1. **A સત્ય બોલે છે તેની સંભાવના $\frac{4}{5}$ છે. એક સિક્કો ઉછાળ્યો છે. A માહિતી આપે છે કે છાપ મળી છે. ખરેખર છાપ હતી તેની સંભાવના .... હોય.**

(A) $\frac{4}{5}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{5}$ **(D)** $\frac{2}{5}$

જવાબ **(A)** $\frac{4}{5}$

➡ ધારો કે ઘટના E_1 = સિક્કો ઉછાળતા છાપ મળે.

ઘટના E_2 = સિક્કો ઉછાળતા છાપ ન મળે.

અર્થાત્ કાંટો મળે.

$\therefore P(E_1) = \frac{1}{2},\ P(E_2) = \frac{1}{2}$

$P(A \mid E_1)$ = જ્યારે સિક્કા પર છાપ મળે ત્યારે A કહે કે છાપ મળે છે. અર્થાત્ A સત્ય બોલે છે.

$= \frac{4}{5}$

$P(A \mid E_2)$ = જ્યારે સિક્કા પર છાપ ન મળે ત્યારે A કહે કે છાપ મળે છે. અર્થાત્ A સાચું બોલે નહિ.

$= 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

હવે, A માહિતી આપે છે કે છાપ મળી અને ખરેખર છાપ મળી હતી તેની સંભાવના,

$$A(E_1 \mid A) = \frac{P(E_1)\,P(A \mid E_1)}{P(E_1)\,P(A \mid E_1) + P(E_2)\,P(A \mid E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}}{\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$$

$\therefore$ વિકલ્પ (A) સત્ય છે.

2. **જો $P(B) \neq 0$ અને $A \subset B$ હોય તેવી બે ઘટનાઓ A અને B માટે નીચેનામાંથી કયું સત્ય છે ?**

(A) $P(A \mid B) = \frac{P(B)}{P(A)}$ **(B)** $P(A \mid B) < P(A)$

(C) $P(A \mid B) \geq P(A)$ **(D) આમાંથી એક પણ નહિ.**

જવાબ **(B)** $P(A \mid B) < P(A)$

$P(B) \neq 0$ અને $A \subset B$

$\therefore A \cap B = A$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A)}{P(B)}$$

પરંતુ $P(B) \le 1$

$\therefore$ $P(A \mid B) < P(A)$

$\therefore$ વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

3. એક કંપની પાસે સ્કૂટર ઉત્પાદનનાં બે પ્લાન્ટ છે.
પ્લાન્ટ-Iમાં 70% સ્કૂટરનું ઉત્પાદન થાય છે.
જ્યારે પ્લાન્ટ-IIમાં 30% સ્કૂટરનું ઉત્પાદન થાય છે.
પ્લાન્ટ-Iમાં 80% સ્કૂટરોની ગુણવત્તા સારી છે.
પ્લાન્ટ-IIમાં 90% સ્કૂટરોની ગુણવત્તા સારી છે.
યાદચ્છિક રીતે સારી ગુણવત્તા ધરાવતું એક સ્કૂટર પસંદ કરવામાં આવે તો આ સ્કૂટરનું ઉત્પાદન પ્લાન્ટ-IIમાં થયું હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

➥ $\frac{27}{83}$

4. ત્રણ થેલામાં દરેકમાં 5 સફેદ અને 3 કાળા દડાઓ આવેલા છે. જ્યારે બીજા બે થેલામાં દરેકમાં 2 સફેદ અને 4 કાળા દડાઓ આવેલા છે. યાદચ્છિક રીતે એક સફેદ દડો પસંદ કરવામાં આવે છે. આ પસંદ થયેલ સફેદ દડો પ્રથમ સમૂહમાં આવેલ થેલામાંનો હોય તેની સંભાવના શોધો.

➥ $\frac{45}{61}$

5. એક કંપનીને ત્રણ ઉત્પાદન સ્થળો છે. ઉત્પાદન સ્થળ Aમાં 30% ઉત્પાદન થાય છે. B સ્થળે 50% ઉત્પાદન થાય છે. C સ્થળે 20% ઉત્પાદન થાય છે. ધારો કે A, B, C સ્થળે ઉત્પાદિત વસ્તુઓમાં અનુક્રમે 1%, 4% અને 3% ખામીવાળી વસ્તુઓનું ઉત્પાદન થાય છે. કુલ ઉત્પાદિત વસ્તુઓમાંથી ગમે તે એક વસ્તુને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલ વસ્તુ ખામીવાળી હોય તેની સંભાવના શોધો.

➥ **0.029**

6. એક કૉલેજમાં 25% છોકરાઓ અને 10% છોકરીઓ ગણિત વિષયનો અભ્યાસ કરે છે. કૉલેજમાં કુલ વિદ્યાર્થીઓમાં છોકરીઓનું પ્રમાણ 60% છે. તો ગણિત વિષયનો અભ્યાસ થતો હોય તેની સંભાવના શોધો.

