પ્રકરણ **11**

ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ

❖ ***The moving power of mathematical invention is not reasoning but imagination. – A.DEMORGAN*** ❖

11.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ XI માં આપણે દ્વિપરિમાણીય વિશ્લેષણાત્મક ભૂમિતિ અને ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિનો ઔપચારિક પરિચય કર્યો. તે અભ્યાસ માત્ર કાર્તેઝિય પદ્ધતિ પૂરતો જ મર્યાદિત હતો. આ પુસ્તકના આ અગાઉના પ્રકરણમાં આપણે સદિશની કેટલીક મૂળભૂત સંકલ્પનાઓનો અભ્યાસ કર્યો. હવે આપણે સદિશ બીજગણિતનો ઉપયોગ ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિમાં કરીશું. આ ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિના અભિગમનો હેતુ એ છે કે, અભ્યાસ સરળ અને સુરુચિવાળો બને*.

Leonhard Euler
(C.E. 1707 - C.E. 1783)

આ પ્રકરણમાં આપણે, બે બિંદુઓને જોડતી રેખાની દિક્‌કોસાઈન અને તેના દિક્‌ગુણોત્તર તથા જુદી-જુદી શરતોને અધીન રેખા તથા સમતલનાં સમીકરણોની ચર્ચા કરીશું. આપણે બે રેખા, બે સમતલ, રેખા અને સમતલ વચ્ચેના ખૂણા, બે વિષમતલીય રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર અને સમતલથી બિંદુના અંતરનો અભ્યાસ પણ કરીશું. મહદંશે આપણે ઉપરનાં પરિણામો સદિશ સ્વરૂપમાં મેળવીશું. તેમ છતાં, યોગ્ય સમયે ભૌમિતિક અને વિશ્લેષણાત્મક પરિસ્થિતિનું ચિત્ર વધુ સ્પષ્ટ રજૂ કરવા માટે આપણે આ પરિણામોને કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાં પણ વ્યક્ત કરીશું.

11.2 રેખાની દિક્‌કોસાઈન અને દિક્‌ગુણોત્તર

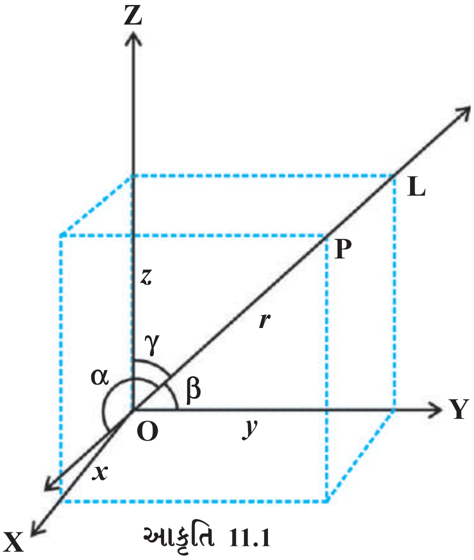
પ્રકરણ 10 માંથી, યાદ કરીએ કે,

જો દિશાયુક્ત રેખા L ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી હોય અને x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ સાથે અનુક્રમે α, β અને γ ખૂણા બનાવે, તો α, β અને γ ને L ના દિક્‌ખૂણાઓ કહીશું તથા આ ખૂણાઓની કોસાઈન, અર્થાત્ $\cos \alpha$, $\cos \beta$ અને $\cos \gamma$ ને દિશાયુક્ત રેખા L ની દિક્‌કોસાઈન કહીશું.

જો આપણે Lની દિશાને ઉલટાવીએ, તો દિક્‌ખૂણાઓનાં સ્થાન તેમના પૂરકકોણ, એટલે કે $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ અને $\pi - \gamma$ લેશે. આમ, દિક્‌કોસાઈનનાં ચિહ્ન તેમનાં મૂળ ચિહ્નથી વિરુદ્ધ થશે.

---

* *For various activities in three dimensional geometry, one may refer to the Book* ***"A Hand Book for designing Mathematics Laboratory in Schools"***, NCERT, 2005



આકૃતિ 11.1

નોંધીએ કે અવકાશમાં આપેલી રેખાને બે વિરોધી દિશા હોય અને તેથી તેની દિક્કોસાઈનના બે સમૂહ હોય છે. અવકાશમાં આપેલી રેખાની દિક્કોસાઈનનો સમૂહ અનન્ય હોય તે માટે, આપણે આપેલી રેખાને દિશાયુક્ત રેખા તરીકે જ લઈશું. આ અનન્ય દિક્કોસાઈન l, m અને n વડે દર્શાવાય છે.

નોંધ : જો અવકાશમાં આપેલી રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી ન હોય, તો તેની દિક્કોસાઈન શોધવા માટે, આપણે આપેલી રેખાને સમાંતર અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા દોરીશું. બે સમાંતર રેખાની દિક્કોસાઈનનો સમૂહ સમાન હોવાથી હવે ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી એક દિશાયુક્ત રેખા લઈ તેની દિક્કોસાઈન શોધીશું.

રેખાની દિક્કોસાઈનના સમપ્રમાણમાં હોય તેવી કોઈ પણ ત્રણ સંખ્યાઓને રેખાના દિક્ગુણોત્તર કહે છે. જો l, m, n એ રેખાની દિક્કોસાઈન અને a, b, c તેના દિક્ગુણોત્તર હોય, તો કોઈક શૂન્યેતર $\lambda \in R$ માટે, $a = \lambda l$, $b = \lambda m$ અને $c = \lambda n$ થાય.

> ☞ **નોંધ** કેટલાક લેખકો દિક્ગુણોત્તરને દિક્સંખ્યાઓ પણ કહે છે.

જો રેખાના દિક્ગુણોત્તર a, b, c હોય અને રેખાની દિક્કોસાઈન l, m અને n હોય, તો

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = k \text{ (ધારો), } k \text{ શૂન્યેતર અચળ છે.}$$

માટે $\quad l = ak,\ m = bk,\ n = ck \quad \dots (1)$

પરંતુ $\quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$

માટે $\quad k^2 (a^2 + b^2 + c^2) = 1$

અથવા $$k = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

તેથી (1) પરથી, રેખાની દિક્કોસાઈન

$$l = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ m = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ n = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \text{ થશે.}$$

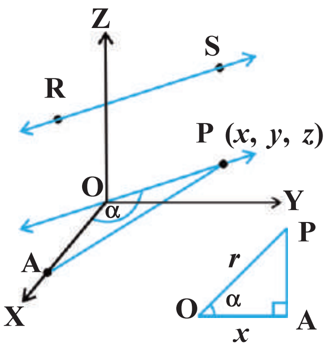
l, m અને n નું ચિહ્ન ધન કે ઋણ લેવું, તે જરૂરિયાત પ્રમાણેના k ના ચિહ્ન પર આધારિત છે.

જો કોઈ રેખાના દિક્ગુણોત્તર a, b, c હોય, તો $ka, kb, kc;\ k \neq 0$ એ પણ દિક્ગુણોત્તરનો સમૂહ છે. આથી, રેખાના દિક્ગુણોત્તરના કોઈ પણ બે સમૂહ પણ સમપ્રમાણમાં હોય છે. વળી, કોઈ પણ રેખાના દિક્ગુણોત્તરના સમૂહની સંખ્યા અનંત છે.

હવે, આપણે આ વિભાગમાં જે પરિણામ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ નો ઉપયોગ કર્યો તેની સાબિતી નીચેના વિભાગમાં જોઈએ.

11.2.1 રેખાની દિક્કોસાઈન વચ્ચેનો સંબંધ

l, m, n દિક્કોસાઈનવાળી એક રેખા RS લો. આપેલ રેખાને સમાંતર ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી એક રેખા દોરો (જો તે ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી ન હોય, તો) અને તેના પર એક બિંદુ $P(x, y, z)$ લો. બિંદુ P માંથી x-અક્ષ પર લંબ PA દોરો. (આકૃતિ 11.2).



આકૃતિ 11.2

$OP = r$ લેતાં, $\cos\alpha = \dfrac{OA}{OP} = \dfrac{x}{r}$. આથી $x = lr$

આ જ પ્રમાણે, $y = mr$ અને $z = nr$

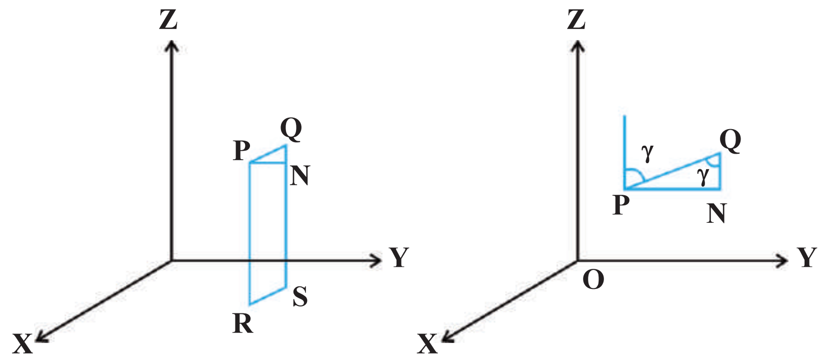
આમ $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (l^2 + m^2 + n^2)$

પરંતુ $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

આથી $\mathbf{l^2 + m^2 + n^2 = 1}$

11.2.2 બે બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાની દિક્કોસાઈન

આપેલાં બે બિંદુમાંથી એક અને માત્ર એક જ રેખા પસાર થતી હોવાથી, આપણે આપેલાં બિંદુઓ $P(x_1, y_1, z_1)$ અને $Q(x_2, y_2, z_2)$માંથી પસાર થતી રેખાની દિક્કોસાઈન નીચે પ્રમાણે મેળવીશું (આકૃતિ 11.3 (a)).



(a) (b)

આકૃતિ 11.3

ધારો કે રેખા PQ ની દિક્કોસાઈન l, m, n છે અને તે x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ સાથે અનુક્રમે α, β અને γ ખૂણા બનાવે છે.

P અને Q માંથી સમતલ-XY ને અનુક્રમે R અને S માં છેદતા લંબ દોરો. P માંથી QS પર તેને N માં છેદતો લંબ દોરો. હવે, કાટકોણ ત્રિકોણ PNQ માં, $\angle PQN = \gamma$ થશે (આકૃતિ 11.3 (b)).

માટે $\cos\gamma = \dfrac{NQ}{PQ} = \dfrac{z_2 - z_1}{PQ}$

આ જ પ્રમાણે $\cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{PQ}$ અને $\cos\beta = \dfrac{y_2 - y_1}{PQ}$

આથી, બિંદુઓ P (x_1, y_1, z_1) અને Q (x_2, y_2, z_2) ને જોડતા રેખાખંડની દિક્કોસાઇન

$$\frac{x_2-x_1}{PQ}, \frac{y_2-y_1}{PQ}, \frac{z_2-z_1}{PQ}$$ **થશે.**

અહીં, $PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

☞ **નોંધ :** P (x_1, y_1, z_1) અને Q (x_2, y_2, z_2) ને જોડતા રેખાખંડના દિક્ગુણોત્તર $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ અથવા $x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2$ લઈ શકાય.

ઉદાહરણ 1 : જો રેખા x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ સાથે અનુક્રમે 90°, 60° અને 30° ના ખૂણા બનાવે, તો તેની દિક્કોસાઇન શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે રેખાની દિક્કોસાઇન l, m, n છે. આથી, $l = \cos 90° = 0$, $m = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $n = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

નોંધ : જુઓ કે $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. ત્રીજો ખૂણો $\gamma = 45°$ લીધો હોય તો ચાલે ?

