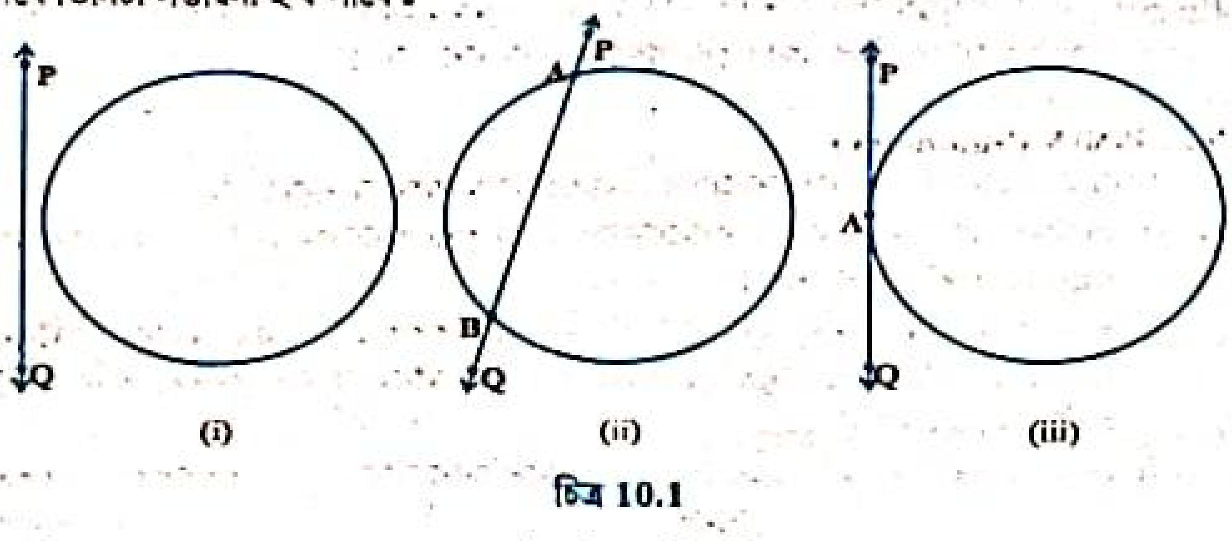
বৃত্ত
(Circles)

দশম অধ্যায়

10.1. অৱতাৰণা (Introduction)

তোমালোকে নৱম শ্ৰেণীত অধ্যয়ন কৰিছা যে বৃত্ত হ'ল এখন সমতলত এটা স্থিৰ বিন্দু (কেন্দ্ৰ)ৰ পৰা নিয়ত দূৰত্ব (ব্যাসাৰ্দ্ধ) ত থকা আটাইবোৰ বিন্দুৰ সংগ্ৰহ। তোমালোকে বৃত্তৰ লগত সম্পৰ্ক থকা বিভিন্ন সংজ্ঞা যেনে জ্যা, বৃত্তাংশ, বৃত্তকলা, চাপ আদিও অধ্যয়ন কৰিছা। আমি এতিয়া এখন সমতলত এটা বৃত্ত আৰু এডাল ৰেখা দিয়া থাকিলে উদ্ভৱ হ'ব পৰা বিভিন্ন অৱস্থাবোৰ পৰীক্ষা কৰোঁহক।

সেয়ে, আমি এটা বৃত্ত আৰু এডাল ৰেখা PQ বিবেচনা কৰোঁহক। ইয়াত তলত দিয়া চিত্ৰ 10.1 ৰ দৰে তিনিটা সম্ভাৱনা হ'ব পাৰে :



চিত্ৰ 10.1

চিত্ৰ 10.1 (i)ত, PQ ৰেখা আৰু বৃত্তটোৰ উমৈহতীয়া বিন্দু নাই। এই ক্ষেত্ৰত, PQ ক বৃত্তটোৰ সম্পৰ্কত এডাল ছেদক নহয় (non-intersecting) বুলি কোৱা হয়। চিত্ৰ 10.1 (ii) ত PQ ৰেখা আৰু বৃত্তটোৰ দুটা উমৈহতীয়া বিন্দু A আৰু B আছে। এই ক্ষেত্ৰত, আমি PQ ৰেখাক বৃত্তটোৰ

ছেদক (secant) বুলি কওঁ। চিত্ৰ 10.1 (iii)ত, PQ ৰেখা আৰু বৃত্তটোৰ উমৈহতীয়া মাত্ৰ এটা বিন্দু A আছে। এই ক্ষেত্ৰত, ৰেখাডালক বৃত্তটোৰ এডাল স্পৰ্শক (tangent) বুলি কোৱা হয়।

তোমালোকে নাদৰ পৰা পানী তোলাত ব্যৱহাৰ হোৱা নাদৰ ওপৰত লগাই থোৱা এটা কপিকল দেখিছা। চিত্ৰ 10.2 চোৱা। ইয়াত কপিকলটোৰ দুয়োফালে থকা ৰছীডাল কপিকলটোৱে নিৰ্দেশ কৰা বৃত্তৰ এডাল স্পৰ্শকৰ নিচিনা, যদি ৰছীডাল ৰশ্মি হিচাপে বিবেচনা কৰা হয়।

