

p: 2 *का एक गुणज* 24 *है।*

q: 4 *का एक गुणज* 24 *है।*

r: 8 *का एक गुणज* 24 *है।*

यह तीनों ही घटक कथन सत्य है। यहाँ संयोजक शब्द 'और' है।

अत: हम देखते हैं कि मिश्र कथन वास्तव में दो या दो से अधिक कथनों को 'और', 'या' प्रकार के शब्दों द्वारा जोड़ने से बनते हैं। ये शब्द गणित में विशिष्ट महत्व रखते हैं। अगले अनुच्छेद में हम इनके बारे में परिचर्चा करेंगे।

प्रश्नावली 14.2

1. निम्नलिखित कथन के निषेधन लिखिए:
   (i) चेन्नई, तमिलनाडु की राजधानी है।
   (ii) $\sqrt{2}$ एक सम्मिश्र संख्या नहीं है।
   (iii) सभी त्रिभुज समबाहु त्रिभुज नहीं होते हैं।
   (iv) संख्या 2 संख्या 7 से अधिक है।
   (v) प्रतयेक प्राकृत संख्या एक पूर्णांक होती है।
2. क्या निम्नलिखित कथन युग्म (कथन के जोड़े) एक दूसरे के निषेधन हैं?
   (i) संख्या x एक परिमेय संख्या नहीं है।
   संख्या x एक अपरिमेय संख्या नहीं है।
   (ii) संख्या x एक परिमेय संख्या है।
   संख्या x एक अपरिमेय संख्या है।
3. निम्नलिखित मिश्र कथन के घटक कथन ज्ञात कीजिए और जाँचिए कि वे सत्य हैं या असत्य हैं?
   (i) संख्या 3 अभाज्य है या विषम है।
   (ii) समस्त (सभी) पूर्णांक धन हैं या ऋण हैं।
   (iii) संख्या 100, संख्याओं 3, 11 और 5 से भाज्य है

14.4 विशेष शब्द/वाक्यांश (Special WordsQ/Phrases)

मिश्र कथन में प्रयुक्त 'और', 'या' प्रकार के कुछ संयोजक शब्दों का प्रयोग बहुधा गणितीय कथन में होता है। इन्हें **'संयोजक'** कहते हैं। जब कभी हम मिश्र कथन का प्रयोग करते हैं तब यह आवश्यक हो जाता है कि हम इन शब्दों की भूमिका समझ सकें। यहाँ हम इस पर परिचर्चा करेंगे।

14.4.1 ***संयोजक 'और' (The word 'And')*** संयोजक 'और' के प्रयोग द्वारा बने निम्नलिखित मिश्र कथन पर विचार करते हैं:

p: *किसी बिंदु का एक स्थान होता है और उसकी स्थिति निर्धारित की जा सकती है।*

इस कथन को निम्नलिखित दो घटक कथन में विघटित किया जा सकता है:

q: किसी बिंदु का एक स्थान होता है।

r: उसकी स्थिति निर्धारित की जा सकती है।

उपरोक्त दोनों कथन सत्य हैं।

एक अन्य कथन पर विचार कीजिए।

p: संख्या 42 संख्याओं 5, 6 और 7 से भाज्य है।

इस कथन का विघटन इस प्रकार है,

q: संख्या 42 संख्या 5 से भाज्य है।

r: संख्या 42 संख्या 6 से भाज्य है।

s: संख्या 42 संख्या 7 से भाज्य है।

यहाँ हमें ज्ञात है कि प्रथम कथन असत्य है और शेष दो सत्य हैं।

अत: हमें निम्नलिखित नियम प्राप्त होता है

1. संयोजक "और" के प्रयोग द्वारा बना मिश्र कथन सत्य होगा यदि उसके सभी घटक कथन सत्य हों।
2. संयोजक "और" के प्रयोग द्वारा बना मिश्र कथन असत्य होगा यदि इसका एक भी घटक कथन असत्य हो (इसमें वह स्थिति भी सम्मिलित है जिसमें इसके कुछ घटक कथन या सभी घटक कथन असत्य हों।)

उदाहरण 6 निम्नलिखित मिश्र कथन के घटक कथन लिखिए और जाँचिए कि मिश्र कथन सत्य है अथवा असत्य है।

(i) एक रेखा सीधी होती है और दोनों दिशाओं में अनंत तक विस्तृत होती है।

(ii) 0 प्रत्येक धन पूर्णांक और प्रत्येक ऋण पूर्णांक से कम होता है।

(iii) प्रत्येक सजीव के दो पैर और दो आँखें होती हैं।

हल (i) घटक कथन निम्नलिखित हैं,

p: एक रेखा सीधी होती हैं।'

q: एक रेखा दोनों दिशाओं में अनंत तक विस्तृत होती है।

उपरोक्त दोनों कथन सत्य हैं और इसलिए मिश्र कथन भी सत्य है।

(ii) यहाँ घटक कथन इस प्रकार हैं,

p: 0 प्रत्येक धन पूर्णांक से कम होता है।

q: 0 प्रत्येक ऋण पूर्णांक से कम होता है।

इनमें से दूसरा कथन असत्य है। अत: मिश्र कथन भी असत्य है।

(iii) अभीष्ट घटक कथन नीचे लिखे हैं,

'प्रत्येक सजीव के दो पैर होते हैं।'

'प्रत्येक सजीव की दो आँखें होती हैं।'

ये दोनों ही कथन असत्य हैं। अत: मिश्र कथन भी असत्य है।

अब निम्नलिखित कथन पर विचार कीजिए:

p: ऐलकोहॉल और पानी के मिश्रण को रासायनिक विधियों द्वारा अलग-अलग किया जा सकता है।'

इस कथन को शब्द "और" से प्रयुक्त मिश्र कथन नहीं माना जा सकता है। यहाँ पर शब्द "और" दो वस्तुओं, ऐलकोहॉल तथा पानी का उल्लेख करता है।

इससे हम एक महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकालते हैं जो नीचे लिखी टिप्पणी में दिया है:

टिप्पणी यह नहीं समझना चाहिए कि शब्द 'और' से प्रयुक्त वाक्य सदैव एक मिश्र कथन होता है जैसा कि उपरोक्त उदाहरण में स्पष्ट किया गया है। यहाँ पर शब्द 'और', दो वाक्यों के संयोजन के लिए प्रयुक्त नहीं है।

14.4.2 *शब्द 'या' से प्रयुक्त वाक्य (The word 'Or')* नीचे लिखे कथन पर विचार कीजिए।

p: एक समतल पर स्थित दो रेखाएँ या तो एक दूसरे को एक बिंदु पर काटती हैं या वे समांतर होती हैं।

हमें ज्ञात है कि यह एक सत्य कथन है। इसका क्या अर्थ है? इसका अर्थ यह है कि एक समतल पर स्थित दो रेखाएँ यदि एक दूसरे को काटती हैं, तो वे समांतर नहीं हैं। इसके विपरीत यदि ऐसी दोनों रेखाएँ समांतर नहीं हैं, तो वे एक दूसरे को एक बिंदु पर काटती है', अर्थात् यह कथन दोनों ही स्थितियों में सत्य है।

शब्द 'या' से प्रयुक्त कथन समझने के लिए हम पहले यह देखते हैं कि अंग्रेज़ी भाषा में 'या' का प्रयोग दो प्रकार से किया जाता है।

पहले हम निम्नलिखित कथन पर विचार करेंगे:

'किसी आहार गृह (रेस्तराँ) में एक 'थाली' के साथ आइसक्रीम या पेप्सी भी उपलब्ध की जाती है।'

इसका अर्थ यह हुआ कि एक व्यक्ति जो आइसक्रीम नहीं चाहता वह 'थाली' के साथ पेप्सी ले सकता है अन्यथा वह 'थाली' के साथ आइसक्रीम ले सकता है। अर्थात् यदि जो पेप्सी नहीं चाहते वे आइसक्रीम ले सकते हैं। किंतु एक व्यक्ति दोनों वस्तुएँ अर्थात् आइसक्रीम और पेप्सी नहीं ले सकता। यह **'अपवर्जित' 'या'** कहलाता है। यहाँ एक अन्य कथन पर विचार कीजिए।

'एक विद्यार्थी, जिसने जीवविज्ञान या रसायन विज्ञान विषयों का चयन किया है वह सूक्ष्म जीवविज्ञान के स्नाकोत्तर पाठ्यक्रम में प्रवेश के लिए आवेदन कर सकता है।'

यहाँ पर हम यह मानते हैं कि वे विद्यार्थी जिन्होंने जीवविज्ञान और रसायन विज्ञान दोनों ही विषयों का चयन किया है। वे सूक्ष्म जीवविज्ञान पाठ्यक्रम में प्रवेश ले सकते हैं, साथ ही साथ वे विद्यार्थी जिन्होंने इन विषयों में से केवल एक विषय का चयन किया है वे भी इस पाठ्यक्रम में प्रवेश ले सकते हैं। इस स्थिति में हम **अंतर्विष्ट 'या'** का प्रयोग कर रहे हैं।

उपरोक्त दो प्रयोगों का अंतर जान लेना महत्वपूर्ण है क्योंकि हम इसकी आवश्यकता उस समय जब हम यह जाँचेंगे कि कोई कथन सत्य है अथवा नहीं।

आइए हम एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 7 निम्नलिखित प्रत्येक कथन में ज्ञात कीजिए क्या 'अंतर्विष्ट' 'या' अथवा 'अपवर्जित' 'या' का प्रयोग किया गया है। अपना उत्तर कारण सहित बतलाइए।

(i) किसी देश में प्रवेश करने के लिए आपको पासपोर्ट या मतदाता पहचानपत्र की आवश्यकता पड़ती है।

(ii) अवकाश या रविवार के दिन विद्यालय बंद रहता है।

(iii) दो रेखाएँ एक दूसरे को एक बिंदु पर काटती हैं या समांतर होती हैं।

(iv) तृतीय भाषा के रूप में कोई विद्यार्थी फ्रेंच (फ्रांसीसी) भाषा या संस्कृत भाषा का चयन कर सकता है।

हल (i) यहाँ पर 'या' अंतर्विष्ट है, क्योंकि किसी देश में प्रवेश करने के लिए एक व्यक्ति के पास पासपोर्ट और मतदाता पहचान पत्र दोनों ही हो सकते हैं।

(ii) यहाँ पर भी 'या' अंतर्विष्ट है, क्योंकि विद्यालय अवकाश के दिन और साथ ही साथ रविवार को बंद रहता है।

(iii) यहाँ पर 'या' अपवर्जित है क्योंकि कि दोनों रेखाओं के लिए यह संभव नहीं है कि वे एक दूसरे को काटें और साथ ही साथ समांतर भी हों।

(iv) यहाँ भी 'या' अपवर्जित है क्योंकि कोई विद्यार्थी तृतीय भाषा के रूप में फ्रेंच और संस्कृत दोनों नहीं ले सकता है।

उपरोक्त उदाहरण के सूक्ष्म निरीक्षण से निम्नलिखित नियम प्राप्त होता है।

संयोजक "या" प्रयुक्त मिश्र कथन के लिए नियम

1. अंतर्विष्ट 'या' प्रयुक्त मिश्र कथन सत्य होता है।, जब उसका कोई एक घटक कथन सत्य हो' या उसके दोनों ही घटक कथन सत्य हों।
2. अंतर्विष्ट 'या' प्रयुक्त मिश्र कथन असत्य होता है, जब उसके दोनों ही घटक कथन असत्य होते हैं।

उदाहरण के लिए नीचे लिखे कथन पर विचार कीजिए, 'दो रेखाएँ एक दूसरे को एक बिंदु पर काटती हैं या वे समांतर हैं:

इसके घटक कथन निम्नलिखित हैं:

p : दो रेखाएँ एक दूसरे को एक बिंदु पर काटती हैं।

q : वे (दो रेखाएँ) समांतर हैं।

यहाँ यदि p सत्य हैं तो q असत्य है और यदि p असत्य है तो q सत्य है। अत: मिश्र कथन सत्य है।

एक अन्य कथन पर विचार कीजिए।

'संख्या 125, संख्या 7 या संख्या 8 का गुणज है।'

इसके घटक कथन इस प्रकार हैं,

p : संख्या 125, संख्या 7 का गुणज है।

q : संख्या 125, संख्या 8 का गुणज है।

यहाँ p और q दोनों ही असत्य हैं। अत: मिश्र कथन भी असत्य है।

एक और कथन पर विचार कीजिए जो नीचे दिया है,

'विद्यालय बंद है, यदि आज अवकाश का दिन है या रविवार है।'

इसके घटक कथन नीचे दिए हैं,

p : विद्यालय बंद है, यदि आज अवकाश का दिन है।

q : विद्यालय बंद है, यदि आज रविवार है।

p और q दोनों ही सत्य हैं। अत: मिश्र कथन सत्य है।

एक और कथन पर विचार कीजिए,

'मुंबई कोलकाता या कर्नाटक की राजधानी है।'

इसके घटक नीचे लिखे हैं,

p : मुंबई, कोलकाता की राजधानी है।

q : मुंबई, कर्नाटक की राजधानी है।

उपरोक्त दोनों ही कथन असत्य हैं। अत: मिश्र कथन भी असत्य है।

आइए अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें:

उदाहरण 8 निम्नलिखित कथनों में पहचानिए कि किस प्रकार के 'या' का प्रयोग किया गया है और जाँचिए कि कथन सत्य है अथवा असत्य है।

(i) $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है या अपरिमेय संख्या है।

(ii) किसी सार्वजनिक पुस्तकालय में प्रवेश हेतु बच्चों को विद्यालय द्वारा प्रदत्त पहचान पत्र या विद्यालय अधिकारियों द्वारा लिखित पत्र की आवश्यकता पड़ती है।

(iii) आयत एक चतुर्भुज या एक पाँच भुजीय बहुभुज होता है।

हल (i) घटक कथन नीचे दिए हैं।

p : $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

q : $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

यहाँ हमें ज्ञात है कि प्रथम कथन असत्य है और द्वितीय कथन सत्य है और इस प्रकार 'या' अपवर्जित है।

(ii) घटक कथन निम्नलिखित हैं

p : किसी सार्वजनिक पुस्तकालय में प्रवेश हेतु बच्चों को विद्यालय द्वारा प्रदत्त पहचान पत्र की आवश्यकता पड़ती है।

q : किसी सार्वजनिक पुस्तकालय में प्रवेश हेतु बच्चों को विद्यालय अधिकारियों द्वारा लिखित पत्र की आवश्यकता पड़ती है।

यहाँ पुस्तकालय में प्रवेश के लिए बच्चों के पास या तो पहचान पत्र होना चाहिए अथवा विद्यालय के अधिकारियों द्वारा लिखित पत्र होना चाहिए अथवा दोनों की प्रलेख (कागज़ात) हो सकते हैं। अत: यहाँ पर 'या' अंतर्विष्ट है।

(iii) यहाँ 'या' अपवर्जित है। घटक कथनों के आधार पर यह कथन सत्य है।

14.4.3 *परिमाणवाचक वाक्यांश (सूक्ति) (Quantifiers Phrases)* "एक ऐसे का अस्तित्व है" और "सभी के लिए/प्रत्येक के लिए" इन दोनों विशेष वाक्यांशों को 'परिमाणवाचक वाक्यांश कहते है।

गणितीय कथन में बहुधा आने वाले वाक्यांशों में एक वाक्यांश 'एक ऐसे का अस्तित्व है' है। उदाहरण के लिए कथन 'एक ऐसे आयत का अस्तित्व है जिसकी भुजाएँ समान लंबाई की हैं।' पर विचार कीजिए। इस कथन का तात्पर्य है कि कम से कम एक ऐसा आयत है जिसकी सभी भुजाओं की लंबाई समान है।

वाक्यांश 'एक ऐसे का अस्तित्व' से निकटस्थ वाक्यांश 'प्रत्येक के लिए (या सभी कि लिए)' है।

आइए इस प्रकार के एक कथन पर विचार करें,

'प्रत्येक अभाज्य संख्या p के लिए, $\sqrt{p}$ एक अपरिमेय संख्या है।'

इसका अर्थ हुआ कि यदि S अभाज्य संख्याओं का समुच्चय है, तो समुच्चय S के सभी अवयव p के लिए, $\sqrt{p}$ एक अपरिमेय संख्या है।

व्यापक रूप से किसी गणतीय कथन में 'प्रत्येक के लिए' वाक्यांश के प्रयोग से यह अर्थ होता है कि यदि किसी समुच्चय में कोई विशेषता है तो उस समुच्चय के सभी अवयवों में वह विशेषता होनी चाहिए।

हमें यह भी ध्यान देना चाहिए कि इस बात का जानना भी महत्वपूर्ण है कि किसी वाक्य में संयोजक को ठीक-ठीक किस स्थान पर लिखना चाहिए। उदाहरण के लिए निम्नलिखित दो वाक्यों की तुलना कीजिए:

1. प्रत्येक धन पूर्णांक x के लिए एक ऐसे धन पूर्णांक y का अस्तित्व है कि $y < x$
2. एक धन पूर्णांक y का ऐसा अस्तित्व है कि प्रत्येक धन पूर्णांक x के लिए $y < x$.

यद्यपि ऐसा प्रतीत होता है कि दोनों वाक्यों का एक ही अर्थ है किंतु ऐसा नहीं है। वास्तविकता तो यह है। कि कथन (1) सत्य है जबकि (2) असत्य है। किसी गणितीय वाक्य (कथन) के अर्थपूर्ण होने के लिए प्रतीकों (वाक्याशों, संयोजकों) का सही स्थान पर ठीक-ठीक प्रयोग किया जाना आवश्यक है।

शब्द "और" तथा 'या' संयोजक कहलाते है तथा "एक ऐसा का अस्तित्व है" और "प्रत्येक के लिए" को **परिमाणवाचक वाक्यांश** कहते हैं।

इस प्रकार हमने देखा कि अनेकों गणितीय कथनों में कुछ विशिष्ट शब्दों/वाक्यांशों का प्रयोग होता है जिनके अर्थ को समझना महत्वपूर्ण है, विशेष रूप से जब हमें विभिन्न कथनों की वैधता की जाँच करनी है।

प्रश्नावली 14.3

1. निम्नलिखित मिश्र कथनों में पहले संयोजक शब्दों को पहचानिए और फिर उनको घटक कथनों में विघटित कीजिए:
   (i) सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं और सभी वास्तविक संख्याएँ सम्मिश्र संख्याएँ नहीं होती हैं।
   (ii) किसी पूर्णांक का वर्ग धन या ऋण होता है।
   (iii) रेत (बालू) धूप में शीघ्र गर्म हो जाती है और रात्रि में शीघ्र ठंडी नहीं होती है।
   (iv) $x = 2$ और $x = 3$, समीकरण $3x^2 - x - 10 = 0$ के मूल हैं।

2. निम्नलिखित कथनों में परिमाणवाचक वाक्यांश पहचानिए और कथनों के निषेधन लिखिए:

(i) एक ऐसी संख्या का अस्तित्व है, जो अपने वर्ग के बराबर है।

(ii) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए, x, $(x + 1)$ से कम होता है।

(iii) भारत के हर एक राज्य/प्रदेश के लिए एक राजधानी का अस्तित्व है।

3. जाँचिए कि क्या नीचे लिखे कथनों के जोड़े (युग्म) एक-दूसरे के निषेधन हैं। अपने उत्तर के लिए कारण भी बतलाइए:

(i) प्रत्येक वास्तविक संख्याओं x और y के लिए $x + y = y + x$ सत्य है।

(ii) ऐसी वास्तविक संख्याओं x और y का अस्तित्व है जिनके लिए $x + y = y + x$ सत्य है।

4. बतलाइए कि निम्नलिखित कथनों में प्रयुक्त 'या' 'अपवर्जित' है अथवा 'अंतर्विष्ट' है। अपने उत्तर के लिए कारण भी बतलाइए:

(i) सूर्य उदय होता है या चंद्रमा अस्त होता है।

(ii) ड्राइविंग लाइसेंस के आवेदन हेतु आपके पास राशन कार्ड या पासपोर्ट होना चाहिए।

(iii) सभी पूर्णांक धन या ऋण होते हैं।

14.5 अंतर्भाव/सप्रतिबंध कथन (Implications/Conditional Statements)

इस अनुच्छेद हम अंतर्भाव "यदि-तो", "केवल यदि" और "यदि और केवल यदि" पर विचार-विमर्श करेंगे।

"यदि-तो" से युक्त कथनों का प्रयोग बहुत सामान्य है। उदाहरण के लिए नीचे लिखे कथन पर विचार कीजिए

r: यदि आपका जन्म किसी देश में हुआ है, तो आप उस देश के नागरिक हैं। हम देखते हैं कि यह निम्नलिखित दो कथनों p और q के सदृश है,

p : आपका जन्म किसी देश में हुआ है।

q : आप उस देश के नागरिक हैं।

तब कथन "यदि p तो q" यह बतलाता है कि उस दशा में जब p सत्य हो, तो q अनिवार्य रूप से सत्य होगा।

कथन 'यदि p तो q' से संबंधित एक सबसे महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि यदि p असत्य है तो यह q के बारे में कुछ नहीं कहता। उदाहरणार्थ उपरोक्त कथन में यदि आपका जन्म किसी देश में नहीं हुआ है तो आप q के संबंध में कुछ नहीं कह सकते हैं। दूसरे शब्दों में p के घटित नहीं होने का q के घटित होने पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

कथन "यदि p, तो q" के बारे में एक अन्य तथ्य भी नोट कीजिए कि इस कथन में यह अंतर्निहित नहीं है कि p घटित होता है।

कथन "यदि p, तो q" को समझने के अनेक तरीके हैं। हम इन तरीकों को निम्नलिखित कथन के माध्यम से स्पष्ट करेंगे।

यदि कोई संख्या 9 की गुणज है, तो वह 3 की भी गुणज है।

मान लीजिए कि p और q निम्नलिखित कथनों को प्रगट करते हैं,

p : कोई संख्या 9 की गुणज है।

q : वह संख्या 3 की भी गुणज है।

इस प्रकार कथन 'यदि p, तो q' निम्नलिखित कथनों के समान है:

1. 'p अंतर्भाव q' को $p \Rightarrow q$ से प्रकट किया जाता है। प्रतीक '$\Rightarrow$' अंतर्भाव (सप्रतिबंध कथन) के लिए प्रयोग किया जाता है। इसका अर्थ यह कि कथन 'कोई संख्या 9 की गुणज है' में यह कथन अंतर्निहित है कि 'वह संख्या 3 की भी गुणज है'।
2. 'p पर्याप्त प्रतिबंध है q के लिए'। इसका अर्थ हुआ कि यह ज्ञात होना कि संख्या 9 की गुणज है, पर्याप्त है यह निष्कर्ष निकालने के लिए कि वह संख्या 3 की भी गुणज है।
3. 'p केवल यदि q'
   इसका अर्थ हुआ कि कोई संख्या 9 की गुणज है, केवल यदि वह संख्या 3 की भी गुणज है।