ઉદાહરણ 2 : જો રેખાના દિક્ગુણોત્તર 2, –1, –2 હોય, તો તેની દિક્કોસાઇન મેળવો.

ઉકેલ : રેખાની દિક્કોસાઇન

$$\frac{2}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-2)^2}}, \frac{-1}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-2)^2}}, \frac{-2}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-2)^2}} \text{ અથવા } \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}.$$

ઉદાહરણ 3 : બે બિંદુઓ (–2, 4, –5) અને (1, 2, 3) માંથી પસાર થતી રેખાની દિક્કોસાઇન શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે બે બિંદુઓ P (x_1, y_1, z_1) અને Q (x_2, y_2, z_2) માંથી પસાર થતી રેખાની દિક્કોસાઇન

$$\frac{x_2-x_1}{PQ}, \frac{y_2-y_1}{PQ}, \frac{z_2-z_1}{PQ} \text{ છે}$$

અને $PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

અહીં P (–2, 4, –5) અને Q (1, 2, 3) છે.

આથી, $$PQ = \sqrt{(1-(-2))^2+(2-4)^2+(3-(-5))^2} = \sqrt{77}$$

આમ, બિંદુઓ P તથા Q ને જોડતી રેખાની દિક્કોસાઇન

$$\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{-2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$$

ઉદાહરણ 4 : x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષની દિક્કોસાઇન શોધો.

ઉકેલ : x-અક્ષ એ x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષની સાથે અનુક્રમે 0°, 90° અને 90° ના ખૂણા બનાવે છે. આથી, x-અક્ષની દિક્કોસાઇન $\cos 0°, \cos 90°, \cos 90°$ અર્થાત્, 1, 0, 0. આ જ પ્રમાણે y-અક્ષ અને z-અક્ષની દિક્કોસાઇન અનુક્રમે 0, 1, 0 અને 0, 0, 1 છે.

ઉદાહરણ 5 : સાબિત કરો કે બિંદુઓ A (2, 3, –4), B (1, –2, 3) અને C (3, 8, –11) સમરેખ છે.

ઉકેલ : A અને B ને જોડતી રેખાના દિક્ગુણોત્તર 1 – 2, –2 – 3, 3 + 4 અર્થાત્ –1, –5, 7 છે.

B અને C ને જોડતી રેખાના દિક્ગુણોત્તર 3 – 1, 8 + 2, –11 –3 અર્થાત્ 2, 10, –14 છે.

સ્પષ્ટ છે કે AB અને BC ના દિક્ગુણોત્તર સમપ્રમાણમાં છે. આથી, AB એ BC ને સમાંતર અથવા સંપાતી છે; પરંતુ AB અને BC બંનેમાં B સામાન્ય બિંદુ છે. તેથી A, B, C સમરેખ છે.

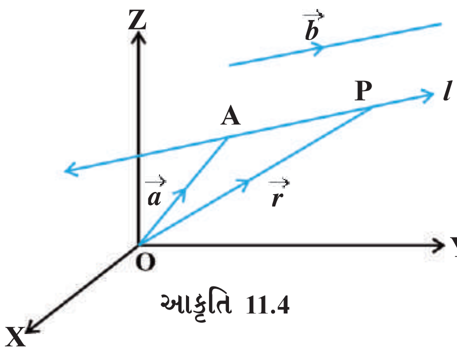
સ્વાધ્યાય 11.1

1. જો કોઈ રેખા x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ સાથે અનુક્રમે 90°, 135°, 45° માપના ખૂણા બનાવે, તો તેની દિક્કોસાઈન શોધો.
2. યામાક્ષો સાથે સમાન ખૂણા બનાવતી રેખાની દિક્કોસાઈન શોધો.
3. જો રેખાના દિક્ગુણોત્તર –18, 12, –4 હોય, તો તેની દિક્કોસાઈન શોધો.
4. સાબિત કરો કે બિંદુઓ (2, 3, 4), (–1, –2, 1), (5, 8, 7) સમરેખ છે.
5. (3, 5, –4), (–1, 1, 2) અને (–5, –5, –2) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણની બાજુઓની દિક્કોસાઈન શોધો.

11.3 અવકાશમાં રેખાનું સમીકરણ

આપણે ધોરણ XI માં દ્વિપરિમાણમાં રેખાના સમીકરણનો અભ્યાસ કર્યો. આપણે હવે અવકાશમાં રેખાનાં સદિશ અને કાર્તેઝિય સમીકરણનો અભ્યાસ કરીશું.

જો (i) કોઈ રેખા આપેલા બિંદુમાંથી પસાર થતી હોય અને તેની દિશા આપી હોય, અથવા (ii) તે આપેલાં બે બિંદુમાંથી પસાર થાય, તો તે અનન્ય રીતે નક્કી થાય છે.



આકૃતિ 11.4

11.3.1 આપેલા બિંદુમાંથી પસાર થતી અને આપેલ સદિશ $\vec{b}$ ને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ

ધારો કે લંબચોરસ કાર્તેઝિય યામપદ્ધતિના ઊગમબિંદુ O ને સાપેક્ષ આપેલા બિંદુ A નો સ્થાનસદિશ $\vec{a}$ છે. બિંદુ A માંથી પસાર થતી અને આપેલા સદિશ $\vec{b}$ ને સમાંતર રેખા l છે. રેખા l પરના સ્વૈર બિંદુ P નો સ્થાન-સદિશ $\vec{r}$ છે (આકૃતિ 11.4).

આથી, $\overrightarrow{AP}$ એ સદિશ $\vec{b}$ ને સમાંતર છે અર્થાત્, $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{b}$ જ્યાં λ એ કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

પરંતુ $\quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$

અર્થાત્ $\quad \lambda\vec{b} = \vec{r} - \vec{a}$

આથી ઊલટું, પ્રચલ λની પ્રત્યેક કિંમત માટે, આ સમીકરણ રેખા પરના બિંદુ P નો સ્થાનસદિશ આપે છે. આથી, રેખાનું સદિશ સમીકરણ

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b} \text{ મળે છે.} \qquad \lambda \in R \qquad \text{.... (1)}$$

નોંધ : જો $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$, તો રેખાના દિક્ગુણોત્તર a, b, c થશે અને તેથી ઊલટું, જો રેખાના દિક્ગુણોત્તર a, b, c હોય, તો $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ એ રેખાને સમાંતર થશે. અહીં, b નો $|\vec{b}|$ સાથે ગૂંચવડો ઊભો કરશો નહિ.

સદિશ સ્વરૂપમાંથી કાર્તેઝિય સ્વરૂપ મેળવવું

ધારો કે આપેલા બિંદુ A ના યામ (x_1, y_1, z_1) અને રેખાના દિક્ગુણોત્તર a, b, c છે. રેખા પરના કોઈ પણ બિંદુ P ના યામ (x, y, z) લઈએ, તો

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}; \ \vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

અને $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

આ કિંમતો (1) માં મૂકતા અને $\hat{i}$, $\hat{j}$ અને $\hat{k}$ ના સહગુણકો સરખાવતાં,

(**નોંધ :** ખરેખર તો 'બંને સમાન સદિશના યામ સમાન હોવાથી' એમ કહેવાય.)

આપણને $x = x_1 + \lambda a ; y = y_1 + \lambda b, z = z_1 + \lambda c$ મળે. ... (2)

આ સમીકરણો રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણ છે. (2) માંથી પ્રચલ λ નો લોપ કરતાં, આપણને

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \text{ મળે.} \quad \text{... (3)}$$

આ રેખાનું **કાર્તેઝિય સમીકરણ** છે.

> ☞ **નોંધ** જો રેખાની દિક્કોસાઇન l, m, n હોય, તો રેખાનું સમીકરણ
>
> $$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \text{ થશે.}$$

ઉદાહરણ 6 : બિંદુ (5, 2, – 4) માંથી પસાર થતી સદિશ $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ ને સમાંતર રેખાનું સદિશ અને કાર્તેઝિય સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : આપણી પાસે

$$\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} \text{ અને } \vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k} \text{ છે.}$$

તેથી, રેખાનું સદિશ સમીકરણ

$$\vec{r} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}) \text{ થશે.}$$

હવે, રેખા પરના બિંદુ P (x, y, z) નો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ છે.

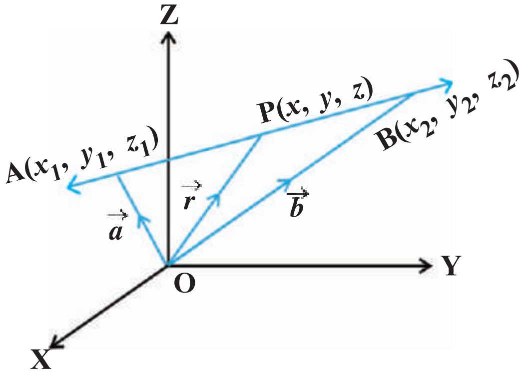
તેથી,
$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$$
$$= (5 + 3\lambda)\hat{i} + (2 + 2\lambda)\hat{j} + (-4 - 8\lambda)\hat{k}$$

λ નો લોપ કરતાં, આપણને

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-8} \text{ મળે.}$$

આ કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાં રેખાનું સમીકરણ છે.

11.3.2 આપેલાં બે બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ



આકૃતિ 11.5

ધારો કે રેખા પરનાં બે બિંદુઓ A (x_1, y_1, z_1) અને B (x_2, y_2, z_2) ના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ છે (આકૃતિ 11.5).

સ્વૈર બિંદુ P (x, y, z) નો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ લઈએ, તો P બિંદુ રેખા પર હોય, તો અને તો જ $\vec{AP} = \vec{r} - \vec{a}$ અને $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ સમરેખ સદિશ છે.

આથી, P રેખા પર હોય, તો અને તો જ

$$\vec{r} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$

અથવા $\quad \vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}), \lambda \in R$ ... (1)

આ સમીકરણ રેખાનું **સદિશ સમીકરણ** છે.

સદિશ સ્વરૂપમાંથી કાર્તેઝિય સ્વરૂપ મેળવીએ.

આપણી પાસે

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ અને $\vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ છે.

આ કિંમતો (1) માં મૂકતાં, આપણને

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k} + \lambda[(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}]$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ના સહગુણકો સરખાવતાં, આપણને

(**નોંધ :** ફરી અહીં અર્થ એ છે કે, સમાન સદિશના યામ સમાન છે.)

$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$; $y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1)$; $z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$ મળે.