➥ $\frac{4}{5}$

7. 100માંથી 5 પુરુષો સારા વક્તા છે અને 1000માંથી 25 સ્ત્રીઓ સારી વક્તા છે. પુરુષ અને સ્ત્રીની સંખ્યા સમાન છે. યાદચ્છિક રીતે એક સારો વક્તા પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલ વક્તા પુરુષ હોય તેની સંભાવના શોધો.

➥ $\frac{2}{3}$

8. એક જાહેર પરીક્ષામાં બહુવિકલ્પ પ્રકારના પ્રશ્નો છે. દરેક પ્રશ્નમાં ચાર વિકલ્પો હોય છે. જેમાંથી એક વિકલ્પ સાચો હોય છે. વિદ્યાર્થી પ્રશ્નનો જવાબ જાણતો હોય તેની સંભાવના 90%. જો તે પ્રશ્નનો સાચો જવાબ આપે તો તેને અનુમાન કરીને (guessing) આપેલ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

➥ $\frac{1}{37}$

9. એક વર્ષના સમયગાળા માટે વાહનોનો વીમા ઉતારતી એક સામાન્ય વીમા કંપની તેના વીમેદારોનું નીચેના ત્રણ પરસ્પર નિવારક સમૂહોમાં વર્ગીકરણ કરે છે.
સમૂહ T_1 : અતિશય જોખમી પ્રકૃતિવાળા
સમૂહ T_2 : જોખમી પ્રકૃતિવાળા
સમૂહ T_3 : ઓછા જોખમી પ્રકૃતિવાળા

ભૂતકાળના અનુભવને આધારે કંપનીને માલૂમ પડે છે કે તેના વીમેદારો પૈકીના 30% સમૂહ T_1 માં, 50% સમૂહ T_2માં અને બાકીના સમૂહ T_3માં સમાવિષ્ટ છે. જો સમૂહ T_1, T_2 અને T_3માં સમાવિષ્ટ હોય તેવા વીમેદારોને વીમાના વર્ષમાં અકસ્માત નડે તેની સંભાવના અનુક્રમે 0.30, 0.15 અને 0.05 હોય તો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વીમેદારને અકસ્માત ન નડ્યો હોય તો તે T_2 સમૂહનો સભ્ય હોય તેની સંભાવના શોધો.

➥ $\frac{17}{33}$

10. બોલ્ટ બનાવતા એક કારખાનામાં મશીન A, B, C એ કુલ ઉત્પાદનના 25%, 35% અને 40% બોલ્ટનું ઉત્પાદન કરે છે. આ ઉત્પાદનમાંથી અનુક્રમે 5%, 4% અને 2% બોલ્ટ ખામીવાળા ઉત્પાદિત થાય છે. એક બોલ્ટની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે છે અને તે ખામીવાળો માલૂમ પડે છે. તો આ બોલ્ટ મશીન B દ્વારા ઉત્પાદિત હોય તેની સંભાવના શોધો.

➥ 0.41

11. પેટી I, II અને IIIમાં નીચે મુજબ દડાઓ આવેલા છે.

પેટી	I	II	III
સફેદ દડા :	1	2	4
કાળા દડા :	2	1	5
લાલ દડા :	3	1	3

એક પેટી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે અને તેમાંથી 2 દડા પસંદ કરવામાં આવે છે. જે એક સફેદ અને એક લાલ હોય તેમ માલૂમ પડે છે. આ દડા પેટી Iમાંથી પસંદ થયા હોય તેની સંભાવના શોધો.

➥ $\frac{33}{118}$

12. એક માણસ 4 વખતમાંથી 3 વાર સાચું બોલે છે. આ માણસ એક પાસો ઉછાળે છે અને કહે છે કે પાસા ઉપર 6 મળ્યા. ખરેખર પાસા ઉપર 6 જ મળ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

➥ $\frac{3}{8}$

13. ત્રણ પેટીઓ I, II, III આપેલ છે. પેટી Iમાં બે સોનાના સિક્કા, પેટી IIમાં બે ચાંદીના સિક્કા તથા પેટી IIIમાં એક સોનાનો અને એક ચાંદીનો સિક્કો છે. એક વ્યક્તિ યાદચ્છિક રીતે એક પેટી પસંદ કરી તેમાંથી એક સિક્કો લે છે. જો આ સિક્કો સોનાનો હોય તો પેટીમાં બીજો સિક્કો પણ સોનાનો જ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

➥ $\frac{2}{3}$

14. એક પત્ર ક્યાં તો TATANAGARથી આવેલો છે અથવા CALCUTTAથી આવેલો છે. પત્રના પરબીડિયા ઉપર ફક્ત 'TA' દૃશ્યમાન છે. તો આ પત્ર CALCUTTAથી આવ્યો હોય તેની સંભાવના શોધો.

