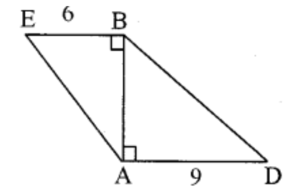
Similarity

Ex. 1.1



1. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, रेख BE ⊥ रेख AB आणि रेख BA ⊥ रेख AD जर BE = 6 आणि AD = 9, तर $\frac{A(\Delta ABE)}{A(\Delta BAD)}$ काढा.

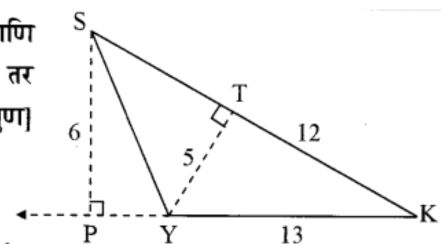
[जुलै 15; ऑक्टोबर 14] [1 गुण]

उकल:

$\frac{A(\Delta ABE)}{A(\Delta BAD)} = \frac{BE}{AD}$ ---- [समान पाया असलेल्या दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत उंचीच्या गुणोत्तराएवढे असते.]

$\therefore \frac{A(\Delta ABE)}{A(\Delta BAD)} = \frac{6}{9}$

$\therefore \mathbf{\frac{A(\Delta ABE)}{A(\Delta BAD)} = \frac{2}{3}}$



2. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, रेख SP ⊥ बाजू YK आणि रेख YT ⊥ रेख SK, जर SP = 6, YK = 13, YT = 5 आणि TK = 12, तर A(ΔSYK) : A(ΔYTK) काढा.

[2 गुण]

उकल:

$\therefore \frac{A(\Delta SYK)}{A(\Delta YTK)} = \frac{YK \times SP}{TK \times VT}$ ---- [दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांचा पाया व संगत उंची यांच्या गुणोत्तराएवढे असते.]

$\therefore \frac{A(\Delta SYK)}{A(\Delta YTK)} = \frac{13 \times 6}{12 \times 5}$

$\therefore \frac{A(\Delta SYK)}{A(\Delta YTK)} = \frac{13}{10}$

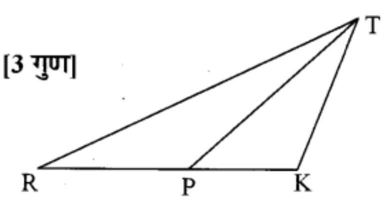
$\therefore$ **A (ΔSYK) : A (ΔYTK) = 13 : 10**

3. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, जर RP : PK = 3 : 2 तर खालील गुणोत्तरांच्या किमती काढा.

   i. A (ΔTRP) : A(ΔTPK) [जुलै 16]

   ii. A (ΔTRK) : A(ΔTPK) iii. A (ΔTRP) : A (ΔTRK)

[मार्च 14] [3 गुण]



उकल:

RP:PK = 3:2 ---- [दिलेले]

समजा, x हा सामाईक गुणक आहे.

$\therefore$ RP = $3x$ आणि PK = $2x$ ---- (i)

RK = RP + PK ---- [R–P–K]

$\therefore$ RK = $3x + 2x$

$\therefore$ RK = $5x$ ---- (ii)

i. $\frac{A(\Delta TRP)}{A(\Delta TPK)} = \frac{RP}{PK}$ ---- [समान उंची असलेल्या दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत पायांच्या गुणोत्तराएवढे असते.]

∴ $\frac{A(\Delta TRP)}{A(\Delta TPK)} = \frac{3x}{2x}$ ---- [विधान (i) वरून]

∴ $\frac{A(\Delta TRP)}{A(\Delta TPK)} = \frac{3}{2}$

∴ **A (ΔTRP) : A (ΔTPK) = 3 : 2**

ii. $\frac{A(\Delta TRK)}{A(\Delta TPK)} = \frac{RK}{PK}$ ---- [समान उंची असलेल्या दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत पायांच्या गुणोत्तराएवढे असते.]

∴ $\frac{A(\Delta TRK)}{A(\Delta TPK)} = \frac{5x}{2x}$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

∴ $\frac{A(\Delta TRK)}{A(\Delta TPK)} = \frac{5}{2}$

∴ **A (ΔTRK) : A (ΔTPK) = 5 : 2**

iii. $\frac{A(\Delta TRP)}{A(\Delta TRK)} = \frac{RP}{RK}$ ---- [समान उंची असलेल्या दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत पायांच्या गुणोत्तराएवढे असते.]

∴ $\frac{A(\Delta TRP)}{A(\Delta TRK)} = \frac{3x}{5x}$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

∴ $\frac{A(\Delta TRP)}{A(\Delta TRK)} = \frac{3}{5}$

∴ **A (ΔTRP) : A (ΔTRK) = 3 : 5**

4. समान पायाच्या दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर 6:5 आहे.मोठ्या त्रिकोणाची उंची 9 सेमी आहे, तर लहान त्रिकोणाची संगत उंची काढा. **[मार्च 15] [3 गुण]**

उकल:

समजा, A_1 व A_2 हे अनुक्रमे मोठा त्रिकोण व छोटा त्रिकोण यांचे क्षेत्रफळ आहेत, h_1 आणि h_2 या अनुक्रमे संगत उंची आहेत.

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{6}{5}$ ---- (i) [दिलेले]

$h_1 = 9$ ---- (ii) [दिलेले]

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{h_1}{h_2}$ ---- [समान पाया असलेल्या दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत उंचीच्या गुणोत्तराएवढे असते.]

∴ $\frac{6}{5} = \frac{9}{h_2}$ ---- [विधान (i) आणि (ii) वरून]

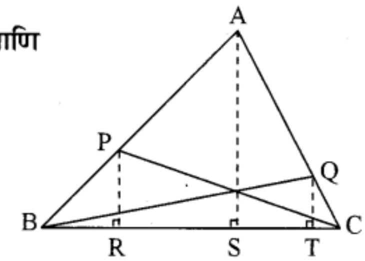
∴ $h_2 = \frac{5 \times 9}{6}$

∴ $h_2 = \frac{15}{2}$

∴ $h_2 = 7.5$ सेमी

∴ **लहान त्रिकोणाची संगत उंची 7.5 सेमी आहे.**

5. **सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, रेख PR ⊥ रेख BC, रेख AS ⊥ रेख BC आणि रेख QT ⊥ रेख BC. खालील गुणोत्तरे काढा.**



i. $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PBC)}$ **ii.** $\frac{A(\Delta ABS)}{A(\Delta ASC)}$

iii. $\frac{A(\Delta PRC)}{A(\Delta BQT)}$ **iv.** $\frac{A(\Delta BPR)}{A(\Delta CQT)}$ **[3 गुण]**

उकल:

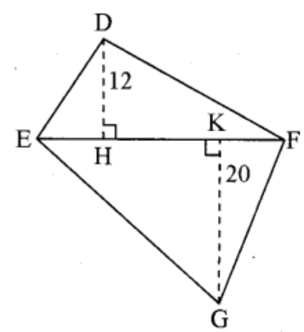
i. $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PBC)} = \frac{\mathbf{AS}}{\mathbf{PR}}$ ---- [समान पाया असलेल्या दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत उंचीच्या गुणोत्तराएवढे असते.]

ii. $\frac{A(\Delta ABS)}{A(\Delta ASC)} = \frac{\mathbf{BS}}{\mathbf{SC}}$ ---- [समान उंची असलेल्या दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत पायांच्या गुणोत्तराएवढे असते.]

iii. $\frac{A(\Delta PRC)}{A(\Delta BQT)} = \frac{\mathbf{RC \times PR}}{\mathbf{BT \times QT}}$ ---- [दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या पाया व संगत उंची यांच्या गुणाकाराच्या गुणोत्तराएवढे असते.]

iv. $\frac{A(\Delta BPR)}{A(\Delta CQT)} = \frac{\mathbf{BR \times PR}}{\mathbf{CT \times QT}}$ ---- [दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांचा पाया व संगत उंची यांच्या गुणाकाराच्या गुणोत्तराएवढे असते.]

6. **सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, रेख DH ⊥ रेख EF आणि रेख GK ⊥ रेख EF. जर DH = 12 सेमी, GK = 20 सेमी आणि A(ΔDEF) = 300 सेमी², तर काढा.**



i. EF ii. A(ΔGEF) iii. A(□DFGE) [3 गुण]

उकल:

i. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times$ पाया $\times$ उंची

$\therefore$ $A(\Delta DEF) = \frac{1}{2} \times EF \times DH$

$\therefore$ $300 = \frac{1}{2} \times EF \times 12$ ---- [दिलेल्या किमती ठेवून]

$\therefore$ $300 = EF \times 6$

$\therefore$ $EF = \frac{300}{6}$

$\therefore$ **EF = 50 सेमी**

ii. $\frac{A(\Delta DEF)}{A(\Delta GEF)} = \frac{DH}{GK}$ ---- [समान पाया असलेल्या दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत उंचीच्या गुणोत्तराएवढे असते.]

$\therefore$ $\frac{300}{A(\Delta GEF)} = \frac{12}{20}$ ---- [दिलेल्या किमती ठेवून]

$\therefore$ $300 \times 20 = 12 \times A(\Delta GEF)$

$\therefore$ $\frac{300 \times 20}{12} = A(\Delta GEF)$

$\therefore$ $A(\Delta GEF) = \frac{300 \times 20}{12}$

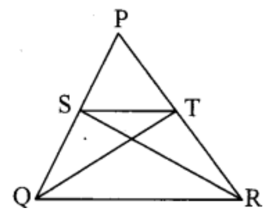
$\therefore$ **A(ΔGEF) = 500 सेमी²** ---- (i)

iii. $A(\square DFGE) = A(\Delta DEF) + A(\Delta GEF)$ ---- [क्षेत्रफळांच्या बेरजेचा गुणधर्म]

$\therefore$ $A(\square DFGE) = 300 + 500$ ---- [दिलेले व विधान (i) वरून]

$\therefore$ **A ($\square$ DFGE) = 800 सेमी^{2}**

7. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, जर रेख ST || बाजू QR तर खालील गुणोत्तरे लिहा.



i. $\dfrac{A(\Delta PST)}{A(\Delta QST)}$ **ii.** $\dfrac{A(\Delta PST)}{A(\Delta RST)}$

iii. $\dfrac{A(\Delta QST)}{A(\Delta RST)}$ **[3 गुण]**

उकल:

i. $\dfrac{A(\Delta PST)}{A(\Delta QST)} = \dfrac{\mathbf{PS}}{\mathbf{QS}}$

ii. $\dfrac{A(\Delta PST)}{A(\Delta RST)} = \dfrac{\mathbf{PT}}{\mathbf{TR}}$

---- [समान उंची असलेल्या दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत पायांच्या गुणोत्तराएवढे असते.]

iii. ΔQST आणि ΔRST रेख ST व QR या समांतर रेषेत बद्ध असलेले दोन त्रिकोण आहेत.

$\therefore$ दोन्ही त्रिकोणांची उंची समान आहे.

तसेच ST हा त्यांचा सामाईक पाया आहे.