λ નો લોપ કરતાં,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \text{ મળે.}$$

આ સમીકરણ રેખાનું કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાં સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 7 : (–1, 0, 2) અને (3, 4, 6) માંથી પસાર થતી રેખાનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે A (–1, 0, 2) અને B (3, 4, 6) ના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ છે.

$$\vec{a} = -\hat{i} + 2\hat{k}$$

અને $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$

તેથી $\vec{b} - \vec{a} = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$

રેખા પરના કોઈ પણ બિંદુનો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ લઈએ, તો રેખાનું સદિશ સમીકરણ

$$\vec{r} = -\hat{i} + 2\hat{k} + \lambda(4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}), \lambda \in R$$

ઉદાહરણ 8 : રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{2} \text{ હોય, તો}$$

આ રેખાનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણને પ્રમાણિત સ્વરૂપ

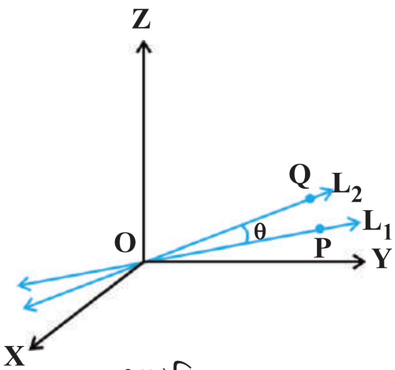
$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \text{ સાથે સરખાવતાં,}$$

આપણે નિરીક્ષણ કરીએ કે $x_1 = -3,\ y_1 = 5,\ z_1 = -6;\ a = 2,\ b = 4,\ c = 2$

આમ, માંગેલી રેખા બિંદુ $(-3, 5, -6)$ માંથી પસાર થાય છે અને સદિશ $2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ ને સમાંતર છે. રેખા પરના કોઈ પણ બિંદુનો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ લઈએ, તો આપેલી રેખાનું સદિશ સમીકરણ

$$\vec{r} = (-3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}) \text{ થશે.}$$

11.4 બે રેખા વચ્ચેનો ખૂણો



આકૃતિ 11.6

ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી અને જેના દિક્‌ગુણોત્તર અનુક્રમે a_1, b_1, c_1 તથા a_2, b_2, c_2 હોય તેવી બે રેખાઓ છે. ધારો કે L_1 પર બિંદુ P અને L_2 પર બિંદુ Q છે. આકૃતિ 11.6 માં આપેલી દિશાયુક્ત રેખાઓ OP અને OQ લઈએ. ધારો કે સદિશો OP અને OQ વચ્ચેનો લઘુકોણ θ છે. હવે યાદ કરીએ કે દિશાયુક્ત રેખાખંડો OP અને OQ એ અનુક્રમે a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 ઘટકો સાથેના સદિશ છે. આથી તેમના વચ્ચેનો ખૂણો θ એ

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right| \text{ થી મળે છે.} \quad \ldots (1)$$

રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો $\sin\theta$ ના સ્વરૂપમાં,

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-\frac{(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2}{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2}}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}\ \sqrt{(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \quad \ldots (2)$$

☞ **નોંધ** જો કોઈ વિકલ્પમાં રેખાઓ L_1 અથવા L_2 (અથવા બંને) ઊગમબિંદુમાંથી પસાર ન થાય, તો આપણે L_1 અને L_2 ને સમાંતર અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાઓ અનુક્રમે L'_1 અને L'_2 લઈ શકીએ.

જો રેખાઓ L_1 અને L_2 માટે દિક્ગુણોત્તરને બદલે, L_1 ની દિક્કોસાઇન l_1, m_1, n_1 અને L_2 ની દિક્કોસાઇન l_2, m_2, n_2 આપી હોય, તો (1) અને (2) ને નીચેના સ્વરૂપમાં લઈશું.

$$\cos\theta = |l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2| \quad (\text{કારણ કે } l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 = l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) \qquad \text{... (3)}$$

અને $$\sin\theta = \sqrt{(l_1m_2 - l_2m_1)^2 + (m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2} \qquad \text{... (4)}$$

દિક્ગુણોત્તરો a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 સાથેની બે રેખાઓ

(i) પરસ્પર લંબ હોય અર્થાત્ જો $\theta = 90°$, તો (1) પરથી

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

(ii) સમાંતર હોય અર્થાત્ જો $\theta = 0$, તો (2) પરથી

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

હવે, બે રેખાનાં સમીકરણ આપ્યાં હોય ત્યારે આપણે તેમની વચ્ચેનો ખૂણો શોધીશું. જો રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો θ લઘુકોણ હોય અને

$$\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1} \text{ અને } \vec{r} = \vec{a_2} + \mu\vec{b_2}$$

તો $$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}\right|$$

કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાં, જો રેખાઓ

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \qquad \text{... (1)}$$

અને $$\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2} \text{ ના} \qquad \text{... (2)}$$

દિક્ગુણોત્તરો અનુક્રમે a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 હોય તથા રેખાઓ (1) અને (2) વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right| \text{ થાય.}$$

ઉદાહરણ 9 : રેખાઓ $\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

અને $\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $\vec{b_1} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b_2} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

બે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}\right| = \left|\frac{(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})\cdot(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{9+4+36}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+4+12}{3\times 7}\right| = \frac{19}{21}$$

આથી $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$

ઉદાહરણ 10 : રેખાઓ $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$

અને $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

ઉકેલ : પ્રથમ રેખાના દિક્ગુણોત્તર 3, 5, 4 અને બીજી રેખાના દિક્ગુણોત્તર 1, 1, 2 છે. જો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો

$$\cos\theta = \left|\frac{3\cdot 1+5\cdot 1+4\cdot 2}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}\right|$$

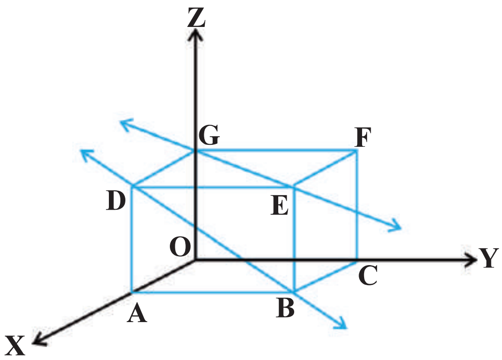
$$= \frac{16}{\sqrt{50}\sqrt{6}} = \frac{16}{5\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

આથી, માગેલો ખૂણો $\cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)$ છે.

11.5 બે રેખા વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર

જો અવકાશની બે રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે, તો તેમની વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શૂન્ય છે. વળી, જો અવકાશની બે રેખાઓ સમાંતર હોય, તો તેમની વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર એ તેમના વચ્ચેનું લંબઅંતર થશે, અર્થાત્ એક રેખા પરના કોઈ બિંદુથી બીજી રેખા પર દોરેલા લંબની લંબાઈ જેટલું.

વિશેષમાં, જે રેખાઓ છેદતી ન હોય અને સમાંતર પણ ન હોય એવી રેખાઓ અવકાશમાં હોય છે. ખરેખર તો, આવી રેખાઓની જોડ અસમતલીય રેખાઓની જોડ છે. તેમને ***વિષમતલીય (non coplanar or skew) રેખાઓ*** કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે, ચાલો આપણે આકૃતિ 11.7 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ પર અનુક્રમે 1, 3, 2 એકમ માપવાળો એક ઓરડો લઈએ.



આકૃતિ 11.7

રેખા GE છતની એક બાજુથી બીજી બાજુ તરફ વિકર્ણ સ્વરૂપે ત્રાંસી જાય છે અને રેખા DB એ A થી સીધા ઉપર છતના એક ખૂણાએથી દીવાલના નીચેના ભાગે વિકર્ણ સ્વરૂપે ત્રાંસી જાય છે. આ રેખાઓ સમાંતર નથી અને તેઓ ક્યારેય એકબીજાને મળશે નહિ, કારણ કે તેઓ વિષમતલીય છે.

બે રેખાઓ વચ્ચેના લઘુતમ અંતરનો આપણે અર્થ કરીશું કે જેની લંબાઈ ઓછામાં ઓછી હોય, તેવા એક રેખા પરના એક બિંદુ અને બીજી રેખા પરના એક બિંદુને જોડતો રેખાખંડ હોય.

વિષમતલીય રેખાઓ માટે, લઘુતમ અંતરવાળી રેખા એ બંને રેખાઓને લંબ છે.

11.5.1 બે વિષમતલીય રેખા વચ્ચેનું અંતર

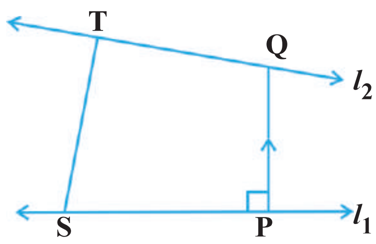
હવે આપણે બે વિષમતલીય રેખા વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર નીચે પ્રમાણે મેળવીશું :

ધારો કે $$\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{b_1} \qquad ... (1)$$

અને $$\vec{r} = \vec{a_2} + \mu \vec{b_2} \qquad ... (2)$$

સમીકરણવાળી બે વિષમતલીય રેખાઓ l_1 અને l_2 આપેલી છે. (આકૃતિ 11.8).

l_1 પર $\vec{a_1}$ સ્થાન સદિશવાળું કોઈક બિંદુ S અને l_2 પર $\vec{a_2}$ સ્થાન સદિશવાળું કોઈક બિંદુ T લો. લઘુતમ અંતરવાળા સદિશનું માન એટલે કે STનો લઘુતમ અંતરવાળી રેખાની દિશામાં પ્રક્ષેપ (જુઓ 10.6.2).



આકૃતિ 11.8

જો l_1 અને l_2 વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર દર્શાવતો સદિશ $\overrightarrow{PQ}$ હોય, તો તે $\vec{b_1}$ અને $\vec{b_2}$ બંનેને લંબ છે. આથી $\overrightarrow{PQ}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ $\hat{n}$ એ

$$\hat{n} = \frac{\vec{b_1} \times \vec{b_2}}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|} \text{ થશે.} \qquad ... (3)$$

તેથી, જો d એ લઘુતમ અંતર સદિશનું માન હોય, તો $\overrightarrow{PQ} = d\hat{n}$

$\overrightarrow{ST}$ અને $\overrightarrow{PQ}$ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો

$$PQ = ST\,|\cos\theta|$$

પરંતુ $$|\cos\theta| = \left|\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{ST}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{ST}|}\right|$$

$$= \left|\frac{d\hat{n}\cdot(\vec{a_2} - \vec{a_1})}{d\,ST}\right| \qquad (\overrightarrow{ST} = \vec{a_2} - \vec{a_1} \text{ હોવાથી})$$

$$= \left|\frac{(\vec{b_1} \times \vec{b_2})\cdot(\vec{a_2} - \vec{a_1})}{ST\,|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|}\right| \qquad [(3) \text{ પરથી}]$$

આથી, માગેલું લઘુતમ અંતર

$$d = PQ = ST\,|\cos\theta|$$

અથવા $$d = \left|\frac{(\vec{b_1} \times \vec{b_2})\cdot(\vec{a_2} - \vec{a_1})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|}\right|$$

કાર્તેઝિય સ્વરૂપ

બે રેખાઓ

$$l_1 : \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$$

અને $l_2 : \dfrac{x-x_2}{a_2} = \dfrac{y-y_2}{b_2} = \dfrac{z-z_2}{c_2}$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર

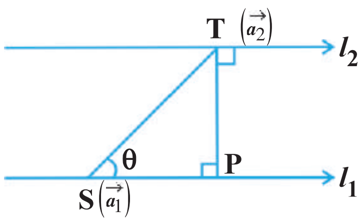
$$\left|\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}\right|$$ છે.

11.5.2 સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું અંતર

જો બે રેખાઓ l_1 અને l_2 સમાંતર હોય, તો તેઓ સમતલીય છે. ધારો કે રેખાઓ

$$\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{b} \qquad \dots (1)$$

અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu \vec{b}$ છે. $\qquad \dots (2)$



આકૃતિ 11.9

l_1 પરના બિંદુ S નો સ્થાનસદિશ $\vec{a_1}$ અને l_2 પરના બિંદુ T નો સ્થાનસદિશ $\vec{a_2}$ છે. (આકૃતિ 11.9) l_1, l_2 સમતલીય હોવાથી, જો T માંથી રેખા l_1 પરનો લંબપાદ P હોય, તો રેખાઓ l_1 અને l_2 વચ્ચેનું અંતર = TP

ધારો કે $\vec{ST}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો θ છે.

