દ્વિઘાત સમીકરણ

- વ્યાપક સ્વરૂપ
- બીજના પ્રકારો
- બીજ તથા સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ
- દ્વિઘાત સમીકરણની રચના
- સામાન્ય બીજનો ખ્યાલ
- મહત્તમ-ન્યૂનતમ મૂલ્યો
- દ્વિઘાત બહુપદી

- **વ્યાપક સ્વરૂપ :** બહુપદી $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a;\ b;\ c \in \mathrm{R},\ a \neq 0$ દ્વિઘાત બહુપદી છે.
  $f(\alpha) = 0$ હોય તો $x = \alpha$ ને દ્વિઘાત સમીકરણનું બીજ કહે છે.
- દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ શોધવા માટે
  (1) અવયવની રીત (2) પૂર્ણ વર્ગની રીત (3) સૂત્રની રીત ઉપયોગમાં લઈ શકાય.
- સૂત્રની રીતથી બીજ શોધવા માટે, $\mathrm{D} = b^2 - 4ac$ વાપરીને $(\alpha, \beta) = \dfrac{-b \pm \sqrt{\mathrm{D}}}{2a}$ સૂત્ર વાપરવું.

નોંધ : (1) જો $\mathrm{D} = b^2 - 4ac > 0$ હોય તો દ્વિઘાત સમીકરણને બે ભિન્ન અને વાસ્તવિક બીજ હોય.

(2) જો $\mathrm{D} = b^2 - 4ac = 0$ હોય તો આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણને બે સમાન વાસ્તવિક બીજ હોય.

(3) જો $\mathrm{D} = b^2 - 4ac < 0$ હોય તો આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણને બે ભિન્ન અવાસ્તવિક સંકર બીજ હોય, જે એકબીજાની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યાઓ હોય. અહીં $i^2 = -1$ ઉપયોગમાં લેવું.

- **વાસ્તવિક બીજના પ્રકાર :**

(1) જો દ્વિઘાત સમીકરણમાં a તથા c સમચિહ્ન હોય તથા b થી વિરુદ્ધ ચિહ્ન ધરાવતાં હોય તો બંને બીજ ધન મળે.

(2) જો દ્વિઘાત સમીકરણમાં a તથા c વિષમચિહ્ન હોય તો બંને બીજ વિરુદ્ધ ચિહ્ન ધરાવતાં હોય.

(3) જો $b = 0$ હોય તો બંને બીજ એકબીજાની વિરોધી સંખ્યાઓ હોય.

(4) જો $c = a$ હોય તો બંને બીજ એકબીજાની વ્યસ્ત સંખ્યાઓ હોય.

- **દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ તથા સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ :**

જો આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણ $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ α તથા β હોય તો,

બે બીજનો સરવાળો $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-x \text{ નો સહગુણક}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$ તથા

બે બીજનો ગુણાકાર $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$ થી મળે.

- **દ્વિઘાત સમીકરણની રચના :**

જો કોઈ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ જાણતાં હોઈએ તો $x^2 -$ (બે બીજનો સરવાળો)$x +$ (બે બીજનો ગુણાકાર) $= 0$ સૂત્ર વાપરી દ્વિઘાત સમીકરણ મેળવવું.

- **સામાન્ય બીજ :**

$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ અને $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ બે ભિન્ન દ્વિઘાત સમીકરણો (જ્યાં $a_1, a_2 \neq 0$) માટે

(1) જો એક બીજ સામાન્ય હોય તો $(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (a_1c_2 - a_2c_1)^2$

(2) જો બંને બીજ સામાન્ય હોય તો $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

- **સીમાંત કિંમત :**

  (1) જો $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ તો $x \in (\alpha, \beta)$

  (2) જો $(x - \alpha)(x - \beta) \le 0$ તો $x \in [\alpha, \beta]$

  (3) જો $(x - \alpha)(x - \beta) > 0$ તો $x \notin [\alpha, \beta]$ તથા

  (4) જો $(x - \alpha)(x - \beta) \ge 0$ તો $x \notin (\alpha, \beta)$

- **દ્વિઘાત બહુપદીનાં મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્યો :**

  ધારો કે $p(x) = ax^2 + bx + c$; $(a \ne 0)$ આપેલ બહુપદી હોય, તો

  (i) જો $a > 0$ તો $p(x)$નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય $x = \frac{-b}{2a}$ આગળ $\frac{4ac - b^2}{4a}$ મળે તથા

  (ii) જો $a < 0$ તો $p(x)$નું મહત્તમ મૂલ્ય $x = \frac{-b}{2a}$ આગળ $\frac{4ac - b^2}{4a}$ મળે.

- **ત્રિઘાત બહુપદી :**

  જો $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $(a \ne 0)$ નાં બીજ α, β, γ હોય, તો

  (1) બીજનો સરવાળો : $\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$

  (2) બે બીજના ગુણાકારનો સરવાળો : $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

  (3) બીજનો ગુણાકાર : $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$

  - $\alpha; \beta; \gamma$ બીજવાળું ત્રિઘાત સમીકરણ

    $x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$ છે.

બહુ વિકલ્પી પ્રશ્નો

(1) જો x_1 તથા x_2 એ દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 3x + p = 0$ નાં બીજ હોય તથા x_3 અને x_4 એ દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 12x + q = 0$નાં બીજ હોય તથા જો આ ચારેય બીજ વધતી સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તો p = ..., q = ...

(A) $p = 2; q = 32$ (B) $p = 4; q = 16$ (C) $p = 4; q = 32$ (D) $p = 2; q = 16$

ઉકેલ : અહીં $x_1 + x_2 = 3$ તથા $x_1x_2 = p$ છે. એ જ રીતે, $x_3 + x_4 = 12$ તથા $x_3x_4 = q$ છે.

હવે x_1, x_2, x_3, x_4 સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore x_2 = x_1r$; $x_3 = x_1 r^2$; $x_4 = x_1 r^3$ લઈ શકાય.

$\therefore x_1 + x_2 = x_1 + x_1r = 3$ તથા $x_3 + x_4 = 12$

$\therefore x_1(1+r) = 3$

$x_1 r^2 + x_1r^3 = 12$

$\therefore x_1 r^2 (1+r) = 12$

$\therefore r^2 (3) = 12$

$\therefore r^2 = 4$

$\therefore r = 2$ $(r > 0)$

$\therefore x_1 = 1$ તથા $x_2 = 2$ મળે. આથી $p = x_1 x_2 = 1(2) = 2$

વળી $x_3 = x_1r^2 = 4$, $x_4 = x_1r^3 = 8$

$q = x_3 . x_4 = 4(8) = 32$

$p = 2; q = 32$ મળે.

જવાબ : (A)

(2) સમીકરણ $|x^2 - 5x + 6| = x + 6$ નાં વાસ્તવિક બીજ ...... હોય.

(A) 0, 2 (B) 0, 6 (C) 6, 8 (D) 4, 6

ઉકેલ : $|x^2 - 5x + 6| = x + 6$

$\therefore |(x-3)(x-2)| = x + 6$

વિકલ્પ 1 $x \le 2 \Rightarrow (x-2) \le 0$ તથા $(x-3) < 0$

$\therefore |(x-3)(x-2)| = (x-3)(x-2)$

$\therefore x^2 - 5x + 6 = x + 6$

$\therefore x^2 - 6x = 0$

$\therefore x(x-6) = 0$

$\therefore x = 0$ અથવા $x = 6$. $x \le 2$ હોવાથી $x = 0$

વિકલ્પ 2 $x \ge 3$ આથી $(x-3) \ge 0$ તથા $(x-2) \ge 1 > 0$

$\therefore (x-3)(x-2) \ge 0$ $|(x-3)(x-2)| = (x-3)(x-2)$ થાય.

$\therefore x = 0$ કે 6 મળે.

$x \ge 3$ હોવાથી $x = 6$.

વિકલ્પ 3 $x > 2$ તથા $x < 3$ એટલે કે, $x \in (2, 3)$

$\therefore (x-2) > 0$ તથા $(x-3) < 0$

$\therefore (x-3)(x-2) < 0$

આથી $|(x-3)(x-2)| = -(x^2 - 5x + 6)$

$\therefore -(x^2 - 5x + 6) = x + 6$

$\therefore -6 + 5x - x^2 = x + 6$

$\therefore x^2 - 4x + 12 = 0$

$\therefore$ વાસ્તવિક x ના મળે.

$\therefore x = 0$ અથવા 6 **જવાબ :** (B)

(3) સમીકરણ $3x^2 + 2x(k^2+1) + k^2 - 3k + 2 = 0$ નાં બીજ વિરોધી ચિહ્ન ધરાવતાં હોય તો $k \in$ ......

(A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

ઉકેલ : દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ વિષમ ચિહ્ન હોય, તો બીજનો ગુણાકાર ઋણ મળે. આથી $\frac{c}{a} < 0$

$\therefore \frac{k^2 - 3k + 2}{3} < 0$

$\therefore k^2 - 3k + 2 < 0$

$\therefore (k-2)(k-1) < 0$

$\therefore k \in (1, 2)$ **જવાબ :** (C)

(4) $e^{\cot x} - e^{-\cot x} = 4$ હોય તો $\cot x =$ ......

(A) $\log_{10}(2+\sqrt{5})$ (B) $\log_{10}(2-\sqrt{5})$ (C) $\log_e(2-\sqrt{5})$ (D) $\log_e(2+\sqrt{5})$

ઉકેલ : $e^{\cot x} - \frac{1}{e^{\cot x}} = 4$

ધારો કે $e^{\cot x} = m$

$\therefore\ m - \frac{1}{m} = 4$

$\therefore\ m^2 - 4m - 1 = 0$

$\therefore\ m = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$

પરંતુ $m = e^{cot\,x} > 0$ હોવાથી, $m = 2 + \sqrt{5}$

$\therefore\ e^{cot\,x} = 2 + \sqrt{5}$

આથી $cot\,x = \log_e\left(2 + \sqrt{5}\right)$ **જવાબ :** (D)

(5) દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજનાં વ્યસ્ત બીજ ધરાવતું દ્વિઘાત સમીકરણ ...... હોઈ શકે. ($a \neq 0, c \neq 0$)

(A) $bx^2 + cx - a = 0$ (B) $cx^2 + ax - b = 0$ (C) $cx^2 + bx + a = 0$ (D) $bx^2 - cx + a = 0$

ઉકેલ : ધારો કે સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ α અને β છે. આથી $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ તથા $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

હવે માંગેલ સમીકરણનાં બીજ $\frac{1}{\alpha}$ તથા $\frac{1}{\beta}$ હોવાથી,

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{-b}{c}$ તથા $\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{a}{c}$

$\therefore$ માંગેલ દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - \left(\frac{-b}{c}\right)x + \frac{a}{c} = 0$

$\therefore\ cx^2 + bx + a = 0$

→ **બીજી રીત :**

$x = \frac{1}{y}$ લેતાં $\frac{a}{y^2} + \frac{b}{y} + c = 0$

$\therefore\ cy^2 + by + a = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ α, β હોય તો

$cx^2 + bx + a = 0$ નાં બીજ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ હોય. **જવાબ :** (C)

(6) જો સમીકરણ $x^2 - 3kx + 2e^{2\log|k|} - 1 = 0$ નાં વાસ્તવિક બીજ એવાં મળે કે, જેથી બીજનો ગુણાકાર 31 થાય તો $k =$ ......

(A) ± 1 (B) ± 2 (C) ± 3 (D) ± 4

ઉકેલ : $x^2 - 3kx + 2e^{2\log|k|} - 1 = 0$

$\therefore\ x^2 - 3kx + 2e^{\log k^2} - 1 = 0$

$\therefore\ x^2 - 3kx + (2k^2 - 1) = 0$

$\therefore$ હવે બીજનો ગુણાકાર = 31. આથી $2k^2 - 1 = 31$

$\therefore\ k^2 = 16$

આથી $k = \pm 4$ **જવાબ :** (D)

(7) દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - bx + c = 0$ નાં બે બીજ વચ્ચેનો તફાવત 1 હોય તો નીચેનામાંથી ...... સત્ય બને.

(A) $b^2 = 4c + 1$ (B) $b^2 = 4c - 1$ (C) $c^2 = 4b - 1$ (D) $a^2 = 4c + 1$

ઉકેલ : ધારો કે $x^2 - bx + c = 0$નાં બીજ α તથા β છે તથા $\beta = \alpha + 1$ છે.