4. 'q अनिवार्य प्रतिबंध है p के लिए।'

 इसका अर्थ हुआ कि जब कोई संख्या 9 की गुणज है, तो वह संख्या अनिवार्य रूप से 3 की भी गुणज है।

5. '$\sim q$ अंतर्भाव $\sim p$'

इसका अर्थ हुआ कि यदि कोई संख्या 3 की गुणज नहीं है, तो वह संख्या 9 की भी गुणज नहीं है।

14.5.1 *प्रतिधनात्मक और विलोम (Contrapositive and Converse)* प्रतिधनात्मक और विलोम निश्चित रूप से कुछ अन्य कथन हैं, जिन्हें वाक्यांश 'यदि-तो' से प्रयुक्त कथन से (द्वारा) रचित किया जा सकता है।

उदाहरणार्थ नीचे दिए वाक्यांश 'यदि-तो' वाले कथन पर विचार कीजिए,

यदि भौतिक वातावरण में परिवर्तन होता है तब जैविक वातावरण परिवर्तित हो जाता है।

इस कथन का प्रतिधनात्मक कथन

''यदि जैविक वातावरण में परिवर्तन नहीं होता है तब भौतिक वातावरण परिवर्तित नहीं होता है।''

नोट कीजिए कि ये दोनों कथन एक ही (समान) अर्थ व्यक्त करते हैं।

इस बात को समझने के लिए आइए कुछ और उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 9 निम्नलिखित कथनों के प्रतिधनात्मक कथन लिखिए:

(i) यदि एक संख्या 9 से भाज्य है, तो वह 3 से भी भाज्य है।

(ii) यदि आप भारत में जन्मे हैं, तो आप भारत के एक नागरिक हैं।

(iii) यदि एक त्रिभुज समबाहु है, तो समद्विबाहु भी है।

हल उपरोक्त तीन कथनों के प्रतिधनात्मक कथन इस प्रकार है,

(i) यदि एक संख्या 3 से भाज्य नहीं है, तो वह 9 से भी भाज्य नहीं है।

(ii) यदि आप भारत के नागरिक नहीं हैं, तो आप भारत में नहीं जन्मे हैं।

(iii) यदि एक त्रिभुज समद्विबाहु नहीं है, तो वह समबाहु भी नहीं है।

उपरोक्त उदाहरण दर्शाते हैं कि कथन 'यदि p, तो q' का प्रतिधनात्मक कथन 'यदि q-नहीं, तो p-नहीं' अर्थात् 'यदि $\sim q$, तो $\sim p$' है। इसके बाद हम 'विलोम' कहलाने वाले एक और पद पर विचार करेंगे।

दिए हुए कथन 'यदि p, तो q' का विलोम कथन, यदि q तब p है।

उदाहरण के लिए कथन p'यदि एक संख्या 10 से भाज्य है तो वह (संख्या) 5 से भी भाज्य है।' का विलोम कथन q' यदि एक संख्या 5 से भाज्य है, तो वह (संख्या) 10 से भी भाज्य है।'

उदाहरण 10 निम्नलिखित कथनों के विलोम लिखिए:

(i) यदि एक संख्या n सम है, तो n^2 भी सम है।

(ii) यदि आप सभी प्रश्नों को पुस्तिका में हल करें, तो आपको कक्षा में A-ग्रेड मिलेगा।

(iii) यदि दो पूर्णांक a और b इस प्रकार हैं कि $a > b$, तो $(a - b)$ सदैव एक धन पूर्णांक है।

हल इन कथनों के विलोम नीचे लिखे हैं,

(i) यदि संख्या n^2 सम है, तो n भी सम है।

(ii) यदि आपको कक्षा में A-ग्रेड मिला है, तो आपने सभी प्रश्नों को पुस्तिका में हल किया है।

(iii) यदि दो पूर्णांक a और b इस प्रकार हैं कि $(a - b)$ सदैव एक धन पूर्णांक है, तो $a > b$. आइए कुछ और उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 11 निम्नलिखित मिश्र कथनों में से प्रत्येक के लिए पहले संगत घटक कथनों को पहचानिए और फिर जाँचिए कि क्या कथन सत्य है अथवा नहीं।

(i) यदि त्रिभुज ABC समबाहु है, तो वह (त्रिभुज) समद्विबाहु है।

(ii) यदि a और b पूर्णांक हैं, तो ab एक परिमेय संख्या है।

हल (i) घटक कथन नीचे लिखें हैं,

p : त्रिभुज ABC समबाहु है।

q : त्रिभुज समद्विबाहु है।

क्योंकि एक समबाहु त्रिभुज समद्विबाहु भी होता है, अत: दिया हुआ कथन सत्य है।

(ii) यहाँ घटक कथन इस प्रकार है,

p : a और b पूर्णांक हैं।

q : ab एक परिमेय संख्या है।

क्योंकि दो पूर्णांकों का गुणनफल एक पूर्णांक होता है और इसलिए एक परिमेय संख्या भी होता है, अत: मिश्र कथन सत्य है।

वाक्यांश 'यदि और केवल यदि', प्रतीक $\Leftrightarrow$ द्वारा प्रकट किया जाता है और दिए हुए कथन p और q के लिए इसके निम्नलिखित समतुल्य रूप हैं।

(i) 'p यदि और केवल यदि q'

(ii) 'q यदि और केवल यदि p'

(iii) 'p अनिवार्य और पर्याप्त प्रतिबंध है q के लिए' और इसका विलोम (उलटा)

(iv) $p \Leftrightarrow q$

यहाँ निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करते हैं।

उदाहरण 12 नीचे दो कथन युग्म दिए हैं। प्रत्येक कथन युग्म वाक्यांश 'यदि और केवल यदि' के प्रयोग द्वारा सम्मिलित कीजिए।

(i) p: यदि कोई आयत एक वर्ग है, तो उसकी चारों भुजाएँ बराबर लंबाई की हैं।

यदि किसी आयत की चारों भुजाएँ बराबर लंबाई की है, तो आयत एक वर्ग है।

(ii) q: यदि किसी संख्या के अंकों का योगफल 3 से भाज्य है, तो वह संख्या भी 3 से भाज्य है।

q: यदि एक संख्या 3 से भाज्य है, तो उस संख्या के अंकों का योगफल भी 3 से भाज्य है।

हल (i) कोई आयत एक वर्ग है यदि और केवल यदि उसकी चारों भुजाओं की लंबाई बराबर है।

(ii) एक संख्या 3 से भाज्य है यदि और केवल यदि उस संख्या के अंकों का योगफल 3 से भाज्य है।

प्रश्नावली 14.4

1. निम्नलिखित कथन को वाक्यांश 'यदि-तो' का प्रयोग करते हुए पाँच विभिन्न रूप में इस प्रकार लिखिए कि उनके अर्थ समान हों।

यदि एक प्राकृत संख्या विषम है तो उसका वर्ग भी विषम है।

2. निम्नलिखित कथनों के प्रतिधनात्मक और विलोम कथन लिखिए:

(i) यदि x एक अभाज्य संख्या है, तो x विषम है।

(ii) यदि दो रेखाएँ समांतर हैं, तो वे एक दूसरे को एक समतल में नहीं काटती हैं।

(iii) किसी वस्तु के ठंडे होने का तात्पर्य (अंतर्भाव) है कि उसका तापक्रम कम है।

(iv) आप ज्यामिति विषय को आत्मसात नहीं कर सकते यदि आपको यह ज्ञान नहीं है कि निगमनात्मक विवेचन किस प्रकार किया जाता है।

(v) x एक सम संख्या है से तात्पर्य (अंतर्भाव) है कि x संख्या 4 से भाज्य है।

3. निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक को 'यदि-तो' रूप में लिखिए:

(i) आपको नौकरी (काम) मिलने का तात्पर्य (अंतर्भाव) है कि आपकी विश्वसनियता अच्छी है।

(ii) केले का पेड़ फूलेगा यदि वह एक माह तक गरम बना रहे।

(iii) एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज है यदि उसके विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करें।

(iv) कक्षा में A ग्रेड पाने के लिए यह अनिवार्य है कि आप पुस्तक के सभी प्रश्नों को सरल कर लेते हैं।

4. नीचे (*a*) और (*b*) में प्रदत्त कथनों में से प्रत्येक के (i) में दिए कथन का प्रतिधनात्मक और विलोम कथन पहचानिए।

(*a*) यदि आप दिल्ली में रहते हैं तो आपके पास जाड़े के कपड़े हैं।

(i) यदि आपके पास जाड़े के कपड़े नहीं हैं, तो आप दिल्ली में नहीं रहते हैं।

(ii) यदि आपके पास जाड़े के कपड़े हैं, तो आप दिल्ली में रहते हैं।

(*b*) यदि एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज है, तो उसके विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

(i) यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित नहीं करते हैं, तो चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज नहीं हैं।

(ii) यदि चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं तो वह समांतर चतुर्भुज है।

14.6 कथनों की वैधता को प्रमाणित (सत्यापित) करना (Validating Statements)

इस अनुच्छेद में हम इस बात पर विचार करेंगे कि एक कथन किन स्थितियों में सत्य होता है। उपरोक्त प्रश्न का उत्तर जानने के लिए हमें निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर जानना आवश्यक है।

प्रदत्त कथन का अर्थ क्या हैं? यह कहने का क्या अर्थ है कि कब कथन सत्य है और कब असत्य है?

ऊपर लिखे प्रश्नों के उत्तर इस बात पर निर्भर करते हैं कि प्रदत्त कथन में "और" तथा 'या' में से संयोजक शब्द का अथवा "यदि और केवल यदि" तथा "यदि-तो" में से किस प्रतिबंध का अथवा "प्रत्येक के लिए" तथा "एक ऐसा का अस्तित्व है" में से किस परिमाणवाचक वाक्यांश का प्रयोग किया गया है।

यहाँ पर इन किसी कथन की वैधता ज्ञात करने के लिए कुछ प्रक्रियाओं पर विचार करेंगे।

अब हम यह जाँचने के लिए कि कोई कथन सत्य है या नहीं, कुछ सामान्य नियमों की सूची बनाते हैं।

नियम 1 यदि p तथा q गणितीय कथन हैं, तो यह सिद्ध करने के लिए कि कथन "p और q" सत्य है, हम निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करते हैं।

चरण 1 दर्शाइए कि कथन p सत्य है

चरण 2 दर्शाइए कि कथन q सत्य है

नियम 2 **'संयोजक 'या' से प्रयुक्त कथन'**

यदि p तथा q गणितीय कथन हैं, तो कथन "p या q" को सत्य सिद्ध करने के लिए हम निम्नलिखित स्थितियों में से किसी एक को सत्य प्रमाणित करते हैं।

स्थिति 1 यह मानते हुए कि p असत्य है, q को अनिवार्यत: सत्य प्रमाणित कीजिए।

स्थिति 2 यह मानते हुए कि q असत्य है, p को अनिवार्यत: सत्य प्रमाणित कीजिए।

नियम 3 **वाक्यांश ''यदि-तो'' से प्रयुक्त कथन**

कथन 'यदि p, तो q' को सत्य सिद्ध करने के लिए हम निम्नलिखित स्थितियों में से किसी एक को सत्य प्रमाणित करते हैं।

स्थिति 1 यह मानते हुए कि p सत्य है, q को अनिवार्यत: सत्य प्रमाणित कीजिए (प्रत्यक्ष विधि)।

स्थिति 2 यह मानते हुए कि q असत्य है, p को भी अनिवार्यत: असत्य प्रमाणित कीजिए (प्रतिधनात्मक विधि)।

नियम 4 वाक्यांश (प्रतिबंध) "यदि और केवल यदि" से प्रयुक्त कथन

कथन "p, यदि और केवल यदि q" को सत्य सिद्ध करने के लिए हमें यह प्रमाणित करने की आवश्यकता है कि,

(i) यदि p सत्य है तो q सत्य है और (ii) यदि q सत्य है, तो p सत्य है।

आइए हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें:

उदाहरण 13 जाँचिए कि नीचे दिया गया कथन सत्य हैं अथवा नहीं।

यदि $x, y \in \mathbf{Z}$ इस प्रकार हैं कि x तथा y विषम हैं, तो xy भी विषम है।

हल यहाँ $p : x, y \in$ Z, इस प्रकार हैं कि x तथा y विषम हैं।

$q : xy$ विषम हैं।

प्रदत्त कथन की वैधता को जाँचने के लिए हम नियम 3 की स्थिति 1 का प्रयोग करते हैं अर्थात् यह मानते हुए कि p सत्य है हम q को अनिवार्यत: सत्य प्रमाणित करते हैं।

p सत्य है अर्थात् x तथा y विषम पूर्णांक हैं। अत:

$x = 2m + 1$ किसी पूर्णांक m के लिए।

$y = 2m + 1$ किसी पूर्णांक n के लिए।

अत:

$$xy = (2m + 1)(2n + 1)$$
$$= 2(2mn + m + n) + 1$$

इससे स्पष्ट है कि xy भी विषम है। इसलिए प्रदत्त कथन सत्य है।

मान लीजिए कि हम नियम 3 की स्थिति 2 के प्रयोग द्वारा जाँच करना चाहते हैं, तो हमें, निम्नलिखित विधि का प्रयोग करना चाहिए।

हम मानते हैं कि q सत्य नहीं है। इसका तात्पर्य है कि हमें कथन q के निषेधन पर विचार करना चाहिए। इस प्रकार निम्नलिखित कथन प्राप्त होता है,

$\sim q$: गुणनफल $x\,y$ सम है।

यह केवल तभी संभव है जब x अथवा y सम हों जिससे यह प्रमाणित होता है कि p सत्य नहीं है। अत: हमने यह दर्शा दिया कि

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

टिप्पणी उपरोक्त उदाहरण यह स्पष्ट करता है कि कथन $p \Rightarrow q$ को सिद्ध करने के लिए कथन $\sim q \Rightarrow \sim p$ सिद्ध कर देना पर्याप्त है, जो कि प्रदत्त कथन का प्रतिधनात्मक कथन है।

उदाहरण 14 निम्नलिखित कथन के प्रतिधनात्मक कथन का जाँच कर यह ज्ञात कीजिए कि प्रदत्त कथन सत्य है अथवा असत्य है;

'यदि $x, y \in$ Z इस प्रकार कि xy विषम हैं, तो x तथा y भी विषम है।'

हल आइए हम कथनों को नीचे दिए नाम से संबोधित करें,

$p : x\,y$ विषम हैं।

$q : x$ तथा y दोनों ही विषम हैं।

हमें प्रतिधनात्मक कथन $\sim q \Rightarrow \sim p$ को जाँच कर ज्ञात करना है कि कथन $p \Rightarrow q$ सत्य है अथवा नहीं।

अब, $\sim q =$ यह असत्य है कि x तथा y दोनों विषम है।
इसका अर्थ यही हुआ कि x (अथवा y) सम है।
तो, $x = 2n$ जहाँ n एक पूर्णांक है।
अतः $xy = 2ny$, यह दर्शाता है कि xy सम है। अर्थात् $\sim p$ सत्य है।
इस प्रकार हमने $\sim q \Rightarrow \sim p$ को सिद्ध कर दिया है, अतः प्रदत्त कथन सत्य है।

अब हम विचार करते हैं कि जब एक सप्रतिबंध कथन और उसके विलोम कथन को मिलाते हैं तो क्या होता है।

निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए

p : एक गिलास आधा खाली है।

q : एक गिलास आधा भरा है।

हमें ज्ञात है कि यदि पहला कथन घटित होगा तो दूसरा भी घटित होगा। इस तथ्य को निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं।

यदि एक गिलास आधा खाली है, तो वह आधा भरा है, यदि एक गिलास आधा भरा है, तो वह आधा खाली है। हम इन दोनों कथनों को मिलाते हैं और निम्नलिखित कथन प्राप्त करते हैं।

एक गिलास आधा खाली है यदि और केवल यदि यह आधा भरा है।

इसके बाद हम एक अन्य विधि पर विचार करेंगे।

14.6.1 *विरोधोक्ति द्वारा (By Contradiction)* इस विधि में यह सिद्ध करने के लिए कि कोई (प्रदत्त) कथन p सत्य है हम यह मान लेते हैं कि p सत्य नहीं है। अर्थात् $\sim p$ सत्य है। इस प्रकार हम एक ऐसे निष्कर्ष पर पहुँचते हैं जो हमारी मान्यता (पूर्वधारणा) का खंडन करता है। परिणामतः p को सत्य होना चाहिए।

नीचे सरल किए उदाहरण को देखिए:

उदाहरण 15 विरोधोक्ति द्वारा निम्नलिखित कथन को सत्यापित कीजिए,

'$\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या है।'

हल इस विधि में हम यह मान लेते हैं कि प्रदत्त कथन असत्य है। अर्थात् '$\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या नहीं है।' तात्पर्य यह हुआ कि '$\sqrt{7}$ परिमेय है।'

अतः दो ऐसे पूर्णांक a तथा b का अस्तित्व है कि $\sqrt{7} = \frac{a}{b}$, जहाँ a तथा b में कोई समापवर्तक (उभयनिष्ठ गुणनखंड) नहीं है।

उपरोक्त समीकरण का वर्ग करने पर

$7 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 7b^2 \Rightarrow$ संख्या 7, संख्या a को विभाजित करती है। इसलिए एक ऐसे पूर्णांक c का अस्तित्व है कि $a = 7c$

इस प्रकार $a^2 = 49c^2$ और $a^2 = 7b^2$

अतः $7b^2 = 49c^2 \Rightarrow b^2 = 7c^2 \Rightarrow$ संख्या 7, संख्या b को विभाजित करती है। किंतु हमें ज्ञात है कि संख्या 7, संख्या a को भी विभाजित करती है। इसका तात्पर्य हुआ कि संख्या 7, संख्याओं a तथा b का समापवर्तक है, जो हमारी मान्यता कि 'a तथा b में कोई समापर्वतक नहीं है' का खंडन है। इससे स्पष्ट होता है कि यह मान्यता कि '$\sqrt{7}$ परिमेय है' असत्य है। अतः प्रदत्त कथन कि '$\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या है' सत्य है।

इसके उपरांत हम एक और विधि पर विचार करेंगे, जिसके द्वारा हम सिद्ध कर सकते हैं कि एक प्रदत्त कथन असत्य है।

इस विधि में हम एक ऐसी दशा (स्थिति) का उदाहरण प्रस्तुत करते हैं, जिसमें प्रदत्त कथन वैध नहीं होता है। इस प्रकार के उदाहरण को ''प्रत्युदाहरण'' कहते है। यह नाम स्वयं ही संकेत करता है कि यह उदाहरण प्रदत्त कथन का खंडनकरता है।

उदाहरण 16 एक प्रत्युदाहरण द्वारा सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित कथन असत्य है,

'यदि n एक विषम पूर्णांक है, तो n एक अभाज्य संख्या है।'

हल प्रदत्त कथन 'यदि p, तो q' के रूप का है। हमें इसे असत्य सिद्ध करना है जिसके लिए हमें यह दर्शाना है कि 'यदि p, तो $\sim q$' है। इसके लिए हमें किसी एक ऐसे विषम पूर्णांक को खोजना है, जो अभाज्य नहीं हो। संख्या 9 इस प्रकार का एक विषम पूर्णांक है। अतः संख्या 9 एक प्रत्युदाहरण है और हम निष्कर्ष निकालते हैं कि प्रदत्त कथन असत्य है।

इस प्रकार हमनें कुछ विधियों पर विचार किया जिनके प्रयोग द्वारा हम यह ज्ञात करते हैं कि एक प्रदत्त कथन सत्य है अथवा नहीं।

टिप्पणी गणित में प्रत्युदाहरणों का प्रयोग किसी कथन को अस्वीकार करने के लिए किया जाता है। तथापि किसी कथन के अनुमोदन में उदाहरणों को प्रस्तुत करने से कथन की वैधता प्रमाणित नहीं होती है।

प्रश्नावली 14.5

1. सिद्ध कीजिए कि कथन यदि x एक ऐसी वास्तविक संख्या है कि $x^3 + 4x = 0$, तो $x = 0$
   (i) प्रत्यक्ष विधि द्वारा (ii) विरोधोक्ति द्वारा (iii) प्रतिधनात्मक कथन द्वारा।
2. प्रत्युदाहरण द्वारा सिद्ध कीजिए कि कथन "किसी भी ऐसी वास्तविक संख्याओं a और b के लिए, जहाँ $a^2 = b^2$, का तात्पर्य है कि $a = b$" सत्य नहीं है।
3. प्रतिधनात्मक विधि द्वारा सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य है,

   p: यदि x एक पूर्णांक है और x^2 सम है, तो x भी सम है।'
4. प्रत्युदाहरण द्वारा सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य नहीं है,
   (i) p: यदि किसी त्रिभुज के कोण समान हैं, तो त्रिभुज एक अधिक कोण त्रिभुज है।
   (ii) q: समीकरण $x^2 - 1 = 0$ के मूल 0 और 2 के बीच स्थित नहीं है।
5. निम्नलिखित कथनों में से कौन से सत्य हैं और कौन से असत्य हैं? प्रत्येक दशा में अपने उत्तर के लिए वैध कारण बतलाइए:
   (i) p: किसी वृत्त की प्रत्येक त्रिज्या वृत्त की जीवा होती है।
   (ii) q: किसी वृत्त का केंद्र वृत्त की प्रत्येक जीवा को समद्विभाजित करता है।
   (iii) r: एक वृत्त, किसी दीर्घवृत्त की एक विशेष स्थिति है।
   (iv) s: यदि x और y ऐसे पूर्णांक है कि $x > y$, तो $-x < -y$ है।
   (v) t: $\sqrt{11}$ एक परिमेय संख्या है।

विविध उदाहरण

उदाहरण 17 जाँचिए कि निम्नलिखित मिश्र कथन में प्रयुक्त 'या' अपवर्जित है अथवा अंतर्विष्ट है। अपने उत्तर को तर्क संगत (उचित) सिद्ध कीजिए:

t: जब वर्षा होती है, आप भीग जाते हैं, या जब आप नदी में होते हैं, आप भीग जाते हैं।'

तदोपरांत मिश्र कथन के घटक कथन लिखिए और उनका प्रयोग यह जाँचने के लिए कीजिए कि मिश्र कथन सत्य है अथवा नहीं।

हल प्रदत्त कथन में प्रयुक्त 'या' अंतर्विष्ट है, क्योंकि यह संभव है कि वर्षा हो रही है और आप नदी में हों।

प्रदत्त कथन के घटक कथन नीचे दिए हैं,

p : जब वर्षा होती है आप भीग जाते हैं।

q : जब आप नदी में होते हैं आप भीग जाते हैं।

यहाँ दोनों घटक कथन सत्य हैं और इसलिए मिश्र कथन भी सत्य है।

उदाहरण 18 निम्नलिखित कथनों के निषेधन लिखिए:

(i) p: प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए, $x^2 > x$

(ii) q: एक ऐसी परिमेय संख्या x का अस्तित्व है ताकि $x^2 = 2$

(iii) r: प्रत्येक पक्षी के पंख होते हैं।

(iv) s: प्रारंभिक स्तर पर प्रत्येक विद्यार्थी गणित का अध्ययन करता है।

हल मान लीजिए कि दिए गए कथन को p निरूपित किया जाता है। तब p का निषेधन ''यह असत्य है कि p सत्य है'' होगा, अर्थात् प्रतिबंध $x^2 > x$ प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए लागू नहीं होता है। इस बात को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$\sim p$: एक ऐसी वास्तविक संख्या x का अस्तित्व है ताकि $x^2 < x$ है।

(ii) मान लीजिए कि

q = एक ऐसी परिमेय संख्या x का अस्तित्व है कि $x^2 = 2$

अत: $\sim q$ = ऐसी (किसी) परिमेय संख्या x का अस्तित्व नहीं है कि $x^2 = 2$

जिसे इस प्रकार भी लिखा जा सकता है,

$\sim p$: प्रत्येक (सभी) परिमेय संख्या x के लिए $x^2 \neq 2$

(iii) प्रदत्त कथन का निषेधन नीचे लिखा है,

$\sim r$: एक ऐसे पक्षी का अस्तित्व है, जिसके पंख नहीं होते हैं।'

(iv) प्रदत्त कथन का निषेधन इस प्रकार है,

$\sim s$: एक ऐसे विद्यार्थी का अस्तित्व है जो प्रारंभिक स्तर पर गणित का अध्ययन नहीं करता है।'

उदाहरण 19 वाक्यांश ''अनिवार्य और पर्याप्त'' का प्रयोग करके निम्नलिखित कथन को पुन: लिखिए। तथा इसकी वैधता की जाँच भी कीजिए।

''पूर्णांक n विषम है यदि और केवल यदि n^2 विषम है।''

हल पूर्णांक n के विषम होने के लिए अनिवार्य और पर्याप्त प्रतिबंध है कि n^2 अनिवार्यत: विषम हो।

मान लीजिए कि p तथा q निम्नलिखित कथनों को निरूपित करते हैं,

p : पूर्णांक n विषम है।

q : n^2 विषम है।

तो 'p यदि और केवल यदि q' प्रदत्त कथन को निरूपित करता है और जिसकी वैधता जाँचने के लिए हमें यह जाँचना पड़ेगा कि क्या कथन ''यदि p, तो q'' तथा ''यदि q, तो p'' सत्य है।

स्थिति 1 'यदि p, तो q'

यदि p, तो q कथन 'यदि पूर्णांक n विषम है, तो n^2 विषम है।' को निरूपित करता है। हमें ज्ञात करना है कि क्या यह कथन सत्य है।

मान लीजिए कि n विषम है। तब $n = 2k + 1$ जहाँ k एक पूर्णांक है।

इस प्रकार $n^2 = (2k + 1)^2$

$= 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

अत: n^2 विषम है।

स्थिति 2 यदि q, तो p

कथन 'यदि n एक पूर्णांक है और n^2 विषम है, तो n विषम है।' यदि q, तो p द्वारा निरूपित होता है। हमें ज्ञात करना है कि क्या यह कथन सत्य है। इसे ज्ञात करने के लिए हम प्रतिधनात्मक विधि का प्रयोग करेंगे। (अर्थात् $\sim p \Rightarrow \sim q$)

उपरोक्त कथन का प्रतिधनात्मक कथन नीचे लिखा है,

'यदि n एक सम पूर्णांक है, तो n^2 भी एक सम पूर्णांक है।'

n एक सम पूर्णांक है इसलिए $n = 2k$, जहाँ k एक पूर्णांक है। अत: $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ निष्कर्षत: n^2 सम है।

उदाहरण 20 निम्नलिखित कथन के लिए अनिवार्य तथा पर्याप्त प्रतिबंधों को ज्ञात कीजिए।

t: यदि आप 80 km प्रति घंटा की अधिक गति से गाड़ी चलाते हैं तो आपको जुर्माना लगेगा।

हल मान लीजिए कि p और q निम्नलिखित कथनों को प्रकट करते हैं।

p: यदि आप 80 km प्रति घंटा की अधिक गति से गाड़ी चलाते हैं।

q: आपको जुर्माना होगा।

प्रतिबंध यदि p तो q दर्शाता है कि p, q के लिए पर्याप्त प्रतिबंध है। अर्थात् जुर्माना होने के लिए, 80 कि.मी. प्रति घंटा की अधिक गति से गाड़ी चलाना पर्याप्त कथन है।

यहाँ "80 km प्रतिघंटा की अधिक गति से गाड़ी चलाना" पर्याप्त प्रतिबंध है।

इसी प्रकार, यदि p तब q दर्शाता है कि q, p के लिए अनिवार्य प्रतिबंध है। अर्थात् "जब आप 80 km प्रतिघंटा की अधि क गति से गाड़ी चलाते हैं तो अनिवार्य रूप से आपको जुर्माना होगा।" यहाँ "जुर्माना होना" अनिवार्य प्रतिबंध है।

अध्याय 14 पर विविध प्रश्नावली

1. निम्नलिखित कथनों के निषेधन लिखिए:

(i) प्रत्येक धन वास्तविक संख्या x के लिए, संख्या $x - 1$ भी धन संख्या है।

(ii) सभी बिल्लियाँ खरोंचती हैं।

(iii) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए या तो $x > 1$ या $x < 1$

(iv) एक ऐसी संख्या x का अस्तित्व है कि $0 < x < 1$

2. निम्नलिखित सप्रतिबंध कथनों (अंतर्भाव) में से प्रत्येक का विलोम तथा प्रतिधनात्मक कथन लिखिए:

(i) एक धन पूर्णांक अभाज्य संख्या है केवल यदि 1 और पूर्णांक स्वयं के अतिरिक्त उसका कोई अन्य भाजक नहीं है।

(ii) मैं समुद्र तट पर जाता हूँ जब कभी धूप वाला दिन होता है।

(iii) यदि बाहर गरम है, तो आपको प्यास लगती है।

3. निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक को "यदि p, तो q" के रूप में लिखिए।

(i) सर्वर पर लाग आन करने के लिए पासवर्ड का होना आवश्यक है।

(ii) जब कभी वर्षा होती है यातायात में अवरोध उत्पन्न होता है।

(iii) आप वेबसाइट में प्रवेश कर सकते हैं केवल यदि आपने निर्धारित शुल्क का भुगतान किया हो।

4. निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक को "p यदि और केवल यदि q" के रूप में पुन: लिखिए:

(i) यदि आप दूरदर्शन (टेलीविज़न) देखते हैं, तो आपका मन मुक्त होता है तथा यदि आपका मन मुक्त है, तो आप दूरदर्शन देखते हैं।

(ii) आपके द्वारा A-ग्रेड प्राप्त करने के लिए यह अनिवार्य और पर्याप्त है कि आप गृहकार्य नियमित रूप से करते हैं।

(iii) यदि एक चतुर्भुज समान कोणिक है, तो वह एक आयत होता है तथा यदि एक चतुर्भुज आयत है, तो वह समान कोणिक होता है।

5. नीचे दो कथन दिए हैं,

p : 25 संख्या 5 का एक गुणज है।

q : 25 संख्या 8 का एक गुणज है।

उपरोक्त कथनों का संयोजक 'और' तथा 'या' द्वारा संयोजक करके मिश्र कथन लिखिए। दोनों दशाओं में प्राप्त मिश्र कथनों की वैधता जाँचिए।

6. नीचे लिखे कथनों की वैधता की जाँच उनके सामने लिखित विधि द्वारा कीजिए।

(i) p : एक अपरिमेय संख्या और एक परिमेय संख्या का योगफल अपरिमेय होता है (विरोधोक्ति विधि)।

(ii) q : यदि n एक ऐसी वास्तविक संख्या है कि $n > 3$, तो $n^2 > 9$ (विरोधोक्ति विधि)।

7. निम्नलिखित कथन को पाँच भिन्न-भिन्न तरीकों से इस प्रकार व्यक्त कीजिए कि उनके अर्थ समान हों,

q :'यदि एक त्रिभुज समान कोणिक है, तो वह एक अधिक कोण त्रिभुज है।'

सारांश

इस अध्याय में हमने निम्नलिखित बिंदुओं की व्याख्या की है:

- गणितीय रूप से स्वीकार्य कथन एक ऐसा वाक्य है जो या तो सत्य हो या असत्य हो।
- निम्नलिखित पदों की व्याख्या की है:
  - किसी कथन का निषेधन : यदि p एक कथन है तो 'p असत्य है' कथन p का निषेधन है, इसको प्रतीक $\sim p$ से प्रकट करते हैं।
  - मिश्र कथन और संगत घटक कथन:
    दो या अधिक सरल कथनों के संयोजन से बने कथन को मिश्र कथन कहते हैं। सरल कथनों को मिश्र कथन के घटक कथन कहते हैं।
  - संयोजक 'और' तथा 'या' की तथा वाक्यांश 'एक ऐसे का अस्तित्व है' तथा 'प्रत्येक के लिए' की भूमिका।
  - अंतर्भाव (प्रतिबंध) 'यदि', 'केवल यदि' तथा 'यदि और केवल यदि'
    कथन 'यदि' p तो q को निम्नलिखित तरीकों से लिखा जा सकता है,
  - p अंतर्भाव q (प्रतीक $p \Rightarrow q$ से निरूपित)
  - p पर्याप्त प्रतिबंध है q के लिए।
  - q अनिवार्य प्रतिबंध है p के लिए।
  - p केवल यदि q
  - $\sim q$ अंतर्भाव $\sim p$
  - कथन $p \Rightarrow q$ का प्रतिधनात्मक कथन $\sim q \Rightarrow \sim p$
    कथन $p \Rightarrow q$ का विलोम कथन $q \Rightarrow p$ है।
    कथन $p \Rightarrow q$ तथा इसके विलोम को संयुक्त रूप से कथन p यदि और केवल यदि q' कहते हैं।
- किसी कथन की वैधता ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित विधियों का प्रयोग करते हैं।
  (i) प्रत्यक्ष विधि
  (ii) प्रतिधनात्मक विधि
  (iii) विरोधोक्ति विधि
  (iv) प्रत्युदाहरण के प्रयोग की विधि

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

तर्कशास्त्र पर पहला शोध-प्रबन्ध Aristotle (384 ई॰ पू॰–322 ई॰पू॰) द्वारा लिखा गया था। यह शोध-प्रबन्ध निगमनात्मक विवेचन के लिए नियमों का एक संग्रह था, जिसका अभिप्राय ज्ञान की प्रत्येक शाखा के अध्ययन हेतु एक आधार प्रदान करना था। इसके बाद सत्रहवीं सदी में जर्मन गणितज्ञ G. W. Leibnitz (1646 – 1716 ई॰) ने निगमनात्मक विवेचन की प्रक्रिया को यांत्रिक बनाने के लिए तर्कशास्त्र में प्रतीकों के प्रयोग की कल्पना की थी। उन्नीसवीं सदी में अंग्रेज़ गणितज्ञ George Boole (1815–1864 ई॰) तथा *Augustus De Morgan* (1806–1871 ई॰) ने उनकी कल्पना को साकार किया और प्रतीकात्मक तर्कशास्त्र विषय की स्थापना की।

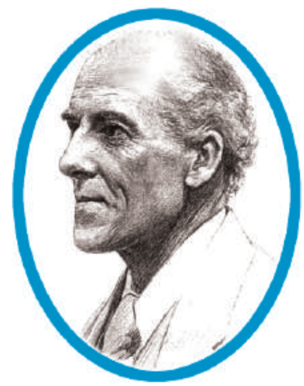
अध्याय **15**

सांख्यिकी (Statistics)

❖ *"Statistics may be rightly called the science of averages and their estimates"* – A.L.BOWLEY & A.L. BODDINGTON ❖

15.1 भूमिका (Introduction)

हम जानते हैं कि सांख्यिकी का सरोकार किसी विशेष उद्देश्य के लिए एकत्रित आँकड़ों से होता है। हम आँकड़ों का विश्लेषण एवं व्याख्या कर उनके बारे में निर्णय लेते हैं। हमने पिछली कक्षाओं में आँकड़ों को आलेखिक एवं सारणीबद्ध रूप में व्यक्त करने की विधियों का अध्ययन किया है। यह निरूपण आँकड़ों के महत्वपूर्ण गुणों एवं विशेषताओं को दर्शाता है। हमने दिए गए आँकड़ों का एक प्रतिनिधिक मान ज्ञात करने की विधियों के बारे में भी अध्ययन किया है। इस मूल्य को **केंद्रीय प्रवृत्ति की माप** कहते हैं। स्मरण कीजिए कि माध्य (समांतर माध्य), माध्यिका और बहुलक केंद्रीय प्रवृत्ति की तीन माप हैं। केंद्रीय प्रवृत्ति के माप हमें इस बात का आभास दिलाते हैं कि आँकड़े किस स्थान पर केंद्रित हैं किंतु आँकड़ों के समुचित अर्थ विवेचन के लिए हमें यह भी पता होना चाहिए कि आँकड़ों में कितना बिखराव है या वे केंद्रीय प्रवृत्ति की माप के चारों ओर किस प्रकार एकत्रित हैं।



Karl Pearson
(1857-1936 A.D.)

दो बल्लेबाजों द्वारा पिछले दस मैचों में बनाए गए रनों पर विचार करें:

बल्लेबाज A : 30, 91, 0, 64, 42, 80, 30, 5, 117, 71

बल्लेबाज B : 53, 46, 48, 50, 53, 53, 58, 60, 57, 52

स्पष्टतया आँकड़ों का माध्य व माध्यिका निम्नलिखित हैं:

	बल्लेबाज A	बल्लेबाज B
माध्य	53	53
माध्यिका	53	53

स्मरण कीजिए कि हम प्रेक्षणों का माध्य ($\bar{x}$ द्वारा निरूपित) उनके योग को उनकी संख्या से भाग देकर ज्ञात करते हैं,

अर्थात् $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

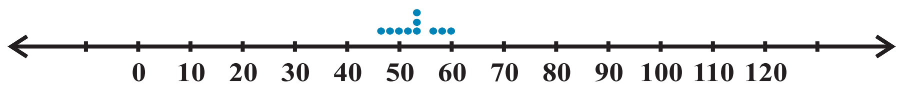
माध्यिका की गणना के लिए आँकड़ों को पहले आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है और फिर निम्नलिखित नियम लगाया जाता है:

यदि प्रेक्षणों की संख्या विषम है तो माध्यिका $\left(\frac{n+1}{2}\right)$वाँ प्रेक्षण होती है। यदि प्रेक्षणों की संख्या सम है तो माध्यिका $\left(\frac{n}{2}\right)$वें और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$वें प्रेक्षणों का माध्य होती है।

हम पाते हैं कि दोनों बल्लेबाजों A तथा B द्वारा बनाए गए रनों का माध्य व माध्यिका बराबर है अर्थात् 53 है। क्या हम कह सकते हैं कि दोनों बल्लेबाजों का प्रदर्शन समान है? स्पष्टता नहीं। क्योंकि A के रनों में परिवर्तनशीलता 0 (न्यूनतम) से 117 (अधिकतम) तक है। जबकि B के रनों का विस्तार 46 (न्यूनतम) से 60 (अधिकतम) तक है।

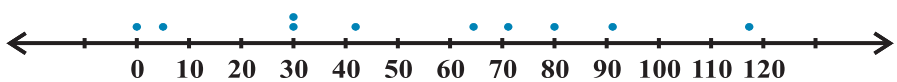
आइए अब उपर्युक्त स्कोरों को एक संख्या रेखा पर अंकित करें। हमें नीचे दर्शाई गई आकृतियाँ प्राप्त होती हैं (आकृति 15.1 और 15.2)।

बल्लेबाज A के लिए



आकृति 15.1

बल्लेबाज B के लिए



आकृति 15.2

हम देख सकते हैं कि बल्लेबाज B के संगत बिंदु एक दूसरे के पास-पास हैं और केंद्रीय प्रवृत्ति की माप (माध्य व माध्यिका) के इर्द गिर्द गुच्छित हैं जबकि बल्लेबाज A के संगत बिंदुओं में अधिक बिखराव है या वे अधिक फैले हुए हैं।

अत: दिए गए आँकड़ों के बारे में संपूर्ण सूचना देने के लिए केंद्रीय प्रवृत्ति की माप पर्याप्त नहीं हैं। परिवर्तनशीलता एक अन्य घटक है जिसका अध्ययन सांख्यिकी के अंतर्गत किया जाना चाहिए।

केंद्रीय प्रवृत्ति की माप की तरह ही हमें परिवर्तनशीलता के वर्णन के लिए एकल संख्या चाहिए। इस संख्या को '**प्रकीर्णन की माप** (Measure of dispersion)' कहा जाता है। इस अध्याय में हम प्रकीर्णन की माप के महत्व व उनकी वर्गीकृत एवं अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए गणना की विधियों के बारे में पढ़ेंगे।

15.2 प्रकीर्णन की माप (Measures of dispersion)

आँकड़ों में प्रकीर्णन या विक्षेपण का माप प्रेक्षणों व वहाँ प्रयुक्त केंद्रीय प्रवृत्ति की माप के आधार पर किया जाता है।

प्रकीर्णन के निम्नलिखित माप हैं:

(i) परिसर (Range) (ii) चतुर्थक विचलन (Quartile deviation) (iii) माध्य विचलन (Mean deviation) (iv) मानक विचलन (Standard deviation).

इस अध्याय में हम, चतुर्थक विचलन के अतिरिक्त अन्य सभी मापों का अध्ययन करेंगे।

15.3 परिसर (Range)

स्मरण कीजिए कि दो बल्लेबाजों A तथा B द्वारा बनाए गए रनों के उदाहरण में हमने स्कोरों में बिखराव, प्रत्येक शृंखला के अधिकतम एवं न्यूनतम रनों के आधार पर विचार किया था। इसमें एकल संख्या ज्ञात करने के लिए हम प्रत्येक शृंखला के अधिकतम व न्यूनतम मूल्यों में अंतर प्राप्त करते हैं। इस अंतर को **परिसर** कहा जाता है।

बल्लेबाज A के लिए परिसर $= 117 - 0 = 117$

और बल्लेबाज B, के लिए परिसर $= 60 - 46 = 14$

स्पष्टतया परिसर A > परिसर B, इसलिए A के स्कोरों में प्रकीर्णन या बिखराव अधिक है जबकि B के स्कोर एक दूसरे के अधिक पास हैं।

अत: एक श्रृंखला का परिसर = अधिकतम मान – न्यूनतम मान

आँकड़ों का परिसर हमें बिखराव या प्रकीर्णन का मोटा-मोटा (rough) ज्ञान देता है, किंतु केंद्रीय प्रवृत्ति की माप, विचरण के बारे में कुछ नहीं बताता है। इस उद्देश्य के लिए हमें प्रकीर्णन के अन्य माप की आवश्यकता है। स्पष्टतया इस प्रकार की माप प्रेक्षणों की केंद्रीय प्रवृत्ति से अंतर (या विचलन) पर आधारित होनी चाहिए।

केंद्रीय प्रवृत्ति से प्रेक्षणों के अंतर के आधार पर ज्ञात की जाने वाली प्रकीर्णन की महत्वपूर्ण माप माध्य विचलन व मानक विचलन हैं। आइए इन पर विस्तार से चर्चा करें।

15.4 माध्य विचलन (Mean deviation)

याद कीजिए कि प्रेक्षण x का स्थिर मान a से अंतर $(x-a)$ प्रेक्षण x का a से **विचलन** कहलाता है। प्रेक्षण x का केंद्रीय मूल्य 'a' से प्रकीर्णन ज्ञात करने के लिए हम a से विचलन प्राप्त करते हैं। इन विचलनों का माध्य प्रकीर्णन की निरपेक्ष माप होता है। माध्य ज्ञात करने के लिए हमें विचलनों का योग प्राप्त करना चाहिए, किंतु हम जानते हैं कि केंद्रीय प्रवृत्ति की माप प्रेक्षणों के समुच्चय की अधिकतम तथा न्यूनतम मूल्यों के मध्य स्थित होता है। इसलिए कुछ विचलन ऋणात्मक तथा कुछ धनात्मक होंगे। अत: विचलनों का योग शून्य हो सकता है। इसके अतिरिक्त माध्य $\bar{x}$ से विचलनों का योग शून्य होता है।

$$\text{साथ ही विचलनों का माध्य} = \frac{\text{विचलनों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}} = \frac{0}{n} = 0$$

अत: माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने का कोई औचित्य नहीं है।

स्मरण कीजिए कि प्रकीर्णन की उपर्युक्त माप ज्ञात करने के लिए हमें प्रत्येक मान की केंद्रीय प्रवृत्ति की माप या किसी स्थिर संख्या 'a' से दूरी ज्ञात करनी होती है। याद कीजिए कि किन्हीं दो संख्याओं के अंतर का निरपेक्ष मान उन संख्याओं द्वारा संख्या रेखा पर व्यक्त बिंदुओं के बीच की दूरी को दर्शाता है। अत: स्थिर संख्या 'a' से विचलनों के निरपेक्ष मानों का माध्य ज्ञात करते हैं। इस माध्य को **'माध्य विचलन'** कहते हैं। अत: केंद्रीय प्रवृत्ति 'a' के सापेक्ष माध्य विचलन प्रेक्षणों का 'a' से विचलनों के निरपेक्ष मानों का माध्य होता है। 'a' के सापेक्ष माध्य विचलन को M.D. (a) द्वारा प्रकट किया जाता है।

$$\text{M.D. }(a) = \frac{'a'\text{ से विचलनों के निरपेक्ष मान का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

टिप्पणी माध्य विचलन केंद्रीय प्रवृत्ति की किसी भी माप से ज्ञात किया जा सकता है। किंतु सांख्यिकीय अध्ययन में सामान्यत: माध्य और माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन का उपयोग किया जाता है।

15.4.1 *अवर्गीकृत आँकडों के लिए माध्य विचलन (Mean deviation for ungrouped data)* मान लीजिए कि n प्रेक्षणों के आँकड़े $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ दिए गए हैं। माध्य या माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन की गणना में निम्नलिखित चरण प्रयुक्त होते हैं:

चरण-1 उस केंद्रीय प्रवृत्ति की माप को ज्ञात कीजिए जिससे हमें माध्य विचलन प्राप्त करना है। मान लीजिए यह 'a' है।

चरण-2 प्रत्येक प्रेक्षण x_i का a से विचलन अर्थात् $x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a, . . . , x_n - a$ ज्ञात करें।

चरण-3 विचलनों का निरपेक्ष मान ज्ञात करें अर्थात् यदि विचलनों में ऋण चिह्न लगा है तो उसे हटा दें अर्थात्