તેથી, $\vec{b} \times \vec{ST} = \left(|\vec{b}||\vec{ST}|\sin\theta\right)\hat{n}$ $\qquad \dots (3)$

અહીં, $\hat{n}$ એ રેખાઓ l_1 અને l_2 ના સમતલ પર લંબ એકમ સદિશ છે.

પરંતુ $\vec{ST} = \vec{a_2} - \vec{a_1}$

તેથી (3) પરથી

$\vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1}) = |\vec{b}|\ \text{PT}\ \hat{n}$ $\qquad$ (PT = ST *sin* θ હોવાથી)

અર્થાત્ $\left|\vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1})\right| = |\vec{b}|\ \text{PT}\cdot 1$ $\qquad$ ($|\hat{n}| = 1$ હોવાથી)

આથી, આપેલી સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું અંતર

$$d = |\vec{PT}| = \left|\frac{\vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1})}{|\vec{b}|}\right|$$

ઉદાહરણ 11 : રેખા l_1 અને l_2 ના સદિશ સમીકરણ

$$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda\,(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \qquad \text{... (1)}$$

અને $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu\,(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$ છે. ... (2)

આ બે રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

ઉકેલ : (1) અને (2) ને અનુક્રમે $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu\vec{b_2}$ સાથે સરખાવતાં, આપણને

$$\vec{a_1} = \hat{i} + \hat{j}, \qquad \vec{b_1} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$\vec{a_2} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{b_2} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ મળે.

માટે $\vec{a_2} - \vec{a_1} = \hat{i} - \hat{k}$

અને $\vec{b_1} \times \vec{b_2} = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}$$

તેથી $\left|\vec{b_1} \times \vec{b_2}\right| = \sqrt{9+1+49} = \sqrt{59}$

આથી, આપેલી રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર

$$d = \left|\frac{\left(\vec{b_1} \times \vec{b_2}\right)\cdot\left(\vec{a_2} - \vec{a_1}\right)}{\left|\vec{b_1} \times \vec{b_2}\right|}\right| = \left|\frac{3-0+7}{\sqrt{59}}\right| = \frac{10}{\sqrt{59}}$$

ઉદાહરણ 12 : રેખા l_1 અને l_2

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda\,(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

અને $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu\,(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ : બે રેખાઓ સમાંતર છે. **(શા માટે ?)**

આપણી પાસે $\vec{a_1} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{a_2} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ અને $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ છે.

આથી, રેખાઓ વચ્ચેનું અંતર

$$d = \left|\frac{\vec{b} \times \left(\vec{a_2} - \vec{a_1}\right)}{|\vec{b}|}\right| = \left|\frac{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4+9+36}}\right|$$

$$= \frac{\left|-9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}\right|}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{7}$$

સ્વાધ્યાય 11.2

1. સાબિત કરો કે $\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}; \frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}; \frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ દિક્કોસાઇનવાળી ત્રણ રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે.

2. સાબિત કરો કે (1, –1, 2), (3, 4, –2) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા, (0, 3, 2) અને (3, 5, 6) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાને લંબ છે.

3. સાબિત કરો કે (4, 7, 8), (2, 3, 4) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા, (–1, –2, 1), (1, 2, 5) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાને સમાંતર છે.

4. બિંદુ (1, 2, 3) માંથી પસાર થતી અને સદિશ $3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ શોધો.

5. જેનો સ્થાનસદિશ $2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ હોય તેવા બિંદુમાંથી પસાર થતી અને $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ દિશાવાળી રેખાનું સમીકરણ સદિશ અને કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાં મેળવો.

6. બિંદુ (–2, 4, –5) માંથી પસાર થતી અને રેખા $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$ ને સમાંતર રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ શોધો.

7. રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$ છે. તેનું સદિશ સ્વરૂપ લખો.

8. ઊગમબિંદુ અને (5, –2, 3) માંથી પસાર થતી રેખાનું સદિશ અને કાર્તેઝિય સમીકરણ શોધો.

9. બિંદુઓ (3, –2, –5), (3, –2, 6) માંથી પસાર થતી રેખાનું સદિશ અને કાર્તેઝિય સમીકરણ શોધો.

10. નીચે આપેલી રેખાઓની જોડ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો :

(i) $\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ અને

$\vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{k} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

(ii) $\vec{r} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$ અને

$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - 56\hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})$

11. નીચેની રેખાઓની જોડ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો :

(i) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$ અને $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$

(ii) $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ અને $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$

12. રેખાઓ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ અને $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ પરસ્પર લંબ હોય, તો p નું મૂલ્ય શોધો.

13. દર્શાવો કે રેખાઓ $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ અને $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ પરસ્પર લંબ છે.

14. રેખાઓ $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ અને

$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

15. રેખાઓ $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ અને $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

16. જે રેખાઓનાં સદિશ સમીકરણ

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$$

અને $\vec{r} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$ હોય, તે રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

17. જે બે રેખાનાં સદિશ સમીકરણ

$\vec{r} = (1 - t)\hat{i} + (t - 2)\hat{j} + (3 - 2t)\hat{k}$ અને

$\vec{r} = (s + 1)\hat{i} + (2s - 1)\hat{j} - (2s + 1)\hat{k}$ હોય, તે રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

11.6 સમતલ

જો નીચેનામાંથી કોઈ પણ એક જ્ઞાત હોય, તો અનન્ય સમતલનું નિર્માણ થાય :

(i) સમતલ પરનો અભિલંબ અને તેનું ઊગમબિંદુથી અંતર આપેલું હોય, અર્થાત્, સમતલનું અભિલંબ સ્વરૂપમાં સમીકરણ.

(ii) તે એક બિંદુમાંથી પસાર થાય અને આપેલ દિશાને લંબ હોય.

(iii) તે આપેલાં ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતું હોય.

હવે આપણે સમતલનાં સદિશ અને કાર્તેઝિય સમીકરણ શોધીશું.

11.6.1 અભિલંબ સ્વરૂપમાં સમતલનું સમીકરણ

જેનું ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર d $(d \neq 0)$ હોય તેવું એક સમતલ લઈએ. (આકૃતિ 11.10)

જો ઊગમબિંદુથી સમતલ પરનો અભિલંબ $\overrightarrow{ON}$ હોય અને $\hat{n}$ એ એકમ અભિલંબ સદિશ હોય, તો $\overrightarrow{ON} = d\hat{n}$ થાય. ધારો કે P સમતલ પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. આથી,

$\overrightarrow{NP}$ એ $\overrightarrow{ON}$ પરનો લંબ થશે.

માટે, $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$ ... (1)

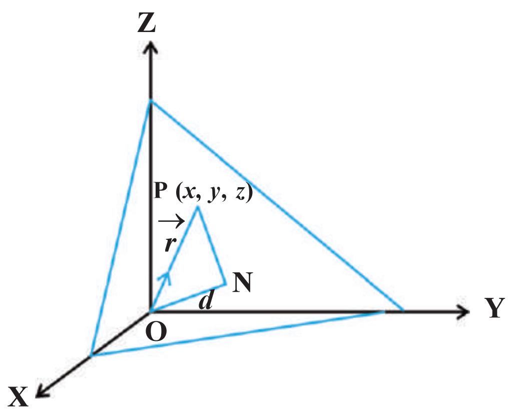
બિંદુ P નો સ્થાન સદિશ $\vec{r}$ લેતાં,

$\overrightarrow{NP} = \vec{r} - d\hat{n}$ ($\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OP}$ હોવાથી)

માટે, (1) પરથી

$(\vec{r} - d\hat{n}) \cdot d\hat{n} = 0$ મળે.

અથવા $(\vec{r} - d\hat{n}) \cdot \hat{n} = 0$ $(d \neq 0)$



આકૃતિ 11.10

અથવા $\quad \vec{r} \cdot \hat{n} - d\hat{n} \cdot \hat{n} = 0$

અર્થાત્, $\quad \vec{r} \cdot \hat{n} = d \qquad (\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$ હોવાથી$)$ ... (2)

આ અભિલંબ સ્વરૂપમાં સદિશ સ્વરૂપે સમતલનું સમીકરણ છે.

કાર્તેઝિય સ્વરૂપ

જો $\hat{n}$ એ સમતલને લંબ એકમ સદિશ હોય, તો સમીકરણ (2) એ સમતલનું સદિશ સમીકરણ છે. જો P (x, y, z) એ સમતલનું કોઈ પણ બિંદુ હોય, તો

$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ થશે.

$\hat{n}$ ની દિક્કોસાઈન l, m, n લેતાં,

$$\hat{n} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k} \text{ થશે.}$$

તેથી, (2) પરથી

$$(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}) = d$$

અર્થાત્, $\quad lx + my + nz = d$ ... (3)

આ અભિલંબ સ્વરૂપમાં સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ છે.

નોંધ જો $\vec{r} \cdot (a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}) = d$ સમતલનું સદિશ સમીકરણ હોય, તો $ax + by + cz = d$ સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ થશે, જ્યાં a, b અને c એ સમતલના અભિલંબના દિક્ગુણોત્તર છે.

ઉદાહરણ 13 : જેનું ઊગમબિંદુથી અંતર $\frac{6}{\sqrt{29}}$ હોય અને જેની પર ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ પરનો અભિલંબ $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ હોય તેવા સમતલનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $\vec{n} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ છે.

$$\text{તેથી } \hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{29}}$$

આથી, સમતલનું માગેલું સમીકરણ,

$$\vec{r} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{-3}{\sqrt{29}}\hat{j} + \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{k}\right) = \frac{6}{\sqrt{29}}$$

ઉદાહરણ 14 : ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતા અને $\vec{r}\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k})+1=0$ સમતલને લંબ એકમ સદિશની દિક્કોસાઇન શોધો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણને

$\vec{r}\cdot(-6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})=1$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય. ... (1)

હવે, $|-6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}|=\sqrt{36+9+4}=7$

તેથી, (1) ની બંને તરફ 7 વડે ભાગતાં, આપણને

$$\vec{r}\cdot\left(\frac{-6}{7}\hat{i}+\frac{3}{7}\hat{j}+\frac{2}{7}\hat{k}\right)=\frac{1}{7}$$

આ સમીકરણ $\vec{r}\cdot\hat{n}=d$ સ્વરૂપમાં સમતલનું સમીકરણ છે.

આ દર્શાવે છે કે $\hat{n}=\frac{-6}{7}\hat{i}+\frac{3}{7}\hat{j}+\frac{2}{7}\hat{k}$ ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ પરનો લંબ એકમ સદિશ છે. આથી, તેની દિક્કોસાઇન $\frac{-6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$ થશે.

ઉદાહરણ 15 : ઊગમબિંદુથી સમતલ $2x-3y+4z-6=0$ નું અંતર શોધો.

ઉકેલ : સમતલના અભિલંબના દિક્ગુણોત્તર 2, –3, 4 હોવાથી, તેની દિક્કોસાઇન

$$\frac{2}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(4)^2}}, \frac{-3}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(4)^2}}, \frac{4}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(4)^2}} \text{ અર્થાત્ } \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$$

આથી, સમીકરણ $2x-3y+4z-6=0$ અર્થાત્, $2x-3y+4z=6$ ને $\sqrt{29}$ વડે ભાગતાં, આપણને

$\frac{2}{\sqrt{29}}x+\frac{-3}{\sqrt{29}}y+\frac{4}{\sqrt{29}}z=\frac{6}{\sqrt{29}}$ મળે.