બે બીજનો સરવાળો $= \alpha + \beta = \alpha + \alpha + 1 = 2\alpha + 1 = b$ (1)

તથા બે બીજનો ગુણાકાર $= c = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha$

$$\therefore c = \left(\frac{b-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-1}{2}\right) \qquad \text{((1) પરથી)}$$

$$\therefore 4c = (b-1)^2 + 2(b-1)$$
$$= b^2 - 2b + 1 + 2b - 2$$
$$4c = b^2 - 1$$
$$b^2 = 4c + 1$$

→ **બીજી રીત :**

$$(\alpha - \beta)^2 = 1 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$$
$$\Rightarrow b^2 - 4c = 1 \Rightarrow b^2 = 4c + 1$$

જવાબ : (A)

(8) સમીકરણ $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = 1$ નાં બે બીજ એકબીજાની વિરોધી સંખ્યાઓ હોય તો $2(a + b) =$ ......

(A) – 1 (B) 2 (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = 1$

$\therefore ax - ab + bx - ab = (x - a)(x - b)$

$\therefore (a + b)x - 2ab = x^2 - (a + b)x + ab$

$\therefore x^2 - 2(a + b)x + 3ab = 0$

આ સમીકરણનાં બીજ એકબીજાની વિરોધી સંખ્યાઓ છે.

$\therefore \alpha + \beta = 0$. આથી $b = 0$

$\therefore a + b = 0$

$\therefore 2(a + b) = 0$

જવાબ : (C)

(9) જો $sin\ \alpha$ તથા $cos\ \alpha$ એ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ હોય, તો નીચેનામાંથી ...... સત્ય બને.

(A) $a^2 = b^2 - 2ac$ (B) $a^2 = b^2 - 4ac$ (C) $b^2 = c^2 - 4ab$ (D) $c^2 = a^2 - 4bc$

ઉકેલ : અહીં બે બીજનો સરવાળો, $sin\ \alpha + cos\ \alpha = \frac{-b}{a}$ તથા બે બીજનો ગુણાકાર, $sin\ \alpha\ cos\ \alpha = \frac{c}{a}$ છે. (1)

$$\therefore (sin\ \alpha + cos\ \alpha)^2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore 1 + 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2}{a^2} \qquad \text{((1) પરથી}$$

$\therefore a^2 + 2ac = b^2$

$\therefore a^2 = b^2 - 2ac$

જવાબ : (A)

(10) જો કોઈ દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + bx + c = 0$ નાં બીજનો ગુણોત્તર એ અન્ય દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + px + q = 0$ નાં બીજનાં ગુણોત્તર જેટલો હોય તો નીચેનામાંથી ...... સત્ય બને.

(A) $ap^2 = bq^2$ (B) $b^2q = cp^2$ (C) $a^2q = bp^2$ (C) $(aq)^2 = (bq)^2$

ઉકેલ : ધારો કે દ્વિઘાત સમીકરણ, $x^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ α તથા β છે. $\alpha + \beta = -b,\ \alpha\beta = c$ થાય.

વળી, દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + px + q = 0$ નાં બીજ m તથા n હોય તો, $m + n = -p,\ mn = q$ મળે.

હવે $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n}$ આપેલ છે.

$\therefore \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{m+n}{m-n}$

$\therefore \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{(m+n)^2}{(m-n)^2}$

$\therefore \frac{(\alpha+\beta)^2}{\left[(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right]} = \frac{(m+n)^2}{\left[(m+n)^2-4mn\right]}$

$\therefore \frac{(-b)^2}{\left[(-b)^2-4(c)\right]} = \frac{(-p)^2}{\left[(-p)^2-4q\right]}$

$\therefore \frac{b^2}{b^2-4(c)} = \frac{p^2}{p^2-4q}$

$\therefore b^2p^2 - b^2(4q) = b^2p^2 - (4cp^2)$

$\therefore b^2(4q) = (p^24c)$

$\therefore b^2q = cp^2$ **જવાબ :** (B)

→ **બીજી રીત :** ધારો કે સમીકરણોનાં બીજ $\alpha, \alpha\gamma$ તથા $\beta, \beta\gamma$ છે.

$\alpha(1+\gamma) = -b,\ \beta(1+\gamma) = -p,\ \alpha^2\gamma = c\ \ \beta^2\gamma = q$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta} = \frac{b}{p},\ \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{c}{q}$. આથી $\left(\frac{b}{p}\right)^2 = \frac{c}{q}$. આથી $b^2q = p^2c$ **જવાબ :** (B)

(11) જો $x = \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots\infty}}}$ હોય તો x ની કિંમતો ...... હોઈ શકે. $(x > 0)$

(A) 5, –4 (B) 4 (C) 5 (D) 4, –5

ઉકેલ : $x = \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots\infty}}}$

$\therefore x = \sqrt{20+x}$

$\therefore x^2 = 20 + x$

$\therefore x^2 - x - 20 = 0$

$\therefore (x-5)(x+4) = 0$

$\therefore x = 5$ કે $x = -4$

પરંતુ $x > 0$ હોવાથી $x \neq -4$

$\therefore x = 5$ **જવાબ :** (C)

(12) જો કોઈ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજનો સરવાળો તે બીજના વ્યસ્તના વર્ગોના સરવાળા જેટલો થાય, તો નીચેનામાંથી ...... સત્ય બને.

(A) ab^2, a^2c તથા bc^2 સમાંતર શ્રેણીમાં હોય.

(B) ab^2, a^2c તથા bc^2 સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય.

(C) $\frac{b}{c}, \frac{a}{b}$ તથા $\frac{c}{a}$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય.

(D) $\frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{c}{a}$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય.

ઉકેલ : ધારો કે દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ α અને β છે.

હવે $\alpha + \beta = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$

$\therefore\ \alpha + \beta = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

અહીં $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ તથા $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ છે.

$$\therefore\ \frac{-b}{a} = \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$$

$\therefore\ -bc^2 = ab^2 - 2a^2c$

$\therefore\ 2a^2c = ab^2 + bc^2$

$\therefore\ ab^2, a^2c$ તથા bc^2 સમાંતર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (A)

(13) સમીકરણ $x^{\frac{1}{4}(\log_2 x) - \frac{3}{4}} = 2$ નાં બીજ ...... મળે.

(A) $\frac{1}{2}$, 6 (B) $\frac{1}{6}$, 2 (C) $\frac{1}{2}$, 16 (D) $\frac{1}{16}$, 2

ઉકેલ : $x^{\frac{1}{4}(\log_2 x) - \frac{3}{4}} = 2$

$\therefore\ \frac{\log_2 x - 3}{4} = \log_x 2$

$\therefore\ (\log_2 x) - 3 = \frac{4\log_2 2}{\log_2 x}$

$\therefore\ (\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 4 = 0$

$\therefore\ (\log_2 x + 1)(\log_2 x - 4) = 0$

$\therefore\ \log_2 x = -1$ અથવા $\log_2 x = 4$

$\therefore\ x = 2^{-1}$ અથવા $x = 2^4$ એટલે કે $x = \frac{1}{2}$ અથવા $x = 16$ **જવાબ :** (C)

(14) જો $\frac{x^2 + 2x + 7}{2x + 3} < 6; x \in R$ હોય, તો x ની ...... કિંમતો સત્ય બને.

(A) $x > 11$ અથવા $x < -1$ (B) $x < \frac{-3}{2}$ અથવા $-1 < x < 11$

(C) $x > 11$ અથવા $x < \frac{-3}{2}$ (D) $\frac{-3}{2} < x < -1$

ઉકેલ : $\frac{x^2 + 2x + 7}{2x + 3} < 6; x \in R$ આપેલ છે.

$\therefore \ \dfrac{x^2+2x+7}{2x+3} - 6 < 0$

$\therefore \ \dfrac{x^2-10x-11}{2x+3} < 0$

વિકલ્પ 1 $x^2 - 10x - 11 < 0$ અને $2x + 3 > 0$

$\therefore (x - 11)(x + 1) < 0$ અને $x > \frac{-3}{2}$

$\therefore -1 < x < 11$ અને $x > \frac{-3}{2}$

પરંતુ $x > \frac{-3}{2}$ હોવાથી $-1 < x < 11$ શક્ય બને.

વિકલ્પ 2 $x^2 - 10x - 11 > 0$ અને $2x + 3 < 0$

$(x - 11)(x + 1) > 0$ તથા $x < \frac{-3}{2}$

$\therefore (x > 11$ અથવા $x < -1)$ તથા $x < \frac{-3}{2}$

$\therefore x < -\frac{3}{2}$

આમ $x < \frac{-3}{2}$ અથવા $-1 < x < 11$ સત્ય થાય. **જવાબ :** (B)

(15) જો $cos\ \alpha$ એ દ્વિઘાત સમીકરણ $15x^2 + 8x - 12 = 0;\ 0 < x < 1$ નું બીજ હોય, તો $tan^2 \frac{\alpha}{2}$ = ... થાય.

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) 5

ઉકેલ : $15x^2 + 8x - 12 = 0;\ 0 < x < 1$ આપેલ છે.

$\therefore (3x - 2)(5x + 6) = 0$

$\therefore x = \frac{2}{3}$ અથવા $x = \frac{-6}{5}$

$0 < x < 1$ હોવાથી $x = \frac{2}{3} = \cos\alpha$

$\therefore \ tan^2 \frac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$ **જવાબ :** (C)

(16) જો $a, b\ c \in R;\ a + b + c = 0,\ c \neq 0$ હોય, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $4ax^2 + 3bx + 2c = 0$ ને ...... બીજ હોય.

$a, c,$ સમચિહ્ન

(A) એક ધન તથા એક ઋણ. (B) બે સંકર. (C) બે વાસ્તવિક. (D) બંને શૂન્ય.

ઉકેલ : અહીં $4ax^2 + 3bx + 2c = 0$ આપેલ છે.

$\therefore \Delta = 9b^2 - 32ac$

$= 9(-a - c)^2 - 32ac$ $\quad (a + b + c = 0 \Rightarrow b = -a - c)$

$= 9(a^2 + c^2 + 2ac) - 32ac$

$= 9a^2 + 9c^2 - 14ac$

$= \dfrac{9a^2}{c^2} - \dfrac{14a}{c} + 9$

$= \left(\dfrac{3a}{c} - \dfrac{7}{3}\right)^2 + \dfrac{32}{9} \geq \dfrac{32}{9} > 0$

આથી દ્વિઘાત સમીકરણને બે વાસ્તવિક બીજ મળે. (શા માટે (A) અથવા (D) નહીં ?) **જવાબ :** (C)

(17) સમીકરણ $5^{2x^2-7x+7}=25$ ને ...... બીજ મળે.

(A) 0 (B) બેથી વધુ (C) બરાબર બે જ. 1, તથા $\frac{2}{5}$ (D) બરાબર બે જ. 1 તથા $\frac{5}{2}$

ઉકેલ : અહીં $5^{2x^2-7x+7}=5^2$ આપેલ છે.

$\therefore\ 2x^2 - 7x + 7 = 2$

$\therefore\ 2x^2 - 7x + 5 = 0$

$\therefore\ (2x - 5)(x - 1) = 0$

$\therefore\ x = 1$ અથવા $x = \frac{5}{2}$ **જવાબ :** (D)

(18) વિધેય $\frac{5}{9x^2+6x+14}$ ની મહત્તમ કિંમત ...... છે.

(A) 5 (B) $\frac{13}{5}$ (C) $\frac{5}{13}$ (D) 13

ઉકેલ : $\frac{5}{9x^2+6x+14}$ ત્યારે જ મહત્તમ કિંમત ધારણ કરે કે જ્યારે દ્વિઘાત વિધેય $9x^2 + 6x + 14$ ન્યૂનતમ હોય.

હવે, $9x^2 + 6x + 14 = 9x^2 + 6x + 1 + 13 = (3x + 1)^2 + 13 \geq 13$

આથી $9x^2 + 6x + 14$ની ન્યૂનતમ સીમા 13 છે. $x = -\frac{1}{3}$ માટે ન્યૂનતમ કિંમત મળે.

આથી $\frac{5}{9x^2+6x+14}$ ની મહત્તમ કિંમત $\frac{5}{13}$ મળે. **જવાબ :** (C)

નોંધ : $9x^2 + 6x + 14$ ની ન્યૂનતમ કિંમત $= \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{504-36}{36} = \frac{468}{36} = 13$.

(19) જો x એ કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો $\frac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3} \in$ ......

(A) [1, 3] (B) [4, –5] (C) [–5, 4] (D) $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$

ઉકેલ : ધારો કે $y = \frac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3}$

$\therefore\ x^2y + 2xy + 3y = x^2 + 14x + 9$

$= (y - 1)x^2 + (y - 7)2x + 3y - 9 = 0$

હવે $x \in R$ હોવાથી, $b^2 - 4ac \geq 0$ જરૂરી છે.

$\therefore\ 4(y - 7)^2 - 4(y - 1)(3y - 9) \geq 0$

$\therefore\ (y - 7)^2 - 3(y - 1)(y - 3) \geq 0$

$\therefore\ (y^2 - 14y + 49) - 3(y^2 - 4y + 3) \geq 0$

$\therefore\ -2y^2 - 2y + 40 \geq 0$

$\therefore\ y^2 + y - 20 \leq 0$

$\therefore\ (y + 5)(y - 4) \leq 0$

$\therefore\ -5 \leq y \leq 4$

$\therefore\ \frac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3} \in [-5, 4]$ **જવાબ :** (C)

(20) જો $x \in R$ હોય, તો $\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$ ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમત અનુક્રમે ...... હોય.