➥ $\frac{4}{11}$

15. છાતીના X-ray રિપોર્ટને તપાસતાં, જ્યારે વ્યક્તિને T.B. હોય અને રિપોર્ટમાં T.B. આવે તેની સંભાવના 0.99 છે. X-ray રિપોર્ટને આધારે ડૉક્ટરનું અનુમાન ખોટું હોય તેની સંભાવના 0.001 છે. એક શહેરમાં 1000 વ્યક્તિઓમાંથી 1 વ્યક્તિને T.B. છે. યાદચ્છિક રીતે એક વ્યક્તિને પસંદ કરવામાં આવે છે. આ વ્યક્તિને T.B. છે તેવું અનુમાન કરવામાં આવે છે. તો વાસ્તવમાં સાચે જ તે વ્યક્તિને T.B. હોય તેની સંભાવના શોધો.

➥ $\frac{116}{221}$

16. એક પેટીમાં N સિક્કા છે. તેમાંથી M સિક્કા સમતોલ છે અને બાકીના સિક્કા સમતોલ નથી, જ્યારે સમતોલ સિક્કો ઉછાળીએ ત્યારે છાપ આવે તેની સંભાવના $\frac{1}{2}$ છે, જ્યારે સમતોલ ન હોય તેવો સિક્કો ઉછાળીએ ત્યારે છાપ આવે તેની સંભાવના $\frac{2}{3}$ છે. પેટીમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક સિક્કો પસંદ કરવામાં આવે છે અને તેને બે વખત ઉછાળવામાં આવે છે. પ્રથમ વખત છાપ આવે અને બીજી વખત કાંટો આવે છે તેમ આપેલ છે. તો પસંદ થયેલ સિક્કો સમતોલ હોવાની સંભાવના $\frac{9M}{8N+M}$ છે. તેમ સાબિત કરો.

➥ સ્વપ્રયત્ને

17. **એક રેલવે રિઝર્વેશન કાર્યાલયમાં બે કારકુન રિઝર્વેશન ફૉર્મની ચકાસણી કરે છે. પ્રથમ કારકુન સરેરાશ 55% ફૉર્મની ચકાસણી કરે છે, જ્યારે બાકીનાં ફૉર્મની ચકાસણી બીજો કારકુન કરે છે. પ્રથમ કારકુનની ફૉર્મ ચકાસણીમાં ભૂલનું પ્રમાણ 0.33 હોય છે. જ્યારે બીજા કારકુનની ફૉર્મ ચકાસણીમાં ભૂલનું પ્રમાણ 0.02 છે. દિવસ દરમિયાન ચકાસણી થયેલ ફૉર્મમાંથી એક ફૉર્મ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે અને માલૂમ પડ્યું કે તેમાં ચકાસણી દરમિયાન ભૂલ થઈ છે. આ ભૂલ બીજા કારકુનથી થઈ હોય તેની સંભાવના શોધો.**

➥ $\frac{18}{51}$

18. **5% પુરુષો અને 0.25% સ્ત્રીઓનાં વાળ ભૂરા છે. યાદચ્છિક રીતે ભૂરા વાળ ધરાવતી એક વ્યક્તિ પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલ વ્યક્તિ પુરુષ હોય તેની સંભાવના કેટલી ? સ્ત્રી અને પુરુષોની સંખ્યા સમાન ધારવામાં આવે છે.**

➥ $\frac{20}{21}$

19. **બહુવિકલ્પ કસોટીમાં પ્રશ્નનો જવાબ આપવામાં, વિદ્યાર્થી કાં તો જવાબ જાણે છે અથવા અનુમાન કરે છે. વિદ્યાર્થી જવાબ જાણે છે તેની સંભાવના $\frac{3}{4}$ અને અનુમાન કરે છે તેની સંભાવના $\frac{1}{4}$ છે. માની લો કે વિદ્યાર્થી જે જવાબનું અનુમાન કરે છે તે સાચો હોય તેની સંભાવના $\frac{1}{4}$ છે. આપેલ હોય કે તેણે તે જવાબ સાચો આપ્યો છે ત્યારે વિદ્યાર્થીએ આપેલ જવાબ તે જાણતો હતો તેની સંભાવના કેટલી ?**

➥ ધારો કે ઘટના E_1 = વિદ્યાર્થી પ્રશ્નનો જવાબ જાણે છે.

ઘટના E_2 = વિદ્યાર્થી પ્રશ્નના જવાબનું અનુમાન કરે છે.

ઘટના A = વિદ્યાર્થી સાચો જવાબ આપે છે.

આપેલ માહિતીના આધારે,

$P(E_1) = \frac{3}{4}, \quad P(E_2) = \frac{1}{4},$

$P(A|E_2) = \frac{1}{4}$

અહીં E_1 અને E_2 પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ છે.

$P(A|E_1)$ = વિદ્યાર્થી પ્રશ્નનો જવાબ જાણે અને તે સાચો આપે છે.