ઊગમબિંદુથી સમતલનું અંતર d હોય ત્યારે, આ સમીકરણ $lx+my+nz=d$ સ્વરૂપમાં છે. તેથી, ઊગમબિંદુથી સમતલનું અંતર $\frac{6}{\sqrt{29}}$ છે.

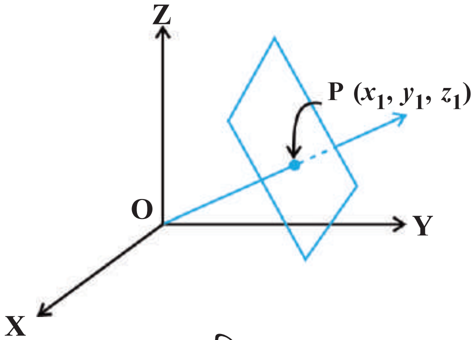
ઉદાહરણ 16 : ઊગમબિંદુથી સમતલ $2x-3y+4z-6=0$ પર દોરેલા લંબના લંબપાદના યામ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ઊગમબિંદુથી સમતલ પરના લંબના લંબપાદ P ના યામ (x_1, y_1, z_1) છે. (જુઓ આકૃતિ 11.11.)

આથી રેખા OP ના દિક્ગુણોત્તર x_1, y_1, z_1 છે.

અભિલંબ સ્વરૂપમાં સમતલનું સમીકરણ લખતાં, આપણને

$\frac{2}{\sqrt{29}}x-\frac{3}{\sqrt{29}}y+\frac{4}{\sqrt{29}}z=\frac{6}{\sqrt{29}}$ મળે.



આકૃતિ 11.11

અહીં $\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$ એ OP ની દિક્કોસાઈન છે.

રેખાની દિક્કોસાઈન અને દિક્ગુણોત્તર સમપ્રમાણમાં હોવાથી, આપણને

$$\frac{x_1}{\frac{2}{\sqrt{29}}} = \frac{y_1}{\frac{-3}{\sqrt{29}}} = \frac{z_1}{\frac{4}{\sqrt{29}}} = k$$

અર્થાત્, $x_1 = \frac{2k}{\sqrt{29}}, y_1 = \frac{-3k}{\sqrt{29}}, z_1 = \frac{4k}{\sqrt{29}}$ મળે.

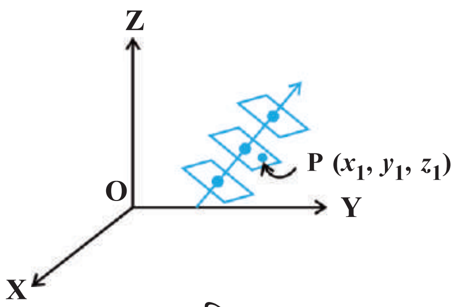
સમતલના સમીકરણમાં આ મૂકતાં, આપણને $k = \frac{6}{\sqrt{29}}$ મળે.

આથી, લંબપાદ $\left(\frac{12}{29}, \frac{-18}{29}, \frac{24}{29}\right)$ થાય.

☞ **નોંધ** જો અભિલંબનું ઊગમબિંદુથી અંતર d અને ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ પર દોરેલા અભિલંબની દિક્કોસાઈન l, m, n હોય, તો સમતલનો લંબપાદ (ld, md, nd) થાય.

11.6.2 આપેલા સદિશને લંબ અને આપેલા બિંદુમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

અવકાશમાં આપેલા સદિશને લંબ હોય તેવા અનેક સમતલ હોય છે, પરંતુ આ શરત અનુસાર આપેલા બિંદુ P (x_1, y_1, z_1) માંથી પસાર થાય તેવું માત્ર એક સમતલ અસ્તિત્વ ધરાવે છે. (જુઓ આકૃતિ 11.12)



આકૃતિ 11.12

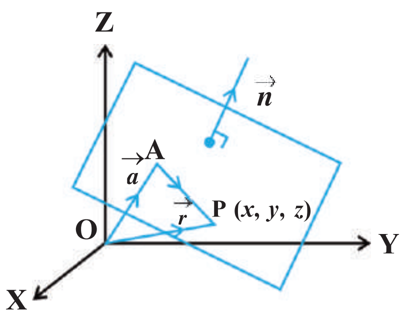
ધારો કે એક સમતલ $\vec{a}$ સ્થાન સદિશવાળા બિંદુ A માંથી પસાર થાય છે અને $\vec{n}$ ને લંબ છે.

ધારો કે સમતલના કોઈ પણ બિંદુ P (x, y, z) નો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ છે. (આકૃતિ 11.13)

$\overrightarrow{AP}$ એ $\vec{n}$ ને લંબ હોય તો અને તો જ બિંદુ P સમતલ પર આપેલું છે. અર્થાત્, $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$ એ P સમતલમાં હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત છે.

પરંતુ $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$ હોવાથી $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$ ... (1)

સમતલનું સદિશ સમીકરણ છે.



આકૃતિ 11.13

કાર્તેઝિય સ્વરૂપ

ધારો કે આપેલું બિંદુ A એ $(x_1\ y_1, z_1)$ છે અને P એ (x, y, z) છે તથા $\vec{n}$ ની દિક્કોસાઈન a, b અને c છે.

તેથી, $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ અને $\vec{n} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

હવે $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$

આથી $\left[(x-x_1)\hat{i} + (y-y_1)\hat{j} + (z-z_1)\hat{k}\right] \cdot \left(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}\right) = 0$

અર્થાત્, $\boldsymbol{a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0}$ માંગેલ સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 17 : બિંદુ (5, 2, –4) માંથી પસાર થતા અને 2, 3, –1 દિક્ગુણોત્તરવાળી રેખાને લંબ સમતલનું સદિશ અને કાર્તેઝિય સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : બિંદુ (5, 2, –4)નો સ્થાન સદિશ $\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ અને સમતલને લંબ અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ છે.

તેથી, સમતલનું સદિશ સમીકરણ $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$

અથવા $\left[\vec{r} - (5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k})\right] \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 0$ થાય. ...(1)

(1) ને કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાં ફેરવતાં, આપણને

$$\left[(x-5)\hat{i} + (y-2)\hat{j} + (z+4)\hat{k}\right] \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 0$$

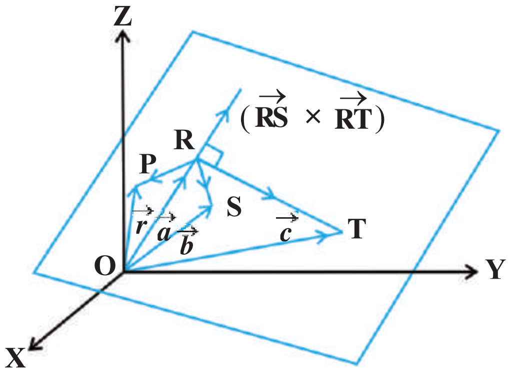
અથવા $2(x - 5) + 3(y - 2) - 1(z + 4) = 0$

અર્થાત્ $2x + 3y - z = 20$ ...(2)

આ માંગેલ સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ છે.

11.6.3 ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

સમતલના ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓ R, S અને T ના સ્થાન સદિશ અનુક્રમે $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ છે (આકૃતિ 11.14).



આકૃતિ 11.14

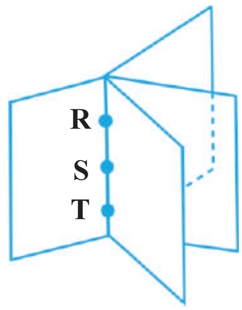
સદિશો $\overrightarrow{RS}$ અને $\overrightarrow{RT}$ આપેલા સમતલમાં છે. આથી, $\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}$ એ બિંદુઓ R, S અને T ને સમાવતા સમતલને લંબ સદિશ છે. ધારો કે સમતલના કોઈ પણ બિંદુ P નો સ્થાન સદિશ $\vec{r}$ છે. તેથી, R માંથી પસાર થતા અને સદિશ $\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}$ ને લંબ સમતલનું સમીકરણ

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}) = 0$$

અથવા $$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \left[(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\right] = 0 \quad \text{... (1)}$$

આ સમીકરણ ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સ્વરૂપમાં સમીકરણ છે.

☞ **નોંધ** ત્રણ બિંદુઓ અસમરેખ છે તેમ શા માટે કહેવું જરૂરી છે ? જો ત્રણ બિંદુઓ એક જ રેખા પર હોય, તો આ બિંદુઓને સમાવતાં અનેક સમતલ મળશે. (આકૃતિ 11.15).



આકૃતિ 11.15

જ્યાં રેખામાં સમાવિષ્ટ બિંદુઓ R, S અને T પુસ્તકના બંધનના સભ્યો હોય, તે રીતે આ સમતલો પુસ્તકના પૃષ્ઠને સમકક્ષ હોય છે.

કાર્તેઝિય સ્વરૂપ

ધારો કે બિંદુઓ R, S અને T ના યામ અનુક્રમે (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) અને (x_3, y_3, z_3) છે. $\vec{r}$ સ્થાન સદિશવાળા સમતલ પરના કોઈ પણ બિંદુ P ના યામ (x, y, z) છે.

તેથી $$\overrightarrow{RP} = (x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{RS} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{RT} = (x_3 - x_1)\hat{i} + (y_3 - y_1)\hat{j} + (z_3 - z_1)\hat{k}$$

આ કિંમતો સદિશ સ્વરૂપવાળા સમીકરણ (1) માં મૂકતાં અને નિશ્ચાયક સ્વરૂપમાં તેમનું નિરૂપણ કરતાં, આપણને

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ મળે.}$$

આ સમીકરણ ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) અને (x_3, y_3, z_3) માંથી પસાર થતા સમતલનું કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાં સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 18 : બિંદુઓ R (2, 5, –3), S (–2, –3, 5) અને T (5, 3, –3) માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{c} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$ છે.

તો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\overrightarrow{RS}\times\overrightarrow{RT}) = 0$$ (શા માટે ?)

અથવા $$(\vec{r}-\vec{a})\cdot\left[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})\right] = 0$$

અર્થાત્ $$\left[\vec{r}-(2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k})\right]\cdot\left[(-4\hat{i}-8\hat{j}+8\hat{k})\times(3\hat{i}-2\hat{j})\right] = 0$$

11.6.4 સમતલના સમીકરણનું અંતઃખંડ સ્વરૂપ

આ વિભાગમાં, આપણે સમતલ દ્વારા યામાક્ષો પર બનેલા અંતઃખંડના સ્વરૂપમાં સમતલના સમીકરણને તારવીશું. ધારો કે સમતલનું સમીકરણ

$\text{A}x + \text{B}y + \text{C}z + \text{D} = 0$ છે. (D $\neq$ 0) ...(1)

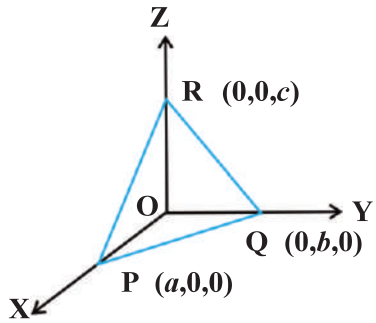
ધારો કે સમતલ x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ પર અનુક્રમે અંતઃખંડ a, b, c બનાવે છે. $a, b, c \neq 0$ (આકૃતિ 11.16)

આથી, સમતલ x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષને અનુક્રમે $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ માં છેદે છે.