(A) 3, $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$, 3 (C) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ (D) 3, 3

ઉકેલ : ધારો કે $y = \frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$

$\therefore x^2y + 2xy + 4y = x^2 - 2x + 4$

$\therefore (y-1)x^2 + 2(y+1)x + 4(y-1) = 0$

હવે $x \in R$ હોવાથી, $b^2 - 4ac \geq 0$ જરૂરી છે.

$\therefore 4(y+1)^2 - 4(y-1)\,4\,(y-1) \geq 0$

$\therefore (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$

$\therefore [y + 1 - 2(y-1)]\,(y + 1 + 2(y-1) \geq 0$

$\therefore (3-y)(3y-1) \geq 0$ એટલે કે $(y-3)(3y-1) \leq 0$

$\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3$

$\therefore \frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$ ની ન્યૂનતમ કિંમત $\frac{1}{3}$ તથા મહત્તમ કિંમત 3 મળે.

નોંધ : અનુક્રમે $x = 2$ તથા $x = -2$ માટે તે મળે. **જવાબ :** (A)

(21) જો $\alpha \neq \beta$ તથા $\alpha^2 = 5\alpha - 3$ તેમજ $\beta^2 = 5\beta - 3$ હોય, તો $\frac{\alpha}{\beta}$ અને $\frac{\beta}{\alpha}$ બીજ ધરાવતું દ્વિઘાત સમીકરણ ...... હોય.

(A) $3x^2 - 19x + 3 = 0$ (B) $3x^2 - 19x - 3 = 0$ (C) $3x^2 - 16x + 1 = 0$ (D) $x^2 + 19x - 3 = 0$

ઉકેલ : અહીં $\alpha^2 = 5\alpha - 3$ તથા $\beta^2 = 5\beta - 3$

$\therefore \alpha^2 - 5\alpha + 3 = 0$ તથા $\beta^2 - 5\beta + 3 = 0$ આથી α, β સમીકરણ $x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ છે.

$\therefore \alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 3$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta}$ અને $\frac{\beta}{\alpha}$ બીજ કોઈ સમીકરણનાં બીજ હોય તો,

બીજોનો સરવાળો $= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$= \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{25-6}{3} = \frac{19}{3}$

બીજનો ગુણાકાર $= (\frac{\alpha}{\beta})(\frac{\beta}{\alpha}) = 1$

$\therefore$ માંગેલ દ્વિઘાત સમીકરણ : $x^2 - \left(\frac{19}{3}\right)x + 1 = 0$

$\therefore 3x^2 - 19x + 3 = 0$ **જવાબ :** (A)

(22) સમીકરણ $\frac{\log 3 + \log(x^2+2)}{\log(x-2)} = 2$ ના ...... ઉકેલ મળે.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $\frac{\log 3 + \log(x^2+2)}{\log(x-2)} = 2$

$\therefore \log [3 (x^2 + 2)] = 2 \log (x - 2) = \log (x - 2)^2$

$\therefore 3 (x^2 + 2) = (x - 2)^2$

$\therefore 3x^2 + 6 = x^2 - 4x + 4$

$\therefore 2x^2 + 4x + 2 = 0$

$\therefore x^2 + 2x + 1 = 0$

$\therefore (x + 1)^2 = 0$

$\therefore x = -1$ પરંતુ $x = -1$ લેતાં, $\log (x-2)$ શક્ય ન બને.

$\therefore x \neq -1$

$\therefore$એક પણ ઉકેલ શક્ય નથી. **જવાબ :** (A)

(23) સમીકરણ $\sqrt{x-2}\ (x^2 - 4x + 3) = 0$ નાં વાસ્તવિક બીજ ...... હોય.

(A) 1, 2 (B) 1, 3 (C) 2, 3 (D) 1, 2, 3

ઉકેલ : $\sqrt{x-2}\ (x^2 - 4x + 3) = 0$

$\therefore \sqrt{x-2}\,(x - 1)(x - 3) = 0$

$\therefore x = 1$ અથવા 2 અથવા 3

પરંતુ $x - 2 \geq 0$

$\therefore x = 2, 3$ **જવાબ :** (C)

(24) જો x, y, z ભિન્ન અને વાસ્તવિક હોય, તો $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6yz - 3zx - 2xy$ હંમેશાં ...... હોય.

(A) અનૃણ (B) ઋણ (C) 0 (D) સંકર સંખ્યા

ઉકેલ : $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6yz - 3zx - 2xy$

$= (x)^2 + (2y)^2 + (3z)^2 - (2y)(3z) - x(3z) - x(2y)$

$= \frac{1}{2}[(x - 2y)^2 + (2y - 3z)^2 + (x - 3z)^2] \geq 0$

આથી $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6yz - 3zx - 2xy$ હંમેશાં અનૃણ જ હોય. **જવાબ :** (A)

(25) જો $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{10}{3} = \log_2 y + \log_y 2$ તથા $x \neq y$ હોય તો $x + y = ...$

(A) 8 (B) $2^{\frac{1}{3}}$ (C) $8 - 2^{\frac{1}{3}}$ (D) $8 + 2^{\frac{1}{3}}$

ઉકેલ : અહીં $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{10}{3} = \log_2 y + \log_y 2$ આપેલ છે.

$\therefore \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{10}{3}$ લેતાં, $= \frac{(\log_2 x)^2 + 1}{\log_2 x} = \frac{10}{3}$

ધારો કે $\log_2 x = m$, આથી $3(m^2 + 1) = 10m$

$\therefore 3m^2 - 10m + 3 = 0$

$\therefore (3m - 1)(m - 3) = 0$

$\therefore m = 3$ અથવા $m = \frac{1}{3}$

$\therefore \log_2 x = 3$ અથવા $\log_2 x = \frac{1}{3}$

આ જ રીતે, $\log_2 y = 3$ કે $\log_2 y = \frac{1}{3}$ મળે.

હવે, $x \neq y$ હોવાથી, $\log_2 x = 3$ લેતાં, $\log_2 y \neq 3$. આથી $\log_2 y = \frac{1}{3}$ થાય.

અથવા $\log_2 x = \frac{1}{3}$ લેતાં, $\log_2 y = 3$ થાય.

$\therefore x = 2^3$ તથા $y = 2^{\frac{1}{3}}$ અથવા $x = 2^{\frac{1}{3}}$ અને $y = 2^3$ થાય

$\therefore x + y = 2^3 + 2^{\frac{1}{3}} = 8 + 2^{\frac{1}{3}}$ **જવાબ :** (D)

(26) જો $x = \sqrt{12 - \sqrt{140}}$ હોય, તો $x + \frac{1}{x} = ...$

(A) $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ (B) $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$ (C) $\frac{3\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{7} - 3\sqrt{5}}{2}$

ઉકેલ : $x = \sqrt{12 - \sqrt{140}} = \sqrt{12 - 2\sqrt{35}} = \sqrt{7} - \sqrt{5}$ (કરણીનું વર્ગમૂળ)

$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}$

$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{7} - \sqrt{5} + \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}$

$= \frac{3\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$ **જવાબ :** (C)

(27) જો 3, 3 એ દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + ax + \beta = 0$ નાં બીજ હોય તથા –8, 2 એ દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + \alpha x + b = 0$ નાં બીજ હોય, તો સમીકરણ $x^2 + ax + b = 0$ નાં બીજ ...... હોય.

(A) 2, 8 (B) –2, –8 (C) 8, –2 (D) –8, 2

ઉકેલ : સમીકરણ $x^2 + ax + \beta = 0$ નાં બીજ 3, 3 હોવાથી, બીજનો સરવાળો $3 + 3 = -a$. આથી $a = -6$ મળે.

વળી, દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + \alpha x + b = 0$ નાં બીજ – 8 તથા 2 છે. આથી બીજનો ગુણાકાર $= -8\ (2) = b$.

આથી $b = -16$.

આથી નવું દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 6x - 16 = 0$ મળે.

$\therefore (x - 8)(x + 2) = 0$

$\therefore x = 8$ અથવા $x = -2$ મળે. **જવાબ :** (C)

(28) દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ શોધતી વખતે બે વિદ્યાર્થીઓ પૈકી એક વિદ્યાર્થી સમીકરણનું અચળ પદ ખોટું લખે છે અને સમીકરણનાં સાચાં બીજનો સરવાળો 3 મળે છે જ્યારે બીજો વિદ્યાર્થી x^2 નો સહગુણક તથા અચળ પદ સાચાં લખે છે જે અનુક્રમે 1 તથા –18 છે તો મળતા દ્વિઘાત સમીકરણનાં સાચાં બીજ ...... હોય.

(A) 3, 6 (B) –3, –6 (C) –6, 3 (D) 6, –3

ઉકેલ : અહીં બીજનો સરવાળો = 3

તથા બીજનો ગુણાકાર $= \frac{-18}{1} = -18$

$\therefore$ મળતું દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 3x - 18 = 0$

$\therefore (x-6)(x+3) = 0$

$\therefore x = 6$ અથવા $x = -3$ મળે.

જવાબ : (D)

(29) સમીકરણ $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{x-3} + \left(5-2\sqrt{6}\right)^{x-3} = 10$ નું એક બીજ ...... હોય.

(A) 4 (B) 3 (C) 8 (D) 2

ઉકેલ : અહીં $5-2\sqrt{6} = \frac{1}{5+2\sqrt{6}}$

$\therefore \left(5+2\sqrt{6}\right)^{x-3} + \left(5-2\sqrt{6}\right)^{x-3} = 10$

$\therefore \left(5+2\sqrt{6}\right)^{x-3} + \left(\frac{1}{5+2\sqrt{6}}\right)^{x-3} = 10$

ધારો કે $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{x-3} = m$

$\therefore m + \frac{1}{m} = 10$

$\therefore m^2 - 10m + 1 = 0$

$\therefore m = \frac{10 \pm \sqrt{100-4}}{2}$

$\therefore m = 5 \pm 2\sqrt{6}$.

$\therefore m = \left(5+2\sqrt{6}\right)^{x-3} = \left(5+2\sqrt{6}\right)^{1}$ અથવા $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{-1}$

$\therefore x - 3 = \pm 1$

$\therefore x = 4$ અથવા 2

જવાબ : **(A),(D)**

(30) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $(a^2 + b^2)x^2 - 2b(a+c)x + (b^2 + c^2) = 0$ નાં બીજ સમાન હોય તો a, b, c ...... શ્રેણીમાં હોય. $a, b, c \in R$

(A) સમાંતર (B) સમગુણોત્તર C) સ્વરિત (D) સમાંતર-સમગુણોત્તર

ઉકેલ : $(a^2 + b^2)x^2 - 2b(a+c)x + (b^2 + c^2) = 0$ નાં બીજ સમાન છે.

$\therefore \Delta = 0$

$\therefore 4b^2(a+c)^2 - 4(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = 0$

$\therefore 4b^2(a^2 + 2ac + c^2) - 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^4 + b^2c^2) = 0$

$\therefore\ 8ab^2c - 4a^2c^2 - 4b^4 = 0$

$\therefore\ b^4 + a^2c^2 - 2ab^2c = 0$

$\therefore\ (b^2 - ac)^2 = 0$

$\therefore\ b^2 = ac$

$\therefore\ a, b, c$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (B)

(31) $\log_2 (x^2 + 5x + 10) = 2$ નાં બીજ ...... મળે.

(A) 2, 3 (B) –2, 3 (C) –3, 2 (D) –2, –3

ઉકેલ : $\log_2 (x^2 + 5x + 10) = 2$

$\therefore\ x^2 + 5x + 10 = 2^2 = 4$

$\therefore\ x^2 + 5x + 6 = 0$

$\therefore\ (x + 3)(x + 2) = 0$

$\therefore\ x = -2$ કે $x = -3$ મળે. **જવાબ :** (D)

(32) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ α અને β હોય, તો $\frac{1}{a\alpha+b} + \frac{1}{a\beta+b} =$ ......

(A) $\frac{c}{ab}$ (B) $\frac{a}{bc}$ (C) $\frac{b}{ac}$ (D) $\frac{1}{abc}$

ઉકેલ : $\frac{1}{a\alpha+b} + \frac{1}{a\beta+b} = \frac{a\beta+b+a\alpha+b}{(a\alpha+b)(a\beta+b)}$

$$= \frac{a(\alpha+\beta)+2b}{a^2\alpha\beta+ab(\alpha+\beta)+b^2}$$

$$= \frac{a\left(\frac{-b}{a}\right)+2b}{a^2\left(\frac{c}{a}\right)+ab\left(\frac{-b}{a}\right)+b^2} = \frac{-b+2b}{ac-b^2+b^2} = \frac{b}{ac}$$

જવાબ : (C)

(33) જો x કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય અને $k = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ હોય તો $k \in$ ......