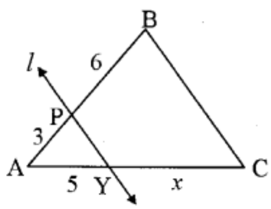
$\therefore$ $A(\Delta QST) = A(\Delta RST)$

$\therefore$ $\dfrac{A(\Delta QST)}{A(\Delta RST)} = \mathbf{1}$ ---- [समान उंची व समान पाया असलेल्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे समान असतात.]

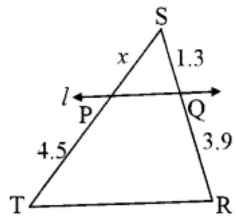
Ex. 1.2

1. **खाली दिलेल्या आकृतीतील x ची किंमत काढा. रेषा l ही दिलेल्या त्रिकोणाच्या एका बाजूला समांतर आहे.**

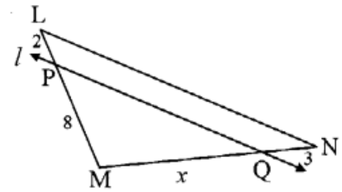
[मार्च 13; ऑक्टोबर 12] [प्रत्येकी 1 गुण]



(i)



(ii)



(iii)

उकल:

i. ΔABC मध्ये,

रेषा $l \parallel$ बाजू BC ---- [दिलेले]

$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = \frac{AY}{YC}$ ---- [प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयानुसार]

$\therefore \quad \frac{3}{6} = \frac{5}{x}$

$\therefore \quad x = \frac{6 \times 5}{3}$

$\therefore$ **$x = 10$ एकक**

ii. ΔRST मध्ये,

रेषा $l \parallel$ बाजू TR ---- [दिलेले]

$\therefore \quad \frac{SP}{PT} = \frac{SQ}{QR}$ ---- [प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयानुसार]

$\therefore \quad \frac{x}{4.5} = \frac{1.3}{3.9}$

$\therefore \quad x = \frac{1.3 \times 4.5}{3.9}$

$\therefore \quad x = \frac{13 \times 45}{39 \times 10}$

$\therefore$ **$x = 1.5$ एकक**

iii. ΔLMN मध्ये,

रेषा $l \parallel$ बाजू LN ---- [दिलेले]

$\therefore \quad \frac{MP}{PL} = \frac{MQ}{QN}$ ---- [प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयानुसार]

$\therefore \quad \frac{8}{2} = \frac{x}{3}$

$\therefore \quad \frac{3 \times 8}{2} = x$

$\therefore \quad x = 3 \times 4$

$\therefore$ **$x = 12$ एकक**

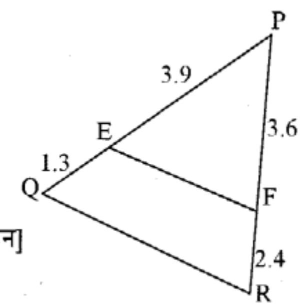
2. ΔPQR च्या बाजू PQ आणि PR वर अनुक्रमे E व F हे बिंदू आहेत, तर खाली दिलेल्या प्रत्येक उदाहरणातील माहितीवरून EF || QR आहे का ते स्पष्ट करा. **[प्रत्येकी 2 गुण]**

i. PE = 3.9 सेमी, EQ = 1.3 सेमी, PF = 3.6 सेमी आणि FR = 2.4 सेमी

ii. PE = 4 सेमी, QE = 4.5 सेमी, PF = 8 सेमी आणि RF = 9 सेमी

iii. PQ = 1.28 सेमी, PR = 2.56 सेमी, PE = 0.18 सेमी आणि PF = 0.36 सेमी

उकल:



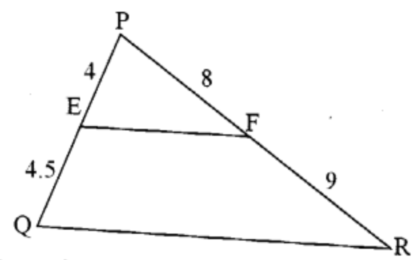
i. $\frac{PE}{EQ} = \frac{3.9}{1.3} = \frac{3}{1}$ ---- (i)

$\frac{PF}{FR} = \frac{3.6}{2.4} = \frac{3}{2}$ ---- (ii)

∴ ΔPQR मध्ये,

∴ $\frac{PE}{EQ} \neq \frac{PF}{FR}$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

∴ **रेख EF ही रेख QR ला समांतर नाही.**



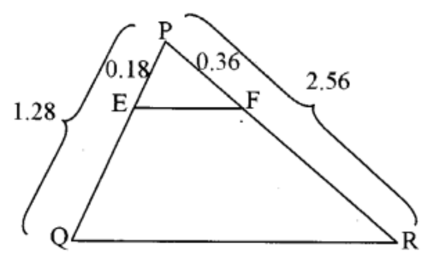
ii. $\frac{PE}{QE} = \frac{4}{4.5} = \frac{8}{9}$ ---- (i)

$\frac{PF}{FR} = \frac{8}{9}$ ---- (ii)

ΔPQR मध्ये,

$\frac{PE}{QE} = \frac{PF}{FR}$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

∴ **रेख EF || रेख QR** ---- [प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार]



iii. EQ + PE = PQ ---- [P–E–Q]

∴ EQ = PQ – PE

= 1.28 – 0.18 = 1.10

FR + PF = PR ---- [P–F–R]

∴ FR = PR – PF

= 2.56 – 0.36 = 2.20

∴ $\frac{PE}{EQ} = \frac{0.18}{1.10} = \frac{18}{110} = \frac{9}{55}$ ---- (i)

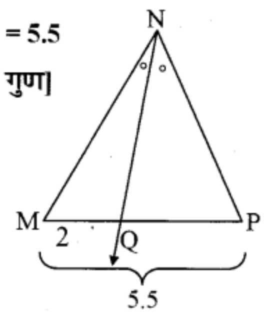
$\frac{PF}{FR} = \frac{0.36}{2.20} = \frac{36}{220} = \frac{9}{55}$ ---- (ii)

Δ PQR मध्ये,

$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

∴ **रेख EF || बाजू QR** ---- [प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार]

3. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, बिंदू Q हा बाजू MP वर असा आहे, की MQ = 2 आणि MP = 5.5 किरण NQ हा ΔMNP च्या $\angle$MNP चा दुभाजक आहे, तर MN:NP काढा. [2 गुण]



उकल:

QP + MQ = MP ---- [M–Q–P]

$\therefore$ QP + 2 = 5.5

$\therefore$ QP = 5.5 –2

$\therefore$ QP = 3.5

ΔMNP मध्ये,

किरण NQ हा $\angle$MNP चा दुभाजक आहे. ---- [दिलेले]

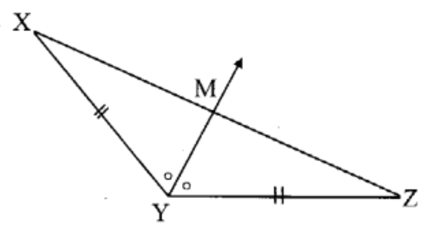
$\therefore$ $\frac{MN}{NP} = \frac{MQ}{QP}$ ---- [त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाचा गुणधर्म]

$\frac{MN}{NP} = \frac{2}{3.5} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

$\therefore$ $\frac{MN}{NP} = \frac{4}{7}$

$\therefore$ **MN : NP = 4:7**

4. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, किरण YM हा $\angle$XYZ चा कोनदुभाजक असून रेख XY $\cong$ रेख YZ, तर XM आणि MZ मधील संबंध लिहा. [2 गुण]



उकल:

ΔXYZ मध्ये,

किरण YM हा $\angle$XYZ चा कोनदुभाजक आहे. ---- [दिलेले]

$\therefore$ $\frac{XM}{MZ} = \frac{XY}{YZ}$ ---- (i) [त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाचा गुणधर्म]

रेख XY $\cong$ रेख YZ ---- [दिलेले]

$\therefore$ XY = YZ

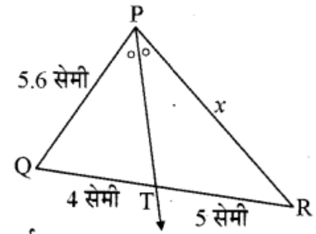
$\therefore$ $\frac{XY}{YZ} = 1$ ---- (ii)

$\therefore$ $\frac{XM}{MZ} = 1$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

$\therefore$ XM = MZ

$\therefore$ **रेख XM $\cong$ रेख MZ**

5. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, किरण PT हा $\angle QPR$ चा दुभाजक आहे, तर x ची किंमत आणि ΔPQR ची परिमिती काढा. [मार्च 14] [3 गुण]



उकल:

ΔPQR मध्ये,

किरण PT हा $\angle QPR$ चा कोनदुभाजक आहे.

$\therefore \quad \frac{PQ}{PR} = \frac{QT}{TR}$ ---- [त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाचा गुणधर्म]

$\therefore \quad \frac{5.6}{x} = \frac{4}{5}$

$\therefore \quad 5.6 \times 5 = 4 \times x$

$\therefore \quad \frac{5.6 \times 5}{4} = x$

$\therefore \quad x = 7$ सेमी

$\therefore \quad PR = 7$ सेमी ---- [$\because PR = x$]

आता, $QR = QT + TR$ ---- [Q–T–R]

$\therefore \quad QR = 4 + 5$

$\therefore \quad QR = 9$ सेमी

ΔPQR ची परिमिती $= PQ + QR + PR$

$= 5.6 + 9 + 7$

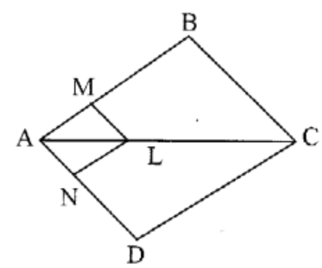
$= 21.6$ सेमी

$\therefore$ **x ची किंमत 7 सेमी आणि ΔPQR ची परिमिती 21.6 सेमी आहे.**

---

6. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, ML || BC आणि NL || DC, तर सिद्ध करा, की $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$. [3 गुण]

सिद्धता :



ΔABC मध्ये,

रेख ML || बाजू BC ---- [पक्ष]

$\therefore \quad \frac{AM}{MB} = \frac{AL}{LC}$ ---- [(i) प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयानुसार]

ΔADC मध्ये,

रेख NL || बाजू DC ---- [पक्ष]

$\therefore \quad \frac{AN}{ND} = \frac{AL}{LC}$ ---- [(ii) प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयानुसार]

$\therefore \quad \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{ND}$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

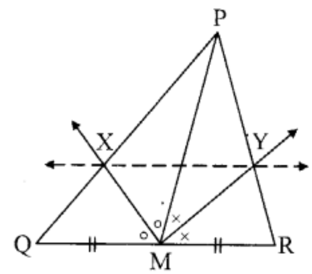
$\therefore \quad \frac{MB}{AM} = \frac{ND}{AN}$ ---- [व्यस्त क्रिया करून]

$\therefore \quad \frac{MB + AM}{AM} = \frac{ND + AN}{AN}$ ---- [योग क्रिया करून]

$\therefore \quad \frac{AB}{AM} = \frac{AD}{AN}$ ---- [A–M–B, A–N–D]

$\therefore \quad \mathbf{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}}$ ---- [व्यस्त क्रिया करून]

7. सोबत दिलेल्या आकृती ΔPQR मध्ये, रेख PM ही मध्यगा आहे. $\angle PMQ$ आणि $\angle PMR$ यांचे दुभाजक बाजू PQ आणि बाजू PR यांना अनुक्रमे X आणि Y मध्ये छेदतात, तर सिद्ध करा, की XY || QR. **[3 गुण]**



सिद्धता :

रेख XY काढा.