$= 1$

માંગેલ સંભાવના $= P(E_1|A)$

$$= \frac{P(E_1) \cdot P(A|E_1)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_1)\,P(A|E_1)}{P(E_1)\,P(A|E_1) + P(E_2)\,P(A|E_2)}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} \times 1}{\frac{3}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{13}{16}} = \frac{12}{13}$$

20. **ત્રણ સિક્કા આપેલ છે. એક સિક્કાની બંને બાજુ છાપ છે. બીજો અસમતોલ સિક્કો છે. તેમાં છાપ મળવાની સંભાવના 75 % છે અને ત્રીજો સમતોલ સિક્કો છે. ત્રણમાંથી એક સિક્કો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરીને ઉછાળ્યો. તે છાપ બતાવે છે, તો તે બે છાપ ધરાવતો સિક્કો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?**

➥ ત્રણ સિક્કા આપેલ છે.

ઘટના E_1 = સિક્કાની બંને બાજુ છાપ છે.

ઘટના E_2 = અસમતોલ સિક્કો છે.

ઘટના E_3 = સમતોલ સિક્કો છે.

ઘટના A = યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ સિક્કો છાપ બતાવે છે.

$\therefore\ P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$

$P(A|E_1) = 1,\ P(A|E_2) = 75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

$P(A|E_3) = \frac{1}{2}$

માંગેલ સંભાવના = $P(E_1|A)$

$$= \frac{P(E_1)P(A|E_1)}{P(E_1)\,P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) + P(E_3)\,P(A|E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\left[1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right]}$$

$$= \frac{4}{4+3+2} = \frac{4}{9}$$

21. એક પાત્રમાં 5 લાલ રંગના અને 5 કાળા રંગના દડા છે. યાદચ્છિક રીતે એક દડો પસંદ કરવામાં આવે છે. તેનો રંગ નોંધીને તેને પાત્રમાં પાછો મૂકી દેવાય છે. તદુપરાંત, જે રંગ નોંધ્યો હતો તે રંગના 2 વધારાના દડા પાત્રમાં મૂકવામાં આવે છે અને ત્યાર બાદ એક દડો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. બીજો દડો લાલ રંગનો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

➡

દડાઓની સંખ્યા	ઘટના A ઉદ્ભવ્યા બાદ	ઘટના B ઉદ્ભવ્યા બાદ
લાલ રંગના = 5	7	5
કાળા રંગના = 5	5	7
કુલ = 10	12	12

ધારો કે ઘટના A =યાદચ્છિક રીતે પસંદ થયેલ દડો લાલ રંગનો હોય.

ઘટના B = યાદચ્છિક રીતે પસંદ થયેલ દડો કાળા રંગનો હોય.

$\therefore P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},\quad P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

ઘટના C = પસંદ થયેલ બીજો દડો લાલ રંગનો હોય.

$\therefore P(C|A) = \frac{7}{12}$

($\because$ ઘટના A ઉદ્ભવ્યા બાદ પાત્રમાં લાલ દડા 5 + 2 = 7 થાય છે. કુલ દડા = 12)

$\therefore P(C|B) = \frac{5}{12}$

($\because$ ઘટના B ઉદ્ભવ્યા બાદ પાત્રમાં લાલ દડા 5 + 2 = 7 થાય છે. કુલ દડા = 12)

હવે P(C) = P(A) P(C | A) + P(B) P(C | B)

$$= \frac{1}{2} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{12}$$

$$= \frac{7}{24} + \frac{5}{24}$$

$$= \frac{12}{24}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\therefore$ બીજો દડો લાલ રંગનો હોવાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ છે.

22. એક થેલામાં 4 લાલ રંગના અને 4 કાળા રંગના દડા છે. બીજા થેલામાં 2 લાલ રંગના અને 6 કાળા રંગના દડા છે. બેમાંથી એક થેલો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે અને એક દડો તે થેલામાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. તે લાલ રંગનો માલૂમ પડે છે. દડો પહેલા થેલામાંથી પસંદ કર્યો હોય તેની સંભાવના શોધો.

➡

	થેલી I	થેલી II
લાલ રંગના દડા	4	2
કાળા રંગના દડા	4	6

ઘટના E_1 = પ્રથમ થેલો પસંદ થાય.

ઘટના E_2 = બીજો થેલો પસંદ થાય.

$\therefore P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$

ઘટના A = થેલામાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ થયેલ દડો લાલ હોય.

$P(A | E_1) = \frac{4}{8}, \ \ P(A | E_2) = \frac{2}{8}$

દડો પહેલા થેલામાંથી પસંદ કર્યો હોય તેની સંભાવના

$$= P(E_1 | A) = \frac{P(E_1) \cdot P(A | E_1)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_1) P(A | E_1)}{P(A | E_1) P(E_1) + P(A | E_2) P(E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{8}}{\frac{4}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{8} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના $= \frac{2}{3}$