(A) $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ (B) $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ (C) $k \le \frac{1}{3}$ (D) $k \ge 3$

ઉકેલ : $k = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ આપેલ છે.

$\therefore\ x^2 + x + 1 = kx^2 - kx + k$

$\therefore\ (k-1)x^2 - (k+1)x + (k-1) = 0$

હવે $x \in R$ હોવાથી, $\Delta = b^2 - 4ac \ge 0$

$\therefore\ (k+1)^2 - 4(k-1)(k-1) \ge 0$

$\therefore\ (k+1)^2 - [2(k-1)]^2 \ge 0$

$\therefore\ (k+1-2k+2)(k+1+2k-2) \ge 0$

$\therefore\ (3-k)(3k-1) \ge 0$

$\therefore \ (k-3)(3k-1) \le 0$

$\therefore \ \frac{1}{3} \le k \le 3$

$\therefore \ k \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ **જવાબ :** (B)

(34) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - m(x+1) - n = 0$ નાં બીજ α અને β હોય, તો $\frac{\alpha^2+2\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+n} + \frac{\beta^2+2\beta+1}{\beta^2+2\beta+n}$ ની કિંમત ...... હોય.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

ઉકેલ : $x^2 - m(x+1) - n = 0$

$\therefore x^2 - mx - (m+n) = 0$ નાં બીજ α તથા β આપેલ છે. (1)

$\therefore \alpha + \beta = m \ ; \ \alpha\beta = -(m+n)$

આથી, $n = -\alpha\beta - m$

$= -\alpha\beta - (\alpha + \beta)$

$$\therefore \frac{\alpha^2+2\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+n} + \frac{\beta^2+2\beta+1}{\beta^2+2\beta+n} = \frac{\alpha^2+2\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha-\alpha\beta-\alpha-\beta} + \frac{\beta^2+2\beta+1}{\beta^2+2\beta-\alpha\beta-\alpha-\beta}$$

$$= \frac{\alpha^2+2\alpha+1}{\alpha^2+\alpha-\alpha\beta-\beta} + \frac{\beta^2+2\beta+1}{\beta^2+\beta-\alpha\beta-\alpha}$$

$$= \frac{(\alpha+1)^2}{(\alpha-\beta)(\alpha+1)} + \frac{(\beta+1)^2}{(\beta+1)(\beta-\alpha)}$$

$$= \frac{\alpha+1}{\alpha-\beta} - \frac{\beta+1}{\alpha-\beta}$$

$$= \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}$$

$= 1$ **જવાબ :** (B)

(35) સમીકરણ $x^2 + x - 1 = 0$ નાં બીજનો ગુણોત્તર $m : n$ હોય તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ?

(A) $2m + n(3+\sqrt{5}) = 0$ (B) $2m = 3n$ (C) $3m - 2n(\sqrt{5}+1) = 0$ (D) $3m = 2n$

ઉકેલ : ધારો કે સમીકરણ $x^2 + x - 1 = 0$ નાં બીજ α અને β છે.

અહીં $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n}$ છે. વળી $\alpha + \beta = -1; \ \alpha\beta = -1$

$\therefore \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \dfrac{m+n}{m-n}$ (યોગ-વિયોગ)

$\therefore \dfrac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2} = \dfrac{(m+n)^2}{(m-n)^2}$

$\therefore \dfrac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} = \dfrac{(m+n)^2}{(m-n)^2}$

$\therefore \dfrac{1}{1+4} = \dfrac{(m+n)^2}{(m-n)^2}$

$\therefore \dfrac{1}{5} = \left(\dfrac{m+n}{m-n}\right)^2$

$\therefore \dfrac{m+n}{m-n} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore \dfrac{m+n+m-n}{m+n-m+n} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$ (યોગ-વિયોગ)

$\therefore \dfrac{m}{n} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{1-\sqrt{5}} \times \dfrac{(1+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{-4}$

$\therefore \dfrac{m}{n} = \dfrac{-3}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{-1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$

$\therefore 2m + n\left(3+\sqrt{5}\right) = 0$ **જવાબ :** (A)

નોંધ : $\dfrac{m+n}{m-n} = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$ લેતાં, $2m + n\left(3-\sqrt{5}\right) = 0$ મળે, જે વિકલ્પ આપેલ નથી.

બીજી રીત : ધારો કે $\alpha = mk,\ \beta = nk$

$\therefore \alpha + \beta = (m+n)k = -1, \quad \alpha\beta = mnk^2 = -1.$

$\therefore k = \dfrac{-1}{m+n},\ k^2 = \dfrac{-1}{mn}.$ આથી $\dfrac{1}{(m+n)^2} = \dfrac{-1}{mn}$ $\therefore m^2 + 3mn + n^2 = 0$

$\therefore \dfrac{m}{n} = \dfrac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2} = \dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore 2m = \left(-3\pm\sqrt{5}\right)n$

$\therefore 2m + \left(3+\sqrt{5}\right)n = 0$ (આપેલ વિકલ્પ પ્રમાણે)

(36) સમીકરણ $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$ નો વાસ્તવિક ઉકેલ ......મળે.

(A) 6, 1 (B) –1, 6 (C) –6, –1 (D) –6, 1

ઉકેલ : $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$

$\therefore [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] = 120$

$\therefore (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) = 0$

ધારો કે $x^2 + 5x = m$

$\therefore (m+4)(m+6) = 120$

$\therefore m^2 + 10m - 96 = 0$

$\therefore (m+16)(m-6) = 0$

$\therefore m = -16$ અથવા $m = 6$

$\therefore x^2 + 5x = -16$ અથવા $x^2 + 5x = 6$ $(x^2 + 5x = m)$

$\therefore x^2 + 5x + 16 = 0$ અથવા $x^2 + 5x - 6 = 0$

$x^2 + 5x + 16 = 0$ લેતાં, $\Delta = (5)^2 - 4(1)(16) = 25 - 64 = -39 < 0$

$\therefore$ સમીકરણને વાસ્તવિક ઉકેલ ન મળે.

હવે, $x^2 + 5x - 6 = 0$ લેતાં, $(x + 6)(x - 1) = 0$ મળે.

$\therefore x = -6$ કે $x = 1$ **જવાબ :** (D)

નોંધ : $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 2.3.4.5 = (-5)(-4)(-3)(-2)$ પરથી બે વાસ્તવિક ઉકેલો $x = 1$ તથા $x = -6$ મળે છે.

(37) જો બીજનાં વર્ગોનો સરવાળો 40 તથા બીજના ઘનનો સરવાળો 208 હોય તથા બીજ સંમેય હોય તેવું દ્વિઘાત સમીકરણ ...... હોય.

(A) $x^2 - 4x - 12 = 0$ (B) $x^2 - 4x + 12 = 0$ (C) $x^2 + 4x - 12 = 0$ (D) $x^2 + 4x + 12 = 0$

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ α અને β છે.

$\alpha^2 + \beta^2 = 40$ તથા $\alpha^3 + \beta^3 = 208$

$\therefore (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 40$ અને $(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = 208$

$\therefore (\alpha + \beta)(40 - \alpha\beta) = 208$

ધારો કે $\alpha + \beta = m$ તથા $\alpha\beta = n$ છે.

$\therefore m^2 - 2n = 40$ તથા $m(40 - n) = 208$ મળે.

$\therefore \frac{m^2 - 40}{2} = n$ની આ કિંમત સમીકરણ $m(40 - n) = 208$ માં મૂકતાં,

$$\therefore m\left[40 - \left(\frac{m^2 - 40}{2}\right)\right] = 208$$

$\therefore m[80 - m^2 + 40] = 416$

$\therefore 120m - m^3 = 416$

$\therefore m^3 - 120m + 416 = 0$

$\therefore (m - 4)(m^2 + 4m - 104) = 0$

$\therefore m = 4$ અથવા $m^2 + 4m - 104 = 0$

હવે $m^2 + 4m - 104 = 0$ માટે, $\Delta = 16 - 4(1)(-104) = 432$

$\therefore \sqrt{\Delta} = 12\sqrt{3}$ અસંમેય સંખ્યા છે. પરંતુ α, β સંમેય છે.

$\therefore m = 4$ શક્ય છે. આથી $n = \frac{16 - 40}{2} = -12$

$\therefore \alpha + \beta = 4$; $\alpha\beta = -12$

$\therefore$ માંગેલ દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 4x - 12 = 0$ **જવાબ :** (A)

નોંધ : વિકલ્પો (B) તથા (D) ને સંકરબીજ હોય. આથી બે વિકલ્પો (A) તથા (C) જ શક્ય બને. વિકલ્પ (A)નાં બીજ $\alpha = 6$ તથા $\beta = -2$ છે. જે આપેલ શરતને સંતોષે છે. આથી, વિકલ્પ (A) જવાબ છે.

(38) સમીકરણ $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 16\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0$ નો ઉકેલ ગણ ...... હોય.

(A) $\left\{1, 3, \frac{1}{3}\right\}$ (B) $\left\{-1, -3, \frac{-1}{3}\right\}$ (C) $\left\{-1, 3, \frac{-1}{3}\right\}$ (D) $\left\{1, 3, \frac{-1}{3}\right\}$

ઉકેલ : $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 16\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0$ આપેલ છે.

ધારો કે $\left(x + \frac{1}{x}\right) = m.$ આથી $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = m^2 - 2$

$\therefore 3(m^2 - 2) + 16m + 26 = 0$

$\therefore\ 3m^2 + 16m + 20 = 0$

$\therefore\ (3m + 10)(m + 2) = 0$

$\therefore\ m = \frac{-10}{3}$ અથવા $m = -2$

$\therefore\ m = \frac{-10}{3}$ લેતાં, દ્વિઘાત સમીકરણ $x + \frac{1}{x} = \frac{-10}{3}$ રચાય.

$\therefore\ 3x^2 + 10x + 3 = 0$. આથી $(3x + 1)(x + 3) = 0$

$\therefore\ x = \frac{-1}{3}$ અથવા $x = -3$ મળે.

$m = -2$ લેતાં, સમીકરણ $x + \frac{1}{x} = -2$ મળે.

$\therefore\ x^2 + 2x + 1 = 0$

$\therefore\ (x + 1)^2 = 0$. આથી $x = -1$

$\therefore\ x$ ની શક્ય કિંમતોનો ઉકેલગણ $\left\{-3, -1, \frac{-1}{3}\right\}$ મળે. **જવાબ :** (B)

(39) સમીકરણ $27^{\frac{1}{x}} + 12^{\frac{1}{x}} = 2.8^{\frac{1}{x}}$ નાં વાસ્તવિક બીજોની સંખ્યા ...... છે.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $27^{\frac{1}{x}} + 12^{\frac{1}{x}} = 2.8^{\frac{1}{x}}$

$\therefore\ \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{12}{8}\right)^{\frac{1}{x}} = 2$

$\therefore\ \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{x}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 2$

ધારો કે $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = m$

$\therefore\ m^3 + m = 2$

$\therefore\ m^3 + m - 2 = 0$

$\therefore\ (m^2 + m + 2)(m - 1) = 0$

$\therefore\ m = 1$ અથવા $m^2 + m + 2 = 0$

હવે $m^2 + m + 2 = 0$ માટે, $\Delta = 1 - 4(1)(2) = -7 < 0$ જેથી વાસ્તવિક બીજ ન મળે.

$\therefore\ m = 1$

$\therefore\ \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0$

$\therefore\ \frac{1}{x} = 0$ જે અશક્ય છે.

$\therefore$ વાસ્તવિક બીજની સંખ્યા 0 થાય. **જવાબ :** (A)

(40) જો સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નું એક બીજ એ બીજા બીજના n ઘાત જેટલું થાય તો $(ac^n)^{\frac{1}{n+1}} + (a^n c)^{\frac{1}{n+1}} =$ ......

(A) $-a$ (B) $-b$ (C) $-c$ (D) $-ab$

ઉકેલ : ધારો કે સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ α અને β છે.

હવે, $\alpha = \beta^n$ આપેલ છે.

વળી, $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ તથા $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ છે. હવે, $\alpha = \beta^n$ લેતાં, $\beta^n \cdot \beta = \frac{c}{a}$

$\therefore \beta^{n+1} = \frac{c}{a}$. આથી $\beta = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$. આથી $\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$ મળે.

$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ પરથી, $\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \frac{-b}{a}$

$\therefore \frac{c^{\frac{n}{n+1}}}{a^{\frac{n}{n+1}}} + \frac{c^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{-b}{a}$ આથી $\frac{c^{\frac{n}{n+1}} \cdot a^{\frac{1}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}} \cdot c^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{n}{n+1}} \cdot a^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{-b}{a}$

$\therefore \frac{(c^n \cdot a)^{\frac{1}{n+1}} + (a^n \cdot c)^{\frac{1}{n+1}}}{a} = \frac{-b}{a}$ આથી $(c^n \cdot a)^{\frac{1}{n+1}} + (a^n \cdot c)^{\frac{1}{n+1}} = -b$ **જવાબ :** (B)

(41) જો $ax + by = 1$ હોય અને સમીકરણ $px^2 + qy^2 = 1$ ને માત્ર એક જ બીજ હોય તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ?