ΔPMQ मध्ये,

किरण MX हा $\angle PMQ$ चा कोनदुभाजक आहे. ---- [पक्ष]

$\therefore \quad \frac{MP}{MQ} = \frac{PX}{QX}$ ---- (i) [त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाचा गुणधर्म]

ΔPMR मध्ये,

किरण MY हा $\angle PMR$ चा कोनदुभाजक आहे. ---- [पक्ष]

$\therefore \quad \frac{MP}{MR} = \frac{PY}{RY}$ ---- (ii) [त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाचा गुणधर्म]

परंतु, रेख PM ही मध्यगा आहे. ---- [पक्ष]

$\therefore$ M हा रेख QR चा मध्यबिंदू आहे.

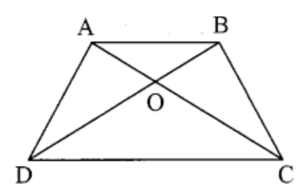
$\therefore \quad MQ = MR$ ---- (iii)

$\therefore \quad \frac{PX}{QX} = \frac{PY}{RY}$ ---- [विधान (i), (ii) आणि (iii) वरून]

ΔPQR मध्ये,

रेख XY || रेख QR ---- [प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार]

8. □ABCD या समलंब चौकोनात, AB || DC आणि त्याचे कर्ण एकमेकांना O मध्ये छेदतात, तर दाखवा की $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$. **[3 गुण]**



सिद्धता :

□ABCD हा समलंब चौकोन आहे.

बाजू AB || बाजू DC व

छेदिका AC घेऊन,

$\angle BAC \cong \angle DCA$ ---- (i) [व्युत्क्रम कोन]

ΔAOB आणि ΔCOD मध्ये,

$\angle BAO \cong \angle DCO$ ---- [विधान (i) वरून आणि A–O–C]

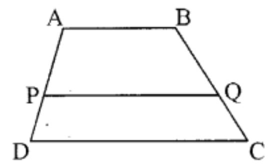
$\angle AOB \cong \angle COD$ ---- [परस्पर विरुद्ध कोन]

$\therefore \quad \Delta AOB \sim \Delta COD$ ---- [त्रिकोणाच्या समरूपतेची को-को कसोटी]

$\therefore \quad \frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$ ---- [समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू]

$\therefore \quad \mathbf{\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}}$ ---- [एकांतर क्रिया करून]

9. **सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, □ABCD हा समलंब चौकोन आहे.**
बाजू AB ∥ रेख PQ ∥ बाजू DC आणि AP = 15, PD = 12, QC = 14, तर BQ काढा. **[2 गुण]**



उकल :

बाजू AB ∥ रेख PQ ∥ बाजू DC ---- [दिलेले]

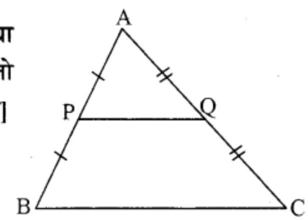
$\therefore \quad \frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$ ---- [तीन समांतर रेषांनी छेदिकेवर तयार केलेल्या आंतरछेदांचा गुणधर्म]

$\therefore \quad \frac{15}{12} = \frac{BQ}{14}$ ---- [$\because$ AP = 15, PD = 12 आणि QC = 14]

$\therefore \quad BQ = \frac{15 \times 14}{12}$

$\therefore \quad \mathbf{BQ = 17.5}$

10. **प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाच्या व्यत्यासाचा उपयोग करून सिद्ध करा, की त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंचे मध्यबिंदू जोडणारा रेषाखंड हा तिसऱ्या बाजूला समांतर असतो आणि तिसऱ्या बाजूच्या निम्म्या लांबीचा असतो.** **[4 गुण]**



पक्ष: ΔABC मध्ये, बिंदू P आणि बिंदू Q हे अनुक्रमे बाजू AB व बाजू AC चे मध्यबिंदू आहेत.

साध्य: रेख PQ ∥ बाजू BC

$PQ = \frac{1}{2}BC$

सिद्धता: AP = PB ---- [P हा बाजू AB चा मध्यबिंदू आहे.]

$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = 1$ ---- (i)

AQ = QC ---- [Q हा बाजू AC चा मध्यबिंदू आहे.]

$\therefore \quad \frac{AQ}{QC} = 1$ ---- (ii)

ΔABC मध्ये,

$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

$\therefore$ **रेख PQ ∥ बाजू BC** ---- (iii) [प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार]

ΔABC आणि ΔAPQ मध्ये,

$\angle ABC \cong \angle APQ$ ---- [विधान (iii) वरून दिलेले संगत कोन]

$\angle BAC \cong \angle PAQ$ ---- [सामाईक कोन]

$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta APQ$ ---- [त्रिकोणाच्या समरूपतेची को – को कसोटी]

$\therefore \quad \frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PQ}$ ---- [समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू]

$\therefore \quad \frac{AP + PB}{AP} = \frac{BC}{PQ}$ ---- [A–P–B]

$\therefore \quad \frac{AP + AP}{AP} = \frac{BC}{PQ}$ ---- [$\because$ AP = PB]

$\therefore \quad \frac{2AP}{AP} = \frac{BC}{PQ}$

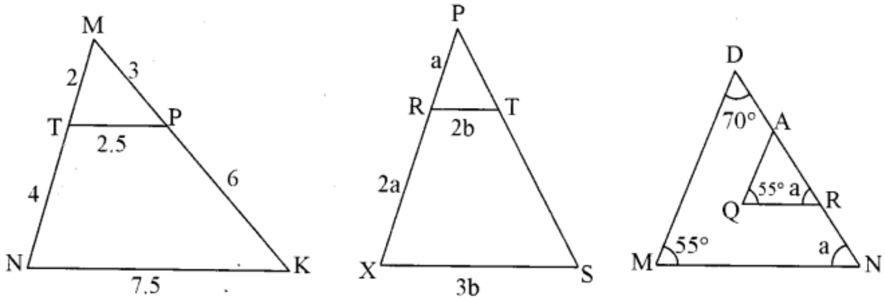
$\therefore \quad \frac{2}{1} = \frac{BC}{PQ}$

$\therefore \quad \mathbf{PQ = \frac{1}{2}BC}$

Ex. 1.3

1. खालील आकृत्यांचा अभ्यास करा आणि प्रत्येक परिस्थितीमध्ये त्रिकोण समरूप आहेत का? कारण द्या.

[प्रत्येकी 2 गुण]



(i) (ii) (iii)

[जुलै 16]

उकल:

i. ΔMTP व ΔMNK समरूप आहेत.

कारण:

MN = MT + TN ---- [M–T–N]

∴ MN = 2 + 4 = 6 एकक

$\frac{MT}{TN} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ---- (i)

MK = MP + PK ---- [M–P–K]

∴ MK = 3 + 6 = 9 एकक

∴ $\frac{MP}{MK} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ---- (ii)

ΔMTP आणि ΔMNK मध्ये,

$\frac{MT}{MN} = \frac{MP}{MK}$ ---- [विधान (i) आणि (ii) वरून]

∠TMP ~ ∠NMK ---- [सामाईक कोन]

∴ **ΔMTP ~ ΔMNK** ---- [त्रिकोणाच्या समरूपतेच्या बा-को-बा कसोटीनुसार]

ii. ΔPRT आणि ΔPXS समरूप नाहीत.

कारण:

PX = PR + RX ---- [P–R–X]

∴ PX = a + 2a = 3a

∴ $\frac{PR}{PX} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$ ---- (i)

$\frac{RT}{XS} = \frac{2b}{3b} = \frac{2}{3}$ ---- (ii)

∴ $\frac{PR}{PX} \neq \frac{RT}{XS}$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

∴ या दोन्ही त्रिकोणांच्या संगत बाजूंची गुणोत्तरे समान नाहीत.

∴ **ΔPRT व ΔPXS त्रिकोण समरूप नाहीत.**

iii. **ΔDMN आणि ΔAQR समरूप आहेत.**

कारण:

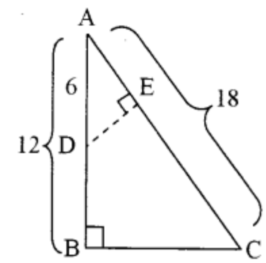
ΔDMN आणि ΔAQR मध्ये,

∠DMN ≅ ∠AQR ---- [प्रत्येक कोनाचे माप 55°]

∠DNM ≅ ∠ARQ ---- [दोन्ही कोन समान मापाचे]

∴ **ΔDMN ~ ΔAQR** ---- [त्रिकोणांच्या समरूपतेची को-को कसोटी]

2. **सोबत दिलेल्या ΔABC मध्ये, ∠B हा काटकोन आहे. बिंदू D हा बाजू AB वरील कोणताही एक बिंदू आहे. रेख DE ⊥ रेख AC जर AD = 6 सेमी, AB = 12 सेमी, AC = 18 सेमी, तर AE काढा.** **[2 गुण]**



उकल:

Δ AED आणि ΔABC मध्ये,

∠AED ≅ ∠ABC ---- [प्रत्येक कोनाचे माप 90°]

∴ ∠DAE ≅ ∠BAC ---- [सामाईक कोन]

∴ ΔAED ~ ΔABC ---- [त्रिकोणाच्या समरूपतेच्या को-को कसोटीनुसार]

∴ $\frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC}$ ---- [समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू]

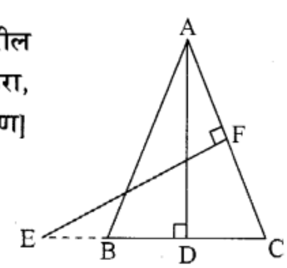
∴ $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$

∴ $\frac{AE}{12} = \frac{6}{18}$

∴ $AE = \frac{6 \times 12}{18}$

∴ **AE = 4 सेमी**

3. **सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, E हा समद्विभुज त्रिकोणाच्या वाढविलेल्या बाजू CB वरील बिंदू असून AB = AC जर रेख AD ⊥ रेख BC आणि रेख EF ⊥ रेख AC, तर सिद्ध करा, की ΔABD ~ ΔECF.** **[3 गुण]**



सिद्धता :

ΔABC मध्ये,

रेख AB ≅ रेख AC ---- [पक्ष]

∠B ≅ ∠C ---- (i) [समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय]

ΔABD व ΔECF मध्ये,

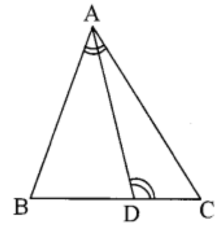
∠ABD ≅ ∠ECF ---- [विधान (i) वरून]