$|x_1 - a|, |x_2 - a|, |x_3 - a|, ..., |x_n - a|$ ज्ञात करें।

चरण-4 विचलनों के निरपेक्ष मानों का माध्य ज्ञात करें। यही माध्य 'a' के सापेक्ष माध्य विचलन है। अर्थात्

$$\text{M.D.}(a) = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - a|}{n}$$

अतः $\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$, जहाँ $\bar{x}$ = माध्य

तथा $\text{M.D. (M)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \text{M}|$, जहाँ M = माध्यिका

टिप्पणी इस अध्याय में माध्यिका को चिह्न M द्वारा निरूपित किया गया है जब तक कि अन्यथा नहीं कहा गया हो। आइए अब उपर्युक्त चरणों को समझने के लिए निम्नलिखित उदाहरण लें:

उदाहरण-1 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

हल हम क्रमबद्ध आगे बढ़ते हुए निम्नलिखित प्राप्त करते हैं:

चरण 1 दिए गए आँकड़ों का माध्य

$$\bar{x} = \frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} = \frac{72}{8} = 9 \text{ है।}$$

चरण 2 प्रेक्षणों के माध्य $\bar{x}$ से क्रमशः विचलन $x_i - \bar{x}$

अर्थात् $6-9, 7-9, 10-9, 12-9, 13-9, 4-9, 8-9, 12-9$ हैं।

या $-3, -2, 1, 3, 4, -5, -1, 3$ हैं।

चरण 3 विचलनों के निरपेक्ष मान $|x_i - \bar{x}|$

$3, 2, 1, 3, 4, 5, 1, 3$ हैं।

चरण 4 माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन निम्नलिखित है:

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{8}|x_i - \bar{x}|}{8}$$

$$= \frac{3+2+1+3+4+5+1+3}{8} = \frac{22}{8} = 2.75$$

टिप्पणी प्रत्येक बार चरणों को लिखने के स्थान पर हम, चरणों का वर्णन किए बिना ही क्रमानुसार परिकलन कर सकते हैं।

उदाहरण 2 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

12, 3, 18, 17, 4, 9, 17, 19, 20, 15, 8, 17, 2, 3, 16, 11, 3, 1, 0, 5

हल हमें दिए गए आँकड़ों का माध्य ($\bar{x}$) ज्ञात करना होगा।

$$\bar{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{200}{20} = 10$$

माध्य से विचलनों के निरपेक्ष मान अर्थात् $|x_i - \bar{x}|$ इस प्रकार हैं:

2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5, 2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5

इसलिए $$\sum_{i=1}^{20} |x_i - \bar{x}| = 124$$

और $$\text{M.D.}\,(\bar{x}) = \frac{124}{20} = 6.2$$

उदाहरण 3 निम्नलिखित आँकड़ों से माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21

हल यहाँ प्रक्षेणों की संख्या 11 है जो विषम है। आँकड़ों को आरोही क्रम में लिखने पर हमें 3, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 18, 19, 21 प्राप्त होता है।

अब माध्यिका = $\left(\frac{11 + 1}{2}\right)$वाँ या 6वाँ प्रेक्षण = 9 है।

विचलनों का क्रमश: निरपेक्ष मान $|x_i - \text{M}|$ इस प्रकार से है।

6, 6, 5, 4, 2,0, 1, 3, 9, 10, 12

इसलिए $$\sum_{i=1}^{11} |x_i - \text{M}| = 58$$

तथा $$\text{M.D.}\,(\text{M}) = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} |x_i - \text{M}| = \frac{1}{11} \times 58 = 5.27$$

15.4.2 *वर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्य विचलन (Mean deviation for grouped data)*

हम जानते हैं कि आँकड़ों को दो प्रकार से वर्गीकृत किया जाता है।

(a) असतत बारंबारता बंटन (Discrete frequency distribution)

(b) सतत बारंबारता बंटन (Continuous frequency distribution)

आइए इन दोनों प्रकार के आँकड़ों के लिए माध्य विचलन ज्ञात करने की विधियों पर चर्चा करें।

(a) असतत बारंबारता बंटन मान लीजिए कि दिए गए आँकड़ों में n भिन्न प्रेक्षण $x_1, x_2, ..., x_n$ हैं जिनकी बारंबारताएँ क्रमश: $f_1, f_2, ..., f_n$ हैं। इन आँकड़ों को सारणीबद्ध रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है जिसे **असतत बारंबारता बंटन** कहते हैं:

$$x : x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ldots x_n$$
$$f : f_1 \quad f_2 \quad f_3 \ldots f_n$$

(i) माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन सर्वप्रथम हम दिए गए आँकड़ों का निम्नलिखित सूत्र द्वारा माध्य $\bar{x}$ ज्ञात करते हैं:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{\text{N}} \sum_{i=1}^{n} x_i f_i,$$

जहाँ $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ प्रेक्षणों x_i का उनकी क्रमशः बारंबारता f_i से गुणनफलों का योग प्रकट करता है। तथा $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ बारंबारताओं का योग है।

तब हम प्रेक्षणों x_i का माध्य $\bar{x}$ से विचलन ज्ञात करते हैं और उनका निरपेक्ष मान लेते हैं अर्थात सभी $i = 1, 2, ..., n$ के लिए $|x_i - \bar{x}|$ ज्ञात करते हैं।

इसके पश्चात् विचलनों के निरपेक्ष मान का माध्य ज्ञात करते हैं, जोकि माध्य के सापेक्ष वांछित माध्य विचलन है।

अतः $$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|$$

(ii) माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए हम दिए गए असतत बारंबारता बंटन की माध्यिका ज्ञात करते हैं। इसके लिए प्रेक्षणों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। इसके पश्चात् संचयी बारंबारताएँ ज्ञात की जाती हैं। तब उस प्रेक्षण का निर्धारण करते हैं जिसकी संचयी बारंबारता $\frac{N}{2}$, के समान या इससे थोड़ी अधिक है। यहाँ बारंबारताओं का योग N से दर्शाया गया है। प्रेक्षणों का यह मान आँकड़ों के मध्य स्थित होता है इसलिए यह अपेक्षित माध्यिका है। माध्यिका ज्ञात करने के बाद हम माध्यिका से विचलनों के निरपेक्ष मानों का माध्य ज्ञात करते हैं। इस प्रकार

$$\text{M.D.(M)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M|$$

उदाहरण 4 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

x_i	2	5	6	8	10	12
f_i	2	8	10	7	8	5

हल आइए दिए गए आँकड़ों की सारणी 15.1 बनाकर अन्य स्तंभ परिकलन के बाद लगाएँ

सारणी 15.1

x_i	f_i	$f_i x_i$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i \|x_i - \bar{x}\|$
2	2	4	5.5	11
5	8	40	2.5	20
6	10	60	1.5	15
8	7	56	0.5	3.5
10	8	80	2.5	20
12	5	60	4.5	22.5
	40	300		92

$$N = \sum_{i=1}^{6} f_i = 40, \quad \sum_{i=1}^{6} f_i x_i = 300, \quad \sum_{i=1}^{6} f_i |x_i - \bar{x}| = 92$$

इसलिए $$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{6} f_i x_i = \frac{1}{40} \times 300 = 7.5$$

और $$\text{M.D. } (\bar{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{6} f_i \ |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{40} \times 92 = 2.3$$

उदाहरण 5 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3

हल दिए गए आँकड़े पहले ही आरोही क्रम में हैं। इन आँकड़ों में संगत संचयी बारंबारता की एक कतार और लगाते हैं (सारणी 15.2)।

सारणी 15.2

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
$c.f.$	3	7	12	14	18	23	27	30

अब, N = 30 है जो सम संख्या है,

इसलिए माध्यिका 15वीं व 16वीं प्रेक्षणों का माध्य है। यह दोनों प्रेक्षण संचयी बारंबारता 18 में स्थित हैं जिसका संगत प्रेक्षण 13 है।

इसलिए माध्यिका $M = \dfrac{15\text{वाँ प्रेक्षण} + 16\text{वाँ प्रेक्षण}}{2} = \dfrac{13+13}{2} = 13$

अब माध्यिका से विचलनों का निरपेक्ष मान अर्थात् $|x_i - M|$ निम्नलिखित सारणी 15.3 में दर्शाए गए है

सारणी 15.3

$\|x_i - M\|$	10	7	4	1	0	2	8	9
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
$f_i \|x_i - M\|$	30	28	20	2	0	10	32	27

$$\sum_{i=1}^{8} f_i = 30 \text{ और } \sum_{i=1}^{8} f_i \ |x_i - M| = 149$$

इसलिए $$\text{M. D. (M)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{8} f_i |x_i - M|$$

$$= \frac{1}{30} \times 149 = 4.97$$

(b) सतत बारंबारता बंटन एक सतत बारंबारता बंटन वह शृंखला होती है जिसमें आँकड़ों को विभिन्न बिना अंतर वाले वर्गों में वर्गीकृत किया जाता है और उनकी क्रमशः बारंबारता लिखी जाती है।

उदाहरण के लिए 100 छात्रों द्वारा प्राप्तांकों को सतत बारंबारता बंटन में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया गया है:

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
छात्रों की संख्या	12	18	27	20	17	6

(i) माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन एक सतत बारंबारता बंटन के माध्य की गणना के समय हमने यह माना था कि प्रत्येक वर्ग (Class) की बारंबारता उसके मध्य-बिंदु पर केंद्रित होती है। यहाँ भी हम प्रत्येक वर्ग का मध्य-बिंदु लिखते हैं और असतत बारंबारता बंटन की तरह माध्य विचलन ज्ञात करते हैं।

आइए निम्नलिखित उदाहरण देखें

उदाहरण 6 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

प्राप्तांक	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
छात्रों की संख्या	2	3	8	14	8	3	2

हल दिए गए आँकड़ों से निम्न सारणी 15.4 बनाते हैं।

सारणी 15.4

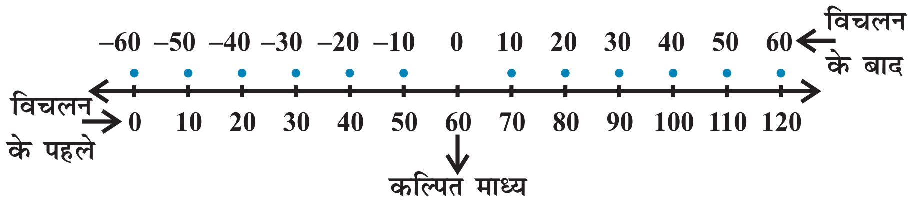
प्राप्तांक	छात्रों की संख्या f_i	मध्य-बिंदु x_i	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert$
10-20	2	15	30	30	60
20-30	3	25	75	20	60
30-40	8	35	280	10	80
40-50	14	45	630	0	0
50-60	8	55	440	10	80
60-70	3	65	195	20	60
70-80	2	75	150	30	60
	40		1800		400

यहाँ $$\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{7} f_i = 40, \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 1800, \sum_{i=1}^{7} f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert = 400$$

इसलिए $$\bar{x} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{1800}{40} = 45$$

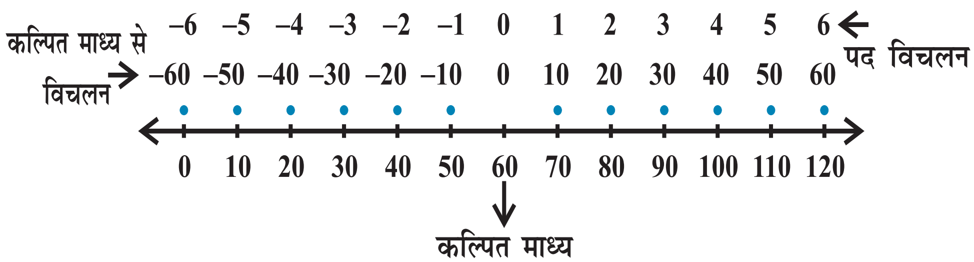
और $$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{1}{\text{N}}\sum_{i=1}^{7} f_i |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{40} \times 400 = 10$$

माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने की लघु विधि हम पद विचलन विधि (Step-deviation method) का प्रयोग करके $\bar{x}$ के कठिन परिकलन से बच सकते हैं। स्मरण कीजिए कि इस विधि में हम आँकड़ों के मध्य या उसके बिल्कुल पास किसी प्रेक्षण को **कल्पित माध्य** लेते हैं। तब प्रेक्षणों (या विभिन्न वर्गों के मध्य-बिंदुओं) का इस कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात करते हैं। यह विचलन संख्या रेखा पर मूल बिंदु (origin) को शून्य से प्रतिस्थापित कर कल्पित माध्य पर ले जाना ही होता है, जैसा कि आकृति 15.3 में दर्शार्या गया है।



आकृति 15.3

यदि सभी विचलनों में कोई सार्व गुणनखंड (common factor) है तो विचलनों को सरल करने के लिए इन्हें इस सार्व गुणनखंड से भाग देते हैं। इन नए विचलनों को **पद विचलन** कहते हैं। पद विचलन लेने की प्रक्रिया संख्या रेखा पर पैमाने का परिवर्तन होता है, जैसा कि आकृति 15.4 में दर्शाया गया है।



आकृति 15.4

विचलन और पद विचलन प्रेक्षणों के आकार को छोटा कर देते हैं, जिससे गुणन जैसी गणनाएँ सरल हो जाती हैं। मान लीजिए नया चर $d_i = \frac{x_i - a}{h}$ हो जाता है, जहाँ 'a' कल्पित माध्य है व h सार्व गुणनखंड है। तब पद विचलन विधि द्वारा $\bar{x}$ निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात किया जाता है:

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{\text{N}} \times h$$

आइए उदाहरण 6 के आँकड़ों के लिए पद विचलन विधि लगाएँ। हम कल्पित माध्य $a = 45$ और $h = 10$, लेते हैं और निम्नलिखित सारणी 15.5 बनाते हैं।

सारणी 15.5

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या f_i	मध्य-बिंदु x_i	$d_i = \frac{x_i - 45}{10}$	$f_i d_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
10-20	2	15	– 3	– 6	30	60
20-30	3	25	– 2	– 6	20	60
30-40	8	35	– 1	– 8	10	80
40-50	14	45	0	0	0	0
50-60	8	55	1	8	10	80
60-70	3	65	2	6	20	60
70-80	2	75	3	6	30	60
	40			0		400

इसलिए $$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i d_i}{N} \times h = 45 + \frac{0}{40} \times 10 = 45$$

और $$\text{M.D. } (\bar{x}) = \frac{1}{\text{N}} \sum_{i=1}^{7} f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = \frac{400}{40} = 10$$

टिप्पणी पद विचलन विधि का उपयोग $\bar{x}$ ज्ञात करने के लिए किया जाता है। शेष प्रक्रिया वैसी ही है।

(ii) माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन दिए गए आँकड़ों के लिए माध्यिका से माध्य विचलन ज्ञात करने की प्रक्रिया वैसी ही है जैसी कि हमने माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए की थी। इसमें विशेष अंतर केवल विचलन लेने के समय माध्य के स्थान पर माध्यिका लेने में होता है।

आइए सतत बारंबारता बटंन के लिए माध्यिका ज्ञात करने की प्रक्रिया का स्मरण करें। आँकड़ों को पहले आरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। तब सतत बारंबारता बंटन की माध्यिका ज्ञात करने के लिए पहले उस वर्ग को निर्धारित करते हैं जिसमें माध्यिका स्थित होती है (इस वर्ग को **माध्यिका वर्ग** कहते हैं) और तब निम्नलिखित सूत्र लगाते हैं:

$$\text{माध्यिका} = l + \frac{\frac{\text{N}}{2} - \text{C}}{f} \times h$$

जहाँ माध्यिका वर्ग वह वर्ग है जिसकी संचयी बारंबारता $\frac{\text{N}}{2}$ के बराबर या उससे थोड़ी अधिक हो, बारंबारताओं का योग N ,

माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा l, माध्यिका वर्ग की बारंबारता f, माध्यिका वर्ग से सटीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता C और माध्यिका वर्ग का विस्तार h है। माध्यिका ज्ञात करने के पश्चात् प्रत्येक वर्ग के मध्य-बिंदुओं x_i का माध्यिका से विचलनों का निरपेक्ष मान अर्थात् $|x_i - \text{M}|$ प्राप्त करते हैं।

तब $$\text{M.D. (M)} = \frac{1}{\text{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \text{M}|$$

इस प्रक्रिया को निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट किया गया है:

उदाहरण 7 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारंबारता	6	7	15	16	4	2

हल दिए गए आँकड़ों से निम्न सारणी 15.6 बनाते हैं:

सारणी 15.6

वर्ग	बारंबारता f_i	संचयी बारंबारता $(c.f.)$	मध्य-बिंदु x_i	$\|x_i - \text{Med.}\|$	$f_i\|x_i - \text{Med.}\|$
0-10	6	6	5	23	138
10-20	7	13	15	13	91
20-30	15	28	25	3	45
30-40	16	44	35	7	112
40-50	4	48	45	17	68
50-60	2	50	55	27	54
	50				508

यहाँ N = 50, इसलिए $\frac{\text{N}}{2}$ वीं या 25वीं मद 20–30 वर्ग में हैं। इसलिए 20–30 माध्यिका वर्ग है। हम जानते हैं कि

$$\text{माध्यिका} = l + \frac{\frac{\text{N}}{2} - C}{f} \times h$$

यहाँ $l = 20$, C=13, $f = 15$, $h = 10$ और N = 50

इसलिए, माध्यिका $= 20 + \frac{25-13}{15} \times 10 = 20 + 8 = 28$

अतः, माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन

$$\text{M.D. (M)} = \frac{1}{\text{N}} \sum_{i=1}^{6} f_i |x_i - \text{M}| = \frac{1}{50} \times 508 = 10.16 \text{ है।}$$

प्रश्नावली 15.1

प्रश्न 1 व 2 में दिए गए आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

1. 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17

2. 38, 70, 48, 40, 42, 55, 63, 46, 54, 44

प्रश्न 3 व 4 के आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

3. 13, 17, 16, 14, 11, 13, 10, 16, 11, 18, 12, 17

4. 36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49

प्रश्न 5 व 6 के आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

5.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	7	4	6	3	5

6.

x_i	10	30	50	70	90
f_i	4	24	28	16	8

प्रश्न 7 व 8 के आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

7.

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

8.

x_i	15	21	27	30	35
f_i	3	5	6	7	8

प्रश्न 9 व 10 के आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

9.

आय प्रतिदिन	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
व्यक्तियों की संख्या	4	8	9	10	7	5	4	3

10.

ऊँचाई (सेमी में)	95-105	105-115	115-125	125-135	135-145	145-155
लड़कों की संख्या	9	13	26	30	12	10

11. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
लड़कियों की संख्या	6	8	14	16	4	2

12. नीचे दिए गए 100 व्यक्तियों की आयु के बंटन की माध्यिका आयु के सापेक्ष माध्य विचलन की गणना कीजिए:

आयु	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
संख्या	5	6	12	14	26	12	16	9

[**संकेत** प्रत्येक वर्ग की निम्न सीमा में से 0.5 घटा कर व उसकी उच्च सीमा में 0.5 जोड़ कर दिए गए आँकड़ों को सतत बारंबारता बंटन में बदलिए]

15.4.3 ***माध्य विचलन की परिसीमाएँ (Limitations of mean deviation)*** बहुत अधिक विचरण या बिखराव वाली शृंखलाओं में माध्यिका केंद्रीय प्रवृत्ति की उपयुक्त माप नहीं होती है। अत: इस दशा में माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन पर पूरी तरह विश्वास नहीं किया जा सकता है।

माध्य से विचलनों का योग (ऋण चिह्न को छोड़कर) माध्यिका से विचलनों के योग से अधिक होता है। इसलिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन अधिक वैज्ञानिक नहीं है। अत: कई दशाओं में माध्य विचलन असंतोषजनक परिणाम दे सकता है। साथ ही माध्य विचलन को विचलनों के निरपेक्ष मान पर ज्ञात किया जाता है। इसलिए यह और बीजगणितीय गणनाओं के योग्य नहीं होता है। इसका अभिप्राय है कि हमें प्रकीर्णन की अन्य माप की आवश्यकता है। मानक विचलन प्रकीर्णन की ऐसी ही एक माप है।

15.5 प्रसरण और मानक विचलन (Variance and Standard Deviation)

याद कीजिए कि केंद्रीय प्रवृत्ति की माप के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए हमने विचलनों के निरपेक्ष मानों का योग किया था। ऐसा माध्य विचलन को सार्थक बनाने के लिए किया था, अन्यथा विचलनों का योग शून्य हो जाता है।

विचलनों के चिह्नों के कारण उत्पन्न इस समस्या को विचलनों के वर्ग लेकर भी दूर किया जा सकता है। निसंदेह यह स्पष्ट है कि विचलनों के यह वर्ग ऋणेतर होते हैं।

माना $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, n प्रेक्षण हैं तथा $\bar{x}$ उनका माध्य है। तब

$$(x_1-\bar{x})^2 + (x_2 -\bar{x})^2 + ...+ (x_n-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 .$$

यदि यह योग शून्य हो तो प्रत्येक $(x_i - \bar{x})$ शून्य हो जाएगा। इसका अर्थ है कि किसी प्रकार का विचरण नहीं है क्योंकि तब सभी प्रेक्षण $\bar{x}$ के बराबर हो जाते हैं। यदि $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ छोटा है तो यह इंगित करता है कि प्रेक्षण $x_1, x_2, x_3,...,x_n$, माध्य $\bar{x}$ के निकट हैं तथा प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x}$ के सापेक्ष विचरण कम है । इसके विपरीत यदि यह योग बड़ा है तो प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x}$ के सापेक्ष विचरण अधिक है। क्या हम कह सकते हैं कि योग $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ सभी प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x}$ के सापेक्ष प्रकीर्णन या विचरण की माप का एक संतोषजनक प्रतीक है?

आइए इसके लिए छ: प्रेक्षणों 5, 15, 25, 35, 45, 55 का एक समुच्चय A लेते हैं। इन प्रेक्षणों का माध्य 30 है। इस समुच्चय में $\bar{x}$ से विचलनों के वर्ग का योग निम्नलिखित है:

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2 = (5-30)^2 + (15-30)^2 + (25-30)^2 + (35-30)^2 + (45-30)^2 + (55-30)^2$$

$$= 625 + 225 + 25 + 25 + 225 + 625 = 1750$$

एक अन्य समुच्चय B लेते हैं जिसके 31 प्रेक्षण निम्नलिखित हैं:

15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.