(A) $\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} = 1$ (B) $x = \frac{-a}{p}$ (C) $x = \frac{b}{q}$ (D) $a^2b^2 = pq$

ઉકેલ : $ax + by = 1$. આથી $y = \frac{1-ax}{b}$

સમીકરણ $px^2 + qy^2 = 1$ માં y નું મૂલ્ય મૂકતાં, $px^2 + q\left(\frac{1-ax}{b}\right)^2 = 1$

$\therefore b^2px^2 + q(1 - ax)^2 = b^2$

$\therefore pb^2x^2 + q - 2aqx + qa^2x^2 = b^2$

$\therefore (qa^2 + pb^2)x^2 - 2aqx + q - b^2 = 0$ ને માત્ર એક જ બીજ હોય તો $\Delta = 0$

$\therefore 4a^2q^2 - 4(qa^2 + pb^2)(q - b^2) = 0$

$\therefore 4a^2q^2 - 4(a^2q^2 - a^2b^2q + b^2pq - b^4p) = 0$

$\therefore a^2q - pq + b^2p = 0$ $(b \neq 0)$

$\therefore a^2q + b^2p = pq$

$\therefore \frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} = 1$ **જવાબ :** (A)

(42) $\log_{10} a + \log_{10} \sqrt{a} + \log_{10} \sqrt[4]{a} + ... = b > 0$ હોય તથા $\frac{\sum_{n=1}^{b}(2n-1)}{\sum_{n=1}^{b}(3n+1)} = \frac{20}{7\log_{10} a}$ હોય તો $a =$ ......

(A) 100 (B) 1000 (C) 10000 (D) 100000

ઉકેલ : $\log_{10} a + \log_{10} \sqrt{a} + \log_{10} \sqrt[4]{a} + ... = b$ આપેલ છે.

$\therefore \log_{10} a + \log_{10} a^{\frac{1}{2}} + \log_{10} a^{\frac{1}{4}} + ... = b$

$\therefore \log_{10} (a \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} ...) = b$

$\therefore \log_{10} a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+....} = b$

$\therefore \log_{10} a^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = b$

$\therefore \log_{10} a^2 = b$

$\therefore 2 \log_{10} a = b$

$$\frac{\sum_{n=1}^{b}(2n-1)}{\sum_{n=1}^{b}(3n+1)} = \frac{20}{7\log_{10} a}$$

$$\therefore \frac{2\cdot\frac{b(b+1)}{2}-b}{3\cdot\frac{b(b+1)}{2}+b} = \frac{20}{7\frac{b}{2}}$$

$\therefore \frac{b^2}{3b^2+5b} = \frac{20}{7b}$. આથી $\frac{b^2}{3b+5} = \frac{20}{7}$

$\therefore 7b^2 - 60b - 100 = 0$

$\therefore (7b + 10)(b - 10) = 0$

$\therefore b = \frac{-10}{7}$ અથવા $b = 10$

પરંતુ $b \neq \frac{-10}{7}$ કારણ કે $b \in$ N. આથી $b = 10$

$\therefore \log_{10} a = 5.$ આથી $a = 10^5 = 100000$ **જવાબ :** (D)

(43) $x \in$ R માટે $3^{72} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1$ હોય તો $x \in$ ......

(A) [0, 64) (B) (0, 64] (C) [0, 64] (D) (0, 64)

ઉકેલ : $3^{72} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1$

$\therefore 3^{72} (3^{-1})^x \left(3^{-1}\right)^{\sqrt{x}} > 1$

$\therefore 3^{72-x-\sqrt{x}} > 3^0$

$\therefore 72 - x - \sqrt{x} > 0$

$\therefore\ x + \sqrt{x} - 72 < 0$

$\therefore (\sqrt{x} - 8)(\sqrt{x} + 9) < 0.$ આથી $-9 < \sqrt{x} < 8$ પરંતુ $\sqrt{x} \geq 0$

$\therefore 0 \leq \sqrt{x} < 8.$ આથી $0 \leq x < 64$

$\therefore x \in [0, 64)$ **જવાબ :** (A)

(44) સમીકરણ $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ નાં બીજ હંમેશાં ...... હોય. $(a \neq b)$

(A) સમાન (B) અવાસ્તવિક સંકર (C) વાસ્તવિક અસમાન (D) શુધ્ધ કાલ્પનિક

ઉકેલ : $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$

$\therefore 3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$

હવે $D = 4(a + b + c)^2 - 4(3)(ab + bc + ca)$

$= 4[a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca]$

$= 2[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] > 0$

$D > 0$ હોવાથી બીજ હંમેશાં વાસ્તવિક અને અસમાન જ હોય. **જવાબ :** (C)

(45) $a, b, c \in R; a \neq 0$ માટે જો સમીકરણ $a^2x^2 + bx + c = 0$ નું એક બીજ α હોય તથા સમીકરણ $a^2x^2 - bx - c = 0$ નું એક બીજ β હોય જ્યાં $0 < \alpha < \beta$ હોય તો સમીકરણ $a^2x^2 + 2bx + 2c = 0$નું બીજ γ હંમેશા નીચેનામાંથી ...... નું સમાધાન કરે. (IIT : 1989)

(A) $\gamma = \alpha + \frac{\beta}{2}$ (B) $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$ (C) $\gamma = \frac{\alpha}{2} + \beta$ (D) $\alpha < \gamma < \beta$

ઉકેલ : સમીકરણ $a^2x^2 + bx + c = 0$ નું એક બીજ α હોવાથી, $a^2\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

$\therefore b\alpha + c = -a^2\alpha^2$ (1)

વળી, સમીકરણ $a^2x^2 - bx - c = 0$ નું એક બીજ β હોવાથી, $a^2\beta^2 - b\beta - c = 0$

$\therefore b\beta + c = a^2\beta^2$ (2)

હવે, $f(x) = a^2x^2 + 2bx + 2c$ નું શૂન્ય γ હોય તો, $f(\gamma) = a^2\gamma^2 + 2b\gamma + 2c = 0$

$\therefore f(x) = a^2x^2 + 2bx + 2c$ માં $x = \alpha$ લેતાં,

$\therefore f(\alpha) = a^2\alpha^2 + 2b\alpha + 2c$

$= a^2\alpha^2 + 2(b\alpha + c) = a^2\alpha^2 - 2a^2\alpha^2 = -a^2\alpha^2 < 0$ ((1) પરથી)

વળી, $f(x) = a^2x^2 + 2bx + 2c$ માં $x = \beta$ લેતાં,

$\therefore f(\beta) = a^2\beta^2 + 2b\beta + 2c$

$= a^2\beta^2 + 2(b\beta + c) = a^2\beta^2 + 2a^2\beta^2 = 3a^2\beta^2 > 0$ ((2) પરથી)

$f(\alpha) < 0$ તથા $f(\beta) > 0$ હોવાથી, $\gamma \in (\alpha, \beta)$ એવો મળે કે જેથી $f(\gamma) = 0$ થાય.

$\therefore \alpha < \gamma < \beta$ સત્ય બને. **જવાબ :** (D)

(46) જો α, β એ સમીકરણ $x^2 + px + q = 0$ નાં બીજ હોય અને α^4, β^4 એ સમીકરણ $x^2 - rx + s = 0$ નાં બીજ હોય તો સમીકરણ $x^2 - 4qx + 2q^2 - r = 0$નાં બીજ હંમેશાં ...... હોય. (IIT : 1989)

(A) ભિન્ન અને વાસ્તવિક (B) સમાન અને વાસ્તવિક

(C) અવાસ્તવિક સંકર (D) એક વાસ્તવિક અને એક શુધ્ધ કાલ્પનિક

ઉકેલ : સમીકરણ $x^2 + px + q = 0$ નાં બીજ α અને β છે. આથી $\alpha + \beta = -p$ તથા $\alpha\beta = q$ મળે.

વળી, સમીકરણ $x^2 - rx + s = 0$ નાં બીજ α^4 તથા β^4 છે.

$\therefore \alpha^4 + \beta^4 = r$ તેમજ $\alpha^4 \beta^4 = s$ આથી $(\alpha\beta)^4 = s$ થાય.

$\therefore$ સમીકરણ $x^2 - 4qx + 2q^2 - r = 0$ માટે,

$$\begin{aligned} D = b^2 - 4ac &= 16q^2 - 4(2q^2 - r) \\ &= 16q^2 - 8q^2 + 4r \\ &= 8q^2 + 4r \\ &= 4(2q^2 + r) \\ &= 4[\alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2] = 4(\alpha^2 + \beta^2)^2 = [2(\alpha^2 + \beta^2)]^2 > 0 \end{aligned}$$

$D > 0$ હોવાથી, ભિન્ન અને વાસ્તવિક બીજ મળે. **જવાબ :** (A)

(47) ચલ x માં દ્વિઘાત સમીકરણ $(\cos p - 1)x^2 + x \cos px + \sin p = 0$ નાં બીજ વાસ્તવિક હોય તો, $p \in$ ...... (IIT : 1990)

(A) $(0, \pi]$ (B) $(-\pi, 0)$ (C) $(0, 2\pi)$ (D) $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ઉકેલ : સમીકરણ $(\cos p - 1)x^2 + x \cos px + \sin p = 0$ નાં બીજ વાસ્તવિક હોવાથી,

$D = b^2 - 4ac \geq 0$

$\therefore \cos^2 p - 4(\cos p - 1)\sin p \geq 0$

$\therefore \cos^2 p + 4 \sin p (1 - \cos p) \geq 0$

$\therefore \cos^2 p + 4 \sin p (2 \sin^2 \frac{p}{2}) \geq 0$

હવે $\cos^2 p \geq 0$ તથા $\sin^2 \frac{p}{2} \geq 0$ હોય જ.

$\therefore$ જો $\sin p \geq 0$ હોય તો $D \geq 0$ થાય જ.

$p \in (0, \pi]$ હોય તો $\sin p \geq 0$ થાય.

$\therefore p \in (0, \pi]$ **જવાબ :** (A)

(48) $\forall x \in R$ માટે જો દ્વિઘાત બહુપદી $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ હોય તો $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ ...... થાય. $x \in R$ (IIT 1990)

(A) $g(x) < 0$ (B) $g(x) > 0$ (C) $g(x) = 0$ (D) $g(x) \geq 0$

ઉકેલ : [**નોંધ :** જો $a > 0$ હોય તથા $D = b^2 - 4ac < 0$ હોય તો $f(x) > 0$ થાય.]

અહીં $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ આપેલ છે.

$\therefore f'(x) = 2ax + b$ અને $f''(x) = 2a$

વળી, $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$

$= ax^2 + bx + c + 2ax + b + 2a$

$= ax^2 + (2a + b)x + (b + c + 2a)$

બહુપદી $g(x)$ માટે, $D = (2a + b)^2 - 4a(b + c + 2a)$

$= 4a^2 + \cancel{4ab} + b^2 - \cancel{4ab} - 4ac - 8a^2 = b^2 - 4a^2 - 4ac = (b^2 - 4ac) - 4a^2$

આથી $a > 0$ તથા $D < 0$ હોવાથી, $g(x) > 0$ સત્ય બને. $\forall x \in R$ **જવાબ :** (B)

(49) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $(x - a)(x - b) - k = 0$ નાં બીજ c તથા d હોય તો a તથા b બીજવાળું દ્વિઘાત સમીકરણ ...... મળે. (IIT : 1992)

(A) $(x - c)(x - d) + k = 0$ (B) $(x + c)(x + d) - k = 0$

(C) $(x - c)(x - d) - k = 0$ (D) $(x + c)(x + d) + k = 0$

ઉકેલ : સમીકરણ $(x - a)(x - b) - k = 0$ આપેલ છે.

$\therefore x^2 - ax - bx + ab - k = 0$

$\therefore x^2 - (a + b)x + ab - k = 0$ નાં બીજ c તથા d છે.

$\therefore$ બીજનો સરવાળો $= c + d = (a + b)$ તથા બીજનો ગુણાકાર $= cd = (ab - k)$

આથી હવે a તથા b બીજવાળા દ્વિઘાત સમીકરણ માટે, બીજનો સરવાળો $a + b = c + d$ તથા $ab = cd + k$

માંગેલ દ્વિઘાત સમીકરણ : $x^2 - (c + d)x + cd + k = 0$

$\therefore (x - c)(x - d) + k = 0$ **જવાબ :** (A)

(50) જો સમીકરણો $x^2 + ax + b = 0$ અને $x^2 + bx + a = 0$ નું એક બીજ સમાન હોય તો $a + b$ ની કિંમત ...... હોય. $(a \neq b)$ (IIT : 1986)

(A) 0 (B) –1 (C) 1 (D) 2

ઉકેલ : ધારો કે સમીકરણો $x^2 + ax + b = 0$ તથા $x^2 + bx + a = 0$ નું એક સામાન્ય બીજ α છે.