∠ADB ≅ ∠EFC ---- [प्रत्येक कोनाचे माप 90°]

∴ **ΔABD ~ ΔECF** ---- [त्रिकोणांच्या समरूपतेची को-को कसोटी]

4. ΔABC च्या बाजू BC वर D बिंदू असा आहे, की $\angle ADC = \angle BAC$ तर दाखवा, की $AC^2 = BC \times DC$. [3 गुण]

सिद्धता :



ΔACB आणि ΔDCA मध्ये,

$\angle BAC \cong \angle ADC$ ---- [पक्ष]

$\angle ACB \cong \angle DCA$ ---- [सामाईक कोन]

$\therefore$ $\Delta ACB \sim \Delta DCA$ ---- [त्रिकोणांच्या समरूपतेची को-को कसोटी]

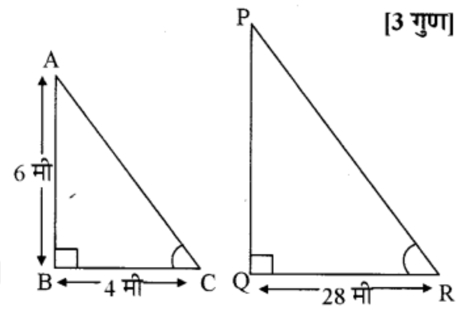
$\therefore$ $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{DA}$ ---- [समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू]

$\therefore$ $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$

$\therefore$ $\mathbf{AC^2 = BC \times DC}$

5. 6 मीटर उंचीच्या एका उभ्या खांबाची जमिनीवरील सावली 4 मीटर पडते. तर त्याचवेळी एका मनोऱ्याची सावली 28 मीटर लांब पडत असेल, तर मनोऱ्याची उंची काढा. [3 गुण]

उकल:



AB उभ्या खांबाची उंची दर्शविते. $\therefore$ AB = 6 मीटर

BC खांबाची सावली दर्शविते. $\therefore$ BC = 4 मीटर

PQ मनोऱ्याची उंची दर्शविते.

QR मनोऱ्याची सावली दर्शविते. $\therefore$ QR = 28 मीटर

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ---- [$\because$ उभा खांब व मनोरा ह्या समरूप आकृत्या आहेत.]

$\therefore$ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ ---- [समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू]

$\therefore$ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$

$\therefore$ $\frac{6}{PQ} = \frac{4}{28}$

$\therefore$ $\frac{6}{PQ} = \frac{1}{7}$

$\therefore$ $6 \times 7 = PQ$

$\therefore$ PQ = 42 मीटर

$\therefore$ **मनोऱ्याची उंची 42 मीटर आहे.**

6. ΔABC च्या बाजूंची लांबी 5, 6 आणि 7 एकक आहे. ΔPQR ची परिमिती 360 एकक आहे. जर ΔABC आणि ΔPQR हे समरूप असतील, तर ΔPQR च्या संगत बाजू लिहा. **[3 गुण]**

उकल:

$\because \quad \Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore \quad \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR}$ ---- [समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू]

$\therefore \quad \dfrac{5}{PQ} = \dfrac{6}{QR} = \dfrac{7}{PR}$

समान गुणोत्तराच्या सिद्धांतानुसार,

प्रत्येक गुणोत्तर $= \dfrac{5+6+7}{PQ+QR+PR}$

$= \dfrac{18}{360}$ ---- [$\because$ (ΔPQR) ची परिमिती $= PQ + QR + PR = 360$]

$= \dfrac{1}{20}$

$\therefore \quad \dfrac{5}{PQ} = \dfrac{6}{QR} = \dfrac{7}{PR} = \dfrac{1}{20}$ ---- (i)

$\dfrac{5}{PQ} = \dfrac{1}{20}$ ---- [विधान (i) वरून]

$\therefore \quad PQ = 20 \times 5$

$\therefore \quad PQ = 100$ एकक

$\dfrac{6}{QR} = \dfrac{1}{20}$ ---- [विधान (i) वरून]

$\therefore \quad QR = 6 \times 20$

$\therefore \quad QR = 120$ एकक

$\dfrac{7}{PR} = \dfrac{1}{20}$ ---- [विधान (i) वरून]

$\therefore \quad PR = 7 \times 20$

$\therefore \quad PR = 140$ एकक

$\therefore$ **ΔPQR मध्ये बाजू PQ, QR आणि PR यांची लांबी अनुक्रमे 100 एकक, 120 एकक आणि 140 एकक आहे.**

Ex. 1.4

1. **$\Delta ABC \sim \Delta DEF$**

   i. **जर $A(\Delta ABC) = 9$ सेमी^{2}, $A(\Delta DEF) = 64$ सेमी^{2}, DE = 5.6 सेमी, तर AB काढा.**

   ii. **जर $A(\Delta ABC):A(\Delta DEF) = 16:25$, BC = 2.2 सेमी, तर EF काढा.**

   iii. **जर AB = 2.4 सेमी, DE = 1.6 सेमी, तर ΔABC आणि ΔDEF च्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा.**

[प्रत्येकी 2 गुण]

उकल:

i. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ---- [दिलेले]

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2}$ ---- [समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळाच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore \frac{9}{64} = \frac{AB^2}{(5.6)^2}$ ---- [दिलेल्या किमती ठेवून]

$\therefore AB^2 = \frac{9 \times (5.6)^2}{64}$

$\therefore AB = \frac{3 \times 5.6}{8}$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

$= 2.1$

$\therefore$ **AB = 2.1 सेमी**

ii. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ---- [दिलेले]

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DEF)} = \frac{BC^2}{EF^2}$ ---- (i) [समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळाच्या प्रमेयानुसार]

तसेच, $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DEF)} = \frac{16}{25}$ ---- (ii) [दिलेले]

$\therefore \frac{16}{25} = \frac{(2.2)^2}{EF^2}$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

$\therefore EF^2 = \frac{(2.2)^2 \times 25}{16}$

$\therefore EF = \frac{2.2 \times 5}{4}$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

$= \frac{11}{4} = \frac{5.5}{2} = 2.75$

$\therefore$ **EF = 2.75 सेमी**

iii. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ---- [दिलेले]

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2}$ ---- [समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore \quad \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DEF)} = \frac{(2.4)^2}{(1.6)^2}$ ---- [दिलेल्या किमती ठेवून]

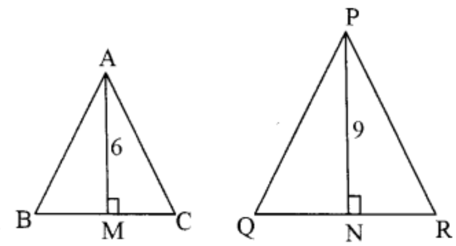
$\therefore \quad \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DEF)} = \frac{2.4 \times 2.4}{1.6 \times 1.6}$

$\therefore \quad \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DEF)} = \frac{9}{4}$

$\therefore$ **A (ΔABC) : A (ΔDEF) = 9 : 4**

2. दोन समरूप त्रिकोणांच्या उंची अनुक्रमे 6 सेमी आणि 9 सेमी आहेत. तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा. [2 गुण]

उकल:



समजा, ΔABC आणि ΔPQR हे दोन समरूप त्रिकोण आहेत.

रेख AM व रेख PN ह्या त्यांच्या संगत उंची आहेत.

AM = 6 सेमी

PN = 9 सेमी

ΔABC ~ ΔPQR ---- [दिलेले]

$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \left(\frac{AM}{PN}\right)^2$ ---- [दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत उंचीच्या वर्गांच्या गुणोत्तराएवढे असते.]

$\therefore \quad \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \left(\frac{6}{9}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ ---- [दिलेल्या किमती ठेवून]

$\therefore \quad \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{4}{9}$

$\therefore$ **A(ΔABC):A(ΔPQR) = 4:9**

3. दोन समरूप त्रिकोणांची क्षेत्रफळे अनुक्रमे 81 चौसेमी आणि 49 चौसेमी आहेत, तर त्यांच्या संगत उंचीचे गुणोत्तर काढा. त्यांच्या संगत मध्यगांचे गुणोत्तर काय असेल? [2 गुण]

उकल:

समजा, दोन समरूप त्रिकोणांची क्षेत्रफळे अनुक्रमे A_1 व A_2 आहेत.

$A_1 = 81$ चौसेमी आणि

$A_2 = 49$ चौसेमी आहेत.

त्यांच्या संगत उंची h_1 आणि h_2 आहेत आणि

संगत मध्यगा m_1 आणि m_2 आहेत असे समजू.

$\therefore \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{(h_1)^2}{(h_2)^2} = \frac{(m_1)^2}{(m_2)^2}$ ---- [दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत उंची व संगत मध्यगा यांच्या वर्गांच्या गुणोत्तराएवढे असते.]

$\therefore \quad \frac{81}{49} = \frac{(h_1)^2}{(h_2)^2} = \frac{(m_1)^2}{(m_2)^2}$

$\therefore \quad \frac{9}{7} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{m_1}{m_2}$ ---- (i) [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

$\therefore \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{9}{7}$ ---- [विधान (i) वरून]

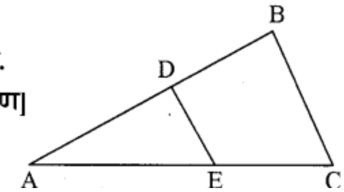
$\therefore \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{9}{7}$ ---- [विधान (i) वरून]

$\therefore$ **त्रिकोणांच्या संगत उंचीचे गुणोत्तर 9:7 आणि त्रिकोणांच्या संगत मध्यगांचे गुणोत्तर 9:7 आहे.**

4. **सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, DE || BC**

i. **जर DE = 4 सेमी, BC = 8 सेमी, A (ΔADE) = 25 सेमी^{2}, A (ΔABC) काढा.**

ii. **जर DE : BC = 3:5, तर A (ΔADE) : A (□DBCE) काढा.** **[5 गुण]**



उकल:

i. रेख DE || बाजू BC व छेदिका AC घेऊन

$\angle ACB \cong \angle AED$ ---- (i) [संगत कोन]

ΔABC आणि ΔADE मध्ये,

$\angle ACB \cong \angle AED$ ---- [विधान (i) वरून]

$\angle BAC \cong \angle DAE$ ---- [सामाईक कोन]

$\therefore$ $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ ---- (ii) [त्रिकोणांच्या समरूपतेच्या को-को कसोटीनुसार]

$\therefore \dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADE)} = \dfrac{BC^2}{DE^2}$ ---- [समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore \dfrac{A(\Delta ABC)}{25} = \dfrac{(8)^2}{(4)^2}$ ---- [दिलेल्या किमती ठेवून]

$\therefore \dfrac{A(\Delta ABC)}{25} = \dfrac{64}{16}$

$\therefore A(\Delta ABC) = \dfrac{25 \times 64}{16}$

$\therefore$ **A(ΔABC) = 100 सेमी^{2}**

ii. $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ ---- [विधान (ii) वरून]

$\therefore \dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADE)} = \dfrac{BC^2}{DE^2}$ ---- [समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore \dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADE)} = \left(\dfrac{BC}{DE}\right)^2$

$\therefore \dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADE)} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^2$ ---- [$\because$ DE : BC = 3 : 5]

$\therefore \dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADE)} = \dfrac{25}{9}$

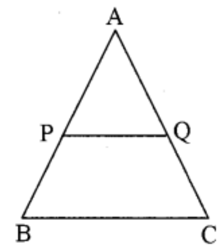
$\therefore \dfrac{A(\Delta ABC) - A(\Delta ADE)}{A(\Delta ADE)} = \dfrac{25-9}{9}$ ---- [वियोग क्रिया करून]

$\therefore \dfrac{A(\square DBCE)}{A(\Delta ADE)} = \dfrac{16}{9}$ ---- [क्षेत्रफळांच्या बेरजेच्या गुणधर्मानुसार]

$\therefore \dfrac{A(\Delta ADE)}{A(\square DBCE)} = \dfrac{9}{16}$ ---- [व्यस्त क्रिया करून]

$\therefore$ **A (ΔADE) : A (□DBCE) = 9:16**

5. ΔABC मध्ये, PQ हा रेषाखंड AB ला P मध्ये आणि AC ला Q मध्ये अशा प्रकारे छेदतो, की रेख PQ $\parallel$ रेख BC. जर PQ हा ΔABC ला समान क्षेत्रफळ असलेल्या दोन भागात विभागत असेल, तर $\frac{BP}{AB}$ काढा. **[4 गुण]**



उकल:

रेख PQ $\parallel$ बाजू BC छेदिका AB त्यांना छेदते.