23. કૉલેજના વિદ્યાર્થીઓ પૈકી 60 % વિદ્યાર્થીઓ છાત્રાલયમાં રહે છે અને 40 % વિદ્યાર્થીઓ છાત્રાલયમાં રહેતા નથી તેમ જ્ઞાત છે. આગળના વર્ષના પરિણામ પરથી માહિતી મળે છે કે, છાત્રાલયમાં રહેતા વિદ્યાર્થીઓ પૈકી 30 % વિદ્યાર્થીઓએ વાર્ષિક પરીક્ષામાં A ગ્રેડ મેળવ્યો છે અને છાત્રાલયમાં નહિ રહેનારા વિદ્યાર્થીઓ પૈકીના 20 % વિદ્યાર્થીઓએ તેમની વાર્ષિક પરીક્ષામાં A ગ્રેડ મેળવ્યો છે. વર્ષાન્તે કૉલેજમાંથી એક વિદ્યાર્થી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવ્યો અને તેણે A ગ્રેડ મેળવ્યો છે તેમ આપેલ હોય, તો આ વિદ્યાર્થી છાત્રાલયનો હોવાની સંભાવના કેટલી ?

➥ ધારો કે ઘટના E_1 = વિદ્યાર્થી છાત્રાલયમાં રહે છે.

ઘટના E_2 = વિદ્યાર્થી છાત્રાલયમાં રહેતા નથી.

ઘટના A = વિદ્યાર્થી A ગ્રેડ મેળવે છે.

આપેલ માહિતીને આધારે,

$$P(E_1) = \frac{60}{100} = \frac{6}{10}, \qquad P(E_2) = \frac{40}{100} = \frac{4}{10}$$

$$P(A|E_1) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}, \quad P(A|E_2) = \frac{20}{100} = \frac{2}{10}$$

યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વિદ્યાર્થીએ A ગ્રેડ મેળવ્યો છે તેમ આપેલ હોય તો આ વિદ્યાર્થી છાત્રાલયનો હોવાની સંભાવના = $P(E_1|A)$

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1)\,P(A|E_1)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_1)\,P(A|E_1)}{P(E_1)\,P(A|E_1) + P(E_2)\cdot P(A|E_2)}$$

$$= \frac{\frac{6}{10} \times \frac{3}{10}}{\frac{6}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{2}{10}}$$

$$= \frac{18}{18+8}$$

$$= \frac{18}{26}$$

$$= \frac{9}{13}$$

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના $= \frac{9}{13}$

24. એક પ્રયોગશાળા રક્ત પરીક્ષણમાં, જ્યારે તે ખરેખર રોગ હોય ત્યારે તે રોગને શોધી કાઢવામાં 99 % અસરકારક છે. તેમ છતાં, સ્વસ્થ વ્યક્તિનો પરીક્ષણ અહેવાલ ખોટો અને હકારાત્મક 0.5 % સુધી પણ આપે છે. (એટલે કે, જો સ્વસ્થ વ્યક્તિનું પરીક્ષણ કરાય, તો 0.005 સંભાવના સાથે પરીક્ષણ નિદાન કરશે કે તેને બીમારી છે.) જો વસતીના 0.1 % લોકોને ખરેખર બીમારી હોય, તો આપેલ હોય કે તેના પરીક્ષણનું પરિણામ હકારાત્મક છે તે પરિસ્થિતિમાં તેને બીમારી હોવાની સંભાવના કેટલી ?

➥ ધારો કે ઘટના E_1 = પસંદ થયેલ વ્યક્તિને બીમારી હોય.

ઘટના E_2 = પસંદ થયેલ વ્યક્તિને બીમારી નથી.

ઘટના A = પ્રયોગશાળાનું પરીક્ષણ હકારાત્મક હોય.

$$P(E_1) = 0.1\% = \frac{1}{1000} = 0.001$$

$$P(E_2) = 1 - P(E_1) = 1 - 0.001 = 0.999$$

$$P(A|E_1) = 99\% = \frac{99}{100} = 0.99$$

$$P(A|E_2) = 0.5\% = \frac{5}{1000} = 0.005$$

આપેલ હોય કે તેના પરીક્ષણનું પરિણામ હકારાત્મક છે ત્યારે બીમારી હોવાની સંભાવના,

$$P(E_1 | A) = \frac{P(E_1) \cdot P(A | E_1)}{P(E_1) P(A | E_1) + P(E_2) P(A | E_2)}$$

$$= \frac{0.001 \times 0.99}{0.001 \times 0.99 + 0.999 \times 0.005}$$

$$= \frac{99}{99 + 999 \times \frac{5}{10}}$$

$$= \frac{99 \times 2}{198 + 999}$$

$$= \frac{198}{1197}$$

$$= \frac{22}{133}$$

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના $= \frac{22}{133}$

25. એક ફેક્ટરી પાસે બે યંત્રો A અને B છે. ભૂતકાળની નોંધ બતાવે છે કે, યંત્ર A ઉત્પાદિત વસ્તુઓ પૈકી 60 % વસ્તુઓનું અને યંત્ર B 40 % વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરે છે. વધુમાં, યંત્ર A દ્વારા ઉત્પાદિત વસ્તુઓ પૈકી 2 % અને યંત્ર B દ્વારા ઉત્પાદિત વસ્તુઓ પૈકી 1 % વસ્તુઓ ખામીયુક્ત હતી. આ બધી વસ્તુઓ એક પુરવઠાગારમાં મૂકી દીધી અને ત્યાર બાદ આમાંથી એક વસ્તુ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરી અને તે ખામીયુક્ત માલૂમ પડી, તો તે યંત્ર B દ્વારા ઉત્પાદિત હોવાની સંભાવના કેટલી ?