તેથી $\text{A}a + \text{D} = 0$ અથવા $\text{A} = \frac{-\text{D}}{a}$

$\text{B}b + \text{D} = 0$ અથવા $\text{B} = \frac{-\text{D}}{b}$

$\text{C}c + \text{D} = 0$ અથવા $\text{C} = \frac{-\text{D}}{c}$



આકૃતિ 11.16

આ કિંમતો સમતલના સમીકરણ (1) માં મૂકી અને સાદું રૂપ આપતાં, આપણને

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1 \text{ મળે.} \quad ...(2)$$

આ સમીકરણ સમતલનું અંતઃખંડ સ્વરૂપમાં માંગેલું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 19 : જે સમતલના x-અક્ષ, y-અક્ષ, z-અક્ષ પરના અંતઃખંડ અનુક્રમે 2, 3 અને 4 હોય, તે સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : સમતલનું સમીકરણ

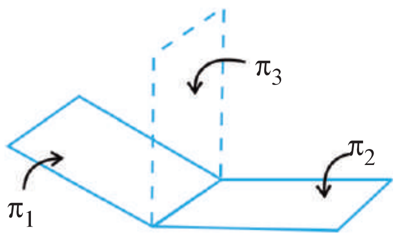
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1 \text{ છે.} \quad ...(1)$$

અહીં $a = 2, b = 3, c = 4$

a, b, c નાં મૂલ્ય (1)માં મૂકતાં, આપણને સમતલનું માંગેલ સમીકરણ

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4} = 1 \text{ અથવા } 6x + 4y + 3z = 12 \text{ મળે.}$$

11.6.5 આપેલા બે સમતલના છેદમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ



આકૃતિ 11.17

π_1 અને π_2 અનુક્રમે $\vec{r}\cdot\hat{n}_1 = d_1$ અને $\vec{r}\cdot\hat{n}_2 = d_2$ સમીકરણવાળા બે સમતલો છે. સમતલોની છેદરેખા પરના કોઈ પણ બિંદુનો સ્થાનસદિશ બંને સમીકરણોનું સમાધાન કરશે. (આકૃતિ 11.17)

જો રેખા પરના બિંદુનો સ્થાનસદિશ $\vec{t}$ હોય, તો $\vec{t}\cdot\hat{n}_1 = d_1$ અને $\vec{t}\cdot\hat{n}_2 = d_2$

તેથી, λ ના પ્રત્યેક વાસ્તવિક મૂલ્ય માટે, આપણને $\vec{t}\cdot\left(\hat{n}_1+\lambda\hat{n}_2\right) = d_1 + \lambda\, d_2$ મળે.

λ સ્વૈર હોવાથી, રેખા પરનું પ્રત્યેક બિંદુ તેનું સમાધાન કરે છે.

આથી, સમીકરણ $\vec{r}\cdot\left(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2\right) = d_1 + \lambda d_2$ એ એક સમતલ π_3 દર્શાવે છે. π_1 અને π_2 બંનેના સમીકરણનું સમાધાન કરે તો કોઈ પણ સદિશ $\vec{r}$ એ π_3ના સમીકરણનું પણ સમાધાન કરે છે, અર્થાત્, સમતલો $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ અને $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ ના છેદમાંથી પસાર થતા કોઈ પણ સમતલનું સમીકરણ

$\vec{r}\cdot\left(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2\right) = d_1+\lambda\, d_2$ છે. ... (1)

નોંધ : ખરેખર તો જો $\vec{n}_1 \neq -\lambda\vec{n}_2$ તો $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ અને $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ ના છેદમાંથી પસાર થતા કોઈક સમતલનું આ સમીકરણ છે. આ સમીકરણ આવો કોઈ પણ કે પ્રત્યેક સમતલ દર્શાવે છે તે સાબિત કરવું બાકી રહે છે.

કાર્તેઝિય સ્વરૂપ

કાર્તેઝિય પદ્ધતિમાં, ધારો કે

$$\vec{n}_1 = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$$
$$\vec{n}_2 = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$$
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \text{ છે.}$$

અને તેથી (1)

$$(a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + (c_1 + \lambda c_2)z = d_1 + \lambda d_2$$

અથવા $\quad$ **$(a_1x + b_1y + c_1z - d_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0$** બનશે. ... (2)

આ સમીકરણ λ ની પ્રત્યેક કિંમત માટે આપેલા સમતલોના છેદમાંથી પસાર થતા માંગેલા સમતલના સમીકરણનું કાર્તેઝિય સ્વરૂપ છે.

ઉદાહરણ 20 : સમતલો $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = 6$ અને $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}) = -5$ ના છેદમાંથી તથા બિંદુ (1, 1, 1) માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $\vec{n}_1 = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ અને $\vec{n}_2 = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$

તથા $d_1 = 6$ અને $d_2 = -5$ છે.

આથી, કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા λ માટે $\vec{r}\cdot\left(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2\right) = d_1 + \lambda d_2$ નો ઉપયોગ કરતાં, આપણને

$$\vec{r}\cdot[\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})] = 6 - 5\lambda,\ \lambda \in R \quad \text{... (1)}$$

$\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ લેતાં,

$$\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)\cdot[(1+2\lambda)\hat{i}+(1+3\lambda)\hat{j}+(1+4\lambda)\hat{k}] = 6 - 5\lambda$$

અથવા $[(1+2\lambda)x+(1+3\lambda)y+(1+4\lambda)z] = 6 - 5\lambda$

અથવા $(x+y+z-6)+\lambda(2x+3y+4z+5) = 0$ ... (2)

સમતલ, બિંદુ (1, 1, 1) માંથી પસાર થાય છે તેમ આપ્યું છે. આથી (1, 1, 1) એ (2)નું સમાધાન કરશે.

અર્થાત્ $(1 + 1 + 1 - 6) + \lambda(2 + 3 + 4 + 5) = 0$

આપણને $\lambda = \frac{3}{14}$ મળશે.

λ નું મૂલ્ય (1)માં મૂકતાં,

$$\vec{r}\cdot\left[\left(1+\frac{3}{7}\right)\hat{i}+\left(1+\frac{9}{14}\right)\hat{j}+\left(1+\frac{6}{7}\right)\hat{k}\right] = 6 - \frac{15}{14}$$

અથવા $$\vec{r}\cdot\left(\frac{10}{7}\hat{i}+\frac{23}{14}\hat{j}+\frac{13}{7}\hat{k}\right) = \frac{69}{14}$$

અથવા $\vec{r}\cdot\left(20\hat{i}+23\hat{j}+26\hat{k}\right) = 69$ મળે.

આ સમીકરણ માંગેલ સમતલનું સદિશ સમીકરણ છે.

11.7 બે રેખા સમતલીય બને તેની શરત

ધારો કે $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\,\vec{b_1}$ ... (1)

અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu\,\vec{b_2}$ આપેલ રેખાઓ છે. ... (2)

રેખા (1) $\vec{a_1}$ સ્થાનસદિશવાળા બિંદુ A માંથી પસાર થાય છે અને $\vec{b_1}$ ને સમાંતર છે.

રેખા (2) $\vec{a_2}$ સ્થાનસદિશવાળા બિંદુ B માંથી પસાર થાય છે અને $\vec{b_2}$ ને સમાંતર છે.

હવે, $\overrightarrow{AB} = \vec{a_2} - \vec{a_1}$

જો $\overrightarrow{AB}$ એ $(\vec{b_1} \times \vec{b_2})$ ને લંબ હોય, તો અને તો જ આપેલ રેખાઓ સમતલીય છે.

અર્થાત્ $\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{b_1} \times \vec{b_2}) = 0$ અથવા $(\vec{a_2} - \vec{a_1})\cdot(\vec{b_1} \times \vec{b_2}) = 0$ ... (3)

રેખાઓ સમતલીય હોવાની શરત છે.

કાર્તેઝિય સ્વરૂપ

ધારો કે બિંદુઓ A અને B ના યામ અનુક્રમે (x_1, y_1, z_1) અને (x_2, y_2, z_2) છે.

$\vec{b_1}$ અને $\vec{b_2}$ ના દિક્‌ગુણોત્તર અનુક્રમે a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 છે.

આથી, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$

$\vec{b_1} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$ અને $\vec{b_2} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$

જો $\overrightarrow{AB} \cdot \left(\vec{b_1} \times \vec{b_2}\right) = 0$ તો અને તો જ આપેલ રેખાઓ સમતલીય છે.

તેને કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાં

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.} \quad \ldots (4)$$

ઉદાહરણ 21 : સાબિત કરો કે રેખાઓ $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5}$ અને $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5}$ સમતલીય છે.

ઉકેલ : અહીં $x_1 = -3,\ y_1 = 1,\ z_1 = 5,\ a_1 = -3,\ b_1 = 1,\ c_1 = 5$

$x_2 = -1,\ y_2 = 2,\ z_2 = 5,\ a_2 = -1,\ b_2 = 2,\ c_2 = 5$

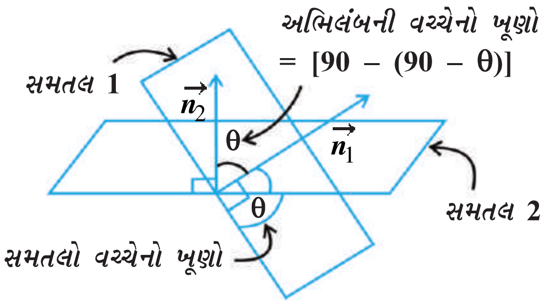
હવે,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

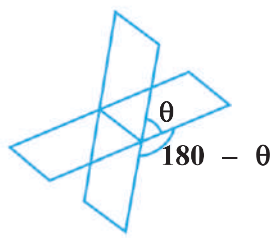
તેથી રેખાઓ સમતલીય છે.

11.8 બે સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો

વ્યાખ્યા 2 : *બે સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો એ તેમના અભિલંબ વચ્ચેનો ખૂણો છે તે રીતે તેને વ્યાખ્યાયિત કરીશું (આકૃતિ 11.18 (a)). નિરીક્ષણ કરો કે જો બે સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો 180 – θ પણ તેમની વચ્ચેનો ખૂણો થાય (આકૃતિ 11.18 (b)). આપણે તે બે પૈકી લઘુકોણને બે સમતલ વચ્ચેના ખૂણા તરીકે લઈશું.*



(a)



(b)

આકૃતિ 11.18

જો બે સમતલો $\vec{r} \cdot \vec{n_1} = d_1$ અને $\vec{r} \cdot \vec{n_2} = d_2$ ના અભિલંબ $\vec{n_1}$ અને $\vec{n_2}$ હોય તથા તેમના વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો

કોઈ સામાન્ય બિંદુમાંથી (છેદબિંદુમાંથી) સમતલ પર દોરેલા અભિલંબ વચ્ચેનો ખૂણો θ થશે.

આપણને $\cos\theta = \left|\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}\right|$ મળે.

☞ **નોંધ** જો $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 0$ હોય, તો સમતલો પરસ્પર લંબ છે અને જો $\vec{n_1}$ અને $\vec{n_2}$ પરસ્પર સમાંતર હોય, તો સમતલો એકબીજાને સમાંતર છે.

કાર્તેઝિય સ્વરૂપ

ધારો કે સમતલો

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \text{ અને } A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

વચ્ચેનો ખૂણો θ છે. આપેલા સમતલના અભિલંબના દિક્ગુણોત્તર અનુક્રમે A_1, B_1, C_1 અને A_2, B_2, C_2 છે.