চিত্ৰ 10.2

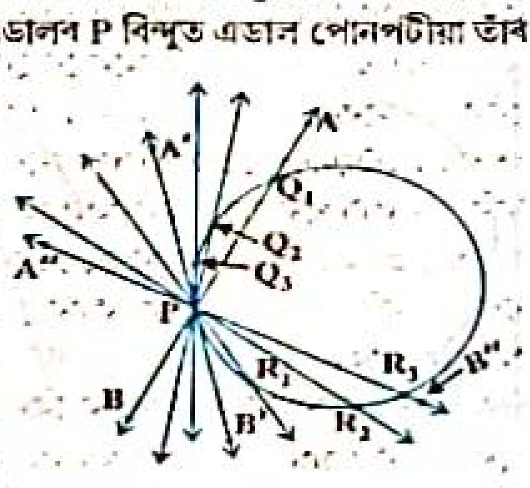
ওপৰোক্ত প্ৰদত্ত প্ৰকাৰবোৰতকৈ বৃত্ত সাপেক্ষে ৰেখাডালৰ আন কোনো অৱস্থান আছেনে? তোমালোকে দেখা পাবা যে বৃত্ত সাপেক্ষে ৰেখাডালৰ অৱস্থানৰ কোনো আন প্ৰকাৰ থাকিব নোৱাৰে। এই অধ্যায়ত আমি বৃত্তৰ স্পৰ্শকৰ স্থিতিৰ বিষয়ে আৰু লগতে সিহঁতৰ ধৰ্মবোৰৰ কিছুমান অধ্যয়ন কৰিম।

10.2. বৃত্তৰ স্পৰ্শক (Tangent to a Circle)

আগৰ অধ্যায়ত, তোমালোকে দেখিছা যে বৃত্তৰ এডাল স্পৰ্শক * এডাল ৰেখা যিয়ে বৃত্তটোক মাত্ৰ এটা বিন্দুত ছেদ কৰে।

এটা বিন্দুত বৃত্তৰ স্পৰ্শকৰ স্থিতি বোধগম্য হ'বলৈ, আমি নিম্নোক্ত কাৰ্যপ্ৰণালীসমূহ সম্পন্ন কৰোঁহক :

কাৰ্যপ্ৰণালী 1 : এডাল বৃত্তীয় তাঁৰ লোৱা আৰু বৃত্তীয় তাঁৰডালৰ P বিন্দুত এডাল পোনপটীয়া তাঁৰ AB সংলগ্ন কৰা যাতে ই এখন সমতলত P বিন্দুৰ চাৰিওফালে ঘূৰিব পাৰে। ব্যৱস্থা প্ৰণালীটো এখন টেবুলৰ ওপৰত ৰাখা আৰু পোনপটীয়া তাঁৰডালৰ বিভিন্ন অৱস্থান পাবলৈ P বিন্দুৰ চাৰিওফালে AB তাঁৰডাল লাহে লাহে ঘূৰোৱা (চিত্ৰ 10.3(i)চোৱা)।



চিত্ৰ 10.3 (i)

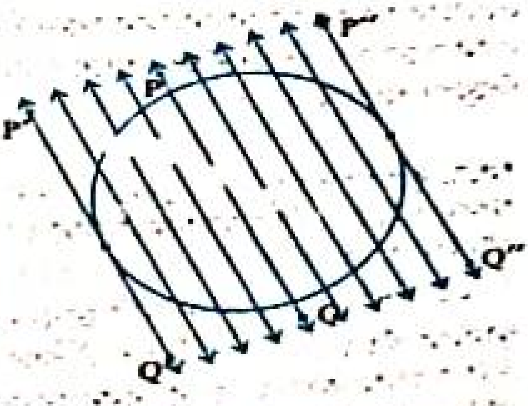
বিভিন্ন অৱস্থানত, তাঁৰডালে বৃত্তীয় তাঁৰক P বিন্দুত আৰু আন এটা বিন্দু Q_1 বা Q_2 বা Q_3 আদিত ছেদ কৰে। এটা অৱস্থানত, তোমালোকে দেখিবা যে ই মাত্ৰ P বিন্দুত বৃত্তটোক ছেদ কৰিব (AB ৰ A'B' অৱস্থান চোৱা)। দেখা যায় যে বৃত্তটোৰ P বিন্দুত এডাল স্পৰ্শক আছে। বেছি পৰিমাণে ঘূৰালে তোমালোকে পৰ্যবেক্ষণ কৰিব পাৰা যে AB ৰ আন আটাইবোৰ অৱস্থানত, ই বৃত্তটোক P বিন্দুত আৰু আন এটা বিন্দু, যেনে R_1 বা R_2 বা R_3

* 'tangent' (স্পৰ্শক) শব্দটো লেটিন ভাষাৰ শব্দ 'tangere' শব্দৰ পৰা আহিছে, যাৰ অৰ্থ হৈছে স্পৰ্শ কৰা আৰু ইয়াক প্ৰথমে ডেনিছ গণিতজ্ঞ থমাচ ফিনেকে (Thomas Fineke) 1583 চনত ব্যৱহাৰ কৰিছিল।

আনিত ছেদ কৰিব। সেয়ে, তোমালোকে পৰ্যবেক্ষণ কৰিব পাৰা যে বৃত্তটোৰ এটা বিন্দুত মাত্ৰ এডাল স্পৰ্শক আছে।