इन प्रेक्षणों का माध्य $\bar{y} = 30$ है।

दोनों समुच्चयों A तथा B के माध्य 30 है।

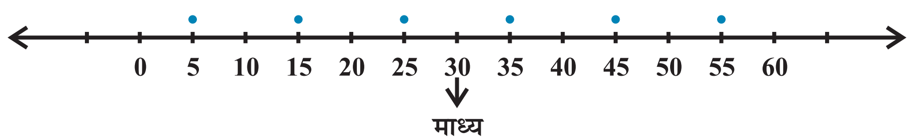
समुच्चय B के प्रेक्षणों के विचलनों के वर्गों का योग निम्नलिखित है।

$$\sum_{i=1}^{31}(y_i - \bar{y})^2 = (15-30)^2 + (16-30)^2 + (17-30)^2 + ...+ (44-30)^2 + (45-30)^2$$

$$= (-15)^2 + (-14)^2 + ... + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 14^2 + 15^2$$
$$= 2\,[15^2 + 14^2 + ... + 1^2]$$
$$= 2 \times \frac{15 \times (15+1)\,(30+1)}{6} = 5 \times 16 \times 31 = 2480$$

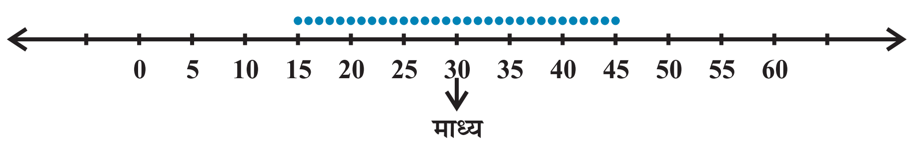
(क्योंकि प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ होता है, यहाँ $n = 15$ है)

यदि $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ ही माध्य के सापेक्ष प्रकीर्णन की माप हो तो हम कहने के लिए प्रेरित होंगे कि 31 प्रेक्षणों के समुच्चय B का, 6 प्रेक्षणों वाले समुच्चय A की अपेक्षा माध्य के सापेक्ष अधिक प्रकीर्णन है यद्यपि समुच्चय A में 6 प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x}$ के सापेक्ष बिखराव (विचलनों का परिसर –25 से 25 है) समुच्चय B की अपेक्षा (विचलनों का परिसर –15 से 15 है) अधिक है। यह नीचे दिए गए चित्रों से भी स्पष्ट है:
समुच्चय A, के लिए हम आकृति 15.5 पाते हैं।



आकृति 15.5

समुच्चय B, के लिए आकृति 15.6 हम पाते हैं



आकृति 15.6

अत: हम कह सकते हैं कि माध्य से विचलनों के वर्गों का योग प्रकीर्णन की उपयुक्त माप नहीं है। इस कठिनाई को दूर करने के लिए हम विचलनों के वर्गों का माध्य लें अर्थात् हम $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$. लें। समुच्चय A, के लिए हम पाते हैं,

माध्य $= \frac{1}{6} \times 1750 = 291.6$ है और समुच्चय B, के लिए यह $\frac{1}{31} \times 2480 = 80$ है।
यह इंगित करता है कि समुच्चय A में बिखराव या विचरण समुच्चय B की अपेक्षा अधिक है जो दोनों समुच्चयों के अपेक्षित परिणाम व ज्यामितिय निरूपण से मेल खाता है।

अत: हम $\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$ को प्रकीर्णन की उपयुक्त माप के रूप में ले सकते हैं। यह संख्या अर्थात् माध्य से विचलनों के वर्गों का **माध्य प्रसरण (variance)** कहलाता है और σ^2 (सिगमा का वर्ग पढ़ा जाता है) से दर्शाते हैं।

अत: n प्रेक्षणों $x_1, x_2, ..., x_n$ का प्रसरण

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ है।}$$

15.5.1 मानक विचलन (Standard Deviation) प्रसरण की गणना में हम पाते हैं कि व्यक्तिगत प्रेक्षणों x_i तथा $\bar{x}$ की इकाई प्रसरण की इकाई से भिन्न है, क्योंकि प्रसरण में $(x_i - \bar{x})$ के वर्गों का समावेश है, इसी कारण प्रसरण के धनात्मक वर्गमूल को प्रेक्षणों का माध्य के सापेक्ष प्रकीर्णन की यथोचित माप के रूप में व्यक्त किया जाता है और उसे मानक विचलन कहते हैं। मानक विचलन को सामान्यत: σ, द्वारा प्रदर्शित किया जाता है तथा निम्नलिखित प्रकार से दिया जाता है:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad \dots (1)$$

आइए अवर्गीकृत आँकड़ों का प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात करने के लिए कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 8 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए प्रसरण तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए:

6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24

हल दिए गए आँकड़ों को निम्नलिखित प्रकार से सारणी 15.7 में लिख सकते हैं। माध्य को पद विचलन विधि द्वारा 14 को कल्पित माध्य लेकर ज्ञात किया गया है। प्रेक्षणों की संख्या $n = 10$ है।

सारणी 15.7

x_i	$d_i = \frac{x_i - 14}{2}$	माध्य से विचलन $(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})$
6	–4	–9	81
8	–3	–7	49
10	–2	–5	25
12	–1	–3	9
14	0	–1	1
16	1	1	1
18	2	3	9
20	3	5	25
22	4	7	49
24	5	9	81
	5		330

इसलिए, $\qquad$ माध्य $\bar{x}$ = कल्पित माध्य + $\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \times h$

$$= 14 + \frac{5}{10} \times 2 = 15$$

और $\quad$ प्रसरण $\sigma^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = \dfrac{1}{10}\times 330 = 33$

अतः $\quad$ मानक विचलन $\sigma = \sqrt{33} = 5.74$

15.5.2 *एक असतत बारंबारता बंटन का मानक विचलन (Standard deviation of a discrete frequency distribution)*

मान लें दिया गया असतत बंटन निम्नलिखित है:

$$x: \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots, x_n$$

$$f: \quad f_1, \quad f_2, \quad f_3, \ldots, f_n$$

इस बंटन के लिए मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}$, ... (2)

जहाँ $\quad N = \sum_{i=1}^{n} f_i$.

आइए निम्नलिखित उदाहरण लें।

उदाहरण 9 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए:

x_i	4	8	11	17	20	24	32
f_i	3	5	9	5	4	3	1

हल आँकड़ों को सारणी के रूप में लिखने पर हमें निम्नलिखित सारणी 15.8 प्राप्त होती है:

सारणी 15.8

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
4	3	12	–10	100	300
8	5	40	–6	36	180
11	9	99	–3	9	81
17	5	85	3	9	45
20	4	80	6	36	144
24	3	72	10	100	300
32	1	32	18	324	324
	30	420			1374

$$N = 30, \ \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 420, \ \sum_{i=1}^{7} f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 1374$$

इसलिए $\quad \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{N} = \dfrac{1}{30}\times 420 = 14$

अत प्रसरण $(\sigma^2) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{30} \times 1374 = 45.8$$

और मानक विचलन $\sigma = \sqrt{45.8} = 6.77$

15.5.3 *एक सतत बारंबारता बंटन का मानक विचलन (Standard deviation of a continuous frequency distribution)* दिए गए सतत बारंबारता बंटन के सभी वर्गों के मध्य मान लेकर उसे असतत बारंबारता बंटन में निरूपित कर सकते हैं। तब असतत बारंबारता बंटन के लिए अपनाई गई विधि द्वारा मानक विचलन ज्ञात किया जाता है।

यदि एक n वर्गों वाला बारंबारता बंटन जिसमें प्रत्येक अंतराल उसके मध्यमान x_i तथा बारंबारता f_i, द्वारा परिभाषित किया गया है, तब मानक विचलन निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त किया जाएगा:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2} ,$$

जहाँ $\bar{x}$, बंटन का माध्य है और $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$.

मानक विचलन के लिए अन्य सूत्र हमें ज्ञात है कि

$$\text{प्रसरण } (\sigma^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}\, x_i)$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 f_i - \sum_{i=1}^{n} 2\bar{x}\, f_i x_i\right]$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2\sum_{i=1}^{n} f_i - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right]$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i + \bar{x}^2\, N - 2\bar{x}\,.\,N\,\bar{x}\right] \quad \left[\text{जहाँ } \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \bar{x} \text{ या } \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = N\bar{x}\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$\text{या} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}\right)^2 = \frac{1}{N^2}\left[N\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2\right]$$

अतः मानक विचलन $\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2}$ ... (3)

उदाहरण 10 निम्नलिखित बंटन के लिए माध्य, प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए:

वर्ग	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
बारंबारता	3	7	12	15	8	3	2

हल दिए गए आँकड़ों से निम्नलिखित सारणी 15.9 बनाते हैं।

सारणी 15.9

वर्ग	बारंबारता (f_i)	मध्य-बिंदु (x_i)	$f_i x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
30-40	3	35	105	729	2187
40-50	7	45	315	289	2023
50-60	12	55	660	49	588
60-70	15	65	975	9	135
70-80	8	75	600	169	1352
80-90	3	85	255	529	1587
90-100	2	95	190	1089	2178
	50		3100		10050

अतः माध्य $(\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{3100}{50} = 62$

प्रसरण $(\sigma^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \bar{x})^2$

$= \frac{1}{50} \times 10050 = 201$

और मानक विचलन $\sigma = \sqrt{201} = 14.18$

उदाहरण 11 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए मानक विचलन ज्ञात कीजिए:

x_i	3	8	13	18	23
f_i	7	10	15	10	6

हल हम आँकड़ों से निम्नलिखित सारणी 15.10 बनाते हैं:

सारणी 15.10

x_i	f_i	$f_i x_i$	x_i^2	$f_i x_i^2$
3	7	21	9	63
8	10	80	64	640
13	15	195	169	2535
18	10	180	324	3240
23	6	138	529	3174
	48	614		9652

अब सूत्र (3) द्वारा

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{48\times 9652 - (614)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{463296 - 376996}$$

$$= \frac{1}{48}\times 293.77 = 6.12$$

इसलिए, मानक विचलन $\sigma = 6.12$

15.5.4. *प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात करने के लिए लघु विधि (Shortcut method to find variance and standard deviation)* कभी-कभी एक बारंबारता बंटन के प्रेक्षणों x_i अथवा विभिन्न वर्गों के मध्यमान x_i के मान बहुत बड़े होते हैं तो माध्य तथा प्रसरण ज्ञात करना कठिन हो जाता है तथा अधिक समय लेता है। ऐसे बारंबारता बंटन, जिसमें वर्ग-अंतराल समान हों, के लिए पद विचलन विधि द्वारा इस प्रक्रिया को सरल बनाया जा सकता है।

मान लीजिए कि कल्पित माध्य 'A' है और मापक या पैमाने को $\frac{1}{h}$ गुना छोटा किया गया है (यहाँ h वर्ग अंतराल है)। मान लें कि पद विचलन या नया चर y_i है।

अर्थात् $\quad y_i = \frac{x_i - A}{h}$ या $x_i = A + hy_i$ ... (1)

हम जानते हैं कि $\quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}$ ... (2)

(1) से x_i को (2) में रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathrm{A} + hy_i)}{\mathrm{N}}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \mathrm{A} + \sum_{i=1}^{n} h\, f_i y_i\right) = \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\mathrm{A}\sum_{i=1}^{n} f_i + h\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)$$

$$= \mathrm{A}\,.\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}} + h\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i y_i}{\mathrm{N}} \qquad \left(\text{क्योंकि } \sum_{i=1}^{n} f_i = \mathrm{N}\right)$$

अतः $\overline{x} = \mathrm{A} + h\,\overline{y}$ ... (3)

अब, चर x का प्रसरण, $\sigma_x{}^2 = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(\mathrm{A} + hy_i - \mathrm{A} - h\,\overline{y})^2 \qquad [(1) \text{ और } (3) \text{ द्वारा}]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{n} f_i\, h^2\,(y_i - \overline{y})^2$$

$$= \frac{h^2}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(y_i - \overline{y})^2 = h^2 \text{ चर } y_i \text{ का प्रसरण}$$

अर्थात् $\sigma_x{}^2 = h^2\sigma_y{}^2$

या $\sigma_x = h\sigma_y$ ... (4)

(3) और (4), से हमें प्राप्त होता है कि

$$\sigma_x = \frac{h}{\mathrm{N}}\sqrt{\mathrm{N}\sum_{i=1}^{n} f_i y_i{}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)^2} \qquad \text{... (5)}$$

आइए उदाहरण 11 के आँकड़ों में सूत्र (5) के उपयोग द्वारा लघु विधि से माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात करें।

उदाहरण 12 निम्नलिखित बंटन के लिए माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए:

वर्ग	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
बारंबारता	3	7	12	15	8	3	2

हल मान लें कल्पित माध्य A = 65 है। यहाँ $h = 10$

दिए गए आँकड़ों से निम्नलिखित सारणी 15.11 प्राप्त होती है।

सारणी 15.11

वर्ग	बारंबारत	मध्य-बिंदु	$y_i = \frac{x_i - 65}{10}$	y_i^2	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
	f_i	x_i				
30-40	3	35	– 3	9	– 9	27
40-50	7	45	– 2	4	– 14	28
50-60	12	55	– 1	1	– 12	12
60-70	15	65	0	0	0	0
70-80	8	75	1	1	8	8
80-90	3	85	2	4	6	12
90-100	2	95	3	9	6	18
	N=50				– 15	105

इसलिए $$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i y_i}{50} \times h = 65 - \frac{15}{50} \times 10 = 62$$

प्रसरण $$\sigma^2 = \frac{h^2}{N^2}\left[N\sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2\right]$$

$$= \frac{(10)^2}{(50)^2}\left[50 \times 105 - (-15)^2\right]$$

$$= \frac{1}{25}[5250 - 225] = 201$$

और मानक विचलन $\sigma = \sqrt{201} = 14.18$

प्रश्नावली 15.2

प्रश्न 1 से 5 तक के आँकड़ों के लिए माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।

1. 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

2. प्रथम n प्राकृत संख्याएँ

3. तीन के प्रथम 10 गुणज

4.

x_i	6	10	14	18	24	28	30
f_i	2	4	7	12	8	4	3

5.

x_i	92	93	97	98	102	104	109
f_i	3	2	3	2	6	3	3

6. लघु विधि द्वारा माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

x_i	60	61	62	63	64	65	66	67	68
f_i	2	1	12	29	25	12	10	4	5

प्रश्न 7 व 8 में दिए गए बारंबारता बंटन के लिए माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।

7.

वर्ग	0-30	30-60	60-90	90-120	120-150	150-180	180-210
बारंबारता	2	3	5	10	3	5	2

8.

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारंबारता	5	8	15	16	6

9. लघु विधि द्वारा माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई (सेमी में)	70-75	75-80	80-85	85-90	90-95	95-100	100-105	105-110	110-115
बच्चों की संख्या	3	4	7	7	15	9	6	6	3

10. एक डिज़ाइन में बनाए गए वृत्तों के व्यास (मिमी में) नीचे दिए गए हैं।

व्यास	33-36	37-40	41-44	45-48	49-52
वृत्तों संख्या	15	17	21	22	25

वृत्तों के व्यासों का मानक विचलन व माध्य व्यास ज्ञात कीजिए।

[**संकेत** पहले आँकड़ों को सतत बना लें। वर्गों को 32.5-36.5, 36.5-40.5, 40.5-44.5, 44.5 - 48.5, 48.5 - 52.5 लें और फिर आगे बढ़ें]

15.6 बारंबारता बंटनों का विश्लेषण (Analysis of Frequency Distributions)

इस अध्याय के पूर्व अनुभागों में हमने प्रकीर्णन की कुछ मापों के बारे में पढ़ा है। माध्य व मानक विचलन की वही इकाई होती है जिसमें आँकड़े दिए गए होते हैं। जब हमें दो विभिन्न इकाइयों वाले बंटनों की तुलना करनी हो तो केवल प्रकीर्णन की मापा

की गणना ही पर्याप्त नहीं होती है अपितु एक ऐसी माप की आवश्यकता होती है जो इकाई से स्वतंत्र हो। इकाई से स्वतंत्र, विचरण की माप को **विचरण गुणांक** (**coefficient of variation**) कहते हैं और C.V. द्वारा दर्शाते हैं।

विचरण गुणांक को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित करते हैं:

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100,\ \bar{x} \neq 0$$

यहाँ σ और $\bar{x}$ क्रमश: आँकड़ों के मानक विचलन तथा माध्य हैं।

दो श्रृंखलाओं में विचरण की तुलना के लिए हम प्रत्येक श्रृंखला का विचरण गुणांक ज्ञात करते हैं। दोनों में से बड़े विचरण गुणांक वाली श्रृंखला को अधिक विचरण या बिखराव वाली श्रृंखला कहते हैं। कम विचरण गुणांक वाली श्रृंखला को दूसरी से अधिक संगत (consistent) कहते हैं।

15.6.1 दो समान माध्य वाले बारंबारता बंटनों की तुलना (Comparison of two frequency distributions with same mean) मान लें $\bar{x}_1$ तथा σ_1 पहले बंटन के माध्य तथा मानक विचलन हैं और तथा σ_2 दूसरे बंटन के माध्य और मानक विचलन हैं।

तब $$\text{C.V. (पहला बंटन)} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$$

और $$\text{C.V. (दूसरा बंटन)} = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$$

दिया है $$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x} \text{ (मान लें)}$$

इसलिए $$\text{C.V. (पहला बंटन)} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100 \qquad \text{... (1)}$$

और $$\text{C.V. (दूसरा बंटन)} = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100 \qquad \text{... (2)}$$

(1) और (2) से यह स्पष्ट है कि दोनों C.V. की तुलना σ_1 और σ_2 के आधार पर ही की जा सकती है। अत: हम कह सकते हैं कि समान माध्य वाली श्रृंखलाओं में से अधिक मानक विचलन (या प्रसरण) वाली श्रृंखला को अधिक प्रक्षेपित कहा जाता है। साथ ही छोटी मानक विचलन (या प्रसरण) वाली श्रृंखला को दूसरी की अपेक्षा अधिक संगत कहा जाता है।

आइए निम्नलिखित उदाहरण लें।

उदाहरण 13 दो कारखानों A तथा B में कर्मचारियों की संख्या और उनके वेतन नीचे दिए गए हैं।

	A	B
कर्मचारियों की संख्या	5000	6000
औसत मासिक वेतन	2500 रू	2500 रू
वेतनों के बंटन का प्रसरण	81	100

व्यक्तिगत वेतनों में किस कारखाने A अथवा B में अधिक विचरण है?

हल कारखाने A में वेतनों के बंटन का प्रसरण $(\sigma_1^2) = 81$

इसलिए, कारखाने A में वेतनों के बंटन का मानक विचलन $(\sigma_1) = 9$

साथ ही कारखाने B में वेतनों के बंटन का प्रसरण $(\sigma_2^2) = 100$

इसलिए, कारखाने B में वेतनों के बंटन का मानक विचलन $(\sigma_2) = 10$

क्योंकि, दोनों कारखानों में औसत (माध्य) वेतन समान है अर्थात 2500 रू है, इसलिए बड़े मानक विचलन वाले कारखाने में अधिक बिखराव या विचलन होगा। अत: कारखाने B में व्यक्तिगत वेतनों में अधिक विचरण है।

उदाहरण 14 दो वेतनों का विचरण गुणांक 60 तथा 70 है और उनके मानक विचलन क्रमश: 21 और 16 है। उनके माध्य क्या हैं?

हल दिया है C.V. (पहला बंटन) = 60, $\sigma_1 = 21$

C.V. (दूसरा बंटन) = 70, $\sigma_2 = 16$

मान लें $\bar{x}_1$ और $\bar{x}_2$ क्रमश: पहली व दूसरी बंटन के माध्य है, तब

$$\text{C.V. (पहला बंटन)} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$$

इसलिए $60 = \dfrac{21}{\bar{x}_1} \times 100$ या $\bar{x}_1 = \dfrac{21}{60} \times 100 = 35$

और $\text{C.V. (दूसरी बंटन)} = \dfrac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$

अर्थात् $70 = \dfrac{16}{\bar{x}_2} \times 100$ या $\bar{x}_2 = \dfrac{16}{70} \times 100 = 22.85$

अत: $\bar{x}_1 = 35$ और $\bar{x}_2 = 22.85$

उदाहरण 15 कक्षा 11 के एक सेक्शन में छात्रों की ऊँचाई तथा भार के लिए निम्नलिखित परिकलन किए गए हैं:

	ऊँचाई	भार
माध्य	162.6 सेमी	52.36 किग्रा.
प्रसरण	127.69 सेमी^{2}	23.1361 किग्रा.^{2}

क्या हम कह सकते हैं कि भारों में ऊँचाई की तुलना में अधिक विचरण है?

हल विचरणों की तुलना के लिए हमें विचरण गुणांकों की गणना करनी है।

दिया है ऊँचाइयों में प्रसरण = 127.69 सेमी^{2}

इसलिए ऊँचाइयों का मानक विचलन = $\sqrt{127.69}\text{cm}$ = 11.3 सेमी

पुन: भारों में प्रसरण = 23.1361 किग्रा.^{2}

इसलिए भारों का मानक विचलन = $\sqrt{23.1361}$ किग्रा. = 4.81 किग्रा.

अब, ऊँचाइयों का विचरण गुणांक $= \dfrac{\text{मानक विचलन}}{\text{माध्य}} \times 100$

$$= \frac{11.3}{162.6} \times 100 = 6.95$$

और भारों का विचरण गुणांक $= \dfrac{4.81}{52.36} \times 100 = 9.18$

स्पष्टतया भारों का विचरण गुणांक ऊँचाइयों के विचरण गुणांक से बड़ा है।
इसलिए हम कह सकते हैं कि भारों में ऊँचाइयों की अपेक्षा अधिक विचरण है।

प्रश्नावली 15.3

1. निम्नलिखित आँकड़ों से बताइए कि A या B में से किस में अधिक बिखराव है:

अंक	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
समूह A	9	17	32	33	40	10	9
समूह B	10	20	30	25	43	15	7

2. शेयरों X और Y के नीचे दिए गए मूल्यों से बताइए कि किस के मूल्यों में अधिक स्थिरता है?

X	35	54	52	53	56	58	52	50	51	49
Y	108	107	105	105	106	107	104	103	104	101

3. एक कारखाने की दो फर्मों A और B, के कर्मचारियों को दिए मासिक वेतन के विश्लेषण का निम्नलिखित परिणाम हैं:

	फर्म A	फर्म B
वेतन पाने वाले कर्मचारियों की संख्या	586	648
मासिक वेतनों का माध्य	5253 रु	5253 रु
वेतनों के बंटनों का प्रसरण	100	121

(i) A और B में से कौन सी फर्म अपने कर्मचारियों को वेतन के रूप में अधिक राशि देती है?

(ii) व्यक्तिगत वेतनों में किस फर्म A या B, में अधिक विचरण है?

4. टीम A द्वारा एक सत्र में खेले गए फुटबाल मैचों के आँकड़े नीचे दिए गए हैं:

किए गए गोलों की संख्या	0	1	2	3	4
मैचो की संख्या	1	9	7	5	3

टीम B, द्वारा खेले गए मैचों में बनाए गए गोलों का माध्य 2 प्रति मैच और गोलों का मानक विचलन 1.25 था। किस टीम को अधिक संगत (consistent) समझा जाना चाहिए?