$\angle APQ \cong \angle ABC$ ---- (i) [संगत कोन]

ΔAPQ आणि ΔABC मध्ये,

$\angle APQ \cong \angle ABC$ ---- [विधान (i) वरून]

$\angle PAQ \cong \angle BAC$ ---- [सामाईक कोन]

$\therefore$ $\Delta APQ \sim \Delta ABC$ ---- [त्रिकोणांच्या समरूपतेच्या को-को कसोटीनुसार]

$\frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta ABC)} = \frac{AP^2}{AB^2}$ ---- (ii) [समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांच्या प्रमेयानुसार]

$A(\Delta APQ) = \frac{1}{2} A(\Delta ABC)$ ---- [$\because$ ΔABC ला रेख PQ दोन समान भागात विभागते.]

$\therefore$ $\frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta ABC)} = \frac{1}{2}$ ---- (iii)

$\therefore$ $\frac{AP^2}{AB^2} = \frac{1}{2}$ ---- [विधान (ii) व (iii) वरून]

$\therefore$ $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

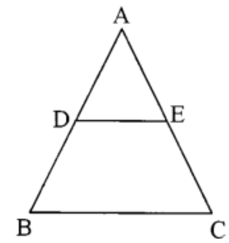
$\therefore$ $1 - \frac{AP}{AB} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ---- [दोन्ही बाजूंमधून 1 वजा करून]

$\therefore$ $\frac{AB - AP}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $\mathbf{\frac{BP}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}$

6. **ΔABC मध्ये, रेख DE || बाजू BC. जर $2A(\Delta ADE) = A(\square DBCE)$, तर AB:AD काढा आणि दाखवा, की $BC = \sqrt{3} \times DE$.** **[5 गुण]**

सिद्धता :



रेख DE || बाजू BC व छेदिका AB घेऊन

$\angle ABC \cong \angle ADE$ ---- (i) [संगत कोन]

ΔABC व ΔADE मध्ये,

$\angle ABC \cong \angle ADE$ ---- [विधान (i) वरून]

$\angle BAC \cong \angle DAE$ ---- [सामाईक कोन]

$\therefore$ $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ ---- [समरूपतेच्या को-को कसोटीनुसार]

$\therefore$ $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADE)} = \dfrac{AB^2}{AD^2}$ ---- (ii) [समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांच्या प्रमेयानुसार]

$A(\Delta ABC) = A(\Delta ADE) + A(\square DBCE)$ ---- (iii) [क्षेत्रफळांच्या बेरजेच्या गुणधर्मानुसार]

$A(\square DBCE) = 2A(\Delta ADE)$ ---- (iv) [पक्ष]

$\therefore$ $A(\Delta ABC) = A(\Delta ADE) + 2A(\Delta ADE)$ ---- [विधान (iii) व (iv) वरून]

$\therefore$ $A(\Delta ABC) = 3A(\Delta ADE)$

$\therefore$ $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADE)} = \dfrac{3}{1}$ ---- (v)

$\therefore$ $\dfrac{AB^2}{AD^2} = \dfrac{3}{1}$ ---- [विधान (ii) व (v) वरून]

$\therefore$ $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$ ---- (vi) [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

$\therefore$ $AB : AD = \sqrt{3} : 1$

तसेच, $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DE} = \dfrac{AC}{AE}$ ---- (vii) [समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू]

$\therefore$ $\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{BC}{DE}$ ---- [विधान (vi) व (vii) वरून]

$\therefore$ $BC = \sqrt{3}\, DE$

$\therefore$ **$AB : AD = \sqrt{3} : 1$ आणि $BC = \sqrt{3}\, DE$**

Ex. 1.5

1. त्रिकोणाच्या बाजू खाली दिल्या आहेत. त्यापैकी कोणते काटकोन त्रिकोण आहेत? **[प्रत्येकी 2 गुण]**

i.	**8, 15, 17**	**ii.**	**9, 40, 41**	**iii.**	**40, 20, 30**
iv.	**11, 60, 61**	**v.**	**11, 12, 15**	**vi.**	**12, 35, 37**

उकल:

i. त्रिकोणाच्या बाजू 8, 15 आणि 17 आहेत.

∴ त्रिकोणाची सर्वांत मोठी बाजू 17 आहे.

∴ $(17)^2 = 289$ ---- (i)

आता, उरलेल्या दोन बाजूंच्या वर्गांची बेरीज,

$(15)^2 + (8)^2 = 225 + 64$

$= 289$ ---- (ii)

∴ $(17)^2 = (15)^2 + (8)^2$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

∴ **दिलेल्या बाजूंनी तयार होणारा त्रिकोण काटकोन त्रिकोण आहे.** ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार]

ii. त्रिकोणाच्या बाजू 9, 40 आणि 41 आहेत.

∴ सर्वांत मोठी बाजू 41 आहे.

∴ $(41)^2 = 1681$ ---- (i)

आता, उरलेल्या दोन बाजूंच्या वर्गांची बेरीज,

$(40)^2 + (9)^2 = 1600 + 81$

$= 1681$ ---- (ii)

∴ $(41)^2 = (40)^2 + (9)^2$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

∴ **दिलेल्या बाजूंनी तयार होणारा त्रिकोण काटकोन त्रिकोण आहे.** ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार]

iii. त्रिकोणाच्या बाजू 40, 20 आणि 30 आहेत.

∴ सर्वांत मोठी बाजू 40 आहे.

∴ $(40)^2 = 1600$ ---- (i)

आता, उरलेल्या दोन बाजूंच्या वर्गांची बेरीज,

$(30)^2 + (20)^2 = 900 + 400$

$= 1300$ ---- (ii)

∴ $(40)^2 \neq (30)^2 + (20)^2$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

∴ **दिलेल्या बाजूंनी तयार होणारा त्रिकोण काटकोन त्रिकोण नाही.**

iv. त्रिकोणाच्या बाजू 11, 60 आणि 61 आहेत.

∴ सर्वांत मोठी बाजू 61 आहे.

∴ $(61)^2 = 3721$ ---- (i)

आता, उरलेल्या दोन बाजूंच्या वर्गांची बेरीज,

$(60)^2 + (11)^2 = 3600 + 121$

$= 3721$ ---- (ii)

∴ $(61)^2 = (60)^2 + (11)^2$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

∴ **दिलेल्या बाजूंनी तयार होणारा त्रिकोण काटकोन त्रिकोण आहे.** ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार]

v. त्रिकोणाच्या बाजू 11, 12 आणि 15 आहेत.

∴ त्रिकोणाची सर्वात मोठी बाजू 15 आहे.

∴ $(15)^2 = 225$ ---- (i)

आता, उरलेल्या दोन बाजूंच्या वर्गांची बेरीज,

$(11)^2 + (12)^2 = 121 + 144 = 265$ ---- (ii)

∴ $(15)^2 \neq (11)^2 + (12)^2$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

∴ **दिलेल्या बाजूंनी तयार होणारा त्रिकोण काटकोन त्रिकोण नाही.**

vi. त्रिकोणाच्या बाजू 12, 35 आणि 37 आहेत.

त्रिकोणाची सर्वात मोठी बाजू 37 आहे.

∴ $(37)^2 = 1369$ ---- (i)

आता, उरलेल्या दोन बाजूंच्या वर्गांची बेरीज,

$(12)^2 + (35)^2 = 144 + 1225$

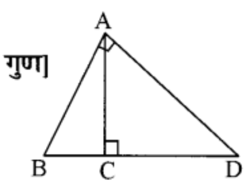
$= 1369$ ---- (ii)

∴ $(37)^2 = (12)^2 + (35)^2$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

∴ **दिलेल्या बाजूंनी तयार होणारा त्रिकोण काटकोन त्रिकोण आहे.** ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार]

2. ΔABD मध्ये, $\angle A = 90°$ आणि रेख $AC \perp$ रेख BD, तर दाखवा की:

i. $AB^2 = BC \times BD$ ii. $AD^2 = BD \times CD$ iii. $AC^2 = BC \times CD$ [4 गुण]



सिद्धता :

ΔABD मध्ये,

$m\angle BAD = 90°$ ---- [पक्ष]

रेख $AC \perp$ कर्ण BD ---- [पक्ष]

∴ $\Delta BAD \sim \Delta BCA \sim \Delta ACD$ ---- (i) [काटकोन त्रिकोणातील समरूपतेचा गुणधर्म]

i. $\Delta BAD \sim \Delta BCA$ ---- [विधान (i) वरून]

∴ $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{AB}$ ---- [समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू]

∴ $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$

∴ $\mathbf{AB^2 = BC \times BD}$

ii. $\Delta BAD \sim \Delta ACD$ ---- [विधान (i) वरून]

∴ $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$ ---- [समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू]

∴ $\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$

∴ $\mathbf{AD^2 = BD \times CD}$

iii. $\Delta BCA \sim \Delta ACD$ ---- [विधान (i) वरून]

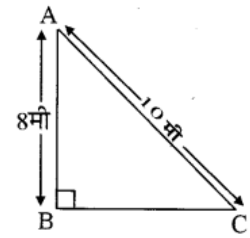
∴ $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB}{AD}$ ---- [समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू]

∴ $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD}$

∴ $\mathbf{AC^2 = BC \times CD}$

3. 10 मीटर लांबीची एक शिडी जमिनीपासून 8 मीटर उंचीच्या एका खिडकीपाशी पोहोचते, तर भिंतीचा पाया व शिडीचे खालचे टोक यांमधील अंतर काढा. **[मार्च 13] [2 गुण]**

उकल:



आकृतीमध्ये,

AC शिडीची लांबी दर्शविते.