ওপৰোক্ত কাৰ্যপ্ৰণালী কৰি থাকোঁতে, তোমালোকে নিশ্চয় পৰ্যবেক্ষণ কৰিলা যে অৱস্থান AB অৱস্থান, A' B' ৰ ফালে আগবঢ়াৰ লগে লগে, AB ৰেখা আৰু বৃত্তটোৰ উমৈহতীয়া বিন্দু যেনে Q_1, উমৈহতীয়া বিন্দু P ৰ ক্ৰমশঃ বেছি ওচৰ চাপি আহে। অৱশেষত, ই A''B''ৰ A'B' অৱস্থানত P বিন্দুৰ লগত মিলিত হয়। আকৌ লক্ষ্য কৰা, যদি 'AB' ক P ৰ সোঁফালে ঘূৰোৱা হয় কি ঘটে? উমৈহতীয়া বিন্দু R_3 ক্ৰমশঃ P ৰ বেছি ওচৰ চাপি আহে আৰু অৱশেষত P ৰ লগত মিলিত হয়। সেয়ে আমি যি দেখো সেইটো হ'ল : বৃত্তৰ স্পৰ্শক ছেদক ডালৰ এটা বিশেষ অৱস্থা যেতিয়া ইয়াৰ অনুৰূপ জ্যাৰ মূৰ বিন্দু দুটা মিলিত হয়।

কাৰ্যপ্ৰণালী 2 : এখন কাগজত, এটা বৃত্ত আৰু বৃত্তটোৰ এডাল ছেদক PQ আঁকা। ছেদকৰ দুয়োফালে ইয়াৰ সমান্তৰাল বিভিন্ন ৰেখা আঁকা। কিছু পৰ্যায়ৰ পিছত, তোমালোকে দেখিবা যে ৰেখাবোৰৰ দ্বাৰা কটা জ্যাৰ দৈৰ্ঘ্য ক্ৰমশঃ কমি যাব অৰ্থাৎ ৰেখা আৰু বৃত্তৰ ছেদবিন্দু দুটা বেছি ওচৰ চাপিব (চিত্ৰ 10.3(ii) চোৱা)। এটা ক্ষেত্ৰত, ই ছেদকৰ এটা ফালে শূন্য হয় আৰু আনটো এটা ক্ষেত্ৰত, ই ছেদকৰ আনটো ফালে শূন্য হয়। চিত্ৰ 10.3 (ii) ত ছেদকৰ P'Q' আৰু P''Q'' অৱস্থানবোৰ চোৱা। এইবোৰ প্ৰদত্ত ছেদক PQ ৰ সমান্তৰাল বৃত্তৰ স্পৰ্শক। এইটোৱে তোমালোকক ভাবি চাবলৈ সহায় কৰিব যে এটা প্ৰদত্ত ছেদকৰ সমান্তৰাল স্পৰ্শক দুডালতকৈ বেছি থাকিব নোৱাৰে।



চিত্ৰ 10.3 (ii)

কাৰ্য্যপ্ৰণালী 1 কৰি থাকোঁতে, তোমালোকে নিশ্চয় পৰ্যবেক্ষণ কৰিছিলা যে এডাল স্পৰ্শক হ'ল ছেদক, যেতিয়া ইয়াৰ অনুৰূপ জ্যাৰ দুয়োটা মূৰ বিন্দু লগ লাগে, সেই কথা এই কাৰ্য্যপ্ৰণালীটোৱে প্ৰতিপন্ন কৰে।

স্পৰ্শক আৰু বৃত্তৰ উমৈহতীয়া বিন্দুটোক স্পৰ্শবিন্দু (point of contact) বোলা হয় [চিত্ৰ 10.1 (iii)ত বিন্দু A] আৰু স্পৰ্শকডালে উমৈহতীয়া বিন্দুটোত বৃত্তক স্পৰ্শ কৰা বুলি কোৱা হয়।

চিত্ৰ 10.4

এতিয়া তোমালোকৰ চাৰিওফালে চোৱা। তোমালোকে চাইকেল বা গৰুৰ গাড়ী গতি কৰি থকা

দেখিছানে? ইয়াৰ চকাবোৰ চোৱা। এটা চকাৰ আটাইবোৰ শলা (spokes) ইয়াৰ ব্যাসাৰ্দ্ধবফালে আছে। এতিয়া ভূমিত চকাটোৰ গতিসাপেক্ষে ইয়াৰ অৱস্থান লক্ষ্য কৰা। তোমালোকে ক'ৰবাত কোনো স্পৰ্শক দেখিছানে? (চিত্ৰ 10.4 চোৱা)। প্ৰচলতে, চকাটো এডাল ৰেখাৰ দিশত ঘূৰে, যিডাল ৰেখা চকাটোৱে নিৰ্দেশ কৰা বৃত্তৰ স্পৰ্শক। লগতে, লক্ষ্য কৰা যে আটাইবোৰ অৱস্থানতে ভূমিৰ লগত স্পৰ্শবিন্দুৰ মাজেদি যোৱা ব্যাসাৰ্দ্ধডাল স্পৰ্শকৰ লগত সমকোণত থকা যেন দেখা যায় (চিত্ৰ 10.4 চোৱা)। এতিয়া, আমি স্পৰ্শকৰ এই ধৰ্মটো প্ৰমাণ কৰিম।

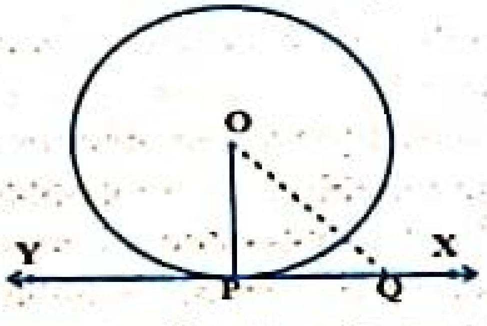
উপপাদ্য 10.1 : *এটা বৃত্তৰ যিকোনো বিন্দুত টনা স্পৰ্শকডাল স্পৰ্শবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ব্যাসাৰ্দ্ধৰ লম্ব।*

প্ৰমাণ : দিয়া আছে, কেন্দ্ৰ বিন্দু O যুক্ত এটা বৃত্ত আৰু P বিন্দুত বৃত্তটোৰ এডাল স্পৰ্শক XY.

আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে, OP, XY ৰ লম্ব।

P ক বাদে XY ৰ ওপৰত Q এটা বিন্দু লোৱা আৰু OQ সংযোগ কৰা (চিত্ৰ 10.5 চোৱা)।

Q বিন্দুটো নিশ্চয় বৃত্তটোৰ বাহিৰত আছে। (কিয়? লক্ষ্য কৰা যে যদি Q বিন্দুটো বৃত্তৰ ভিতৰত থাকে, XY বৃত্তৰ এডাল ছেদক হয় আৰু এডাল স্পৰ্শক নহয়)। গতিকে, OQ, বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ OP তকৈ দীঘল। অৰ্থাৎ, OQ > OP.



চিত্ৰ 10.5

যিহেতু এইটো P বিন্দুক বাদে XY ৰেখাত থকা প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে হয়, XY ৰ বিন্দুবোৰৰ O বিন্দুৰ আটাইবোৰ দূৰত্বৰ ভিতৰত OP য়েই আটাইতকৈ কম। সেয়ে OP, XY ৰ লম্ব (উপপাদ্য A1.7.ত দেখুওৱাৰ দৰে)।

মন্তব্য :

1. উপৰিউক্ত উপপাদ্যদ্বাৰা, আমি সিদ্ধান্ত ল'ব পাৰোঁ যে এটা বৃত্তৰ যিকোনো বিন্দুত মাত্ৰ এডালহে স্পৰ্শক থাকিব পাৰে।
2. স্পৰ্শবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ব্যাসাৰ্দ্ধক কেতিয়াবা বিন্দুটোত বৃত্তটোৰ অভিলম্ব (normal) বুলিও কোৱা হয়।

অনুশীলনী 10.1

1. এটা বৃত্তৰ কিমানবোৰ স্পৰ্শক থাকিব পাৰে?
2. খালী ঠাই পূৰ্ণ কৰা
   (i) এটা বৃত্তৰ স্পৰ্শকে ইয়াক ——— বিন্দুত ছেদ কৰে।
   (ii) এটা বৃত্তক দুটা বিন্দুত ছেদ কৰা এডাল ৰেখাক ——— বোলে।

(iii) এটা বৃত্তৰ বৰ বেছি ——— সমান্তৰাল স্পৰ্শক থাকিব পাৰে।

(iv) এটা বৃত্তৰ এডাল স্পৰ্শক আৰু বৃত্তটোৰ উমৈহতীয়া বিন্দুটোক ——— বোলে।

3. 5 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধযুক্ত এটা বৃত্তৰ এটা বিন্দু P ত টনা এডাল স্পৰ্শক PQ য়ে কেন্দ্ৰ O ৰ মাজেৰে যোৱা এডাল ৰেখাক Q বিন্দুত লগ লাগে যাতে OQ = 12 চে.মি.। PQ ৰ দৈৰ্ঘ্য হ'ল :

(A) 12 চে.মি. (B) 13 চে.মি. (C) 8.5 চে.মি. (D) $\sqrt{119}$ চে.মি.

4. এটা বৃত্ত আৰু এডাল প্ৰদত্ত ৰেখাৰ সমান্তৰালকৈ দুডাল ৰেখা আঁকা যাতে এডাল স্পৰ্শক হয় আৰু আনডাল ছেদক হয়।

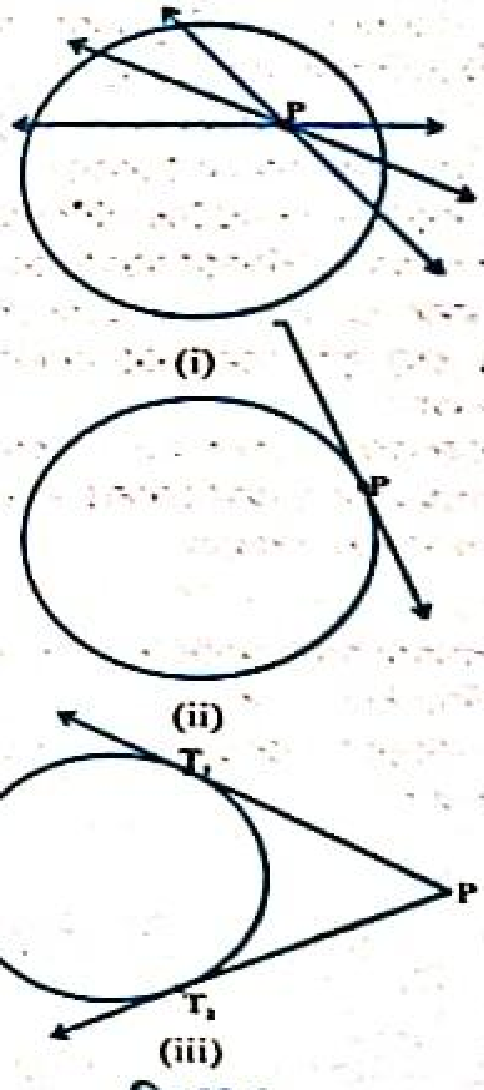
10.3. এটা বৃত্তৰ এটা বিন্দুৰ পৰা টনা স্পৰ্শকৰ সংখ্যা (Number of Tangents from a Point on a Circle) :