➡ ધારો કે ઘટના A = યંત્ર A ઉત્પાદિત વસ્તુ

ઘટના B = યંત્ર B ઉત્પાદિત વસ્તુ

ઘટના D = ઉત્પાદિત વસ્તુ ખામીયુક્ત હોય

આપેલ છે કે,

$$P(A) = \frac{60}{100} = \frac{6}{10},\ P(B) = \frac{40}{100} = \frac{4}{10}$$

$$P(D | A) = \frac{2}{100},\ P(D | B) = \frac{1}{100}$$

યાદચ્છિક રીતે પસંદ થયેલ વસ્તુ ખામીયુક્ત હોય તો તે યંત્ર B દ્વારા ઉત્પાદિત હોવાની સંભાવના = P (B | D)

$$\therefore\ P(B | D) = \frac{P(B) \cdot P(D | B)}{P(A)\ P(D | A) + P(B)\ P(D | B)}$$

$$= \frac{\frac{4}{10} \times \frac{1}{100}}{\frac{6}{10} \times \frac{2}{100} + \frac{4}{10} \times \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{4}{12 + 4}$$

$$= \frac{4}{16}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના $= \frac{1}{4}$

26. એક કારખાનાદાર પાસે ત્રણ યંત્ર ચાલકો A, B અને C છે. પ્રથમ ચાલક A, 1 % ખામીયુક્ત વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરે છે. બીજા બે ચાલકો B અને C અનુક્રમે 5 % અને 7 % ખામીયુક્ત વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરે છે. A કામના નિશ્ચિત સમયનો, 50 % સમય કામ પર રહે છે. B 30 % સમય કામ પર રહે છે અને C 20 % સમય કાર્ય કરે છે. ખામીયુક્ત વસ્તુનું ઉત્પાદન થયું છે. તેનું ઉત્પાદન A દ્વારા થયું હોવાની સંભાવના કેટલી ?

➥ ધારો કે ઘટના E_1 = યંત્ર ચાલક A દ્વારા થયેલ કાર્ય

ઘટના E_2 = યંત્ર ચાલક B દ્વારા થયેલ કાર્ય

ઘટના E_3 = યંત્ર ચાલક C દ્વારા થયેલ કાર્ય અને

ઘટના A = વસ્તુનું ઉત્પાદન ખામીયુક્ત હોય

આપેલ છે કે,

$P(E_1) = \frac{50}{100} = \frac{5}{10}, \quad P(E_2) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

$P(E_3) = \frac{20}{100} = \frac{2}{10}$

વળી $P(A|E_1) = \frac{1}{100}, \quad P(A|E_2) = \frac{5}{100}$

$P(A|E_3) = \frac{7}{100}$

ખામીયુક્ત વસ્તુનું ઉત્પાદન A દ્વારા થયું હોય તેની સંભાવના,

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1)\,P(A|E_1)}{P(E_1)\,P(A|E_1) + P(E_2)\,P(A|E_2) + P(E_3)\,P(A|E_3)}$$

$$= \frac{\frac{5}{10} \times \frac{1}{100}}{\frac{5}{10} \times \frac{1}{100} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{100} + \frac{2}{10} \times \frac{7}{100}}$$

$$= \frac{5}{5 + 15 + 14}$$

$$= \frac{5}{34}$$

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના $= \frac{5}{34}$

27. એક વીમાકંપનીએ 2000 સ્કૂટર-ચાલકો, 4000 કાર-ચાલકો અને 6000 ટ્રક-ચાલકોનો વીમો ઉતાર્યો. તેમના દ્વારા થતા અકસ્માતોની સંભાવના અનુક્રમે 0.01, 0.03 અને 0.15 છે. વીમાધારકો પૈકીના એક વ્યક્તિને અકસ્માત થયો. તે સ્કૂટર-ચાલક હોવાની સંભાવના કેટલી ?

➥ ધારો કે ઘટના E_1 = વ્યક્તિ સ્કૂટર ચાલક હોય.

ઘટના E_2 = વ્યક્તિ કાર ચાલક હોય.

ઘટના E_3 = વ્યક્તિ ટ્રક ચાલક હોય.

અને ઘટના A = વ્યક્તિને અકસ્માત થાય.

વ્યક્તિઓની કુલ સંખ્યા = 2000 સ્કૂટર ચાલકો

4000 કાર ચાલકો

6000 ટ્રક ચાલકો

12000

$\therefore P(E_1) = \frac{2000}{12000} = \frac{1}{6}, \quad P(E_2) = \frac{4000}{12000} = \frac{1}{3}$

$P(E_3) = \frac{6000}{12000} = \frac{1}{2}$

વળી $P(A | E_1) = 0.01$, $P(A | E_2) = 0.03$

$P(A | E_3) = 0.15$

વ્યક્તિને અકસ્માત થયો હોય તો તે સ્કૂટર ચાલક હોવાની સંભાવના = $P(E_1 | A)$

➥ ધારો કે ઘટના E_1 = વ્યક્તિ સ્કૂટર ચાલક હોય.