$\therefore \alpha^2 + a\alpha + b = 0$ તથા $\alpha^2 + b\alpha + a = 0$ (1)

$\therefore \alpha^2 + a\alpha + b = \alpha^2 + b\alpha + a$

$\therefore a\alpha - b\alpha = a - b$

$\therefore \alpha(a - b) = (a - b)$

$\therefore \alpha = 1$ $(a \neq b)$

$\alpha = 1$ સમીકરણ (1) માં મૂકતાં, $1 + b + a = 0$

$\therefore a + b = -1$ મળે. **જવાબ :** (B)

(51) સમીકરણ $x^2 + px + q = 0; p; q \in R$ નું એક બીજ $2 + \sqrt{3}i$ હોય તો ......; ...... (IIT : 1982)

(A) $p = -4, q = 7$ (B) $p = 4, q = 7$ (C) $p = 4, q = -7$ (D) $p = -4, q = -7$

ઉકેલ : સમીકરણ $x^2 + px + q = 0$ નું એક બીજ $\alpha = 2 + \sqrt{3}i$ હોય તો $\beta = 2 - \sqrt{3}i$ હોય.

તેથી બીજનો સરવાળો $= \alpha + \beta = -p = 2 + \sqrt{3}i + 2 - \sqrt{3}i \cdot$ આથી $p = -4$

તથા બીજનો ગુણાકાર $= q = \alpha\beta = (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i)$

$= 4 - 3i^2 = 4 + 3 = 7$ $(i^2 = -1)$

$\therefore p = -4$ અને $q = 7$ **જવાબ :** (A)

(52) શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c એવી મળે કે જેથી

$\int_0^1 (1+\cos^8 x)(ax^2+bx+c)\,dx = \int_0^2 (1+\cos^8 x)(ax^2+bx+c)\,dx$ હોય, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ને .... (IIT : 1982)

(A) (0, 2) માં એક પણ બીજ ન હોય. (B) (1, 2) માં ઓછામાં ઓછું એક બીજ હોય જ.

(C) (0, 2) માં બે બીજ હોય. (D) બે અવાસ્તવિક સંકર બીજ હોય.

ઉકેલ : ધારો કે વિધેય, $f(t) = \int_0^t (1+\cos^8 x)(ax^2+bx+c)\,dx$ છે.

વિધેય f [1, 2] પર સતત તથા (1, 2) પર વિકલનીય હોય જ. વળી $f(1) = f(2)$

આથી, રોલના પ્રમેય પરથી કોઈ $k \in (1, 2)$ એવો મળે જ કે જેથી $f'(k) = 0$ થાય.

હવે, $f(t) = \int_0^t (1+\cos^8 x)(ax^2+bx+c)\,dx$

$\therefore f'(x) = (1 + \cos^8 x)(ax^2 + bx + c)$

$\therefore f'(k) = (1 + \cos^8 k)(ak^2 + bk + c) = 0$

$\therefore ak^2 + bk + c = 0$

$\therefore k$ એ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નું એક બીજ થાય.

પરંતુ $k \in (1, 2)$ હોવાથી, દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ને (1, 2)માં ઓછામાં ઓછું એક બીજ હોય જ.

જવાબ : (B)

(53) દ્વિઘાત સમીકરણ $3x^2 + 2x + p(p-1) = 0$ નાં બીજ વિષમચિહ્ન હોય તો p ની કિંમતોનો ગણ ...... હોય. (IIT : 1992)

(A) $(-\infty, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, \infty)$ (D) $(0, \infty)$

ઉકેલ : દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ વિષમ ચિહ્ન હોય તો બીજનો ગુણાકાર ઋણ જ થાય. આથી $\alpha\beta < 0$

$\therefore \frac{p(p-1)}{3} < 0$. આથી $0 < p < 1$ એટલે કે $p \in (0, 1)$ **જવાબ :** (B)

(54) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + x + 1 = 0$ નાં બીજ α અને β હોય, તો જેનાં બીજ α^{19} તથા β^7 હોય તેવું દ્વિઘાત સમીકરણ ...... હોય. (IIT : 1994)

(A) $x^2 - x - 1 = 0$ (B) $x^2 - x + 1 = 0$ (C) $x^2 + x - 1 = 0$ (D) $x^2 + x + 1 = 0$

ઉકેલ : $x^2 + x + 1 = 0$ નાં બીજ α અને β છે.

$$\therefore \alpha, \beta = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \omega \text{ અને } \omega^2$$

($w^3 - 1 = 0$ હોય તો $(w-1)(w^2 + w + 1) = 0$)

ધારો કે $\alpha = w$ તથા $\beta = w^2$ લઈએ તો,

$$\alpha^{19} + \beta^7 = w^{19} + (w^2)^7 = w^{19} + w^{14}$$
$$= (w^3)^6 \cdot w + (w^3)^4 \cdot w^2$$
$$= w + w^2 \qquad (w^3 = 1)$$
$$= -1 \qquad (1 + w + w^2 = 0)$$

બીજનો ગુણાકાર $\alpha^{19} \cdot \beta^7 = w^{19} \cdot w^{14} = w^{33} = (w^3)^{11} = 1$

$\therefore$ માંગેલ સમીકરણ : $x^2 - (-1)x + 1 = 0$

$\therefore x^2 + x + 1 = 0$ **જવાબ :** (D)

(55) જો p, q, r ધન હોય અને સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $px^2 + qx + r = 0$ નાં બીજ વાસ્તવિક હોવા માટે ...... હોવું જોઈએ. (IIT : 1995)

(A) $\left|\frac{r}{p}-7\right| \ge 4\sqrt{3}$ (B) $\left|\frac{p}{r}-7\right| < 4\sqrt{3}$ (C) $\left|\frac{p}{r}+7\right| < 4\sqrt{3}$ (D) $\frac{p^2}{r} = 7 + 4\sqrt{3}$

ઉકેલ : p, q, r સમાંતર શ્રેણીમાં હોવાથી, $2q = p + r$ (1)

સમીકરણ $px^2 + qx + r = 0$ નાં બીજ વાસ્તવિક હોવા માટે, $D = b^2 - 4ac \ge 0$ હોય.

$\therefore q^2 - 4pr \ge 0$

$\therefore \left(\frac{p+r}{2}\right)^2 - 4pr \ge 0$ ((1) પરથી)

$\therefore (p + r)^2 - 16\,pr \ge 0$

$\therefore p^2 + r^2 - 14\,pr \ge 0$

$\therefore 1 + \left(\frac{r}{p}\right)^2 - \frac{14r}{p} \ge 0$ $(p^2 \ne 0)$ (2)

હવે, $\left(\frac{r}{p}\right)^2 - 14\left(\frac{r}{p}\right) + 1 = 0$ માટે, $\frac{r}{p} = \frac{14 \pm \sqrt{196-4(1)(1)}}{2} = 7 \pm \frac{\sqrt{192}}{2} = 7 \pm \frac{8\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \frac{r}{p} = 7 \pm 4\sqrt{3}$

$\therefore$ (2) પરથી, $\frac{r}{p} \le 7 - 4\sqrt{3}$ અથવા $\frac{r}{p} \ge 7 + 4\sqrt{3}$

$\therefore \frac{r}{p} - 7 \le -4\sqrt{3}$ કે $\frac{r}{p} - 7 \ge 4\sqrt{3}$

$\therefore \left|\frac{r}{p}-7\right| \ge 4\sqrt{3}$ **જવાબ :** (A)

(56) બે દ્વિઘાત સમીકરણો $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ અને $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ ને એક બીજ સામાન્ય (સમાન) હોય તો $(a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_1c_2 - b_2 c_1)$ ની કિંમત ...... હોય. (IIT 1992)

(A) $-(a_1c_2 - a_2c_1)^2$ (B) $(a_1a_2 - c_1c_2)^2$ (C) $(a_1c_1 - a_2c_2)^2$ (D) $(a_1c_2 - a_2c_1)^2$

ઉકેલ : ધારો કે સમીકરણો $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ અને $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ નું એક સામાન્ય બીજ α .છે.

$\therefore a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 = 0$ તથા $a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 = 0$

$$\therefore \frac{\alpha^2}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{-\alpha}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\therefore \frac{\alpha^2}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\alpha}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$\therefore \alpha^2 = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$; $\alpha = \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$

$$\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \left(\frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)^2$$

$\therefore (b_1c_2 - b_2c_1)(a_1b_2 - a_2b_1) = (a_1c_2 - a_2c_1)^2$ **જવાબ :** (D)

(57) દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + px + 8 = 0$ નાં બે બીજ વચ્ચેનો તફાવત 2 હોય, તો pની કિંમત ...... હોય. (IIT 1992)

(A) ± 2 (B) ± 4 (C) ± 6 (D) ± 8

ઉકેલ : ધારો કે દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + px + 8 = 0$ નાં બીજ α અને β છે.

$\therefore \alpha + \beta = -p$ તથા $\alpha\beta = 8$. વળી, $\alpha - \beta = 2$ આપેલ છે.

$\therefore 2\alpha = 2-p$. આથી $\alpha - 2 = \beta$ પરથી $\dfrac{2-p}{2} - 2 = \beta$.

આથી $\dfrac{-p-2}{2} = \beta$

હવે $\alpha\beta = 8$ માં α તથા βની કિંમતો મૂકતાં, $\left(\dfrac{2-p}{2}\right)\left(\dfrac{-p-2}{2}\right) = 8$

$\therefore (p+2)(p-2) = 32$

$\therefore p^2 - 4 = 32$ આથી $p^2 = 36$. આથી $p = \pm 6$ **જવાબ :** (C)

બીજી રીત :

$|\alpha - \beta| = 2$

$\therefore (\alpha-\beta)^2 = 4$

$\therefore (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = 4$

$\therefore p^2 - 32 = 4$

આથી $p = \pm 6$

(58) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ નાં બે બીજ સમાન હોય તો a, b, c ...... શ્રેણીમાં હોય. (IIT : 1993)

(A) સમાંતર (B) સમગુણોત્તર (C) સ્વરિત (D) સમાંતર-સમગુણોત્તર

ઉકેલ : $\alpha = 1$ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. આથી $\beta = 1$. આથી $\alpha\beta = 1$

$\therefore \dfrac{c(a-b)}{a(b-c)} = 1$

$\therefore ca - bc = ab - ac$

$\therefore 2ac = b(a+c)$

$\therefore b = \dfrac{2ac}{a+c}$

$\therefore a, b, c$ સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય. **જવાબ :** (C)

(59) k ની ...... કિંમત માટે દ્વિઘાત સમીકરણ $kx^2 + 1 = kx + 3x - 11x^2$ નાં બીજ વાસ્તવિક તથા સમાન હોય. (IIT : 1993)

(A) $-11, -3$ (B) $5, 7$ (C) $5, -7$ (D) $7, -5$

ઉકેલ : સમીકરણ $kx^2 + 1 = kx + 3x - 11x^2$ આપેલ છે.

$\therefore (11+k)x^2 - (k+3)x + 1 = 0$ નાં બીજ વાસ્તવિક તથા સમાન છે.

$\therefore D = (k+3)^2 - 4(k+11) = 0$

$\therefore k^2 + 2k - 35 = 0$

$\therefore (k+7)(k-5) = 0$

$\therefore k = -7$ અથવા 5 **જવાબ :** (C)

(60) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - bx + c = 0$ નાં બીજ બે ક્રમિક પૂર્ણાંકો હોય, તો $b^2 - 4c = ...$ (AIEEE : 2005)

(A) –2 (B) 2 (C) 3 (D) 1

ઉકેલ : ધારો કે દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - bx + c = 0$ નાં બીજ α અને β છે, જે બે ક્રમિક પૂર્ણાંકો છે.

$\therefore \beta = \alpha + 1, \quad \alpha \in Z$

વળી, $\alpha + \beta = b \qquad \alpha\beta = c$

$\therefore \alpha + \alpha + 1 = b$ તથા $\alpha(\alpha + 1) = c$

$\therefore 2\alpha + 1 = b$

બીજી રીત :

$|\alpha - \beta| = 1$

$\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$

$\Rightarrow b^2 - 4c = 1$

$\therefore b^2 - 4c = (2\alpha + 1)^2 - 4\alpha(\alpha + 1) = 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 - 4\alpha^2 - 4\alpha = 1$ **જવાબ :** (D)

(61) દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - (a - 2)x - a - 1 = 0$ નાં બીજનાં વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ કિંમત ધારણ કરે તો $a = ...$ (AIEEE : 2005)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : ધારો કે દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - (a - 2)x - a - 1 = 0$ નાં બીજ α અને β છે.