এটা বৃত্তৰ এটা বিন্দুৰ পৰা টনা স্পৰ্শকৰ সংখ্যাৰ ধাৰণা পাবলৈ নিম্নোক্ত কাৰ্যপ্ৰণালীটো আমি সম্পন্ন কৰোঁহক :

কাৰ্য্যপ্ৰণালী 3 : এখন কাগজত এটা বৃত্ত আঁকা। ইয়াৰ ভিতৰত P এটা বিন্দু লোৱা। তোমালোকে এই বিন্দুটোৰ মাজেৰে বৃত্তটোৰ এডাল স্পৰ্শক আঁকিব পাৰানে? তোমালোকে দেখিবা যে এই বিন্দুটোৰ মাজেৰে যোৱা আটাইবোৰ ৰেখাই বৃত্তটোক দুটা বিন্দুত ছেদ কৰে। সেয়ে এটা বৃত্তৰ ভিতৰত থকা এটা বিন্দুৰ মাজেৰে বৃত্তটোলৈ কোনো স্পৰ্শক থকা সম্ভৱ নহয় (চিত্ৰ 10.6 (i) চোৱা)।

তাৰ পিছত, বৃত্তটোত P এটা বিন্দু লোৱা আৰু এই বিন্দুটোৰ মাজেৰে স্পৰ্শক আঁকা। ইতিমধ্যে তোমালোকে পৰ্য্যবেক্ষণ কৰিছা যে এনেকুৱা এটা বিন্দুত বৃত্তটোৰ মাত্ৰ এডাল স্পৰ্শক আছে (চিত্ৰ 10.6 (ii) চোৱা)।

অৱশেষত, বৃত্তটোৰ বাহিৰত P এটা বিন্দু লোৱা আৰু এই বিন্দুটোৰ পৰা বৃত্তটোলৈ স্পৰ্শক আঁকিবলৈ চেষ্টা কৰা। তোমালোকে কি পৰ্যবেক্ষণ কৰিলা? তোমালোকে দেখিবলৈ পাবা যে এই বিন্দুটোৰ মাজেৰে বৃত্তটোলৈ ঠিক দুডাল স্পৰ্শক আঁকিব পাৰি। (চিত্ৰ 10.6 (iii) চোৱা)।



চিত্ৰ 10.6

আমি এই সত্যতাবোৰ নিম্নোক্ত ধৰণে সংক্ষিপ্ত কৰিব পাৰো :

অৱস্থা 1 : বৃত্তটোৰ ভিতৰত থকা এটা বিন্দুৰ মাজেদি যোৱা বৃত্তৰ স্পৰ্শক নাই।

অৱস্থা 2 : বৃত্তটোত থকা এটা বিন্দুৰ মাজেদি যোৱা বৃত্তৰ মাত্ৰ এডালহে স্পৰ্শক আছে।

অৱস্থা 3 : বৃত্তটোৰ বাহিৰত থকা এটা বিন্দুৰ মাজেদি যোৱা বৃত্তৰ ঠিক দুডাল স্পৰ্শক আছে।

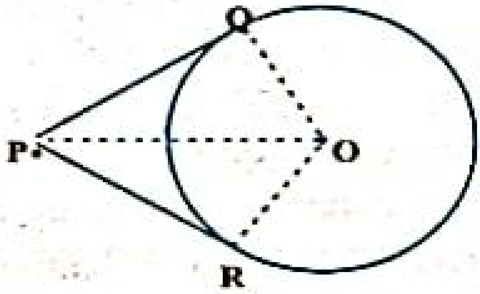
চিত্ৰ 10.6 (iii) ত, স্পৰ্শক PT_1 আৰু PT_2 ৰ যথাক্ৰমে স্পৰ্শবিন্দু T_1 আৰু T_2।

বহিঃ বিন্দু P ৰ পৰা বৃত্তৰ স্পৰ্শ বিন্দুলৈ টনা স্পৰ্শকৰ খণ্ডটোৰ দৈৰ্ঘ্যক P বিন্দুৰ পৰা বৃত্তটোলৈ স্পৰ্শকৰ দৈৰ্ঘ্য বোলা হয়।

লক্ষ কৰা যে চিত্ৰ 10.6 (iii) ত, PT_1 আৰু PT_2 হ'ল P ৰ পৰা বৃত্তটোলৈ স্পৰ্শকৰ দৈৰ্ঘ্য। দৈৰ্ঘ্য PT_1 আৰু PT_2 ৰ এটা উমৈহতীয়া ধৰ্ম আছে। তোমালোকে এইটো নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিবানে? PT_1 আৰু PT_2 জোখা। এইবোৰ সমাননে? আচলতে, ইহঁত সদায় সমান। আমি এই সত্যতাটো নিম্নোক্ত উপপাদ্যত প্ৰমাণ কৰোঁ আহা :

উপপাদ্য 10.2 : *এটা বহিঃ বিন্দুৰপৰা বৃত্তলৈ টনা স্পৰ্শকবোৰৰ দৈৰ্ঘ্য সমান।*

প্ৰমাণ : আমাক দিয়া আছে, O কেন্দ্ৰযুক্ত এটা বৃত্ত, বৃত্তটোৰ বাহিৰত P এটা বিন্দু আৰু P বিন্দুৰ পৰা বৃত্তটোৰ PQ, PR দুডাল স্পৰ্শক (চিত্ৰ 10.7 চোৱা)। আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে PQ = PR.