ઘટના E_2 = વ્યક્તિ કાર ચાલક હોય.

ઘટના E_3 = વ્યક્તિ ટ્રક ચાલક હોય.

અને ઘટના A = વ્યક્તિને અકસ્માત થાય.

વ્યક્તિઓની કુલ સંખ્યા = 2000 સ્કૂટર ચાલકો

4000 કાર ચાલકો

6000 ટ્રક ચાલકો

12000

$\therefore P(E_1) = \frac{2000}{12000} = \frac{1}{6}$, $P(E_2) = \frac{4000}{12000} = \frac{1}{3}$

$P(E_3) = \frac{6000}{12000} = \frac{1}{2}$

વળી $P(A | E_1) = 0.01$, $P(A | E_2) = 0.03$

$P(A | E_3) = 0.15$

વ્યક્તિને અકસ્માત થયો હોય તો તે સ્કૂટર ચાલક હોવાની સંભાવના = $P(E_1 | A)$

28. એક નિગમમાં નિયામકોની સમિતિમાં હોદ્દો મેળવવા માટે બે સમૂહો હરીફાઇ કરી રહ્યા છે. પ્રથમ અને દ્વિતીય સમૂહો જીતશે તેની સંભાવનાઓ અનુક્રમે 0.6 અને 0.4 છે. વધુમાં, જો પ્રથમ સમૂહ જીતશે તો નવી ઉત્પાદિત વસ્તુ રજૂ કરવાની સંભાવના 0.7 છે અને દ્વિતીય સમૂહ માટે અનુરૂપ સંભાવના 0.3 છે. નવી ઉત્પાદિત વસ્તુ દ્વિતીય સમૂહ દ્વારા રજૂ થઈ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

➥ ધારો કે G_1 = પ્રથમ સમૂહ જીતે

G_2 = દ્વિતીય સમૂહ જીતે

P = નવી ઉત્પાદિત વસ્તુ રજૂ કરે.

આપેલ છે કે $P(G_1) = 0.6$, $P(G_2) = 0.4$

વળી $P(A | G_1) = 0.7$, $P(A | G_2) = 0.3$

નવી ઉત્પાદિત વસ્તુ દ્વિતીય સમૂહ દ્વારા રજૂ થાય તેની સંભાવના = $P(G_2 | P)$

$$= \frac{P(G_2)\ P(P|G_2)}{P(G_1) P(P|G_1) + P(G_2)\ P(P\ |G_2)}$$

$$= \frac{0.4 \times 0.3}{0.6 \times 0.7 + 0.4 \times 0.3}$$

$$= \frac{0.12}{0.42 + 0.12}$$

$$= \frac{12}{54}$$

$$= \frac{2}{9}$$

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના $= \frac{2}{9}$

29. **ધારો કે એક છોકરી પાસો ઉછાળે છે. જો તેને 5 કે 6 મળે તો, તે સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળે છે અને છાપની સંખ્યા નોંધે છે. જો તેને 1, 2, 3 અથવા 4 મળે તો તે સિક્કાને એક વખત ઉછાળે છે અને છાપ અથવા કાંટો મળ્યો તે નોંધે છે. જો બરાબર એક છાપ મળી હોય, તો તે પાસા પર 1, 2, 3 અથવા 4 મળ્યા હોવાની સંભાવના કેટલી ?**

➥ ધારો કે ઘટના E_1 = પાસા પર 5 કે 6 મળે.

ઘટના E_2 = પાસા પર 1, 2, 3 અથવા 4 મળે.

$\therefore P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(E_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

હવે સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળતા મળતો

નિદર્શાવકાશ = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

ઘટના A = બરાબર એક છાપ મળે.

હવે પાસા ઉપર 5 કે 6 મળે તો સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળે છે. આ સંજોગોમાં $P(A|E_1) = \frac{3}{8}$

પાસા પર 1, 2, 3 કે 4 મળે તો તે સિક્કાને એક વખત ઉછાળે છે. આ સંજોગોમાં $P(A|E_2) = \frac{1}{2}$

હવે જો બરાબર એક છાપ મળી હોય તો તે પાસા પર 1, 2, 3 અથવા 4 મળ્યા હોય તેની સંભાવના,

$$P(E_2|A) = \frac{P(E_2)\,P(A|E_2)}{P(E_1)\,P(A|E_1) + P(E_2)\,P(A|E_2)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{24}{11}$$

$$= \frac{8}{11}$$

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના $= \frac{8}{11}$

30. **52 પત્તાંની થોકડીમાંથી એક પત્તું ખોવાઇ ગયું છે. બાકી રહેલાં પત્તાંની થોકડીમાંથી બે પત્તાં યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવ્યાં અને માલૂમ પડ્યું કે તે બંને ચોકટનાં પત્તાં છે. ખોવાયેલ પત્તું ચોકટનું હોય તેની સંભાવના શોધો.**

➥ ધારો કે ઘટના E_1 = ખોવાયેલ પત્તું ચોકટનું હોય.