5. पचास वनस्पति उत्पादों की लंबाई x (सेमी में) और भार y (ग्राम में) के योग और वर्गों के योग नीचे दिए गए हैं:

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 212,\quad \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 902.8,\quad \sum_{i=1}^{50} y_i = 261,\quad \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 1457.6$$

लंबाई या भार में किसमें अधिक विचरण है?

विविध उदाहरण

उदाहरण 16 20 प्रेक्षणों का प्रसरण 5 है। यदि प्रत्येक प्रेक्षण को 2 से गुणा किया गया हो तो प्राप्त प्रेक्षणों का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि प्रेक्षण $x_1, x_2, ..., x_{20}$ और $\bar{x}$ उनका माध्य है। दिया गया है प्रसरण $= 5$ और $n = 20$. हम जानते हैं कि

$$\text{प्रसरण } \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2, \text{ अर्थात् } 5 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2$$

या $$\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 = 100 \qquad ... (1)$$

यदि प्रत्येक प्रेक्षण को 2 से गुणा किया जाए, तो परिणामी प्रेक्षण y_i, हैं।

स्पष्टतया $y_i = 2x_i$ अर्थात् $x_i = \frac{1}{2}y_i$

इसलिए $$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} y_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} 2x_i = 2.\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i$$

अर्थात् $$\bar{y} = 2\bar{x} \quad \text{or} \quad \bar{x} = \frac{1}{2}\bar{y}$$

x_i और $\bar{x}$ के मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}\bar{y}\right)^2 = 100, \text{ अर्थात् } \sum_{i=1}^{20}(y_i - \bar{y})^2 = 400$$

अतः नए प्रेक्षणों का प्रसरण $= \frac{1}{20} \times 400 = 20 = 2^2 \times 5$

टिप्पणी पाठक ध्यान दें कि यदि प्रत्येक प्रेक्षण को k, से गुणा किया जाए, तो नए बने प्रेक्षणों का प्रसरण, पूर्व प्रसरण का k^2 गुना हो जाता है।

उदाहरण 17 पाँच प्रेक्षणों का माध्य 4.4 है तथा उनका प्रसरण 8.24 है। यदि तीन प्रेक्षण 1, 2 तथा 6 हैं, तो अन्य दो प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

हल माना शेष दो प्रेक्षण x तथा y हैं।

इसलिए, श्रृंखला 1, 2, 6, x, y है।

अब, $$\text{माध्य } \bar{x} = 4.4 = \frac{1+2+6+x+y}{5}$$

या $$22 = 9 + x + y$$

इसलिए $$x + y = 13 \qquad ... (1)$$

साथ ही प्रसरण $$= 8.24 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2$$

अर्थात् $$8.24 = \frac{1}{5}\left[(3.4)^2 + (2.4)^2 + (1.6)^2 + x^2 + y^2 - 2\times 4.4\,(x+y) + 2\times(4.4)^2\right]$$

या $\quad 41.20 = 11.56 + 5.76 + 2.56 + x^2 + y^2 - 8.8 \times 13 + 38.72$

इसलिए $\quad x^2 + y^2 = 97 \quad \ldots (2)$

लेकिन (1) से, हमें प्राप्त होता है

$$x^2 + y^2 + 2xy = 169 \quad \ldots (3)$$

(2) और (3), से हमें प्राप्त होता है

$$2xy = 72 \quad \ldots (4)$$

(2) में से (4), घटाने पर,

$$x^2 + y^2 - 2xy = 97 - 72 \text{ अर्थात् } (x - y)^2 = 25$$

या $\quad x - y = \pm 5 \quad \ldots (5)$

अब (1) और (5) से, हमें प्राप्त होता है

$x = 9, \quad y = 4 \quad$ जब $\quad x - y = 5$

या $\quad x = 4, \quad y = 9 \quad$ जब $\quad x - y = -5$

अत: शेष दो प्रेक्षण 4 तथा 9 हैं।

उदाहरण 18 यदि प्रत्येक प्रेक्षण $x_1, x_2, \ldots, x_n$ को 'a', से बढ़ाया जाए जहाँ a एक ऋणात्मक या धनात्मक संख्या है, तो दिखाइए कि प्रसरण अपरिवर्तित रहेगा।

हल मान लें प्रेक्षण $x_1, x_2, \ldots, x_n$ का माध्य $\bar{x}$ है, तो उनका प्रसरण

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ द्वारा दिया जाता है।}$$

यदि प्रत्येक प्रेक्षण में a जोड़ा जाए तो नए प्रेक्षण होंगे

$$y_i = x_i + a \quad \ldots (1)$$

मान लीजिए नए प्रेक्षणों का माध्य $\bar{y}$ है तब

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} a\right] \qquad = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{na}{n} = \bar{x} + a$$

अर्थात् $\quad \bar{y} = \bar{x} + a \quad \ldots (2)$

अत: नए प्रेक्षणों का प्रसरण

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a - \bar{x} - a)^2 \quad \text{((1) और (2)के उपयोग से)}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sigma_1^{\,2}$$

अत: नए प्रेक्षणों का प्रसरण वही है जो मूल प्रेक्षणों का था।

टिप्पणी ध्यान दीजिए कि प्रेक्षणों के किसी समूह में प्रत्येक प्रेक्षण में कोई एक संख्या जोड़ने अथवा घटाने पर प्रसरण अपरिवर्तित रहता है।

उदाहरण 19 एक विद्यार्थी ने 100 प्रेक्षणों का माध्य 40 और मानक विचलन 5.1 ज्ञात किया, जबकि उसने गलती से प्रेक्षण 40 के स्थान पर 50 ले लिया था। सही माध्य और मानक विचलन क्या है?

हल दिया है, प्रेक्षणों की संख्या $(n) = 100$

गलत माध्य $(\bar{x}) = 40,$

गलत मानक विचलन $(\sigma) = 5.1$

हम जानते हैं कि $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

अर्थात् $40 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i$ या $\sum_{i=1}^{100} x_i = 4000$

अर्थात् प्रेक्षणों का गलत योग $= 4000$

अत: प्रेक्षणों का सही योग = गलत योग $-50 + 40$

$= 4000 - 50 + 40 = 3990$

इसलिए सही माध्य $= \frac{\text{सही योग}}{100} = \frac{3990}{100} = 39.9$

साथ ही मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - (\bar{x})^2}$$

अर्थात् $5.1 = \sqrt{\frac{1}{100} \times \text{गलत} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - (40)^2}$

या $26.01 = \frac{1}{100} \times \text{गलत} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - 1600$

इसलिए गलत $\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = 100\,(26.01 + 1600) = 162601$

अब सही $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ = गलत $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (50)^2 + (40)^2$

$= 162601 - 2500 + 1600 = 161701$

इसलिए सही मानक विचलन

$$= \sqrt{\frac{\text{सही } \sum x_i^2}{n} - (\text{सही माध्य})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{161701}{100} - (39.9)^2}$$

$$= \sqrt{1617.01 - 1592.01} \quad = \sqrt{25} = 5$$

अध्याय 15 पर विविध प्रश्नावली

1. आठ प्रेक्षणों का माध्य तथा प्रसरण क्रमशः 9 और 9.25 हैं। यदि इनमें से छः प्रेक्षण 6, 7, 10, 12, 12 और 13 हैं, तो शेष दो प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

2. सात प्रेक्षणों का माध्य तथा प्रसरण क्रमशः 8 तथा 16 हैं। यदि इनमें से पाँच प्रेक्षण 2, 4, 10, 12, 14 हैं तो शेष दो प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

3. छः प्रेक्षणों का माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 8 तथा 4 हैं। यदि प्रत्येक प्रेक्षण को तीन से गुणा कर दिया जाए तो परिणामी प्रेक्षणों का माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

4. यदि n प्रेक्षणों $x_1, x_2, ..., x_n$ का माध्य $\bar{x}$ तथा प्रसरण σ^2 हैं तो सिद्ध कीजिए कि प्रेक्षणों $ax_1, ax_2, ax_3, ..., ax_n$ का माध्य और प्रसरण क्रमशः $a\bar{x}$ तथा $a^2\sigma^2$ $(a \neq 0)$ हैं।

5. बीस प्रेक्षणों का माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 10 तथा 2 हैं। जाँच करने पर यह पाया गया कि प्रेक्षण 8 गलत है। निम्न में से प्रत्येक का सही माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए यदि

(i) गलत प्रेक्षण हटा दिया जाए।

(ii) उसे 12 से बदल दिया जाए।

6. एक कक्षा के पचास छात्रों द्वारा तीन विषयों गणित, भौतिक शास्त्र व रसायन शास्त्र में प्राप्तांकों का माध्य व मानक विचलन नीचे दिए गए हैं:

विषय	**गणित**	**भौतिक**	**रसायन**
माध्य	42	32	40.9
मानक विचलन	12	15	20

किस विषय में सबसे अधिक विचलन है तथा किसमें सबसे कम विचलन है?

7. 100 प्रेक्षणों का माध्य और मानक विचलन क्रमशः 20 और 3 हैं। बाद में यह पाया गया कि तीन प्रेक्षण 21, 21 तथा 18 गलत थे। यदि गलत प्रेक्षणों को हटा दिया जाए तो माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

सारांश

- **प्रकीर्णन की माप** आँकड़ों में बिखराव या विचरण की माप। परिसर, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन व मानक विचलन प्रकीर्णन की माप हैं।

  परिसर = अधिकतम मूल्य – न्यूनतम मूल्य

- **अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य विचलन**

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum |(x_i - \bar{x})|}{n}, \qquad \text{M.D.}\ (\text{M}) = \frac{\sum |(x_i - \text{M})|}{\text{N}}$$

  जहाँ $\bar{x}$ = माध्य और M = माध्यिका

- **वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य विचलन**

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum f_i |(x_i - \bar{x})|}{\text{N}}, \qquad \text{M.D.}(\text{M}) = \frac{\sum f_i |(x_i - \text{M})|}{\text{N}},\ \text{जहाँ N} = \sum f_i$$

- **अवर्गीकृत आँकड़ों का प्रसरण और मानक विचलन**

$$= \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{\text{N}} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

- **असतत बारंबारता बंटन का प्रसरण तथा मानक विचलन**

$$\sigma^2 = \frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2}$$

- **सतत बारंबारता बंटन का प्रसरण तथा मानक विचलन**

$$\sigma^2 = \frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \frac{1}{\text{N}} \sqrt{\text{N} \sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2}$$

- **प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात करने की लघु विधि**

$$\sigma^2 = \frac{h}{\text{N}^2} \left[\text{N} \sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2\right], \ \sigma \frac{h}{\text{N}} \sqrt{\text{N} \sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i^2\right)}$$

  जहाँ $y_i = \dfrac{x_i - \text{A}}{h}$

- **विचरण गुणांक** $\text{C.V.} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \times 100, \ \bar{x} \neq 0.$

- समान माध्य वाली शृंखलाओं में छोटी मानक विचलन वाली शृंखला अधिक संगत या कम विचरण वाली होती है।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

सांख्यिकी का उद्‌भव लैटिन शब्द 'status' से हुआ है जिसका अर्थ एक राजनैतिक राज्य होता है। इससे पता लगता है कि सांख्यिकी मानव सभ्यता जितनी पुरानी है। शायद वर्ष 3050 ई.पू. में यूनान में पहली जनगणना की गई थी। भारत में भी लगभग 2000 वर्ष पहले प्रशासनिक आँकड़े एकत्रित करने की कुशल प्रणाली थी। विशेषतः चंद्रगुप्त मौर्य (324-300 ई. पू.) के राज्य काल में कौटिल्य (लगभग 300 ई.पू.)के अर्थशास्त्र में जन्म और मृत्यु के आँकड़े एकत्रित करने की प्रणाली का उल्लेख मिला है। अकबर के शासनकाल में किए गये प्रशासनिक सर्वेक्षणों का वर्णन अबुलफज़्ल द्वारा लिखित पुस्तक आइने-अकबरी मे दिया गया है।

लंदन के केप्टन John Graunt (1620-1675) को उनके द्वारा जन्म और मृत्यु की सांख्यिकी के अध्ययन के कारण उन्हें जन्म और मृत्यु सांख्यिकी का जनक माना जाता है। Jacob Bernoulli (1654-1705) ने 1713 मे प्रकाशित अपनी पुस्तक Ars Conjectandi में बड़ी संख्याओं के नियम को लिखा है।

सांख्यिकी का सैद्धांतिक विकास सत्रहवीं शताब्दी के दौरान खेलों और संयोग घटना के सिद्धांत के परिचय के साथ हुआ तथा इसके आगे भी विकास जारी रहा। एक अंग्रेज़ Francis Galton (1822-1921) ने जीव सांख्यिकी (Biometry) के क्षेत्र में सांख्यिकी विधियों के उपयोग का मार्ग प्रशस्त किया। Karl Pearson (1857-1936) ने काई वर्ग परीक्षण (*Chi square test*) तथा इंग्लैंड में सांख्यिकी प्रयोगशाला की स्थापना के साथ सांख्यिकीय अध्ययन के विकास में बहुत योगदान दिया है।

Sir Ronald a. Fisher (1890-1962) जिन्हें आधुनिक सांख्यिकी का जनक माना जाता है, ने इसे विभिन्न क्षेत्रों जैसे अनुवांशिकी, जीव-सांख्यिकी, शिक्षा, कृषि आदि में लगाया।

अध्याय 16

प्रायिकता (Probability)

❖*Where a mathematical reasoning can be had, it is as great a folly to make use of any other, as to grope for a thing in the dark, when you have a candle in your hand.– JOHN ARBUTHNOT* ❖

16.1 भूमिका (Introduction)

पहले की कक्षाओं में हमने प्रायिकता की संकल्पना को विभिन्न परिस्थितियों की अनिश्चितता की माप के रूप में पढ़ा है। हमने किसी पासे के फेंकने पर एक सम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता $\frac{3}{6}$ अर्थात् $\frac{1}{2}$ ज्ञात की थी। यहाँ कुल संभावित परिणाम (outcomes) 1, 2, 3, 4, 5 और 6 हैं (जिनकी संख्या छः है)। घटना 'एक सम संख्या प्राप्त होना' के अनुकूल परिणाम 2, 4, 6 (अर्थात् तीन संख्याएँ) हैं। व्यापक रूप से किसी घटना की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए हम घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या का कुल परिणामों की संख्या के साथ अनुपात ज्ञात करते हैं। प्रायिकता के इस सिद्धांत को **प्रायिकता का पुरातन सिद्धांत** (Classical theory of probability) कहा जाता है।

Kolmogorove
(1903-1987 A.D.)

कक्षा नवीं में हमने प्रायिकता को प्रेक्षण और संकलित आँकड़ों के आधार पर ज्ञात करना सीखा है। इसे **प्रायिकता का सांख्यिकीय दृष्टिकोण** (Statistical approach) कहते हैं।

इन दोनों सिद्धांतों में कुछ गंभीर समस्याएँ हैं। उदाहरणत: इन सिद्धांतों को उन क्रियाकलापों/प्रयोगों पर नहीं लगाया जा सकता है जिनमें संभावित परिणामों की संख्या अपरिमित होती है। पुरातन सिद्धांत में हम सभी संभावित परिणामों को सम संभाव्य मानते हैं। स्मरण कीजिए कि परिणामों को सम संभाव्य कहा जाता है जब हमें यह विश्वास करने का कोई कारण न हो कि एक परिणाम के घटित होने की संभावना दूसरे से अधिक है। दूसरे शब्दों में, हम यह मानते हैं कि सभी परिणामों के घटित होने की संभावना (प्रायिकता) समान है। अत: हमने प्रायिकता को परिभाषित करने के लिए सम प्रायिकता या सम संभाव्य परिणामों का उपयोग किया है। यह तार्किक दृष्टि से ठीक परिभाषा नहीं है। इसलिए रूस के गणितज्ञ A.N.Kolomogrove ने एक अन्य प्रायिकता सिद्धांत का विकास किया। उन्होंने 1933 में प्रकाशित अपनी पुस्तक 'प्रायिकता का आधार' (Foundation of Probability) में प्रायिकता की व्याख्या के लिए कुछ स्वत: प्रमाणित तथ्य (अभिगृहीत) निर्धारित किए। इस अध्याय में हम प्रायिकता के इसी दृष्टिकोण, जिसे प्रायिकता का अभिगृहीतीय दृष्टिकोण (Axiomatic approach of probability) कहते हैं, का अध्ययन करेगें। इस दृष्टिकोण को समझने के लिए कुछ मूल शब्दों को जानना आवश्यक है, जैसे कि यादृच्छिक परीक्षण (Random experiment), प्रतिदर्श समष्टि (Sample space), घटनाएँ (events) इत्यादि। आइए इनके बारे में आगे आने वाले अनुभागों में अध्ययन करें।

16.2 यादृच्छिक परीक्षण (Random Experiment)

दैनिक जीवन में हम ऐसे कई क्रियाकलाप करते हैं जिनके परिणाम सदैव एक ही होते हैं चाहे उन्हें कितनी बार भी दोहराया जाए।

उदाहरण के लिए, किसी दिए गए त्रिभुज के कोणों का मान न जानते हुए भी हम निश्चित रूप से कह सकते हैं कि कोणों का योग 180°होगा।

हम इस प्रकार के भी कई प्रायोगिक क्रियाकलाप करते हैं जिन्हें समान परिस्थितियों में दोहराने पर भी परिणाम सदैव एक सा नहीं होता है। उदाहरण के लिए जब एक सिक्के को उछाला जाता है तो चित्त (head) आ सकता है या पट् (tail) आ सकता है लेकिन हम यह निश्चित नहीं कर सकते हैं कि वास्तविक परिणाम इन दोनों में से क्या होगा? इस प्रकार के परीक्षण को यादृच्छिक परीक्षण कहा जाता है। अत: एक परीक्षण को यादृच्छिक परीक्षण कहा जाता है यदि यह निम्नलिखित दो प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है:

(i) इसके एक से अधिक संभावित परिणाम हों।

(ii) परीक्षण के पूर्ण होने से पहले परिणाम बताना संभव न हो।

जाँच कीजिए कि एक पासा को फेंकने का परीक्षण यादृच्छिक है या नहीं?

इस अध्याय में एक यादृच्छिक परीक्षण को केवल परीक्षण कहा गया है जब तक कि अन्यथा व्यक्त न किया गया हो।

16.2.1 *परिणाम और प्रतिदर्श समष्टि (Outcomes and sample space)* किसी यादृच्छिक परीक्षण के किसी सभांवित नतीजे को **परिणाम** कहते हैं।

एक पासा फेकनें के परीक्षण पर विचार करें। यदि हम पासे के ऊपरी फलक पर अंकित बिंदुओं की संख्या में रुचि रखते हैं तो इस परीक्षण के परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 या 6 हैं। सभी परिणामों का समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है।

अत: किसी यादृच्छिक परीक्षण के सभी संभावित परिणामों का समुच्चय उस परीक्षण का **प्रतिदर्श समष्टि** कहलाता है। प्रतिदर्श समष्टि को संकेत S द्वारा प्रकट किया जाता है।

प्रतिदर्श समष्टि का प्रत्येक अवयव एक **प्रतिदर्श बिंदु** कहलाता है। दूसरे शब्दों में, यादृच्छिक परीक्षण का प्रत्येक परिणाम भी **प्रतिदर्श बिंदु** कहलाता है।

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1 दो सिक्कों (एक 1 रु का तथा दूसरा 2 रु का) को एक बार उछाला गया है। प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

हल स्पष्टत: सिक्के इस अर्थ में विभेद्य हैं कि हम उनको पहला सिक्का और दूसरा सिक्का संबोधित कर सकते हैं क्योंकि दोनों सिक्कों में से किसी पर चित्त (H) या पट् (T) प्रकट हो सकते हैं, इसलिए संभव परिणाम निम्नलिखित हो सकते हैं:

दोनों सिक्कों पर चित्त = (H,H) = HH

पहले सिक्के पर चित्त और दूसरे पर पट् = (H,T) = HT

पहले सिक्के पर पट् और दूसरे पर चित्त = (T,H) = TH

दोनों सिक्कों पर पट् = (T,T) = TT

अतएव, दिए हुए परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$ है।

टिप्पणी परीक्षण के परिणाम H तथा T के क्रमित युग्म हैं। सरलता के लिए क्रमित युग्म में स्थित अर्द्ध-विराम (comma) को छोड़ दिया गया है।

उदाहरण 2 पासों के जोड़े (जिसमें एक लाल रंग का और दूसरा नीले रंग का है) को एक बार फेंकने के परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए। प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की संख्या भी ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि नीले रंग के पासे पर 1 और लाल रंग पर 2 प्रकट होता है। हम इस परिणाम को क्रमित युग्म (1, 2) द्वारा निरूपित करते हैं। इसी प्रकार, यदि नीले पासे पर 3 और लाल पर 5 प्रकट होता है, तो इस परिणाम को (3, 5) द्वारा निरूपित करते हैं।

व्यापक रूप से प्रत्येक परिणाम को क्रमित युग्म (x, y), द्वारा निरूपित किया जा सकता है जहाँ x नीले रंग के पासे पर और y लाल पासे पर प्रकट होने वाली संख्याएँ हैं। अतएव, प्रतिदर्श समष्टि निम्नलिखित है:

$S = \{(x, y)$: x नीले पासे पर प्रकट संख्या और y लाल पासे पर प्रकट संख्या है $\}$

इस प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की संख्या $6 \times 6 = 36$ है ओर प्रतिदर्श समष्टि नीचे प्रदत्त है:

$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$
$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$
$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

उदाहरण 3 निम्नलिखित प्रत्येक परीक्षण के लिए उपयुक्त प्रतिदर्श समष्टि का उल्लेख कीजिए

(i) एक बालक की जेब में एक 1 रु, एक 2 रु व एक 5 रु के सिक्के हैं। वह अपनी जेब से एक के बाद एक दो सिक्के निकालता है।

(ii) एक व्यक्ति किसी व्यस्त राजमार्ग पर एक वर्ष में होने वाली दुर्घटनाओं की संख्या लिखता है।

हल (i) मान लीजिए 1 रु का सिक्का Q से, 2 रु का सिक्का H से तथा 5 रू का सिक्का R से निरूपित होते हैं। उसके द्वारा जेब से निकाला गया पहला सिक्का तीन सिक्कों में से कोई भी एक सिक्का Q, H या R हो सकता है। पहले सिक्के Q के संगत दूसरी बार निकाला गया सिक्का H या R हो सकता है। अत: दो सिक्के निकालने का परिणाम QH या QR हो सकता है। इसी प्रकार, H के संगत दूसरी बार निकाला गया सिक्का Q या R हो सकता है। इसलिए, परिणाम HQ या HR हो सकता है। अंततः R के संगत दूसरी बार निकाला गया सिक्का H या Q हो सकता है। इसलिए परिणाम RH या RQ होगा।