চিত্ৰ 10.7

ইয়াৰ বাবে, আমি OP, OQ আৰু OR সংযোগ কৰোঁ। তেন্তে ∠OQP আৰু ∠ORP সমকোণ, কাৰণ ইহঁত ব্যাসাৰ্দ্ধ আৰু স্পৰ্শকৰ মাজৰ কোণ আৰু উপপাদ্য 10.1 অনুসৰি ইহঁত সমকোণ। এতিয়া OQP আৰু ORP সমকোণী ত্ৰিভুজৰ, OQ = OR (একে বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ)

OP = OP (উমৈহতীয়া)

গতিকে, Δ OQP ≅ ΔORP (RHS)

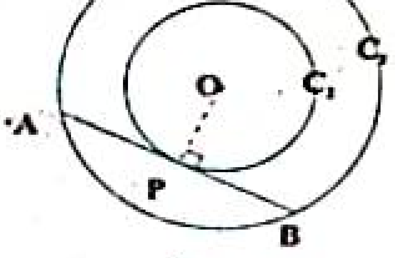
ইয়াৰ পৰা পাওঁ PQ = PR (CPCT)

মন্তব্য :

1. উপপাদ্যটো পাইথাগোৰাছ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি নিম্নোক্ত ধৰণেও প্ৰমাণ কৰিব পাৰি :
   $PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2$ (যিহেতু OQ = OR)
   ইয়াৰ পৰা পাওঁ PQ = PR.
2. এইটোও লক্ষ্য কৰা যে ∠OPQ = ∠OPR

গতিকে, OP, $\angle QPR$ ৰ কোণ সমদ্বিখণ্ডক, অৰ্থাৎ স্পৰ্শক দুডালৰ মাজৰ কোণটোৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ ওপৰত কেন্দ্ৰ থাকে। আমি কিছুমান উদাহৰণ লওঁহক।

উদাহৰণ 1 : প্ৰমাণ কৰা যে দুটা ঐককেন্দ্ৰিক বৃত্তত, ডাঙৰ বৃত্তটোৰ জ্যাডালে সৰু বৃত্তটোক স্পৰ্শ কৰিলে, জ্যাডাল স্পৰ্শবিন্দুত সমখণ্ডিত হয়।



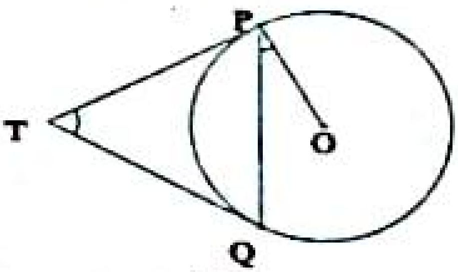
চিত্ৰ 10.8

সমাধান : আমাক দিয়া আছে, O কেন্দ্ৰযুক্ত দুটা ঐককেন্দ্ৰিক বৃত্ত C_1 আৰু C_2 আৰু ডাঙৰ বৃত্ত C_1 ৰ AB জ্যাডালে সৰু বৃত্ত C_2 ক P বিন্দুটোত স্পৰ্শ কৰে (চিত্ৰ 10.8 চোৱা)। আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে AP = BP.

আমি OP সংযোগ কৰোঁহক। তেন্তে, Pত C_2 ৰ AB এডাল স্পৰ্শক আৰু OP ইয়াৰ ব্যাসাৰ্ধ। গতিকে, উপপাদ্য 10.1 ৰ পৰা পাওঁ $OP \perp AB$.

এতিয়া, C_1 বৃত্তৰ AB এডাল জ্যা আৰু $OP \perp AB$। গতিকে, OP, AB জ্যাৰ সমদ্বিখণ্ডক, যিহেতু কেন্দ্ৰৰ পৰা টনা লম্বই জ্যাডালক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে, অৰ্থাৎ, AP = BP.

উদাহৰণ 2 এটা বহিঃবিন্দু T ৰ পৰা O কেন্দ্ৰযুক্ত এটা বৃত্তলৈ TP আৰু TQ দুডাল স্পৰ্শক টনা হ'ল। প্ৰমাণ কৰা যে, $\angle PTQ = 2\angle OPQ$.



চিত্ৰ 10.9

সমাধান : আমাক দিয়া আছে, O কেন্দ্ৰ যুক্ত এটা বৃত্ত, এটা বহিঃ বিন্দু T আৰু বৃত্তটোৰ TP আৰু TQ দুডাল স্পৰ্শক, য'ত P, Q দুটা স্পৰ্শ বিন্দু (চিত্ৰ 10.9 চোৱা)।

আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে $\angle PTQ = 2\angle OPQ$

ধৰা হ'ল $\angle PTQ = \theta$

এতিয়া, উপপাদ্য 10.2 ৰ পৰা, TP = TQ.