$\alpha^2 + \beta^2$ ન્યૂનતમ કિંમત ધારણ કરે છે.

અહીં $\alpha + \beta = a - 2$ તથા $\alpha\beta = -(a + 1)$ છે.

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$
$$= (a - 2)^2 + 2(a + 1)$$
$$= a^2 - 2a + 6 = (a - 1)^2 + 5 \geq 5$$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2$ની ન્યૂનતમ કિંમત જો $a - 1 = 0$ હોય તો 5 થાય.

$\therefore a = 1$ **જવાબ :** (B)

(62) Δ PQR માં જો $m\angle R = \frac{\pi}{2}$, હોય તથા સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ (જ્યાં $a \neq 0$)નાં બીજ $tan\left(\frac{P}{2}\right)$ તથા $tan\left(\frac{Q}{2}\right)$ હોય, તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ? (AIEEE : 2005)

(A) $a = b + c$ (B) $b = c$ (C) $b = a + c$ (D) $c = a + b$

ઉકેલ : અહીં સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ $tan\left(\frac{P}{2}\right)$ અને $tan\left(\frac{Q}{2}\right)$ છે.

$$\therefore tan\left(\frac{P}{2}\right) + tan\left(\frac{Q}{2}\right) = \frac{-b}{a}; \text{ તથા } \left(tan\left(\frac{P}{2}\right)\cdot tan\left(\frac{Q}{2}\right)\right) = \frac{c}{a}$$

$$\therefore tan\left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{2}\right) = \frac{tan\left(\frac{P}{2}\right) + tan\left(\frac{Q}{2}\right)}{1 - tan\left(\frac{P}{2}\right)\left(tan\left(\frac{Q}{2}\right)\right)} = \frac{\frac{-b}{a}}{1 - \frac{c}{a}} = \frac{-b}{a - c} \qquad (1)$$

હવે, Δ PQR માં $m\angle P + m\angle Q + m\angle R = \pi$

$\therefore m\angle P + m\angle Q = \pi - \frac{\pi}{2}$ $\quad (m\angle R = \frac{\pi}{2})$

$\therefore m\angle P + m\angle Q = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ (2)

$\therefore$ (1) અને (2) પરથી, $tan \frac{P+Q}{2} = tan \frac{\pi}{4} = \frac{-b}{a-c}$

$\therefore 1 = \frac{-b}{a-c}$

$\therefore a - c = -b$

$\therefore c = a + b$

જવાબ : (D)

(63) જો x કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તો $\frac{3x^2+9x+17}{3x^2+9x+7}$ ની મહત્તમ કિંમત ...... હોય. (AIEEE : 2006)

(A) $\frac{1}{4}$ (B) 1 (C) 41 (D) $\frac{17}{7}$

ઉકેલ : ધારો કે $\frac{3x^2+9x+17}{3x^2+9x+7} = y$

$\therefore 3x^2 + 9x + 17 = 3x^2y + 9xy + 7y$

$\therefore 3x^2 (y-1) + 9x(y-1) + 7y - 17 = 0$

હવે x કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા હોવાથી, $D = b^2 - 4ac \geq 0$ હોય જ.

$\therefore 81(y-1)^2 - 12(y-1)(7y-17) \geq 0$

$\therefore 81(y^2 - 2y + 1) - 12(7y^2 - 24y + 17) \geq 0$

$\therefore -y^2 + 42y - 41 \geq 0$

$\therefore y^2 - 42y + 41 \leq 0$

$\therefore (y-1)(y-41) \leq 0$

$\therefore 1 \leq y \leq 41$

બીજી રીત :

$\frac{3x^2+9x+17}{3x^2+9x+7} = \frac{3x^2+9x+7+10}{3x^2+9x+7}$

$= 1 + \frac{10}{3x^2+9x+7}$

$3x^2 + 9x + 7$ ની ન્યૂનતમ કિંમત

$\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{84-81}{12} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ માંગેલ મહત્તમ કિંમત $= 1 + \frac{10}{\frac{1}{4}} = 1 + 40$

$= 41$

$\therefore y = \frac{3x^2+9x+17}{3x^2+9x+7}$ ની મહત્તમ કિંમત 41 હોય.

જવાબ : (C)

(64) દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ નાં બંને બીજ $m \in$ ...... માટે -2 થી મોટા પરંતુ 4 થી નાનાં હોય. (AIEEE : 2006)

(A) $(-2, 0)$ (B) $(3, \infty)$ (C) $(-1, 3)$ (D) $(1, 4)$

ઉકેલ : $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$

$(x-m)^2 = 1$ આથી $x - m \pm 1$

$x = m + 1$ અથવા $x = m - 1$

હવે $-2 < x < 4$ આપેલ છે. આથી $-2 < m - 1 < m + 1 < 4$

$\therefore m > -1$ તથા $m < 3$

$\therefore m \in (-1, 3)$ મળે.

જવાબ : (C)

(65) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + px + q = 0$ નાં બંને બીજ અનુક્રમે $tan\ 30°$ તથા $tan\ 15°$ હોય તો $2 + q - p =$ ...... (AIEEE : 2006)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $x^2 + px + q = 0$ નાં બંને બીજ અનુક્રમે $tan\ 30°$ તથા $tan\ 15°$ છે.

$\therefore tan\ 30° + tan\ 15° = -p$ તથા $(tan\ 30°)\ (tan\ 15°) = q$

વળી, $tan\ 45° = tan\ (30° + 15°) = \frac{tan 30° + tan 15°}{1 - tan 30° tan 15°}$

$\therefore 1 = \frac{-p}{1-q}$

$\therefore 1 - q = -p.$ આથી $q - p = 1.$ આથી $2 + q - p = 3$ **જવાબ :** (D)

(66) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $bx^2 + cx + a = 0$ નાં બીજ સંકર હોય તો બહુપદી $3b^2x^2 + 6bcx + 2c^2$ = ... હોય. (AIEEE 2009)

(A) $> 4ab$ (B) $< 4ab$ (C) $> -4ab$ (D) $< -4ab$

ઉકેલ : દ્વિઘાત સમીકરણ $bx^2 + cx + a = 0$ નાં બીજ સંકર છે.

$\therefore D = c^2 - 4ab < 0.$ આથી $c^2 < 4ab$

$\therefore -c^2 > -4ab$

હવે, $3b^2x^2 + 6bcx + 2c^2$ માટે, $3b^2 > 0$ હોવાથી,

બહુપદીની ન્યૂનતમ કિંમત $\frac{4(3b^2)(2c^2) - 36b^2c^2}{4(3b^2)} = \frac{24b^2c^2 - 36b^2c^2}{12b^2} = \frac{-12b^2c^2}{12b^2} = -c^2 > -4ab$ **જવાબ :** (C)

(67) સમીકરણ $e^{\sin x} - e^{-\sin x} - 4 = 0$ ને ...... (AIEEE : 2012)

(A) બરાબર બે વાસ્તવિક બીજ હોય. (B) એક પણ વાસ્તવિક બીજ ન હોય.

(C) બરાબર એક જ વાસ્તવિક બીજ હોય. (D) બરાબર ચાર વાસ્તવિક બીજ હોય.

ઉકેલ : $e^{\sin x} - e^{-\sin x} = 4$ આપેલ છે.

ધારો કે $e^{\sin x} = m$

$\therefore m - \frac{1}{m} = 4.$ આથી $m^2 - 4m - 1 = 0$

$\therefore m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-1)}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$

$\therefore e^{\sin x} = 2 \pm \sqrt{5}$

$e^{\sin x}$ની મહત્તમ કિંમત e એ $2 + \sqrt{5}$ તો નહિ જ થાય.

વળી, $e^{\sin x} > 0 > 2 - \sqrt{5}$

$\therefore$ એક પણ વાસ્તવિક બીજ ન મળે. **જવાબ :** (B)

(68) સમીકરણ $2x^3 + 3x + k = 0$ ને બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ $[0, 1]$ માં હોય, તો kની કિંમત ...... હોય. (JEE-main : 2013)

(A) 1 તથા 2ની વચ્ચે (B) 2 અને 3ની વચ્ચે (C) –1 અને 0ની વચ્ચે (D) અસ્તિત્વ ન ધરાવતી

ઉકેલ : અહીં $f(x) = 2x^3 + 3x + k = 0$ આપેલ છે.

$f'(x) = 6x^2 + 3$

હવે સમીકરણ બે કે વધુ વાસ્તવિક બીજ ધરાવે તો રોલના પ્રમેયથી તેમની વચ્ચેના કોઈક x માટે $f'(x) = 0$ હોય.

પરંતુ $6x^2 + 3 > 0$

$\therefore$ k ની કોઈપણ કિંમત માટે બે કે વધુ ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ શક્ય ન બને. **જવાબ :** (D)

(69) સમીકરણો $x^2 + 2x + 3 = 0$ અને $ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in R$ ના બંને બીજ સામાન્ય હોય તો $a : b : c =$ ...... (JEE-main : 2013)

(A) 1 : 2 : 3 (B) 3 : 2 : 1 (C) 1 : 3 : 2 (D) 3 : 1 : 2

ઉકેલ : સમીકરણના બંને બીજ સામાન્ય હોય તો,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\therefore \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$$

$\therefore a : b : c = 1 : 2 : 3$ **જવાબ :** (A)

(70) જો $a \in R$ હોય અને સમીકરણ $-3(x-[x])^2 + 2(x-[x]) + a^2 = 0$ ને પૂર્ણાંક ઉકેલ ન હોય તો a ની શક્ય કિંમતો ...... અંતરાલમાં હોય (JEE-main : 2014)

(A) $(-1, 0) \cup (0, 1)$ (B) $(1, 2)$ (C) $(-2, -1)$ (D) $(-\infty, -2)\ (2, \infty)$

ઉકેલ : $-3(x-[x])^2 + 2(x-[x]) + a^2 = 0$

$\therefore -3\{x\}^2 + 2\{x\} + a^2 = 0$

$$\therefore \{x\} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4(-3)a^2}}{2(-3)} = \frac{-2\pm\sqrt{4+12a^2}}{-6} = \frac{1\pm\sqrt{1+3a^2}}{3} \neq 0$$ કારણ કે x પૂર્ણાંક નથી

આથી $a \neq 0$

હવે $0 < \{x\} < 1$ હોવાથી, $0 < \frac{1\pm\sqrt{1+3a^2}}{3} < 1$

$\therefore 0 < 1+\sqrt{1+3a^2} < 3$ $(1 - \sqrt{1+3a^2} < 0)$

$\therefore -1 < \sqrt{1+3a^2} < 2$ એટલે કે $0 \leq \sqrt{1+3a^2} < 2.$

$\therefore 1 + 3a^2 < 4$

$\therefore a^2 < 1$

$\therefore a \in (-1, 1)$. વળી, $a \neq 0$

$\therefore a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ **જવાબ :** (A)

(71) જો સમીકરણ $px^2 + qx + r = 0$ નાં બીજ α અને β હોય (જ્યાં $p \neq 0$) તથા p, q, r સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તેમજ

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 4$ હોય તો $|\alpha - \beta| =$ .... (JEE-main : 2014)

(A) $\frac{\sqrt{61}}{9}$ (B) $\frac{2\sqrt{17}}{9}$ (C) $\frac{\sqrt{34}}{9}$ (D) $\frac{2\sqrt{13}}{9}$

ઉકેલ : અહીં આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણ $px^2 + qx + r = 0$ નાં બીજ α અને β છે.

$\therefore \alpha + \beta = \frac{-q}{p}$ તથા $\alpha\beta = \frac{r}{p}$

વળી, p, q, r સમાંતર શ્રેણીમાં છે. આથી $2q = p + r$ (1)

હવે, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 4$. આથી $\alpha + \beta = 4\alpha\beta$

$\therefore \frac{-q}{p} = \frac{4r}{p}$

$\therefore q = -4r$. (2)

$\therefore |\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha-\beta)^2} = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{\frac{q^2}{p^2} - \frac{4r}{p}}$ (3)

હવે, (1) તથા (2) પરથી, $\frac{p+r}{2} = -4r$ આથી $p + r = -8r$ $\therefore 9r = -p$

$\therefore \frac{r}{p} = \frac{-1}{9}$ (4)

(3) પરથી, $|\alpha - \beta| = \sqrt{\frac{16r^2}{p^2} - \frac{4r}{p}} = \sqrt{\frac{16+36}{81}} = \frac{2\sqrt{13}}{9}$ **જવાબ :** (D)

(72) વાસ્તવિક સહગુણકોવાળું દ્વિઘાત સમીકરણ $p(x) = 0$ માત્ર શુદ્ધ કાલ્પનિક બીજ ધરાવે તો સમીકરણ $p(p(x)) = 0$ માટે નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ? (JEE advenced : 2014)

(A) માત્ર એક જ કાલ્પનિક બીજ થાય. (B) બધાં જ વાસ્તવિક બીજ હોય.