AB जमिनीपासून खिडकीची उंची दर्शविते.

BC भिंतीचा पाया व शिडीचे खालचे टोक यांमधील अंतर दर्शविते.

∴ AB = 8 मीटर, AC = 10 मीटर

ΔABC मध्ये,

$\angle ABC = 90°$

∴ $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

∴ $(10)^2 = (8)^2 + (BC)^2$

∴ $100 = 64 + (BC)^2$

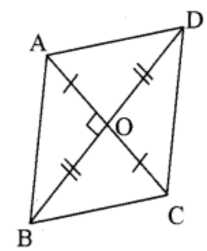
∴ $(BC)^2 = 100 - 64$

∴ $(BC)^2 = 36$

∴ BC = **6 मीटर** ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

∴ **भिंतीचा पाया व शिडीचे खालचे टोक यांमधील अंतर 6 मीटर आहे.**

4. सिद्ध करा की, समभुज चौकोनाच्या बाजूंच्या वर्गांची बेरीज त्याच्या कर्णांच्या वर्गांच्या बेरजेएवढी असते. **[4 गुण]**



पक्ष: □ABCD हा समभुज चौकोन आहे, कर्ण AC आणि कर्ण BD एकमेकांना O बिंदूत छेदतात.

साध्य: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$

सिद्धता:

□ABCD हा समभुज चौकोन आहे. ---- [पक्ष]

ΔAOB मध्ये,

$\angle AOB = 90°$ ---- [समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.]

∴ $AB^2 = OA^2 + OB^2$ ---- (i) [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

$OA = \frac{1}{2}AC$ ---- (ii)

$OB = \frac{1}{2}BD$ ---- (iii)

(ii), (iii) [समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.]

∴ $AB^2 = \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BD\right)^2$ ---- [विधान (i), (ii) आणि (iii) वरून]

∴ $AB^2 = \frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}BD^2$

∴ $AB^2 = \frac{AC^2 + BD^2}{4}$

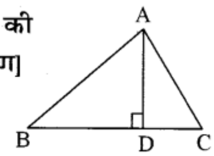
∴ $4AB^2 = AC^2 + BD^2$ ---- [4 ने गुणून]

∴ $AB^2 + AB^2 + AB^2 + AB^2 = AC^2 + BD^2$ ---- (iv)

परंतु, AB = BC = CD = AD ---- (v) [समभुज चौकोनांच्या बाजू]

∴ $\mathbf{AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2}$ ---- [(iv) व (v) वरून]

5. **ΔABC च्या पाया BC वर काढलेला शिरोलंब AD, पाया BC ला D मध्ये अशा रीतीने छेदतो, की BD = 3CD. सिद्ध करा, की: $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$.** **[4 गुण]**



पक्ष: BD = 3CD

सिद्ध करा की: $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$

सिद्धता:

ΔADB मध्ये,

$m\angle ADB = 90°$ ---- [पक्ष]

$\therefore$ $AB^2 = AD^2 + BD^2$ ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore$ $AB^2 = AD^2 + (3\ CD)^2$ ---- [पक्ष]

$\therefore$ $AB^2 = AD^2 + 9\ CD^2$ ---- (i)

ΔADC मध्ये,

$m\angle ADC = 90°$ ---- [पक्ष]

$\therefore$ $AC^2 = AD^2 + CD^2$ ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore$ $AD^2 = AC^2 - CD^2$ ---- (ii)

$\therefore$ $AB^2 = AC^2 - CD^2 + 9\ CD^2$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

$\therefore$ $AB^2 = AC^2 + 8\ CD^2$ ---- (iii)

आता, BC = BD + CD ---- [B – D – C]

BC = 3 CD + CD ---- [पक्ष]

$\therefore$ BC = 4 CD

$\therefore$ $CD = \frac{1}{4}BC$ ---- (iv)

$\therefore$ $AB^2 = AC^2 + 8\left(\frac{1}{4}BC\right)^2$ ---- [विधान (iii) व (iv) वरून]

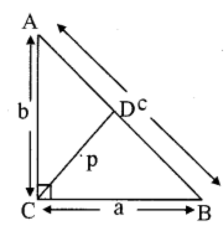
$\therefore$ $AB^2 = AC^2 + 8 \times \frac{BC^2}{16}$

$\therefore$ $AB^2 = AC^2 + \frac{1}{2}BC^2$

$\therefore$ $\mathbf{2AB^2 = 2AC^2 + BC^2}$ ---- [दोन्ही बाजूंना 2 ने गुणून]

6. **ΔABC मध्ये, $\angle C = 90°$. समजा, BC = a, CA = b, AB = c आणि समजा C बिंदूमधून बाजू AB वर काढलेल्या शिरोलंबाची लांबी p असेल, तर दाखवा की**

i. cp = ab **ii. $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$** **[मार्च 14] [5 गुण]**



सिद्धता :

ΔACB मध्ये,

$\angle ACB = 90°$ ---- [पक्ष]

रेख CD $\perp$ कर्ण AB ---- [पक्ष]

$\therefore$ $\Delta ACB \sim \Delta ADC \sim \Delta CDB$ ---- (i) [काटकोन त्रिकोणातील समरूपतेचा गुणधर्म]

i. $\Delta ACB \sim \Delta ADC$ ---- [विधान (i) वरून]

$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{AC}$ ---- [समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू]

$\therefore$ $\frac{b}{AD} = \frac{a}{p} = \frac{c}{b}$ ---- [दिलेल्या किमती ठेवून]

$\therefore$ $\frac{a}{p} = \frac{c}{b}$

$\therefore$ **cp = ab** ---- (ii)

ii. $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

∴ $c^2 = b^2 + a^2$ ---- [दिलेल्या किमती ठेवून]

∴ $\frac{c^2}{a^2b^2} = \frac{b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2}{a^2b^2}$ ---- [a^2b^2 ने भागून]

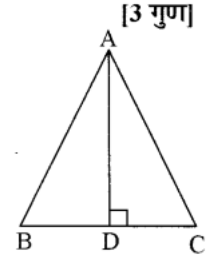
∴ $\frac{c^2}{(a.b)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ ---- (iii)

∴ $\frac{c^2}{(c.p)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ ---- [विधान (ii) व (iii) वरून]

∴ $\frac{c^2}{c^2p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

∴ $\mathbf{\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$

7. सिद्ध करा, की समभुज त्रिकोणाच्या कोणत्याही बाजूच्या वर्गाची तिप्पट ही त्या त्रिकोणाच्या उंचीच्या वर्गाच्या चौपटीएवढी असते. **[3 गुण]**



पक्ष: समभुज त्रिकोण ABC मध्ये, रेख AD ⊥ बाजू BC ---- [B–D–C]

साध्य: $3(AB)^2 = 4(AD)^2$

सिद्धता:

ΔADB मध्ये,

$\angle ADB = 90°$

∴ $AB^2 = AD^2 + BD^2$ ---- (i) [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

ΔABC समभुज त्रिकोण आहे,

∴ AB = BC = AC ---- (ii) [समभुज त्रिकोणाच्या बाजू]

AB = AC ---- [विधान (ii) वरून]

∴ बिंदू A हा B व C पासून समदूर आहे.

∴ रेख AD बाजू BC चा लंबदुभाजक आहे. ---- [लंबदुभाजकाचे प्रमेय]

∴ $BD = \frac{1}{2}BC$ ---- (iii)

∴ $AB^2 = AD^2 + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2$ ---- [(iii) ची किंमत समी. (i) मध्ये ठेवून]

∴ $AB^2 = AD^2 + \frac{BC^2}{4}$

∴ $4AB^2 = 4AD^2 + BC^2$ ---- [दोन्ही बाजूंना 4 ने गुणून]

∴ $4AB^2 = 4AD^2 + AB^2$ ---- [विधान (ii) वरून]

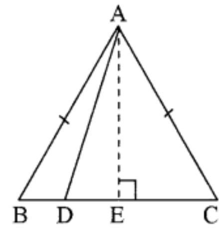
∴ $4AB^2 - AB^2 = 4AD^2$

∴ $\mathbf{3AB^2 = 4AD^2}$

8. ΔABC मध्ये, AB = AC आणि D हा बाजू BC वरील कोणताही बिंदू आहे. तर दाखवा की: $AB^2 - AD^2 = BD \times CD$

[4 गुण]

रचना: रेख AE ⊥ रेख BC काढा. ---- [B–E–C]



सिद्धता :

ΔAEB मध्ये, ∠AEB = 90° ---- [रचना]

∴ $AB^2 = AE^2 + BE^2$ ---- (i) [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

ΔAED मध्ये,

∠AED = 90° ---- [रचना]

∴ $AD^2 = AE^2 + DE^2$ ---- (ii) [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

∴ $AB^2 - AD^2 = AE^2 + BE^2 - AE^2 - DE^2$ ---- [विधान (i) मधून (ii) वजा करून]

∴ $AB^2 - AD^2 = BE^2 - DE^2$

∴ $AB^2 - AD^2 = (BE - DE)(BE + DE)$

∴ $AB^2 - AD^2 = BD(BE + DE)$ ---- (iii) [B–D–E]

आता, AB = AC ---- [पक्ष]

∴ बिंदू A हा बिंदू B व C पासून समान अंतरावर आहे.

∴ रेख AE बाजू BC चा लंबदुभाजक आहे. ---- [लंबदुभाजकाचे प्रमेय]

∴ BE = CE ---- (iv)

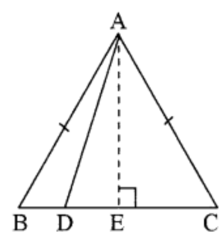
∴ $AB^2 - AD^2 = BD\ (CE + DE)$ ---- [(iv) च्या किमती (iii) मध्ये ठेवून]

∴ $\mathbf{AB^2 - AD^2 = BD \times CD}$ ---- [D–E–C]

8. ΔABC मध्ये, AB = AC आणि D हा बाजू BC वरील कोणताही बिंदू आहे. तर दाखवा की: $AB^2 - AD^2 = BD \times CD$

[4 गुण]

रचना: रेख AE ⊥ रेख BC काढा. ---- [B–E–C]



सिद्धता :

ΔAEB मध्ये, ∠AEB = 90° ---- [रचना]

∴ $AB^2 = AE^2 + BE^2$ ---- (i) [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

ΔAED मध्ये,

∠AED = 90° ---- [रचना]

∴ $AD^2 = AE^2 + DE^2$ ---- (ii) [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

∴ $AB^2 - AD^2 = AE^2 + BE^2 - AE^2 - DE^2$ ---- [विधान (i) मधून (ii) वजा करून]

∴ $AB^2 - AD^2 = BE^2 - DE^2$

∴ $AB^2 - AD^2 = (BE - DE)(BE + DE)$

∴ $AB^2 - AD^2 = BD(BE + DE)$ ---- (iii) [B–D–E]

आता, AB = AC ---- [पक्ष]

∴ बिंदू A हा बिंदू B व C पासून समान अंतरावर आहे.