সেয়ে, TPQ এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ।

গতিকে, $\angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180^\circ - \theta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\theta$

আকৌ, উপপাদ্য 10.1 ৰ পৰা, $\angle OPT = 90^\circ$

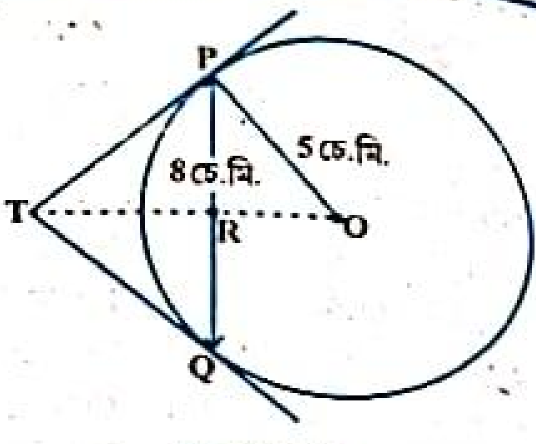
সেয়ে, $\angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ$

$$= 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PTQ$$

ইয়াৰ পৰা পাওঁ, $\angle PTQ = 2\angle OPQ$

উদাহৰণ 3 : 5 চে.মি. ব্যাসার্দ্ধৰ এটা বৃত্তৰ 8 চে.মি. দৈৰ্ঘ্যৰ PQ এডাল জ্যা। P আৰু Q ত টনা স্পৰ্শকিবোৰে এটা বিন্দু T ত ছেদ কৰে (চিত্ৰ 10.10 ত চোৱা)। TP ৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 10.10

সমাধান : OT সংযোগ কৰা। ধৰাহ'ল ই PQ ক R বিন্দু ছেদ কৰে। তেতিয়া ΔTPQ সমদ্বিবাহু আৰু TO, $\angle PTQ$ ৰ কোণ সমদ্বিখণ্ডক।

সেয়ে, $OT \perp PQ$ আৰু সেইবাবে OTয়ে PQক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।

ইয়াৰ পৰা পাওঁ $PR = RQ = 4$ চে.মি.

আকৌ, $OR = \sqrt{OP^2 - PR^2}$

$= \sqrt{5^2 - 4^2}$ চে.মি.

$= 3$ চে.মি.

এতিয়া, $\angle TPR + \angle RPO = 90° = \angle TPR + \angle PTR$ (কিয়?)

সেয়ে, $\angle RPO = \angle PTR$

গতিকে AA সাদৃশ্যৰ দ্বাৰা পাওঁ, সমকোণী ত্ৰিভুজ TRP সমকোণী ত্ৰিভুজ PRO ৰ লগত সদৃশ।

ইয়াৰ পৰা পাওঁ, $\frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO}$, অৰ্থাৎ $\frac{TP}{5} = \frac{4}{3}$ বা $TP = \frac{20}{3}$ চে.মি.

টোকা : নিম্নোক্ত ধৰণেও পাইথাগোৰাছ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি, TP নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি :

ধৰাহ'ল, $TP = x$ আৰু $TR = y$.

তেতিয়া, $x^2 = y^2 + 16$ (সমকোণী ΔPRT লৈ) ....(1)

$x^2 + 5^2 = (y + 3)^2$ (সমকোণী ΔOPT লৈ) ....(2)

(2) ৰ পৰা (1) বিয়োগ কৰি, আমি পাওঁ—

$25 = 6y - 7$ বা $y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$

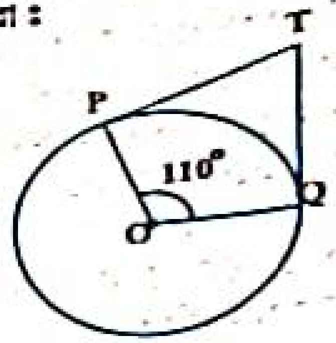
গতিকে, $x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16 = \frac{16}{9}(16 + 9) = \frac{16 \times 25}{9}$ [(1) ৰ পৰা]

বা, $x = \frac{20}{3}$

অনুশীলনী : 10.2

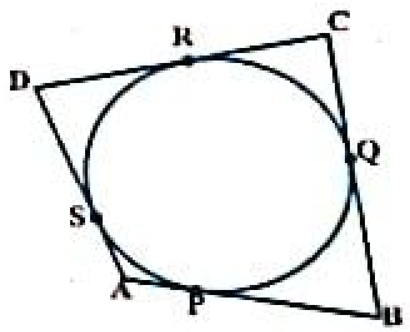
প্ৰশ্ন 1 ৰ পৰা 3 লৈ শুদ্ধ উত্তৰ বাছি উলিওৱা আৰু উপযুক্ত কাৰণ দৰ্শোৱা :

1. এটা বিন্দু Q ৰ পৰা এটা বৃত্তৰ স্পৰ্শকডালৰ দৈৰ্ঘ্য 24 চে.মি. আৰু কেন্দ্ৰৰ পৰা Q ৰ দূৰত্ব 25 চে.মি. বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ হ'ল
   (A) 7 চে.মি. (B) 12 চে.মি.
   (C) 15 চে.মি. (D) 24.5 চে.মি.