अत: प्रतिदर्श समष्टि S={QH, QR, HQ, HR, RH, RQ}है।

(ii) किसी व्यस्त राजमार्ग पर दुर्घटनाओं की संख्या 0 (किसी दुर्घटना के न होने पर) या 1 या 2, या कोई भी धन पूर्णांक हो सकता है।

अत: इस परीक्षण के लिए प्रतिदर्श समष्टि $S = \{0,1,2,...\}$ है:

उदाहरण 4 एक सिक्का उछाला जाता है। यदि उस पर चित्त प्रकट हो तो हम एक थैली, जिसमें 3 नीली एवं 4 सफ़ेद गेंद हैं, में से एक गेंद निकालते हैं। यदि सिक्के पर पट् प्रकट होता है तो हम एक पासा फेंकते हैं। इस परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि का वर्णन कीजिए।

हल मान लीजिए हम नीली गेंदों को B_1, B_2, B_3 और सफ़ेद गेंदों को W_1, W_2, W_3, W_4 से निरूपित करते हैं। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

$S = \{ HB_1, HB_2, HB_3, HW_1, HW_2, HW_3, HW_4, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$है।

यहाँ HB_i का अर्थ है कि सिक्के पर चित्त है और गेंद B_i निकाली गई है। HW_i का अर्थ है कि सिक्के पर चित्त है और गेंद W_i निकाली गई है। इसी प्रकार T_i का अर्थ है कि सिक्के पर पट् और पासे पर संख्या i प्रकट हुई है।

उदाहरण 5 एक ऐसे परीक्षण पर विचार कीजिए जिसमें एक सिक्के को बार-बार तब तक उछालते रहते हैं जब तक उस पर चित्त प्रकट न हो जाए। इसकी प्रतिदर्श समष्टि का वर्णन कीजिए।

हल इस परीक्षण में चित्त प्रथम उछाल या द्वितीय उछाल या तृतीय उछाल इत्यादि में से किसी में भी प्रकट हो सकता है।

अत:, वांछित प्रतिदर्श समष्टि $S = \{H, TH, TTH, TTTH, TTTTH,...\}$ है।

प्रश्नावली 16.1

निम्नलिखित प्रश्नों 1 से 7, में प्रत्येक में निर्दिष्ट परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

1. एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है।

2. एक पासा दो बार फेंका गया है।

3. एक सिक्का चार बार उछाला गया है।

4. एक सिक्का उछाला गया है और एक पासा फेंका गया है।

5. एक सिक्का उछाला गया है और केवल उस दशा में, जब सिक्के पर चित्त प्रकट होता है एक पासा फेंका जाता है।

6. X कमरे में 2 लड़के और 2 लड़कियाँ हैं तथा Y कमरे में 1 लड़का और 3 लड़कियाँ हैं। उस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए जिसमें पहले एक कमरा चुना जाता है फिर एक बच्चा चुना जाता है।

7. एक पासा लाल रंग का, एक सफ़ेद रंग का और एक अन्य पासा नीले रंग का एक थैले में रखे हैं। एक पासा यादृच्छया चुना गया और उसे फेंका गया है, पासे का रंग और इसके ऊपर के फलक पर प्राप्त संख्या को लिखा गया है। प्रतिदर्श समष्टि का वर्णन कीजिए।

8. एक परीक्षण में 2 बच्चों वाले परिवारों में से प्रत्येक में लड़के-लड़कियों की संख्याओं को लिखा जाता है।

(i) यदि हमारी रुचि इस बात को जानने में है कि जन्म के क्रम में बच्चा लड़का या लड़की है तो प्रतिदर्श समष्टि क्या होगी?

(ii) यदि हमारी रुचि किसी परिवार में लड़कियों की संख्या जानने में है तो प्रतिदर्श समष्टि क्या होगी?

9. एक डिब्बे में 1 लाल और एक जैसी 3 सफ़ेद गेंद रखी गई हैं। दो गेंद उत्तरोतर (in succession) बिना प्रतिस्थापित किए यादृच्छया निकाली जाती है। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

10. एक परीक्षण में एक सिक्के को उछाला जाता है और यदि उस पर चित्त प्रकट होता है तो उसे पुनः उछाला जाता है। यदि पहली बार उछालने पर पट् प्राप्त होता है तो एक पासा फेंका जाता है। प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

11. मान लीजिए कि बल्बों के एक ढेर में से 3 बल्ब यादृच्छया निकाले जाते हैं। प्रत्येक बल्ब को जाँचा जाता है और उसे खराब (D) या ठीक (N) में वर्गीकृत करते हैं। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

12. एक सिक्का उछाला जाता है। यदि परिणाम चित्त हो तो एक पासा फेंका जाता है। यदि पासे पर एक सम संख्या प्रकट होती है तो पासे को पुनः फेंका जाता है। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

13. कागज़ की चार पर्चियों पर संख्याएँ 1, 2, 3 और 4 अलग-अलग लिखी गई हैं। इन पर्चियों को एक डिब्बे में रख कर भली-भाँति मिलाया गया है। एक व्यक्ति डिब्बे में से दो पर्चियाँ एक के बाद दूसरी बिना प्रतिस्थापित किए निकालता है। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

14. एक परीक्षण में एक पासा फेंका जाता है और यदि पासे पर प्राप्त संख्या सम है तो एक सिक्का एक बार उछाला जाता है। यदि पासे पर प्राप्त संख्या विषम है, तो सिक्के को दो बार उछालते हैं। प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

15. एक सिक्का उछाला गया। यदि उस पर पट् प्रकट होता है तो एक डिब्बे में से जिसमें 2 लाल और 3 काली गेंदें रखी हैं, एक गेंद निकालते हैं। यदि सिक्के पर चित्त प्रकट होता है तो एक पासा फेंका जाता है। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

16. एक पासा को बार-बार तब तक फेंका जाता है जब तक उस पर 6 प्रकट न हो जाए। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि क्या है?

16.3 घटना (Event)

हमने यादृच्छिक परीक्षण और उसके प्रतिदर्श समष्टि के बारे में पढ़ा है। किसी परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि उस परीक्षण से संबंधित सभी प्रश्नों के लिए सार्वत्रिक समुच्चय (Universal set) होता है।

एक सिक्के को दो बार उछालने के परीक्षण पर विचार कीजिए। संबंधित प्रतिदर्श समष्टि

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$ है।

अब, मान लीजिए कि हमारी रुचि उन परिणामों में है जो तथ्यत: एक चित्त प्रकट होने के अनुकूल होते हैं। हम पाते हैं कि इस घटना के होने के अनुकूल S के अवयव केवल HT और TH हैं। यह दो अवयव एक समुच्चय $E = \{HT, TH\}$ बनाते हैं।

हम जानते हैं कि समुच्चय E प्रतिदर्श समष्टि S का उपसमुच्चय है। इसी प्रकार हम पाते हैं कि विभिन्न घटनाओं और S के उपसमुच्चयों में निम्नलिखित संगतता है:

घटना का वर्णन	**'S' का संगत उपसमुच्चय**
पटों की संख्या तथ्यत: दो है	$A = \{TT\}$
पटों की संख्या कम से कम 1 है	$B = \{HT, TH, TT\}$
चित्तों की संख्या अधिकतम 1 है	$C = \{HT, TH, TT\}$
द्वितीय उछाल में चित्त नहीं है	$D = \{ HT, TT\}$
चित्तों की संख्या अधिकतम दो है	$S = \{HH, HT, TH, TT\}$
चित्तों की संख्या दो से अधिक है	ϕ .

उपर्युक्त चर्चा से यह स्पष्ट है कि प्रतिदर्श समष्टि के किसी उपसमुच्चय के संगत एक घटना होती है और किसी घटना के संगत प्रतिदर्श समष्टि का एक उपसमुच्चय होता है। इसके संदर्भ में एक घटना को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया जाता है:

परिभाषा प्रतिदर्श समष्टि S का कोई उपसमुच्चय एक **घटना** कही जाती है।

16.3.1 ***एक घटना का घटित होना (Occurrence of an event)*** एक पासा को फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि घटना 'पासा पर 4 से छोटी संख्या प्रकट होना' को E से निरूपित किया जाता है। यदि पासा पर वास्तव में '1' प्रकट होता है तो हम कह सकते हैं कि घटना E घटित हुई है। वस्तुत: यदि परिणाम 2 या 3 हैं तो हम कहते हैं कि घटना E घटित हुई है।

अत: किसी परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि S की घटना E घटित हुई कही जाती है यदि परीक्षण का परिणाम ω इस प्रकार है कि $\omega \in E$. यदि परिणाम ω ऐसा है कि $\omega \notin E$,तो हम कहते हैं कि घटना E घटित नहीं हुई है।

16.3.2 *घटनाओं के प्रकार (Types of events)* घटनाओं को उनके अवयवों के आधार पर विभिन्न प्रकारों में वर्गीकृत किया जा सकता है।

1. असंभव व निश्चित घटनाएँ (Impossible and Sure Events) रिक्त समुच्चय ϕ और प्रतिदर्श समष्टि S भी घटनाओं को व्यक्त करते हैं। वास्तव में ϕ को असंभव घटना और S अर्थात् पूर्ण प्रतिदर्श समष्टि को निश्चित घटना कहते हैं।

इन्हें समझने के लिए आइए पासा फेंकने के परीक्षण पर विचार करें। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ है।

मान लीजिए E घटना 'पासे पर प्रकट संख्या 7 का गुणज है' को निरूपित करता है। क्या आप घटना E के संगत उपसमुच्चय लिख सकते हैं?

स्पष्टतया परीक्षण का कोई भी परिणाम घटना E के प्रतिबंध को संतुष्ट नहीं करता है अर्थात् प्रतिदर्श समष्टि का कोई भी अवयव घटना E का घटित होने को निश्चित नहीं करता हैं। अत: हम कह सकते हैं कि केवल रिक्त समुच्चय ही घटना E के संगत समुच्चय है। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि पासे के ऊपरी फलक पर 7 का गुणज प्रकट होना असंभव है।

इस प्रकार घटना $E = \phi$ एक असंभव घटना है।

आइए अब हम एक अन्य घटना F 'पासा पर प्राप्त संख्या या तो सम है या विषम' पर विचार करें। स्पष्टतया

$F = \{1,2,3,4,5,6,\} = S.$

अर्थात् सभी परिणाम घटना F के घटित होने को निश्चित करते हैं। अत: $F = S$ एक निश्चित घटना है।

2. सरल घटना (Simple Event) यदि किसी घटना E में केवल एक ही प्रतिदर्श बिंदु हो, तो घटना E को **सरल या प्रारम्भिक घटना** कहते हैं। ऐसा परीक्षण जिसके प्रतिदर्श समष्टि जिसमें n पृथक अवयव हों, में n सरल घटनाएँ विद्यमान होती हैं।

उदाहरण के लिए, एक सिक्का के दो उछालों वाले परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

S={HH, HT, TH, TT} है।

यहाँ इस प्रतिदर्श समष्टि की चार सरल घटनाएँ हैं, जो निम्नलिखित हैं:

E_1= {HH}, E_2={HT}, E_3= { TH} और E_4={TT}.

3. मिश्र घटना (Compound Events) यदि किसी घटना में एक से अधिक प्रतिदर्श बिंदु होते हैं, तो उसे **मिश्र घटना** कहते हैं। उदाहरण के लिए एक सिक्के की तीन उछालों के परीक्षण में निम्नलिखित घटनाएँ मिश्र घटनाएँ हैं:

E: तथ्यत: एक चित्त प्रकट होना

F: न्यूनतम एक चित्त प्रकट होना

G: अधिकतम एक चित्त प्रकट होना, इत्यादि।

इन घटनाओं के संगत S के उपसमुच्चय निम्नलिखित हैं:

E={HTT,THT,TTH}

F={HTT,THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH}

G= {TTT, THT, HTT, TTH}

उपर्युक्त प्रत्येक उपसमुच्चय में एक से अधिक प्रतिदर्श बिंदु हैं इसलिए यह सब मिश्र घटनाएँ हैं।

16.3.3 घटनाओं का बीजगणित (Algebra of Events) समुच्चयों के अध्याय में हमने दो या अधिक समुच्चयों के संयोजन के विभिन्न तरीकों के बारे में पढ़ा था अर्थात् सम्मिलन (union), सर्वनिष्ठ (intersection), अंतर (difference), समुच्चय का पूरक (Complement of a set), इत्यादि के बारे में समझा था। इसी प्रकार हम घटनाओं का संयोजन समुच्चय संकेतनों के सदृश उपयोग द्वारा कर सकते हैं।

मान लीजिए A,B,C ऐसे प्रयोग से संबद्ध घटनाएँ हैं जिसकी प्रतिदर्श समष्टि S है।

1. पूरक घटना (Complementary Event) प्रत्येक घटना A के सापेक्ष एक अन्य घटना A′ होती है जिसे घटना A की **पूरक घटना** कहते हैं। A′ को **घटना 'A–नहीं'** भी कहा जाता है।

उदाहरण के लिए 'एक सिक्के की तीन उछालों' के परीक्षण को लें। इसका प्रतिदर्श समष्टि

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT} है।

मान लीजिए A={HTH, HHT, THH} घटना 'केवल एक पट का प्रकट होना' को दर्शाता है। परिणाम HTT के होने पर घटना A घटित नहीं हुई है। किंतु हम कह सकते हैं कि घटना 'A–नहीं' घटित हुई है। इस प्रकार, प्रत्येक परिणाम के लिए जो A में नहीं हैं हम कहते हैं कि 'A–नहीं' घटित हुई है। इस प्रकार घटना A के लिए पूरक घटना 'A–नहीं' अर्थात्

A′= {HHH, HTT, THT, TTH, TTT}

या $A' = \{\omega : \omega \in S$ और $\omega \notin A\} = S - A$ है।

2. घटना 'A या B' (Event A or B) स्मरण कीजिए कि दो समुच्चयों A और B का सम्मिलन $A \cup B$ द्वारा निरूपित किया जाता है जिसमें वह सब अवयव सम्मिलित होते हैं जो या तो A में हैं या B में है या दोनों में हैं।

जब समुच्चय A और B किसी प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित दो घटनाएँ हों तो '$A \cup B$' घटना A या B या दोनों को निरूपित करता है। **घटना '$A \cup B$'** को **'A या B'** भी कहा जाता है।

इसलिए घटना 'A या B' = $A \cup B = \{\omega: \omega \in A$ या $\omega \in B\}$

3. घटना 'A और B' (Event A and B) हम जानते हैं कि दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ $A \cap B$ वह समुच्चय होता है जिसमें वे अवयव होते हैं जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ होते हैं अर्थात् जो A और B दोनों में होते हैं।

यदि 'A और B' दो घटनाएँ हों तो समुच्चय $A \cap B$ घटना 'A और B' को दर्शाता है।

इस प्रकार, $A \cap B = \{\omega : \omega \in A$ और $\omega \in B\}$

उदाहरण के लिए एक पासा को दो बार फेंकने के परीक्षण में मान लीजिए घटना A 'पहली फेंक में संख्या 6 प्रकट होती है' और घटना B 'दो फेंकों पर प्रकट संख्याओं का योग न्यूनतम 11 होता है' को व्यक्त करती हैं। तब

$A = \{(6,1), (6,2\}, (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$ और $B = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$

इसलिए $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$

नोट कीजिए कि समुच्चय $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$, घटना 'पहली फेंक पर 6 प्रकट होता है और दोनों फेंकों पर प्रकट संख्याओं का योग न्यूनतम 11 होता है' को व्यक्त करता है।

4. घटना 'A किंतु B नहीं' (Event A but not B) हम जानते हैं कि $A - B$ उन सभी अवयवों का समुच्चय होता है जो A में तो हैं लेकिन B में नहीं हैं। इसलिए, समुच्चय '$A - B$' घटना **'A किंतु B नहीं'** को व्यक्त कर सकता है। हम जानते हैं कि $A - B = A \cap B'$

उदाहरण 6 एक पासा फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिए। घटना 'एक अभाज्य संख्या प्राप्त होना' को A से और घटना 'एक विषम संख्या प्राप्त होना' को B से निरूपित किया गया है। निम्नलिखित घटनाओं (i) A या B (ii) A और B (iii) A किंतु B नहीं (iv) 'A–नहीं' को निरूपित करने वाले समुच्चय लिखिए।

हल यहाँ $S = \{1,2,3,4,5,6\}, A = \{2,3,5\}$ और $B = \{1,3,5\}$

प्रत्यक्षत:

(i) 'A या B' $= A \cup B = \{1,2,3,5\}$

(ii) 'A और B' $= A \cap B = \{3,5\}$

(iii) 'A किंतु B नहीं' $= A - B = \{2\}$

(iv) 'A–नहीं' $= A' = \{1,4,6\}$

16.3.4 *परस्पर अपवर्जी घटनाएँ (Mutually exclusive events)* पासा फेंकने के परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ है। मान लीजिए घटना A 'एक विषम संख्या का प्रकट होना' और घटना B 'एक सम संख्या का प्रकट होना' को व्यक्त करते हैं।

स्पष्टतया घटना A, घटना B को अपवर्जित कर रही है तथा इसका विलोम भी सत्य है। दूसरे शब्दों में, ऐसा कोई परिणाम नहीं है जो घटना A और B के एक साथ घटित होने को निश्चित करता है यहाँ

$A = \{1, 3, 5\}$ और $B = \{2, 4, 6\}$

स्पष्टतया $A \cap B = \phi$ अर्थात् A और B असंयुक्त समुच्चय हैं।

व्यापकत: दो घटनाएँ A और B **परस्पर अपवर्जी घटनाएँ** कही जाती हैं, यदि इनमें से किसी एक का घटित होना दूसरी के घटित होने को अपवर्जित करता है अर्थात् वे एक साथ घटित नहीं हो सकती हैं। इस दशा में समुच्चय A और B असंयुक्त होते हैं।

पुन: एक पासे को फेंकने के परीक्षण में घटना A 'एक विषम संख्या प्रकट होना' और घटना B '4 से छोटी संख्या प्रकट होना' पर विचार कीजिए।

प्रत्यक्षत: $A = \{1, 3, 5\}$ और $B = \{1, 2, 3\}$

अब $3 \in A$ तथा साथ ही $3 \in B$

इसलिए A और B असंयुक्त नहीं है। अत: A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ नहीं हैं।

टिप्पणी एक प्रतिदर्श समष्टि की सरल घटनाएँ सदैव परस्पर अपवर्जी होती हैं।

16.3.5 नि:शेष घटनाएँ (Exhaustive events) एक पासे को फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिए। हम पाते हैं $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

आइए निम्नलिखित घटनाओं को परिभाषित करें:

A: '4 से छोटी संख्या प्रकट होना',

B: '2 से बड़ी किंतु 5 से छोटी संख्या प्रकट होना'

और C:'4 से बड़ी संख्या प्रकट होना'.

तब $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3,4\}$ और $C = \{5, 6\}$. हम देखते हैं कि

$$A \cup B \cup C = \{1,2,3\} \cup \{3,4\} \cup \{5, 6\} = S.$$

ऐसी घटनाओं A, B और C को **नि:शेष घटनाएँ** कहते हैं। व्यापक रूप से यदि $E_1, E_2, ..., E_n$ किसी प्रतिदर्श समष्टि S की n घटनाएँ हैं और यदि

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 ... \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$$

तब $E_1, E_2, ..., E_n$ को नि:शेष घटनाएँ कहते हैं। दूसरे शब्दों में, घटनाएँ $E_1, E_2, ..., E_n$ नि:शेष कहलाती हैं यदि परीक्षण के करने पर इनमें से कम से कम एक घटना अवश्य ही घटित हो।

इसके अतिरिक्त यदि सभी $i \neq j$ के लिए $E_i \cap E_j = \phi$ अग्रत: यदि $E_i \cap E_j = \phi, i \neq j$ अर्थात् E_i और E_j परस्पर अपवर्जी हैं, और $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$ हो, तो घटनाएँ $E_1, E_2, ..., E_n$ **परस्पर अपवर्जी नि:शेष घटनाएँ** कहलाती हैं।

आइए अब कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 7 दो पासे फेंके जाते हैं और पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग लिखा जाता है। आइए अब हम इस प्रयोग से संबंधित निम्नलिखित घटनाओं पर विचार करें:

A: 'प्राप्त योग सम संख्या है'।

B: 'प्राप्त योग 3 का गुणज है'।

C: 'प्राप्त योग 4 से कम है'।

D: 'प्राप्त योग 11 से अधिक है'।

इन घटनाओं में से कौन से युग्म परस्पर अपवर्जी हैं?

हल प्रतिदर्श समष्टि $S = \{(x, y): x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में 36 अवयव हैं।

तब $A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

$B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (3, 3), (2, 4), (4, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 6)\}$

$C = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2)\}$ और $D = \{(6, 6)\}$

हमें प्राप्त होता है

$$A \cap B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)\} \neq \phi$$

इसलिए, A और B परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।

इसी प्रकार $A \cap C \neq \phi$, $A \cap D \neq \phi$, $B \cap C \neq \phi$, और $B \cap D \neq \phi$,

इस प्रकार युग्म (A, C), (A, D), (B, C), (B, D) परस्पर अपवर्जी नहीं है।
साथ ही $C \cap D \neq \phi$ इसलिए, C और D परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

उदाहरण 8 एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है। निम्नलिखित घटनाओं पर विचार कीजिए:

A: 'कोई चित्त प्रकट नहीं होता है' ,

B: 'तथ्यत: एक चित्त प्रकट होता है' और

C: 'कम से कम दो चित्त प्रकट होते हैं'।

क्या यह परस्पर अपवर्जी और नि:शेष घटनाओं का समुच्चय है?

हल परिणाम का प्रतिदर्श समष्टि

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$ है

और $A = \{TTT\}$, $B = \{HTT, THT, TTH\}$ तथा $C = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$

अब $A \cup B \cup C = \{TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\} = S$

इसलिए, A, B और C नि:शेष घटनाएँ हैं।

साथ ही $A \cap B = \phi$, $A \cap C = \phi$ और $B \cap C = \phi$

इसलिए, घटनाएँ युग्म के अनुसार असंयुक्त हैं अर्थात् वे परस्पर अपवर्जी हैं।

अत: A, B और C परस्पर अपवर्जी व नि:शेष घटनाओं का समुच्चय बनाते हैं।

प्रश्नावली 16.2

1. एक पासा फेंका जाता है। मान लीजिए घटना E 'पासे पर संख्या 4 दर्शाता' है और घटना F 'पासे पर सम संख्या दर्शाता' है। क्या E और F परस्पर अपवर्जी हैं?