∴ रेख AE बाजू BC चा लंबदुभाजक आहे. ---- [लंबदुभाजकाचे प्रमेय]

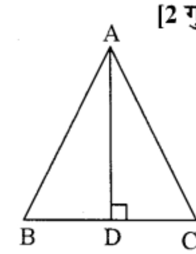
∴ BE = CE ---- (iv)

∴ $AB^2 - AD^2 = BD\ (CE + DE)$ ---- [(iv) च्या किमती (iii) मध्ये ठेवून]

∴ $\mathbf{AB^2 - AD^2 = BD \times CD}$ ---- [D–E–C]

Ex. 1.6

1. समभुज त्रिकोणाची प्रत्येक बाजू 'a' एकक लांबीची आहे, तर त्या त्रिकोणाची उंची काढा. **[2 गुण]**



उकल:

समजा, ΔABC हा समभुज त्रिकोण आहे. त्याची प्रत्येक बाजू 'a' एकक लांबीची आहे.

समजा, रेख $AD \perp$ बाजू BC, B–D–C

$\therefore$ $AB = BC = AC = a$ एकक ---- (i)

$\angle B = 60°$ ---- (ii) [समभुज त्रिकोणाचा कोन]

ΔADB मध्ये,

$\angle ADB = 90°$ ---- [रचना]

$\angle ABD = 60°$ ---- [विधान (ii) वरून]

$\angle BAD = 30°$ ---- [उर्वरित कोनाचे माप]

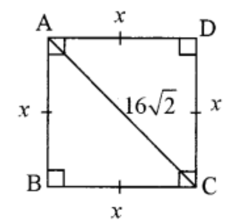
$\therefore$ ΔADB हा $30° - 60° - 90°$ त्रिकोण आहे.

$\therefore$ $AD = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$ ---- (iii) [60° च्या कोनासमोरील बाजू]

$\therefore$ $AD = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ ---- [विधान (i) व (iii) वरून]

$\therefore$ **समभुज त्रिकोणाची उंची $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a एकक आहे.**

2. $16\sqrt{2}$ सेमी कर्ण असलेल्या चौरसाची बाजू काढा. **[मार्च 12] [2 गुण]**



उकल:

समजा, □ABCD हा चौरस असून त्याच्या कर्णाची लांबी $16\sqrt{2}$ सेमी आहे.

समजा, चौरसाची प्रत्येक बाजू x सेमी आहे.

ΔABC मध्ये,

$\angle ABC = 90°$ ---- [चौरसाचा प्रत्येक कोन]

$\therefore$ $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore$ $x^2 + x^2 = (16\sqrt{2})^2$

$\therefore$ $2x^2 = 256 \times 2$

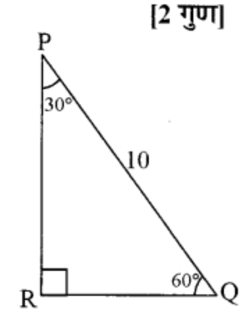
$\therefore$ $x^2 = \frac{256 \times 2}{2}$

$\therefore$ $x^2 = 256$

$\therefore$ $x =$ **16 सेमी** ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

$\therefore$ **दिलेल्या चौरसाची बाजू 16 सेमी आहे.**

3. ΔPQR मध्ये, $\angle P = 30°$, $\angle Q = 60°$, $\angle R = 90°$ जर $PQ = 10$, तर PR आणि QR काढा. [2 गुण]



उकल:

ΔPQR मध्ये,

$\angle P = 30°, \angle Q = 60°, \angle R = 90$ ---- [दिलेले]

$\therefore$ ΔPQR हा $30°-60°-90°$ त्रिकोण आहे.

$PR = \frac{\sqrt{3}}{2} PQ$ ---- [60° कोनासमोरील बाजू]

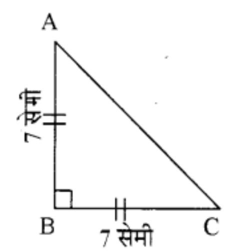
$\therefore$ $PR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = 5\sqrt{3}$ ---- [$\because PQ = 10$]

तसेच, $RQ = \frac{1}{2} PQ$ ---- [30° कोनासमोरील बाजू]

$\therefore$ $RQ = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ ---- [$\because$ PQ = 10]

$\therefore$ **$PR = 5\sqrt{3}$ आणि $QR = 5$**

4. समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाच्या एकरूप बाजूंची लांबी 7 सेमी आहे. त्याची परिमिती काढा. [2 गुण]



उकल:

समजा, ΔABC हा समद्विभुज काटकोन त्रिकोण असून $AB = BC = 7$ सेमी, $\angle B = 90°$

ΔABC मध्ये,

$\angle ABC = 90°$ ---- [दिलेले]

$\therefore$ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore$ $AC^2 = 7^2 + 7^2$

$\therefore$ $AC^2 = 49 + 49 = 98$

$\therefore$ $AC = \sqrt{49 \times 2}$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

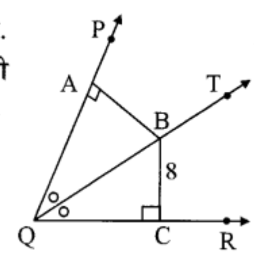
$\therefore$ $AC = 7\sqrt{2}$ सेमी

ΔABC ची परिमिती $= AB + BC + AC$

$= 7 + 7 + 7\sqrt{2} = (14 + 7\sqrt{2})$ सेमी $= 7(2 + \sqrt{2})$ सेमी

$\therefore$ **दिलेल्या समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाची परिमिती $7(2 + \sqrt{2})$ सेमी आहे.**

5. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, $\angle PQR = 60°$ आणि किरण QT हा $\angle PQR$ ला दुभागतो. रेख $BA \perp$ किरण QP आणि रेख $BC \perp$ किरण QR जर $BC = 8$, तर □ABCQ ची परिमिती काढा. [4 गुण]



उकल:

किरण QT हा $\angle PQR$ चा दुभाजक आहे. ---- (i) [दिलेले]

$\therefore$ बिंदू B हा $\angle PQR$ च्या दुभाजकावर आहे.

$\therefore$ $BA = BC$ ---- [कोनदुभाजकाच्या प्रमेयानुसार]

परंतु, $BC = 8$ ---- [दिलेले]

$\therefore$ $BA = BC = 8$ ---- (ii)

$m\angle BQC = \frac{1}{2} m\angle PQR$ ---- [विधान (i) वरून]

$\therefore$ $m\angle BQC = \frac{1}{2} \times 60°$

$\therefore$ $m\angle BQC = 30°$ ---- (iii)

ΔBCQ मध्ये,

$\angle BCQ = 90°$ ---- [दिलेले]

$\angle BQC = 30^\circ$ ---- [विधान (iii) वरून]

$\therefore$ $\angle QBC = 60^\circ$ ---- [त्रिकोणाचा उर्वरित कोन]

$\therefore$ ΔBCQ हा $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ त्रिकोण आहे.

$BC = \frac{1}{2} BQ$ ---- [30° समोरील बाजू]

$\therefore$ $8 = \frac{1}{2} BQ$ ---- [विधान (ii) वरून]

$\therefore$ $BQ = 16$

$QC = \frac{\sqrt{3}}{2} BQ$ ---- [60° समोरील बाजू]

$\therefore$ $QC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 16$

$\therefore$ $QC = 8\sqrt{3}$

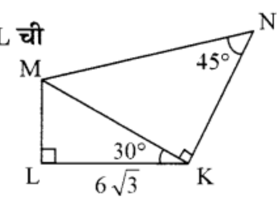
तसेच, $QA = 8\sqrt{3}$

□ABCQ ची परिमिती $= AB + BC + QC + QA$

$= 8 + 8 + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = (16 + 16\sqrt{3}) = 16(1 + \sqrt{3})$ एकक

$\therefore$ **□ABCQ ची परिमिती $16(1 + \sqrt{3})$ एकक आहे.**

6. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, जर $LK = 6\sqrt{3}$, तर MK, ML, KN, MN आणि □MNKL ची परिमिती काढा. **[4 गुण]**



उकल:

ΔMLK मध्ये,

$\angle MLK = 90^\circ$

$\angle MKL = 30^\circ$

$\therefore$ $\angle LMK = 60^\circ$ ---- [त्रिकोणाचा उर्वरित कोन]

$\therefore$ ΔMLK हा $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ त्रिकोण आहे.

$LK = \frac{\sqrt{3}}{2} MK$ ---- [60° कोनासमोरील बाजू]

$\therefore$ $6\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} MK$ ---- [$\because LK = 6\sqrt{3}$]

$\therefore$ $\frac{6\sqrt{3} \times 2}{\sqrt{3}} = MK$

$\therefore$ $MK = 12$ एकक

$ML = \frac{1}{2} MK$ ---- [30° कोनासमोरील बाजू]

$\therefore$ $ML = \frac{1}{2} \times 12$

$\therefore$ $ML = 6$ एकक

ΔMNK मध्ये,

$\angle MKN = 90^\circ$ ---- [दिलेले]

$\angle MNK = 45^\circ$ ---- [दिलेले]

$\therefore$ $\angle KMN = 45^\circ$ ---- [त्रिकोणाचा उर्वरित कोन]

$\therefore$ ΔMNK हा $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ त्रिकोण आहे.

$\therefore$ MK = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ MN ---- [45° कोनासमोरील बाजू]

$\therefore$ 12 = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ MN

$\therefore$ MN = $12\sqrt{2}$ एकक

KN = $\frac{1}{\sqrt{2}} \times$ MN ---- [45° कोनासमोरील बाजू]

$\therefore$ KN = $\frac{1}{\sqrt{2}} \times 12\sqrt{2}$

$\therefore$ KN = 12 एकक

□MNKL ची परिमिती = LM + LK + KN + MN = $6 + 6\sqrt{3} + 12 + 12\sqrt{2} = 18 + 6\sqrt{3} + 12\sqrt{2}$

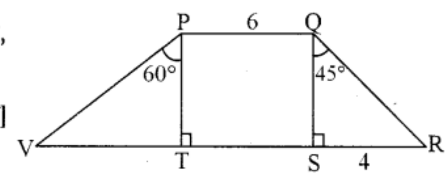
$\therefore$ **□ MNKL ची परिमिती = $6(3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2})$ एकक.**

$\therefore$ **MK = 12 एकक, ML = 6 एकक, KN = 12 एकक, MN = $12\sqrt{2}$ एकक,**

□ MNKL ची परिमिती $6(3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2})$ एकक आहे.

7. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, □ PQRV हा समलंब चौकोन आहे, ज्यामध्ये रेख PQ || रेख VR. SR = 4 आणि PQ = 6 तर VR काढा.

[मार्च 13] [4 गुण]



उकल:

ΔQSR मध्ये,

∠QSR = 90° ---- [दिलेले]

∠SQR = 45° ---- [दिलेले]

$\therefore$ ∠SRQ = 45° ---- [त्रिकोणाचा उर्वरित कोन]

$\therefore$ ΔQSR हा 45° – 45° – 90° त्रिकोण आहे.

$\therefore$ QS = SR

$\therefore$ QS = SR = 4 ---- (i) [दिलेल्या किमती ठेवून आणि विधान (i) वरून]

□PQST मध्ये,

रेख PQ || रेख TS ---- [∵ V–T–S, T–S–R]

∠T ≅ ∠S ---- [प्रत्येक कोनाचे माप 90°]

$\therefore$ □PQST हा आयत आहे.