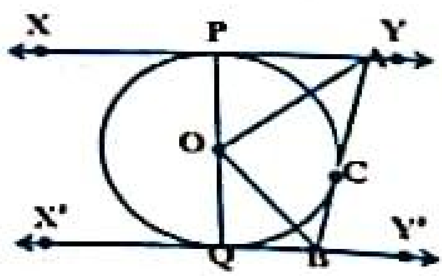


চিত্ৰ 10.11

2. চিত্ৰ 10.11ত যদি O কেন্দ্ৰ যুক্ত এটা বৃত্তৰ TP আৰু TQ দুডাল স্পৰ্শক, যাতে $\angle POQ = 110°$, তেন্তে $\angle PTQ$
   (A) 60° (B) 70°
   (C) 80° (D) 90° ৰ সমান।
3. যদি এটা বিন্দু P ৰ পৰা O কেন্দ্ৰযুক্ত এটা বৃত্তৰ PA আৰু PB স্পৰ্শকেইডালে পৰস্পৰ 80° কোণত হালি থাকে, তেন্তে $\angle POA$
   (A) 50° (B) 60°
   (C) 70° (D) 80° ৰ সমান।
4. প্ৰমাণ কৰা যে বৃত্তৰ ব্যাসৰ মূৰত টনা স্পৰ্শকিবোৰ সমান্তৰাল।
5. প্ৰমাণ কৰা যে বৃত্তৰ স্পৰ্শকিৰ স্পৰ্শবিন্দুত টনা লম্বডাল কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে যায়।
6. বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰ পৰা 5 চে.মি. দূৰত্বত থকা এটা বিন্দু A ৰ পৰা স্পৰ্শকি এডালৰ দৈৰ্ঘ্য 4 চে.মি.। বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ নিৰ্ণয় কৰা।
7. 5 চে.মি. আৰু 3 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ দুটা ঐককেন্দ্ৰিক বৃত্ত আছে। ডাঙৰ বৃত্তৰ জ্যাডালে সৰু বৃত্তক স্পৰ্শ কৰে, জ্যাডালৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।
8. এটা বৃত্তক স্পৰ্শ কৰাকৈ ABCD এটা চতুৰ্ভুজ অঁকা হ'ল (চিত্ৰ 10.12 চোৱা)। প্ৰমাণ কৰা যে AB + CD = AD + BC



চিত্ৰ 10.12



চিত্ৰ 10.13

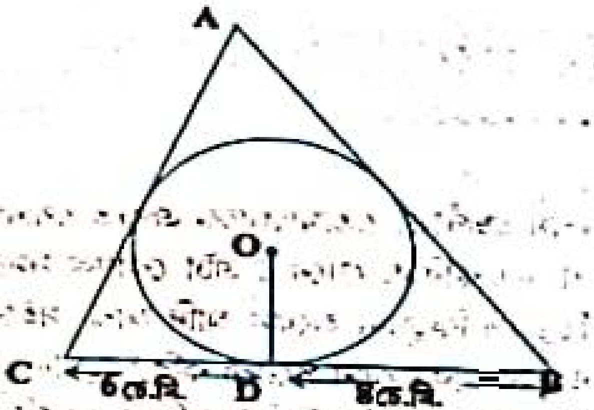
9. চিত্ৰ 10.13ত, O কেন্দ্ৰ যুক্ত বৃত্তৰ XY আৰু X'Y' দুডাল সমান্তৰাল স্পৰ্শক আৰু স্পৰ্শ বিন্দু C ত আন এডাল স্পৰ্শক AB যে XY ক A ত আৰু X'Y' ক B ত কাটে। প্ৰমাণ কৰা যে ∠AOB = 90°.

10. প্ৰমাণ কৰা যে বৃত্তৰ এটা বহিঃ বিন্দুৰ পৰা টনা স্পৰ্শক দুডালৰ মাজৰ কোণটো স্পৰ্শবিন্দু দুটা সংযোগী ৰেখাখণ্ডৰদ্বাৰা কেন্দ্ৰত সন্মুখকৈ উৎপন্ন কৰা কোণটোৰ সম্পূৰক।

11. প্ৰমাণ কৰা যে এটা বৃত্তক স্পৰ্শ কৰা সামান্তৰিকটো এটা ৰম্বাচ।

12. 4চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটা বৃত্তক স্পৰ্শ কৰাকৈ ABC এটা ত্ৰিভুজ অঁকা হ'ল যাতে স্পৰ্শবিন্দু Dৰ দ্বাৰা বিভক্ত BCৰ খণ্ড BD আৰু DCৰ দৈৰ্ঘ্য যথাক্ৰমে 8 চে.মি. আৰু 6 চে.মি. (চিত্ৰ 10.14 চোৱা)। AB আৰু AC বাহুৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

13. প্ৰমাণ কৰা যে এটা বৃত্তক স্পৰ্শ কৰি থকা এটা চতুৰ্ভুজৰ বিপৰীত বাহুবোৰে বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰত সন্মুখকৈ সম্পূৰক কোণ কৰে।



চিত্ৰ 10.14

10.4. সাৰাংশ (Summary)

এই অধ্যায়ত, তোমালোকে নিম্নোক্ত প্ৰধান বিষয়সমূহ অধ্যয়ন কৰিলা :

1. বৃত্তৰ স্পৰ্শকৰ অৰ্থ।
2. বৃত্তৰ স্পৰ্শকডাল স্পৰ্শবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ব্যাসাৰ্দ্ধৰ লম্ব।
3. বৃত্তৰ এটা বহিঃ বিন্দুৰ পৰা বৃত্তটোলৈ টনা স্পৰ্শক দুডালৰ দৈৰ্ঘ্য সমান।