2. एक पासा फेंका जाता है। निम्नलिखित घटनाओं का वर्णन कीजिए:

(i) A: संख्या 7 से कम है। (ii) B: संख्या 7 से बड़ी है।

(iii) C: संख्या 3 का गुणज है। (iv) D: संख्या 4 से कम है।

(v) E: 4 से बड़ी सम संख्या है। (vi) F: संख्या 3 से कम नहीं है।

$A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $E \cap F$, $D \cap E$, $A - C$, $D - E$, $E \cap F'$, F' भी ज्ञात कीजिए।

3. एक परीक्षण में पासें के एक जोड़े को फेंकते हैं और उन पर प्रकट संख्याओं को लिखते हैं। निम्नलिखित घटनाओं का वर्णन कीजिए:

A: प्राप्त संख्याओं का योग 8 से अधिक है।

B: दोनों पासों पर संख्या 2 प्रकट होती है।

C: प्रकट संख्याओं का योग कम से कम 7 है और 3 का गुणज है।

इन घटनाओं के कौन-कौन से युग्म परस्पर अपवर्जी हैं?

4. तीन सिक्कों को एक बार उछाला जाता है। मान लीजिए कि घटना 'तीन चित्त दिखना' को A से, घटना 'दो चित्त और एक पट् दिखना' को B से, घटना 'तीन पट् दिखना' को C और घटना 'पहले सिक्के पर चित्त दिखना' को D से निरूपित किया गया है। बताइए कि इनमें से कौन सी घटनाएँ (i) परस्पर अपवर्जी हैं? (ii) सरल हैं ? (iii) मिश्र हैं ?

5. तीन सिक्के एक बार उछाले जाते हैं। वर्णन कीजिए।

(i) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं।

(ii) तीन घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी और नि:शेष हैं।

(iii) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।

(iv) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं किंतु नि:शेष नहीं हैं।

(v) तीन घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं किंतु नि:शेष नहीं हैं।

6. दो पासे फेंके जाते हैं। घटनाएँ A, B और C निम्नलिखित प्रकार से हैं:

A: पहले पासे पर सम संख्या प्राप्त होना

B: पहले पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना

C: पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग ≤ 5 होना

निम्नलिखित घटनाओं का वर्णन कीजिए:

(i) A' (ii) B-नहीं (iii) A या B

(iv) A और B (v) A किंतु C नहीं (vi) B या C

(vii) B और C (viii) $A \cap B' \cap C'$

7. उपर्युक्त प्रश्न 6 को देखिए और निम्नलिखित में सत्य या असत्य बताइए (अपने उत्तर का कारण दीजिए):

(i) A और B परस्पर अपवर्जी हैं।

(ii) A और B परस्पर अपवर्जी और नि:शेष हैं।

(iii) $A = B'$

(iv) A और C परस्पर अपवर्जी हैं।

(v) A और B' परस्पर अपवर्जी हैं।

(vi) A', B', C परस्पर अपवर्जी और नि:शेष घटनाएँ हैं।

16.4 प्रायिकता की अभिगृहीतीय दृष्टिकोण (Axiomatic Approach to Probability)

इस अध्याय के पहले अनुच्छेदों में हमने यादृच्छिक परीक्षण, प्रतिदर्श समष्टि तथा इन परीक्षणों से संबंधित घटनाओं पर विचार किया है। हम अपने दैनिक जीवन में किसी घटना के घटित होने की संभावना के लिए अनेक शब्दों का उपयोग करते हैं। प्रायिकता सिद्धांत किसी घटना के घटित होने या न होने की संभावना को एक माप देने का प्रयास है।

पिछली कक्षाओं में हमने किसी परीक्षण में कुल संभावित परिणामों की संख्या ज्ञात होने पर, किसी घटना की प्रायिकता ज्ञात करने की कुछ विधियों के बारे में पढ़ा है।

किसी घटना की प्रायिकता ज्ञात करने की एक और विधि अभिगृहीतीय दृष्टिकोण है। इस तरीका में प्रायिकताएँ निर्धारित करने के लिए अभिगृहीतियों या नियमों को **बर्णित** (depict) किया गया है।

मान लें कि किसी यादृच्छिक परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि S है। प्रायिकता P एक वास्तविक मानीय फलन है जिसका प्रांत S का घात समुच्चय है, और परिसर अंतराल [0,1] है जो निम्नलिखित अभिगृहीतियों को संतुष्ट करता है:

(i) किसी घटना E, के लिए, $P(E) \geq 0$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) यदि E और F परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं तो $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$.

अभिगृहित (iii) से यह अनुसरित होता है कि $P(\phi) = 0$. इसे सिद्ध करने के लिए हम $F = \phi$ लेते हैं और देखते हैं कि E और ϕ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ है, इसलिए अभिगृहीत (iii) से हम पाते हैं कि

$P(E \cup \phi) = P(E) + P(\phi)$ या $P(E) = P(E) + P(\phi)$ अर्थात् $P(\phi) = 0$

मान लीजिए कि $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ प्रतिदर्श समष्टि S के परिणाम हैं अर्थात्

$$S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$$ है।

प्रायिकता की अभिगृहीतीय परिभाषा से यह निष्कर्ष निकलता है कि

(i) प्रत्येक $\omega_i \in S$ के लिए $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$

(ii) $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_n) = 1$

(iii) किसी घटना ω_i के लिए $P(A) = \Sigma P(\omega_i), \omega_i \in A$

टिप्पणी ध्यान दीजिए कि एकल समुच्चय $\{\omega_i\}$ को **सरल घटना** कहते हैं और संकेतन की सुविधा के लिए हम $P(\{\omega_i\})$ को $P(\omega_i)$ लिखते हैं।

उदाहरण के लिए एक सिक्के को उछालने के परीक्षण में हम प्रत्येक परिणाम H और T के साथ संख्या $\frac{1}{2}$ निर्धारित कर सकते हैं

अर्थात् $$P(H) = \frac{1}{2} \text{ और } P(T) = \frac{1}{2} \quad \ldots (1)$$

स्पष्टतया यह निर्धारण दोनों प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है अर्थात् प्रत्येक संख्या न तो शून्य से छोटी है और न ही एक से बड़ी है

और $$P(H) + P(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

इसलिए इस दशा में हम कह सकते हैं कि

$$H \text{ की प्रायिकता} = \frac{1}{2} \text{ और } T \text{ की प्रायिकता } = \frac{1}{2}.$$

आइए हम $P(H) = \frac{1}{4}$ और $P(T) = \frac{3}{4}$ लेते हैं। ... (2)

क्या यह निर्धारण अभिगृहीतीय तरीका के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है?

हाँ, इस दशा में H की प्रायिकता $= \frac{1}{4}$ और T की प्रायिकता $= \frac{3}{4}$ है।

हम पाते हैं कि दोनों प्रायिकता निर्धारण (1) और (2), H और T की प्रायिकताओं के लिए वैध हैं।

वास्तव में दोनों परिणामों H तथा T की प्रायिकताओं के लिए संख्याएँ क्रमशः p तथा $(1 - p)$ निर्धारित कर सकते हैं, जबकि $0 \le p \le 1$ और $P(H) + P(T) = p + (1 - p) = 1$

यह प्रायिकता निर्धारण भी अभिगृहीतीय दृष्टिकोण के प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं। अतः हम कह सकते हैं कि किसी परीक्षण के परिणामों के साथ प्रायिकता वितरण अनेक (या यह कहना अधिक उचित्त होगा कि अनंत) प्रकार से किया जा सकता है।

आइए अब कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 9 मान लीजिए एक प्रतिदर्श समष्टि $S = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$ है। निम्नलिखित में से प्रत्येक परिणाम के लिए कौन-कौन से प्रायिकता निर्धारण वैध हैं?

परिणाम	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
(a)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
(b)	1	0	0	0	0	0
(c)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$

(d)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$
(e)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6

हल (a) प्रतिबंध (i): प्रत्येक संख्या $p(\omega_i)$ धनात्मक है और एक से छोटी है।

प्रतिबंध (ii): प्रायिकताओं का योग

$$= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

इसलिए यह प्रायिकता निर्धारण वैध है।

(b) प्रतिबंध (i): प्रत्येक संख्या $p(\omega_i)$ या तो 0 है या 1 है।

प्रतिबंध (ii): प्रायिकताओं का योग $= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$

इसलिए यह निर्धारण वैध है।

(c) प्रतिबंध (i): दो प्रायिकताएँ $p(\omega_5)$ और $p(\omega_6)$ ऋणात्मक हैं। इसलिए यह निर्धारण वैध नहीं है।

(d) क्योंकि $p(\omega_6) = \frac{3}{2} > 1$, इसलिए यह प्रायिकता निर्धारण वैध नहीं है।

(e) क्योंकि प्रायिकताओं का योग $= 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6 = 2.1$ है इसलिए , यह प्रायिकता निर्धारण वैध नहीं है।

16.4.1 घटना की प्रायिकता (*Probability of an event*) एक मशीन द्वारा निर्मित कलमों में से तीन का परीक्षण उन्हें अच्छा (त्रुटिरहित) और खराब (त्रुटियुक्त) में वर्गीकृत करने के लिए किया गया। मान लीजिए कि इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि S है। इस परीक्षण के फ़लस्वरूप हमें 0, 1, 2 या 3 खराब कलमें मिल सकती हैं।

इस प्रयोग के संगत प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG\}\text{है।}$$

जहाँ B एक त्रुटियुक्त या खराब कलम को और G एक अच्छे या त्रुटिरहित कलम को प्रकट करता है।

मान लीजिए, कि परिणामों के लिए निम्नलिखित प्रायिकताएँ निर्धारित की गई हैं:

प्रतिदर्श बिंदु:	BBB	BBG	BGB	GBB	BGG	GBG	GGB	GGG
प्रायिकता:	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

मान लीजिए घटना 'तथ्यत: एक त्रुटियुक्त कलम का निकलना' को A से व घटना 'न्यूनतम दो त्रुटियुक्त कलमों का निकलना' को B से प्रकट करते हैं।

स्पष्टत: $A = \{BGG, GBG, GGB\}$ और $B = \{BBG, BGB, GBB, BBB\}$

अब $P(A) = \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A$

$$= P(BGG) + P(GBG) + P(GGB) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

और $P(B) = \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in B$

$$= P(BBG) + P(BGB) + P(GBB) + P(BBB) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

आइए एक अन्य परीक्षण 'एक सिक्के को दो बार उछालना' पर विचार करें।

इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ है।

मान लीजिए कि विभिन्न परिणामों के लिए निम्नलिखित प्रायिकताएँ निर्धारित की गई हैं:

$$P(HH) = \frac{1}{4},\ P(HT) = \frac{1}{7},\ P(TH) = \frac{2}{7},\ P(TT) = \frac{9}{28}$$

स्पष्टतया यह प्रायिकता निर्धारण अभिगृहीतीय अभिगम के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है। आइए अब हम घटना E 'दोनों उछालों में एक सा ही परिणाम है' की प्रायिकता ज्ञात करें।

यहाँ $E = \{HH, TT\}$

अब सभी $\omega_i \in E$ के लिए $P(E) = \sum P(\omega_i)$, $= P(HH) + P(TT) = \frac{1}{4}+\frac{9}{28}=\frac{4}{7}$

घटना F: 'तथ्यत: दो चित्त' के लिए, हम पाते हैं $F = \{HH\}$

और $P(F) = P(HH) = \frac{1}{4}$

16.4.2 *सम सम्भाव्य परिणामों की प्रायिकता (Probability of equally likely outcomes)*

मान लीजिए कि एक परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

$S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ है

मान लें कि सभी परिणाम सम संभाव्य हैं, अर्थात् प्रत्येक सरल घटना के घटित होने की संभावना समान है।

अर्थात् सभी $\omega_i \in S$ के लिए, $P(\omega_i) = p$, जहाँ $0 \le p \le 1$

क्योंकि $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$ इसलिए $p + p + ... + p$ (n बार) $= 1$

या $np = 1$ या $p = \frac{1}{n}$

मान लीजिए कि प्रतिदर्श समष्टि S की कोई एक घटना E, इस प्रकार है कि $n(S) = n$ और $n(E) = m$. यदि प्रत्येक परिणाम सम संभाव्य है तो यह अनुसरित होता है कि

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभावित परिणामों की संख्या}}$$

16.4.3 *घटना 'A या B' की प्रायिकता (Probability of the event 'A or B')*

आइए अब हम घटना 'A या B', की प्रायिकता अर्थात् $P(A \cup B)$ ज्ञात करें।

मान लीजिए, $A = \{HHT, HTH, THH\}$ और $B = \{HTH, THH, HHH\}$, 'एक सिक्के की तीन उछालों के परीक्षण की दो घटनाएँ हैं।

स्पष्टतया $A \cup B = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$

अब $P(A \cup B) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) + P(HHH)$

यदि सभी परिणाम सम संभाव्य हों तो

$$P(A \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

साथ ही $P(A) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = \frac{3}{8}$

और $P(B) = P(HTH) + P(THH) + P(HHH) = \frac{3}{8}$

इसलिए $P(A) + P(B) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$

यह स्पष्ट है कि $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$

बिंदुओं HTH और THH, A तथा B में उभयनिष्ठ अवयव हैं। P(A) + P(B) के परिकलन में HTH और THH, (अर्थात् $A \cap B$ के अवयव) की प्रायिकता को दो बार सम्मिलित किया गया है। अत: $P(A \cup B)$ को ज्ञात करने के लिए हमें $A \cap B$ के प्रतिदर्श बिंदुओं की प्रायिकताओं को $P(A) + P(B)$ में से घटाना होगा।

अर्थात् $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A \cap B$

$= P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

अत: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

व्यापकत: यदि A और B किसी परीक्षण की कोई दो घटनाएँ हैं तब किसी घटना की प्रायिकता की परिभाषा के अनुसार हमें प्राप्त होता है कि

$$P(A \cup B) = \sum p(\omega_i), \forall \omega_i \in A \cup B.$$

क्योंकि $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$, इसलिए

$P(A \cup B) = \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A–B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in A \cap B\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in B–A\right]$

(क्योंकि A–B, $A \cap B$ और B – A परस्पर अपवर्जी हैं। ... (1)

साथ ही $P(A) + P(B) = \left[\sum p(\omega_i)\ \forall \omega_i \in A\right] + \left[\sum p(\omega_i)\ \forall \omega_i \in B\right]$

$= \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A–B) \cup (A \cap B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (B–A) \cup (A \cap B)\right]$

$= \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A - B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A \cap B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (B–A)\right]$

$+ \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A \cap B)\right]$

$= P(AUB) + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in A \cap B\right]$ [(1) के प्रयोग से]

$= P(A \cup B) + P(A \cap B)$.

अत: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

इस सूत्र का वैकल्पिक प्रमाण निम्नलिखित प्रकार से भी दिया जा सकता है।

$A \cup B = A \cup (B - A)$ जहाँ A और B – A परस्पर अपवर्जी हैं।

और $B = (A \cap B) \cup (B - A)$ जहाँ $A \cap B$ और B – A परस्पर अपवर्जी हैं।

प्रायिकता की अभिगृहीत (iii) द्वारा, हमें प्राप्त होता है कि

$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$ ... (2)

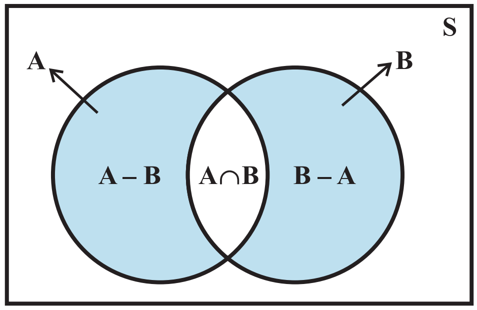
और $P(B) = P(A \cap B) + P(B - A)$ ... (3)

(2) में से (3) घटाने पर,

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

या $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

उपर्युक्त परिणाम को वेन्-आरेख (आकृति 16.1) का अवलोकन करके भी पुन: सत्यापित किया जा सकता है।



आकृति 16.1

यदि A और B असंयुक्त समुच्चय हों अर्थात् ये दोनों परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हों तो $(A \cap B) = \phi$

इसलिए, $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$

अत: परस्पर अपवर्जी घटनाओं A और B, के लिए, हम पाते हैं

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, जो कि प्रायिकता की अभिगृहीत (iii) ही है।

16.4.4 ***घटना 'A-नहीं' की प्रायिकता (Probability of event 'not A')*** 1 से 10 तक अंकित पूर्णांकों वाले दस पत्तों के डेक में से एक पत्ता निकालने के परीक्षण की घटना $A = \{2, 4, 6, 8\}$ पर विचार कीजिए। स्पष्टतया प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ है।

यदि सभी परिणामों 1, 2, 3,...,10 को सम संभाव्य मान लें तो प्रत्येक परिणाम की प्रायिकता $\frac{1}{10}$ होगी।

अब $$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) + P(8)$$

$$= \frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

साथ ही घटना 'A-नहीं' $= A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

अब $$P(A') = P(1) + P(3) + P(5) + P(7) + P(9) + P(10)$$

$$= \frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

इस प्रकार $$P(A') = \frac{3}{5}=1-\frac{2}{5}=1-P(A)$$

साथ ही हमें यह भी पता है कि A′ तथा A परस्पर अपवर्जी और नि:शेष घटनाएँ हैं।

अत: $A \cap A' = \phi$ और $A \cup A' = S$

या $P(A \cup A') = P(S)$

अब $P(A) + P(A') = 1$, अभिगृहीतों (ii) और (iii) के प्रयोग द्वारा

या $P(A') = P(A \text{ नहीं}) = 1 - P(A)$

आइए सम संभावित परिणामों वाले परीक्षणों के लिए कुछ उदाहरणों व प्रश्नों पर विचार करें, जब तक कि अन्यथा न कहा गया हो।

उदाहरण 10 ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया है। निकाले गए पत्ते की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि

(i) पत्ता ईंट का है। (ii) पत्ता इक्का नहीं है।
(iii) पत्ता काले रंग का है (अर्थात् चिड़ी या हुकुम का),
(iv) पत्ता ईंट का नहीं है। (v) पत्ता काले रंग का नहीं है।

हल जब 52 पत्तों की भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में एक पत्ता निकाला जाता है तो संभव परिणामों की संख्या 52 है।

(i) मान लीजिए घटना 'निकाला गया पत्ता ईंट का है, को A से दर्शाया गया है।
स्पष्टतया A में अवयवों की संख्या 13 है।

इसलिए, $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

अर्थात्, एक ईंट का पत्ता निकालने की प्रायिकता $= \frac{1}{4}$

(ii) मान लीजिए कि घटना 'निकाला गया पत्ता इक्का है' को B से दर्शाते हैं।
इसलिए 'निकाला गया पत्ता इक्का नहीं है' को B′ से दर्शाया जाएगा।

अब $$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{52} = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

(iii) मान लीजिए घटना 'निकाला गया पत्ता काले रंग का है' को C से दर्शाते हैं।
इसलिए समुच्चय C में अवयवों की संख्या $= 26$

अर्थात् $$P(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

इस प्रकार काले रंग का पत्ता निकालने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

(iv) हमने उपर्युक्त (i) में माना है कि घटना 'निकाला गया पत्ता ईंट का है' को A से दर्शाते हैं। इसलिए घटना 'निकाला गया पत्ता ईंट का नहीं है' को A′ या 'A-नहीं' से दर्शाएगें।

अब $$P(\text{A-नहीं}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(v) घटना 'निकाला गया पत्ता काले रंग का नहीं है' को C′ या 'C-नहीं' से दर्शाया जा सकता है।

अब हमें ज्ञात है कि $P(\text{C-नहीं}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

इसलिए, पत्ता काले रंग का न होने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

उदाहरण 11 एक थैले में 9 डिस्क हैं जिनमें से 4 लाल रंग की, 3 नीले रंग की और 2 पीले रंग की हैं। डिस्क आकार एवं माप में समरूप हैं। थैले में से एक डिस्क यादृच्छया निकाली जाती है। प्रायकिता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई डिस्क (i) लाल रंग की है (ii) पीले रंग की है (iii) नीले रंग की है (iv) नीले रंग की नहीं है, (v) लाल रंग की है या नीले रंग की है।

हल डिस्कों की कुल संख्या 9 है। इसलिए संभव परिणामों की कुल संख्या 9 हुई।

मान लीजिए घटनाओं A, B व C को इस प्रकार से परिभाषित किया गया है।

A: निकाली गई डिस्क लाल रंग की है।

B: निकाली गई डिस्क पीले रंग की है।

C: निकाली गई डिस्क नीले रंग की है।

(i) लाल रंग की डिस्कों की संख्या = 4 अर्थात् n (A) = 4

अतः $P(A) = \frac{4}{9}$

(ii) पीले रंग की डिस्कों की संख्या = 2, अर्थात् n (B) = 2

इसलिए, $P(B) = \frac{2}{9}$

(iii) नीले रंग की डिस्कों की संख्या = 3, अर्थात् n(C) = 3

इसलिए, $P(C) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

(iv) स्पष्टतया घटना 'डिस्क नीले रंग की नहीं है' 'C-नहीं' ही है हम जानते हैं कि P(C-नहीं) = 1 – P(C)

इसलिए P(C-नहीं) = $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(v) घटना 'लाल रंग की डिस्क या नीले रंग की डिस्क' का समुच्चय '$A \cup C$' से वर्णित किया जा सकता है।
क्योंकि, A और C परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, इसलिए

P(A या C) = $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$

उदाहरण 12 दो विद्यार्थियों अनिल और आशिमा एक परीक्षा में प्रविष्ट हुए। अनिल के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.05 है और आशिमा के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.10 है। दोनों के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.02 है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(a) अनिल और आशिमा दोनों परीक्षा में उत्तीर्ण नहीं हो पाएगें।

(b) दोनों में से कम से कम एक परीक्षा में उत्तीर्ण नहीं होगा।

(c) दोनों में से केवल एक परीक्षा में उत्तीर्ण होगा।

हल मान लीजिए E तथा F घटनाओं 'अनिल परीक्षा उत्तीर्ण कर लेगा' और 'आशिमा परीक्षा उत्तीर्ण कर लेगी' को क्रमशः दर्शाते हैं।

इसलिए $P(E) = 0.05$, $P(F) = 0.10$ और $P(E \cap F) = 0.02$.

तब

(a) घटना 'दोनों परीक्षा उत्तींण नहीं होंगे' को $E' \cap F'$ से दर्शाया जा सकता है।

क्योंकि E' घटना 'E-नहीं', अर्थात् 'अनिल परीक्षा उत्तीर्ण नहीं करेगा' तथा F' घटना 'F-नहीं', अर्थात् 'आशिमा परीक्षा उत्तीर्ण नहीं करेगी' दर्शाते हैं।

साथ ही $E' \cap F' = (E \cup F)'$ (डी-मोरगन् नियम द्वारा)

अब $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

या $P(E \cup F) = 0.05 + 0.10 - 0.02 = 0.13$

इसलिए $P(E' \cap F') = P(E \cup F)' = 1 - P(E \cup F) = 1 - 0.13 = 0.87$