આથી, $\cos\theta = \left|\dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\right|$

☞ **નોંધ**

1. જો સમતલો પરસ્પર લંબ હોય, તો θ = 90° અને તેથી $\cos\theta = 0$.
   આથી, $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
2. જો સમતલો એકબીજાને સમાંતર હોય, તો $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

ઉદાહરણ 22 : બે સમતલો $2x + y - 2z = 5$ અને $3x - 6y - 2z = 7$ વચ્ચેનો ખૂણો સદિશની રીતનો ઉપયોગ કરી શોધો.

ઉકેલ : બે સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો એટલે કે તેમના અભિલંબ વચ્ચેનો ખૂણો. સમતલના સમીકરણ પરથી તેમના અભિલંબ સદિશ

$$\vec{n_1} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} \text{ અને } \vec{n_2} = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

આથી, $\cos\theta = \left|\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}\right| = \dfrac{\left|(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})\cdot(3\hat{i}-6\hat{j}-2\hat{k})\right|}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{9+36+4}} = \dfrac{4}{21}$

તેથી, $\theta = \cos^{-1}\dfrac{4}{21}$

ઉદાહરણ 23 : બે સમતલો $3x - 6y + 2z = 7$ અને $2x + 2y - 2z = 5$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

ઉકેલ : આપેલ સમતલનાં સમીકરણોને

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \text{ અને } A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \text{ સાથે સરખાવતાં,}$$

આપણને $A_1 = 3,\ B_1 = -6,\ C_1 = 2$

$A_2 = 2,\ B_2 = 2,\ C_2 = -2$ મળે.

$$\cos\theta = \left|\frac{3\times 2+(-6)(2)+(2)(-2)}{\sqrt{\left(3^2+(-6)^2+(2)^2\right)}\sqrt{\left(2^2+2^2+(-2)^2\right)}}\right|$$

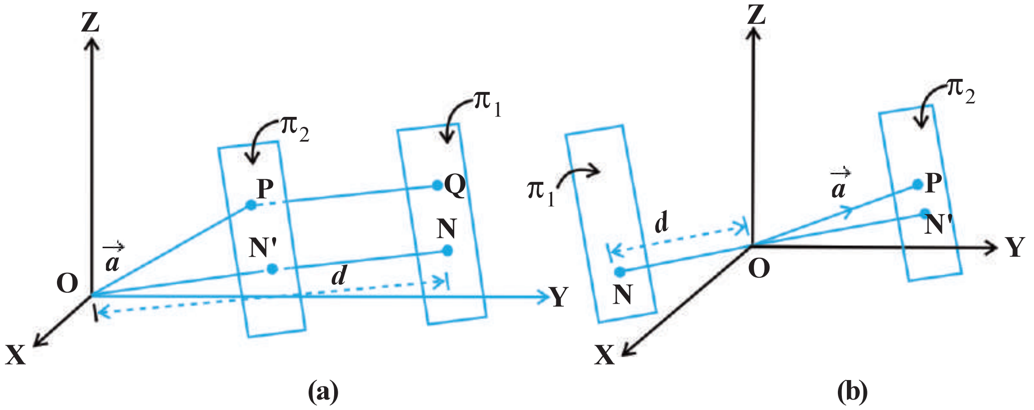
$$= \left|\frac{-10}{7\times 2\sqrt{3}}\right| = \frac{5}{7\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{21}.$$

$$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{21}\right)$$

11.9 સમતલથી બિંદુનું અંતર

સદિશ સ્વરૂપ :

ધારો કે બિંદુ P નો સ્થાન સદિશ $\vec{a}$ છે અને સમતલ π_1 નું સમીકરણ $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$ છે. (આકૃતિ 11.19)



આકૃતિ 11.19

P માંથી π_1ને સમાંતર સમતલ π_2 લો. π_2 નો એકમ અભિલંબ સદિશ $\hat{n}$ છે. આથી, તેનું

સમીકરણ $\quad (\vec{r}-\vec{a})\cdot\hat{n} = 0$ થશે.

એટલે કે, $\quad \vec{r}\cdot\hat{n} = \vec{a}\cdot\hat{n}$

આમ, ઊગમબિંદુથી આ સમતલનું અંતર ON′ એ $|\vec{a}\cdot\hat{n}|$ થશે.

આથી, P નું સમતલ π_1 થી અંતર PQ (આકૃતિ 11.19 (a)) એ

$ON - ON' = |d - \vec{a}\cdot\hat{n}|$

આ લંબાઈ એ બિંદુથી આપેલા સમતલના લંબની લંબાઈ છે.

આપણે આ જ પ્રમાણેનું પરિણામ (આકૃતિ 11.19 (b)) માટે પણ પ્રસ્થાપિત કરી શકીએ.

☞ **નોંધ**

1. $\vec{n}$ અભિલંબવાળા સમતલ π નું સમીકરણ $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$ સ્વરૂપમાં હોય, તો લંબઅંતર $\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{n}-d|}{|\vec{n}|}$ થાય.

2. ઊગમબિંદુ O થી સમતલ $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$ નું લંબઅંતર $\dfrac{|d|}{|\vec{n}|}$ છે. ($\vec{a} = \vec{0}$ હોવાથી)

કાર્તેઝિય સ્વરૂપ

આપેલ બિંદુ P(x_1, y_1, z_1) નો સ્થાનસદિશ $\vec{a}$ છે અને આપેલ સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ Ax + By + Cz = D છે. આથી,

$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

$$\vec{n} = \mathrm{A}\hat{i} + \mathrm{B}\hat{j} + \mathrm{C}\hat{k} \text{ થશે.}$$

આથી, નોંધ (1) પરથી, P થી સમતલનું લંબઅંતર

$$= \left|\frac{\left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}\right)\cdot\left(\mathrm{A}\hat{i} + \mathrm{B}\hat{j} + \mathrm{C}\hat{k}\right) - \mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{\mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}y_1 + \mathrm{C}z_1 - \mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}}\right|$$

ઉદાહરણ 24 : સમતલ $\vec{r}\cdot(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$ થી બિંદુ (2, 5, –3) નું અંતર શોધો.

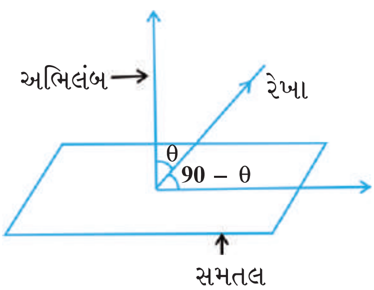
ઉકેલ : અહીં $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{n} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ અને $d = 4$

તેથી, આપેલ સમતલથી બિંદુ (2, 5, –3)નું અંતર

$$\frac{\left|(2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k})\cdot(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) - 4\right|}{|6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}|} = \frac{|12 - 15 - 6 - 4|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{13}{7}$$

11.10 રેખા અને સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો

વ્યાખ્યા 3 : ***રેખા અને સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો એ રેખા અને સમતલના અભિલંબ વચ્ચેના ખૂણાનો કોટિકોણ છે. (આકૃતિ 11.20)***



આકૃતિ 11.20

સદિશ સ્વરૂપ : રેખાનું સમીકરણ $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ અને સમતલનું સમીકરણ $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$ છે, તો રેખા અને સમતલના અભિલંબ વચ્ચેનો ખૂણો θ લેતાં,

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right|$$

અને તેથી રેખા અને સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો ϕ એ $90 - \theta$ થાય. અર્થાત્, $\sin(90 - \theta) = \cos\theta$

અર્થાત્ $sin\ \phi = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right|$ અથવા $\phi = sin^{-1}\left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right|$

ઉદાહરણ 25 : રેખા $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{6}$ અને સમતલ $10x + 2y - 11z = 3$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે રેખા અને સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો ϕ છે.

આપેલ સમીકરણને સદિશ સ્વરૂપમાં ફેરવતાં, આપણને

$$\vec{r} = (-\hat{i} + 3\hat{k}) + \lambda\,(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

અને $\vec{r}\cdot(10\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k}) = 3$ મળે.

અહીં $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ અને $\vec{n} = 10\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k}$

$$sin\ \phi = \left|\frac{(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})\cdot(10\hat{i}+2\hat{j}-11\hat{k})}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\ \sqrt{10^2+2^2+11^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-40}{7\times15}\right| = \left|\frac{-8}{21}\right| = \frac{8}{21}$$ અથવા $\phi = sin^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$

સ્વાધ્યાય 11.3

1. નીચેના પૈકી દરેક પ્રશ્નમાં સમતલના અભિલંબની દિક્કોસાઇન અને સમતલનું ઊગમબિંદુથી અંતર મેળવો.

(a) $z = 2$ (b) $x + y + z = 1$

(c) $2x + 3y - z = 5$ (d) $5y + 8 = 0$

2. ઊગમબિંદુથી 7 એકમ અંતરે આવેલા અને જેનો અભિલંબ સદિશ $3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$ હોય તેવા સમતલનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

3. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ શોધો :

(a) $\vec{r}\cdot(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 2$ (b) $\vec{r}\cdot(2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) = 1$

(c) $\vec{r}\cdot((s-2t)\hat{i} + (3-t)\hat{j} + (2s+t)\hat{k}) = 15$

4. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક પ્રશ્નમાં ઊગમબિંદુથી સમતલ પર દોરેલા લંબના લંબપાદના યામ શોધો :

(a) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ (b) $3y + 4z - 6 = 0$

(c) $x + y + z = 1$ (b) $5y + 8 = 0$

5. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક સમતલનાં સદિશ અને કાર્તેઝિય સમીકરણ શોધો :

(a) જે (1, 0, –2) માંથી પસાર થાય અને જેનો અભિલંબ સદિશ $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ હોય.

(b) જે (1, 4, 6) માંથી પસાર થાય અને જેનો અભિલંબ સદિશ $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ હોય.

6. નીચેના પૈકી આપેલ પ્રત્યેક પ્રશ્નમાં આપેલાં ત્રણ બિંદુઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો :

(a) (1, 1, –1), (6, 4, –5), (–4, –2, 3)

(b) (1, 1, 0), (1, 2, 1), (–2, 2, –1)

7. સમતલ $2x + y - z = 5$ દ્વારા અક્ષો પર કપાતા અંતઃખંડ શોધો.

8. y-અક્ષ પર 3 અંતઃખંડવાળા અને ZOX સમતલને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ શોધો.