$\therefore$ PT = QS = 4 ---- (ii) [विधान (i) वरून]

आणि PQ = TS = 6 ---- (iii) [∵ PQ = 6]

ΔPTV मध्ये,

∠PTV = 90° ---- [दिलेले]

∠VPT = 60° ---- [दिलेले]

$\therefore$ $\angle PVT = 30^\circ$ ---- [त्रिकोणाचा उर्वरित कोन]

$\therefore$ ΔPTV हा $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ त्रिकोण आहे.

$\therefore$ $PT = \frac{1}{2}PV$ ---- [30° कोनाच्या समोरील बाजू]

$\therefore$ $4 = \frac{1}{2}PV$ ---- [विधान (ii) वरून]

$\therefore$ $PV = 8$ ---- (iv)

$VT = \frac{\sqrt{3}}{2} PV$ ---- [60° कोनासमोरील बाजू]

$\therefore$ $VT = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8$ ---- [विधान (iv) वरून]

$\therefore$ $VT = 4\sqrt{3}$ ---- (v)

$VR = VT + TS + SR$ ---- [V–T–S –R]

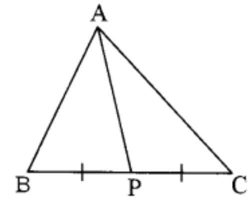
$\therefore$ $VR = 4\sqrt{3} + 6 + 4$ ---- [विधान (v), (iii) व (i) वरून]

$\therefore$ $\mathbf{VR = (10 + 4\sqrt{3})}$

Ex. 1.7

1. ΔABC मध्ये, AP ही मध्यगा, जर AP = 7, $AB^2 + AC^2 = 260$, तर BC काढा. **[ऑक्टोबर 14] [2 गुण]**

उकल:



ΔABC मध्ये,

रेख AP ही मध्यगा आहे. ---- [दिलेले]

$AB^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2PC^2$ ---- [अपोलोनिअसच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore$ $260 = 2(7)^2 + 2PC^2$ ---- [दिलेल्या किमती ठेवून]

$\therefore$ $260 = 2 \times 49 + 2PC^2$

$\therefore$ $260 = 98 + 2PC^2$

$\therefore$ $260 - 98 = 2PC^2$

$\therefore$ $162 = 2PC^2$

$\therefore$ $\frac{162}{2} = PC^2$

$\therefore$ $81 = PC^2$

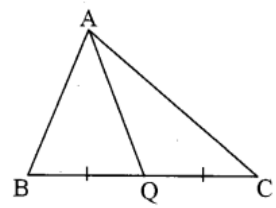
$\therefore$ PC = 9 एकक ---- (i) [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

BC = 2 PC ---- [P हा रेख BC चा मध्यबिंदू आहे.]

$\therefore$ $BC = 2 \times 9$ ---- [विधान (i) वरून]

$\therefore$ **BC = 18 एकक**

2. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, जर $AB^2 + AC^2 = 122$, BC = 10, तर बाजू BC वर काढलेल्या मध्यगेची लांबी काढा. **[जुलै 15; ऑक्टोबर 12] [3 गुण]**



उकल:

रेख AQ ही बाजू BC वर काढलेली मध्यगा आहे.

$\therefore$ $BQ = QC = \frac{1}{2} BC$ ---- [Q हा बाजू BC चा मध्यबिंदू आहे.]

$= \frac{1}{2} \times 10$ ---- [दिलेल्या किमती ठेवून]

= 5 एकक

ΔABC मध्ये,

रेख AQ मध्यगा आहे.

$\therefore$ $AB^2 + AC^2 = 2AQ^2 + 2BQ^2$ ---- [अपोलोनिअसच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore$ $122 = 2AQ^2 + 2(5)^2$ ---- [दिलेल्या किमती ठेवून]

$\therefore$ $122 = 2AQ^2 + 50$

$\therefore$ $122 - 50 = 2AQ^2$

$\therefore$ $72 = 2AQ^2$

$\therefore$ $AQ^2 = \frac{72}{2}$

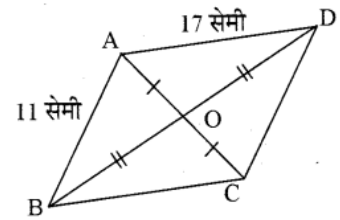
$\therefore$ $AQ^2 = 36$

$\therefore$ AQ = 6 एकक ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

$\therefore$ **बाजू BC वर काढलेल्या मध्यगेची लांबी 6 एकक आहे.**

3. समांतरभुज चौकोनाच्या लगतच्या बाजू 11 सेमी आणि 17 सेमी आहेत. जर त्याच्या एका कर्णाची लांबी 26 सेमी असेल, तर दुसऱ्या कर्णाची लांबी काढा.

[मार्च 16] [3 गुण]



उकल:

समजा, □ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

कर्ण AC आणि BD एकमेकांना O बिंदूत छेदतात.

AB = 11 सेमी, AD = 17 सेमी, BD = 26 सेमी

$\therefore$ $OB = \frac{1}{2} BD$ ---- [समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांस दुभागतात.]

$\therefore$ $OB = \frac{1}{2} \times 26$ ---- [दिलेल्या किमती ठेवून]

$\therefore$ OB = 13 सेमी ---- (i)

ΔABD मध्ये,

O हा कर्ण BD चा मध्यबिंदू आहे. ---- [समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांस दुभागतात.]

$\therefore$ ΔABD ची रेख AO ही मध्यगा आहे.

$\therefore$ $AB^2 + AD^2 = 2OA^2 + 2OB^2$ ---- [अपोलोनिअसच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore$ $(11)^2 + (17)^2 = 2OA^2 + 2(13)^2$ ---- [दिलेल्या किमती ठेवून आणि विधान (i) वरून]

$\therefore$ $121 + 289 = 2OA^2 + 2 \times 169$

$\therefore$ $410 = 2(OA)^2 + 338$

$\therefore$ $410 - 338 = 2OA^2$

$\therefore$ $72 = 2OA^2$

$\therefore$ $\frac{72}{2} = OA^2$

$\therefore$ $OA^2 = 36$

$\therefore$ OA = 6 सेमी ---- (ii) [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

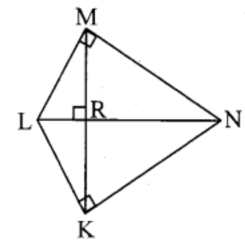
$OA = \frac{1}{2} AC$ ---- [समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांस दुभागतात.]

$\therefore$ $6 = \frac{1}{2} AC$

$\therefore$ AC = 12 सेमी ---- [विधान (ii) वरून]

$\therefore$ **दुसऱ्या कर्णाची लांबी 12 सेमी आहे.**

4. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, $\angle LMN = 90°$ आणि $\angle LKN = 90°$, रेख $MK \perp$ रेख LN सिद्ध करा, की R हा रेख MK चा मध्यबिंदू आहे. [3 गुण]



सिद्धता:

ΔLMN मध्ये,

$m\angle LMN = 90°$ ---- [पक्ष]

रेख $MR \perp$ कर्ण LN ---- [पक्ष]

$\therefore$ $MR^2 = LR \times RN$ ---- (i) [भूमितीमध्याच्या गुणधर्मानुसार]

ΔLKN मध्ये,

$\angle LKN = 90°$ ---- [पक्ष]

रेख $KR \perp$ कर्ण LN ---- [पक्ष]

$\therefore$ $KR^2 = LR \times RN$ ---- (ii) [भूमितीमध्याच्या गुणधर्मानुसार]

$\therefore$ $MR^2 = KR^2$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

$\therefore$ $MR = KR$

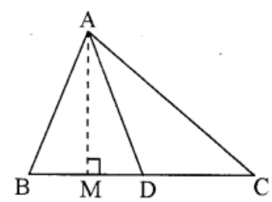
$\therefore$ **R हा रेख MK चा मध्यबिंदू आहे.** ---- [M – R – K]

---

5. रेख AD ही ΔABC ची मध्यगा आहे आणि $AM \perp BC$ तर सिद्ध करा, की

i. $AC^2 = AD^2 + BC \times DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

ii. $AB^2 = AD^2 - BC \times DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$ [4 गुण]



सिद्धता:

i. ΔADC मध्ये,

$\angle ADC > 90°$ ---- [पक्ष]

$\therefore$ $AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2\,CD \cdot DM$ ---- (i) [पायथागोरसच्या प्रमेयाचे उपयोजन]

$CD = \frac{1}{2}BC$ ---- (ii) [D हा रेख BC चा मध्यबिंदू आहे.]

$\therefore$ $AC^2 = AD^2 + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}BC\right) \cdot DM$ ---- [समी. (ii) समी. (i) मध्ये ठेवून]

$\therefore$ $AC^2 = AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + BC \cdot DM$

$\therefore$ $\mathbf{AC^2 = AD^2 + BC \times DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2}$

ii. ΔABD या लघुकोन त्रिकोणामध्ये,

रेख $AM \perp$ बाजू BD

$\therefore$ $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2\,BD \cdot DM$ ---- (i) [पायथागोरसच्या प्रमेयाचे उपयोजन]

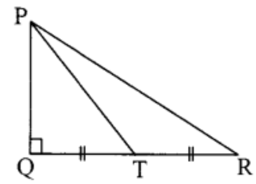
$BD = \frac{1}{2}BC$ ---- (ii) [D हा रेख BC चा मध्यबिंदू आहे.]

$\therefore$ $AB^2 = AD^2 + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}BC\right) \cdot DM$ ---- [समी. (ii) समी. (i) मध्ये ठेवून]

$\therefore$ $AB^2 = AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 - BC \cdot DM$

$\therefore$ $\mathbf{AB^2 = AD^2 - BC \times DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2}$

6. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, $\angle PQR = 90°$. बिंदू T हा बाजू QR चा मध्यबिंदू आहे. सिद्ध करा, की $PR^2 = 4PT^2 - 3PQ^2$. **[4 गुण]**



सिद्धता:

ΔPQR मध्ये,

रेख PT ही मध्यगा आहे. ---- [$\because$ T हा बाजू QR चा मध्यबिंदू आहे.]

$\therefore$ $PQ^2 + PR^2 = 2PT^2 + 2QT^2$ ---- [अपोलोनिअसच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore$ $PR^2 = 2PT^2 + 2QT^2 - PQ^2$ ---- (i)

ΔPQT मध्ये,

$\angle PQT = 90°$ ---- [पक्ष]

$\therefore$ $PT^2 = PQ^2 + QT^2$ ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore$ $QT^2 = PT^2 - PQ^2$ ---- (ii)

$\therefore$ $PR^2 = 2PT^2 + 2[PT^2 - PQ^2] - PQ^2$ ---- [समी. (ii) समी. (i) मध्ये ठेवून]

$\therefore$ $PR^2 = 2PT^2 + 2PT^2 - 2PQ^2 - PQ^2$

$\therefore$ $\mathbf{PR^2 = 4PT^2 - 3PQ^2}$