ઘટના E_2 = ખોવાયેલ પત્તું લાલનું હોય.

ઘટના E_3 = ખોવાયેલ પત્તું ફુલ્લીનું હોય.

ઘટના E_4 = ખોવાયેલ પત્તું કાળીનું હોય.

$\therefore P(E_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, \quad P(E_2) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$P(E_3) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, \quad P(E_4) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

ઘટના A = બાકી રહેલ પત્તાંમાંથી બે પત્તાં ચોકટના પસંદ કરવામાં આવે છે.

$P(A|E_1)$ = ચોકટનું પત્તું ખોવાઈ ગયા પછી બાકી રહેલ પત્તાંમાંથી બે પત્તાં ચોકટનાં પસંદ કરવાની સંભાવના

$= \frac{12\,C_2}{51\,C_2}$

$P(A \mid E_2)$ = લાલનું પત્તું ખોવાઈ ગયા પછી બાકી રહેલ પત્તાંમાંથી બે પત્તાં ચોકટનાં પસંદ કરવાની સંભાવના $= \frac{13\,C_2}{51\,C_2}$

તેવી જ રીતે $P(A|E_3) = \frac{13\,C_2}{51\,C_2}$, $P(A|E_4) = \frac{13\,C_2}{51\,C_2}$

હવે ખોવાયેલ પત્તું ચોકટનું હોય તેની સંભાવના

$= P(E_1 \mid A)$

$$= \frac{P(E_1)\,P(A \mid E_1)}{P(E_1)\,P(A|E_1) + P(E_2)\,P(A|E_2) + P(E_3)\,P(A|E_3) + P(E_4)\,P(A|E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{12\,C_2}{51\,C_2}}{\frac{1}{4} \times \frac{12\,C_2}{51\,C_2} + \frac{1}{4} \times \frac{13\,C_2}{51\,C_2} + \frac{1}{4} \times \frac{13\,C_2}{51\,C_2} + \frac{1}{4} \times \frac{13\,C_2}{51\,C_2}}$$

$$= \frac{12\,C_2}{12\,C_2 + 13\,C_2 + 13\,C_2 + 13\,C_2}$$

$$= \frac{12 \times 11}{12 \times 11 + 13 \times 12 + 13 \times 12 + 13 \times 12}$$

➥ ધારો કે ઘટના E_1 = ખોવાયેલ પત્તું ચોકટનું હોય.

ઘટના E_2 = ખોવાયેલ પત્તું લાલનું હોય.

ઘટના E_3 = ખોવાયેલ પત્તું ફુલ્લીનું હોય.

ઘટના E_4 = ખોવાયેલ પત્તું કાળીનું હોય.

$\therefore P(E_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, $P(E_2) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$P(E_3) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, $P(E_4) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

ઘટના A = બાકી રહેલ પત્તાંમાંથી બે પત્તાં ચોકટના પસંદ કરવામાં આવે છે.

$P(A \mid E_1)$ = ચોકટનું પત્તું ખોવાઈ ગયા પછી બાકી રહેલ પત્તાંમાંથી બે પત્તાં ચોકટનાં પસંદ કરવાની સંભાવના

$= \frac{12\,C_2}{51\,C_2}$

$P(A \mid E_2)$ = લાલનું પત્તું ખોવાઈ ગયા પછી બાકી રહેલ પત્તાંમાંથી બે પત્તાં ચોકટનાં પસંદ કરવાની સંભાવના $= \frac{13\,C_2}{51\,C_2}$

તેવી જ રીતે $P(A|E_3) = \frac{13\,C_2}{51\,C_2}$, $P(A|E_4) = \frac{13\,C_2}{51\,C_2}$

હવે ખોવાયેલ પત્તું ચોકટનું હોય તેની સંભાવના

$= P(E_1 \mid A)$

$$= \frac{P(E_1)\,P(A \mid E_1)}{P(E_1)\,P(A|E_1) + P(E_2)\,P(A|E_2) + P(E_3)\,P(A|E_3) + P(E_4)\,P(A|E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{12\,C_2}{51\,C_2}}{\frac{1}{4} \times \frac{12\,C_2}{51\,C_2} + \frac{1}{4} \times \frac{13\,C_2}{51\,C_2} + \frac{1}{4} \times \frac{13\,C_2}{51\,C_2} + \frac{1}{4} \times \frac{13\,C_2}{51\,C_2}}$$

$$= \frac{12\,C_2}{12\,C_2 + 13\,C_2 + 13\,C_2 + 13\,C_2}$$

$$= \frac{12 \times 11}{12 \times 11 + 13 \times 12 + 13 \times 12 + 13 \times 12}$$