(C) બે વાસ્તવિક તથા બે કાલ્પનિક બીજ હોય. (D) ન કોઈ વાસ્તવિક કે ન કોઈ કાલ્પનિક બીજ હોય.

ઉકેલ : ધારો કે $p(x) = ax^2 + b$ જ્યાં a અને b સમચિહ્ન છે.

$\therefore p(p(x)) = a(ax^2 + b)^2 + b$

જો $x \in R$ કે $ix \in R$ હોય તો $x^2 \in R$

$\therefore p(p(x)) \neq 0$

$\therefore$ કોઈ વાસ્તવિક કે શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા $p(p(x)) = 0$ નું સમાધાન ન કરે.

$\therefore$ કોઈ વાસ્તવિક કે શુદ્ધ કાલ્પનિક બીજ ન હોય. **જવાબ :** (D)

(73) સમીકરણ $x^2 - 6x - 2 = 0$ નાં બીજ α અને β છે. જો $a_n = \alpha^n - \beta^n$; $n \geq 1$ હોય તો $\frac{a_{10} - 2a_8}{2a_9} = ...$

(JEE-main : 2014)

(A) 6 (B) –6 (C) 3 (D) –3

ઉકેલ : $x^2 - 6x - 2 = 0$

$\therefore x^{10} - 6x^9 - 2x^8 = 0$

જો સમીકરણનાં બીજ α અને β હોય, તો $\alpha^{10} - 6\alpha^9 - 2\alpha^8 = 0$ (1)

તથા $\beta^{10} - 6\beta^9 - 2\beta^8 = 0$ (2)

(1) માંથી (2) બાદ કરતાં,

$\alpha^{10} - \beta^{10} - 6(\alpha^9 - \beta^9) - 2(\alpha^8 - \beta^8) = 0$

$\therefore\ a_{10} - 6a_9 - 2a_8 = 0$

$\therefore\ a_{10} - 2a_8 = 6a_9$

$\therefore\ \frac{a_{10} - 2a_8}{2a_9} = 3$ **જવાબ :** (C)

એક કરતાં વધુ વિકલ્પો સાચા હોય તેવા બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો

(74) જો સમીકરણો $x^2 - ax + b = 0$ અને $x^2 + bx - a = 0$ ને એક બીજ સામાન્ય હોય, તો નીચેનામાંથી શું સત્ય બને ? (IIT : 1986)

(A) $a = b$ (B) $a = -b$ (C) $a + b = 1$ (D) $a - b = 1$

ઉકેલ : ધારો કે સમીકરણો $x^2 - ax + b = 0$ તથા $x^2 + bx - a = 0$ નું સામાન્ય બીજ α છે.

$\therefore\ \alpha^2 - a\alpha + b = 0$ અને $\alpha^2 + b\alpha - a = 0$

$\therefore\ -a\alpha + b = b\alpha - a$

$\therefore\ a + b = (a\alpha + b\alpha)$

$\therefore\ (a + b) = \alpha(a + b)$

$\therefore\ (a + b)(1 - \alpha) = 0$

$\therefore\ a + b = 0$ અથવા $\alpha = 1$

$\therefore\ a = -b$ અથવા $1 - a + b = 0$

$\therefore\ a - b = 1$ અથવા $a = -b$ **જવાબ :** (B), (D)

(75) જો સમીકરણ $x^2 + px + q = 0$ નાં બીજ p અને q હોય, તો p ની કિંમત ...... હોઈ શકે. (IIT : 1995)

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{-1}{2}$ (D) -2

ઉકેલ : સમીકરણ $x^2 + px + q = 0$ નાં બીજ p તથા q છે.

$\therefore\ p^2 + p^2 + q = 0$ તથા $q^2 + pq + q = 0$

$\therefore\ 2p^2 + q = 0$ અને $q(p + q + 1) = 0$

$\therefore\ 2p^2 + q = 0$ અને ($q = 0$ અથવા $q = -p - 1$)

$q = 0$ લેતાં, $2p^2 + q = 0$ પરથી, $p = 0$ મળે.

$q = -p - 1$ લેતાં, $2p^2 - p - 1 = 0$

$\therefore\ (2p + 1)(p - 1) = 0$

$\therefore\ p = 0, 1$ અથવા $\frac{-1}{2}$ શક્ય બને. **જવાબ :** (A), (B), (C)

(76) $2^{\cos 2x} = 3\cdot 2^{\cos^2 x} - 4$ હોય તો $x =$ ...... જ્યાં $x \in [0, \pi]$

(A) 0 (B) π (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $2^{\cos 2x} = 3\cdot 2^{\cos^2 x} - 4$ આપેલ છે.

$\therefore\ 2^{2\cos^2 x - 1} = 3\cdot 2^{\cos^2 x}\ \ 4$

$\therefore \frac{2^{2m}}{2} = 3 \cdot 2^m - 4$ (cos²x = m ધારતાં)

$\therefore (2^m)^2 = 3 \cdot 2 \cdot 2^m - 8$

$\therefore (2^m)^2 - 6 \cdot 2^m + 8 = 0$

$\therefore (2^m - 2)(2^m - 4) = 0$

$\therefore 2^m = 2$ અથવા $2^m = 4$

$\therefore m = 1$ અથવા $m = 2$

$\therefore cos^2 x = 1$ અથવા $cos^2 x = 2$ પરંતુ $|cos^2 x| \le 1$

$\therefore cos^2 x = 1$

$\therefore cos\, x = \pm 1$

$\therefore x = 0$ કે π મળે. **જવાબ :** (A), (B)

(77) જો $7^{\log_7 (x^2 - 4x + 5)} = x - 1$ હોય તો x ની શક્ય કિંમતો ...... હોય. (IIT : 1990)

(A) 2 (B) 3 (C) 7 (D) –3, –2

ઉકેલ : $7^{\log_7 (x^2 - 4x + 5)} = x - 1$

$\therefore x^2 - 4x + 5 = x - 1$

$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$

$\therefore (x - 3)(x - 2) = 0$

$\therefore x = 2$ અથવા $x = 3$ **જવાબ :** (A), (B)

(78) જો $0 \le x \le \pi$ માટે $16^{sin^2 x} + 16^{\cos^2 x} = 10$ હોય તો $x =$ ......

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

ઉકેલ : $16^{sin^2 x} + 16^{cos^2 x} = 10$

$\therefore 16^{sin^2 x} + 16 \cdot 16^{-sin^2 x} = 10$

$\therefore \left(16^{sin^2 x}\right)^2 - 10 \cdot 16^{sin^2 x} + 16 = 0$

ધારો કે $16^{sin^2 x} = m$

$\therefore m^2 - 10m + 16 = 0$

$\therefore (m - 8)(m - 2) = 0$

$\therefore m = 8$ અથવા $m = 2$

$\therefore 16^{sin^2 x} = 8$ અથવા $16^{sin^2 x} = 2$

$\therefore 2^{4 sin^2 x} = 2^3$ અથવા $2^{4 sin^2 x} = 2$

$\therefore 4\, sin^2 x = 3$ અથવા $4\, sin^2 x = 1$. આથી $sin\, x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ અથવા $sin\, x = \pm\frac{1}{2}$

પરંતુ $x \in [0, \pi]$ હોવાથી, $sin\, x > 0$

$\therefore sin\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ અથવા $sin\, x = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{3}$ અથવા $x = \frac{\pi}{6}$ **જવાબ :** (B), (C)

(79) જો $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ હોય તો $ab + bc + ca \in$ .... હોઈ શકે. (IIT : 1984)

(A) $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ (B) $[-1, 2]$ (C) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ (D) $\left[1, \frac{1}{2}\right]$

ઉકેલ : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$\therefore (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 0$

$\therefore 0 \leq 1 + 2ab + 2bc + 2ca$

$\therefore \frac{-1}{2} \leq (ab + bc + ca)$

$\therefore ab + bc + ca \geq \frac{-1}{2}$

$\therefore ab + bc + ca \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ અથવા $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ હોઈ શકે. **જવાબ :** (A), (C)

વિભાગ B

પૂર્ણાંક જવાબ હોય તેવા બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો

(80) જો $x = 2 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$ હોય તો $x^3 - 6x^2 + 6x$ ની કિંમત .... હોય.

(A) 1 (B) 2 (C) $\frac{2}{3}$ (D) 3

ઉકેલ : $x = 2 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$ આપેલ છે.

$\therefore x - 2 = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$ (1)

$\therefore (x - 2)^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}\right)^3$

$\therefore x^3 - 8 - 6x(x - 2) = 2 + 2^2 + 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}\right)$

$\therefore x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 6 + 3 \cdot 2(x - 2)$ ((1) પરથી)

$\therefore x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 6 + 6x - 12$

$\therefore x^3 - 6x^2 + 6x = 2$ **જવાબ :** (B)

(81) જો સમીકરણ $x^4 + (p - 3)x^3 - (3p - 5)x^2 + (2p - 9)x + 6 = 0$ નો એક અવયવ $x + 1$ હોય તો p ની કિંમત .... હોય.

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) –4

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણનો એક અવયવ $x + 1$ હોવાથી,

$1 - (3p - 5) + 6 = (p - 3) + (2p - 9)$

$\therefore 6p = 24$

$\therefore p = 4$ **જવાબ :** (C)

(82) જો સમીકરણો $k(6x^2 + 3) + rx + 2x^2 - 1 = 0$ અને $6k(2x^2 + 1) + px + 4x^2 - 2 = 0$ નાં બંને બીજ સમાન હોય, તો $2r - p$ ની કિંમત .... હોય.

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) 2

ઉકેલ : સમીકરણો $k(6x^2 + 3) + rx + 2x^2 - 1 = 0$ આથી $(6k + 2)x^2 + rx + 3k - 1 = 0$

અને $(12k + 4)x^2 + px + 6k - 2 = 0$ નાં બંને બીજ સમાન છે.

$\therefore \frac{6k+2}{12k+4} = \frac{r}{p} = \frac{3k-1}{6k-2}$ આથી $\frac{r}{p} = \frac{1}{2}$ આથી $2r - p = 0$ **જવાબ :** (A)

વિભાગ : C

નિષ્કર્ષ તથા કારકના પ્રશ્નો

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં ચાર વિકલ્પો અને બે વિધાનો હોય છે. **વિધાન 1** નિષ્કર્ષ તથા **વિધાન 2** કારક કહેવાય છે. વિકલ્પો (A), (B), (C) તથા (D) નીચે મુજબ હોય છે :

(a) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

(b) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

(c) વિધાન 1 સત્ય છે તથા વિધાન 2 અસત્ય છે.

(d) વિધાન 1 અસત્ય છે તથા વિધાન 2 સત્ય છે.

(83) **વિધાન : 1** સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજના વર્ગો એ દ્વિઘાત સમીકરણ $a^2x^2 + b^2x + c^2 = 0$ નાં બીજ છે.

વિધાન : 2 $a, b, c \in R^+ - \{0\}$ જો $b^2 = ac$ અને $a, b, c \in R^+$ હોય તો a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

ઉકેલ : સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ α, β હોય તો $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ તથા $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ થાય.

હવે α^2 તથા β^2 એ સમીકરણ $a^2x^2 + b^2x + c^2 = 0$ નાં બીજ છે.

આથી $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{-b^2}{a^2}$ તથા $\alpha^2\beta^2 = \frac{c^2}{a^2}$ થાય.

$\therefore (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{-b^2}{a^2}$ આથી $\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{-b^2}{a^2}$ $\left(\alpha + \beta = \frac{-b}{a}; \alpha\beta = \frac{c}{a}\right)$

$\therefore \frac{2b^2}{a^2} = \frac{2ac}{a^2}$

$\therefore b^2 = ac$

$\therefore a, b, c$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore$ વિધાન 1 તથા વિધાન 2 સત્ય છે તેમજ વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

(84) **વિધાન : 1** સમીકરણ $x^2 - px + q = 0$ α, βએ $|\alpha - \beta| = 1$ નું સમાધાન કરે છે.

વિધાન : 2 દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ના બીજનો તફાવત 1 છે.

ઉકેલ : $|\alpha - \beta| = 1$ લેતાં,

$\therefore (\alpha - \beta)^2 = 1$ આથી $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$

$\therefore p^2 - 4q = 1$

$\therefore p^2 = 4q + 1$

$\therefore p^2 + 4q^2 = 4q^2 + 4q + 1 = (2q + 1)^2$

$\therefore$ વિધાન 2 સત્ય છે.

$p = 5$ અને $q = 6$ માટે,

$\therefore$ $p^2 + 4q^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2 = (2q + 1)^2$

$\therefore$ સમીકરણ $x^2 - 5x + 6 = 0$ નાં બીજ $|\alpha - \beta| = 1$ નું સમાધાન કરે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે તેમજ વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ :** (A)

●