9. સમતલો $3x - y + 2z - 4 = 0$ અને $x + y + z - 2 = 0$ ના છેદમાંથી તથા બિંદુ (2, 2, 1) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

10. સમતલો $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$ અને $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$ ના છેદમાંથી તથા બિંદુ (2, 1, 3) માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

11. સમતલો $x + y + z = 1$ અને $2x + 3y + 4z = 5$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા તથા સમતલ $x - y + z = 0$ ને લંબ હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

12. સમતલના સદિશ સમીકરણ $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 5$ અને $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 3$ છે. તેમની વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

13. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક પ્રશ્નમાં આપેલા સમતલ સમાંતર છે કે પરસ્પર લંબ છે તે નક્કી કરો અને જો આ પૈકી એક પણ ન હોય, તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો શોધો :

(a) $7x + 5y + 6z + 30 = 0$ અને $3x - y - 10z + 4 = 0$

(b) $2x + y + 3z - 2 = 0$ અને $x - 2y + 5 = 0$

(c) $2x - 2y + 4z + 5 = 0$ અને $3x - 3y + 6z - 1 = 0$

(d) $2x - y + 3z - 1 = 0$ અને $2x - y + 3z + 3 = 0$

(e) $4x + 8y + z - 8 = 0$ અને $y + z - 4 = 0$

14. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક પ્રશ્નમાં આપેલા બિંદુનું તેમને અનુરૂપ આપેલા સમતલથી અંતર શોધો :

	બિંદુ	સમતલ
(a)	(0, 0, 0)	$3x - 4y + 12z = 3$
(b)	(3, –2, 1)	$2x - y + 2z + 3 = 0$
(c)	(2, 3, –5)	$x + 2y - 2z = 9$
(d)	(–6, 0, 0)	$2x - 3y + 6z - 2 = 0$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 26 : એક રેખા સમઘનના વિકર્ણો સાથે α, β, γ અને δ ખૂણા બનાવે છે. સાબિત કરો કે

$$cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma + cos^2\,\delta = \frac{4}{3}$$

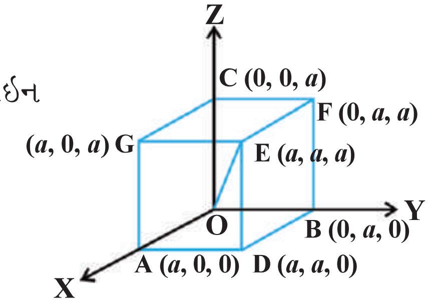
ઉકેલ : સમઘન એ સમાન લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈવાળો લંબ સમાંતર ફલક છે. ધારો કે OADB–FEGC એ પ્રત્યેક બાજુની લંબાઈ a એકમ હોય તેવો સમઘન છે. (આકૃતિ 11.21)

OE, AF, BG અને CD તેના ચાર વિકર્ણો છે.

બે બિંદુઓ O અને E ને જોડતી રેખા વિકર્ણ OE છે. તેની દિક્કોસાઈન

$$\frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}},\ \frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}},\ \frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}$$

અર્થાત્, $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ છે.



આકૃતિ 11.21

આ જ પ્રમાણે AF, BG અને CD ની દિક્કોસાઈન અનુક્રમે $\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ અને $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}$ છે.

ધારો કે, l, m, n દિક્કોસાઈનવાળી રેખા OE, AF, BG, CD સાથે અનુક્રમે α, β, γ, δ ખૂણા બનાવે છે.

$$cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(l + m + n)\,;\ cos\,\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(-l + m + n)$$

$$cos\,\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(l - m + n)\,;\ cos\,\delta = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(l + m - n)$$ **(શા માટે ?)**

વર્ગ કરી સરવાળો કરતાં, આપણને

$$cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma + cos^2\,\delta$$

$$= \frac{1}{3}[(l + m + n)^2 + (-l + m + n)^2 + (l - m + n)^2\,(l + m - n)^2]$$

$$= \frac{1}{3}[4(l^2 + m^2 + n^2)] = \frac{4}{3}$$ મળે. **($l^2 + m^2 + n^2 = 1$ હોવાથી)**

ઉદાહરણ 27 : જે સમતલ $2x + 3y - 2z = 5$ અને $x + 2y - 3z = 8$ પૈકી પ્રત્યેકને લંબ હોય અને જે બિંદુ $(1, -1, 2)$ માંથી પસાર થતો હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : આપેલા બિંદુમાંથી પસાર થતો સમતલ

$A\,(x - 1) + B\,(y + 1) + C\,(z - 2) = 0$ છે. ... (1)

સમતલો $2x + 3y - 2z = 5$ અને $x + 2y - 3z = 8$ સાથે (1)માં આપેલા સમતલ પર લંબત્વની શરત પ્રયોજતાં,

આપણને $2A + 3B - 2C = 0$ અને $A + 2B - 3C = 0$ મળે.

આ સમીકરણોને ઉકેલતાં, આપણને $A = -5C$ અને $B = 4C$ મળે.

આથી, જરૂરી સમીકરણ

$$-5C\,(x-1) + 4C\,(y+1) + C\,(z-2) = 0$$

અર્થાત્ $\quad 5x - 4y - z = 7$ થશે.

ઉદાહરણ 28 : A (3, –1, 2), B (5, 2, 4) અને C (–1, –1, 6) થી બનતા સમતલ અને બિંદુ P (6, 5, 9) વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે A, B, C સમતલનાં ત્રણ બિંદુ છે. બિંદુ P માંથી સમતલ પર દોરેલો લંબપાદ D છે. PD માંગેલું અંતર થશે. $\overrightarrow{PD}$ એ $\overrightarrow{AP}$ નો $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ પરનો પ્રક્ષેપ છે.

આથી, PD = $\overrightarrow{AP}$ નું $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ સાથેનું અંતઃગુણન.

હવે, $$\overrightarrow{AP} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12\hat{i} - 16\hat{j} + 12\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \text{ ની દિશામાં એકમ સદિશ } = \frac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{34}}$$

આથી, $$PD = \left|(3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}) \cdot \frac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{34}}\right|$$

$$= \frac{3\sqrt{34}}{17}$$

વૈકલ્પિક રીત A, B અને C માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ શોધો અને પછી બિંદુ P થી સમતલના અંતરની ગણતરી કરો.

ઉદાહરણ 29 : સાબિત કરો કે રેખાઓ

$$\frac{x-a+d}{\alpha-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta}$$

અને $$\frac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$$ સમતલીય છે.

ઉકેલ :

અહીં, $x_1 = a - d \qquad x_2 = b - c$

$y_1 = a \qquad y_2 = b$

$z_1 = a + d \qquad z_2 = b + c$

$a_1 = \alpha - \delta \qquad a_2 = \beta - \gamma$

$b_1 = \alpha \qquad b_2 = \beta$

$c_1 = \alpha + \delta \qquad c_2 = \beta + \gamma$

હવે નિશ્ચાયક

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-c-a+d & b-a & b+c-a-d \\ \alpha-\delta & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta-\gamma & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix} \text{ લેતાં,}$$

ત્રીજો સ્તંભ પ્રથમ સ્તંભમાં ઉમેરતાં

$$2\begin{vmatrix} b-a & b-a & b+c-a-d \\ \alpha & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix} = 0 \text{ (પ્રથમ અને બીજો સ્તંભ સમાન હોવાથી)}$$

$\therefore$ આપેલી બંને રેખાઓ સમતલીય છે.

ઉદાહરણ 30 : બિંદુઓ A (3, 4, 1) અને B (5, 1, 6) માંથી પસાર થતી રેખા XY સમતલને જે બિંદુએ છેદે તે બિંદુના યામ શોધો.

ઉકેલ : બિંદુઓ A અને B માંથી પસાર થતી રેખાનું સદિશ સમીકરણ

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} + \lambda\,[(5-3)\hat{i} + (1-4)\hat{j} + (6-1)\hat{k}]$$

અર્થાત્ $\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} + \lambda\,(2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$ ... (1)

ધારો કે રેખા AB એ XY સમતલને P બિંદુએ છેદે છે. તેથી બિંદુ P નો સ્થાનસદિશ $x\hat{i} + y\hat{j}$ સ્વરૂપમાં મળે. આ બિંદુ સમીકરણ (1)નું સમાધાન કરશે જ. (શા માટે ?)

અર્થાત્ $$x\hat{i} + y\hat{j} = (3 + 2\lambda)\hat{i} + (4 - 3\lambda)\hat{j} + (1 + 5\lambda)\hat{k}$$

$\hat{i}$, $\hat{j}$ અને $\hat{k}$ ના સહગુણકો સરખાવતાં, (અર્થાત્ સમાન સદિશના અનુરૂપ યામ સમાન હોય.)

$$x = 3 + 2\lambda$$
$$y = 4 - 3\lambda$$
$$0 = 1 + 5\lambda$$

ઉપરનાં સમીકરણો ઉકેલતાં,

$$x = \frac{13}{5} \text{ અને } y = \frac{23}{5}$$

આથી માંગેલા બિંદુના યામ $\left(\frac{13}{5}, \frac{23}{5}, 0\right)$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 11

1. સાબિત કરો કે ઊગમબિંદુને (2, 1, 1) બિંદુ સાથે જોડતી રેખા એ બિંદુઓ (3, 5, –1), (4, 3, –1) થી બનતી રેખાને લંબ છે.
2. જો પરસ્પર લંબ હોય તેવી બે રેખાઓની દિક્કોસાઈન l_1, m_1, n_1 અને l_2, m_2, n_2 હોય, તો તે બંનેને લંબરેખાની દિક્કોસાઈન $m_1n_2 - m_2n_1$, $n_1l_2 - n_2l_1$, $l_1m_2 - l_2m_1$ છે.

3. જે રેખાઓના દિક્‌ગુણોત્તર a, b, c અને $b - c, c - a, a - b$ હોય તે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

4. x-અક્ષને સમાંતર અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

5. જો બિંદુઓ A, B, C, D ના યામ અનુક્રમે (1, 2, 3), (4, 5, 7), (–4, 3, –6) અને (2, 9, 2) હોય, તો રેખાઓ AB અને CD વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

6. જો રેખાઓ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ અને $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$ પરસ્પર લંબ હોય, તો k શોધો.

7. (1, 2, 3) માંથી પસાર થતી અને સમતલ $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}) + 9 = 0$ ને લંબ રેખાનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

8. (a, b, c) માંથી પસાર થતા અને સમતલ $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 2$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ શોધો.

9. રેખાઓ $\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ અને $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

10. (5, 1, 6) અને (3, 4, 1) માંથી પસાર થતી રેખા YZ સમતલના જે બિંદુમાંથી પસાર થાય તેના યામ શોધો.

11. (5, 1, 6) અને (3, 4, 1) માંથી પસાર થતી રેખા ZX સમતલના જે બિંદુમાંથી પસાર થાય તે બિંદુના યામ શોધો.

12. (3, –4, –5) અને (2, –3, 1) માંથી પસાર થતી રેખા $2x + y + z = 7$ સમતલના જે બિંદુમાંથી પસાર થાય તે બિંદુના યામ શોધો.

13. (–1, 3, 2) બિંદુમાંથી પસાર થતા તથા પ્રત્યેક સમતલ $x + 2y + 3z = 5$ અને $3x + 3y + z = 0$ ને લંબ હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

14. જો બિંદુઓ $(1, 1, p)$ અને (–3, 0, 1) સમતલ $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}) + 13 = 0$ થી સમાન અંતરે આવેલાં હોય, તો p નું મૂલ્ય શોધો.

15. સમતલો $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 1$ અને $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + 4 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા તથા x-અક્ષને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ શોધો.

16. જો O ઊગમબિંદુ હોય અને P ના યામ (1, 2, –3) હોય, તો P માંથી પસાર થતા અને OP ને લંબ સમતલનું સમીકરણ શોધો.

17. સમતલો $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - 4 = 0$, $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 5 = 0$ ની છેદરેખાને સમાવતા તથા સમતલ $\vec{r} \cdot (5\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) + 8 = 0$ ને લંબ સમતલનું સમીકરણ શોધો.

18. રેખા $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ અને સમતલ $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$ ના છેદબિંદુથી બિંદુ $(-1, -5, -10)$ નું અંતર શોધો.

19. $(1, 2, 3)$ માંથી પસાર થતી અને સમતલો $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 5$ તથા $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ ને સમાંતર રેખાનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

20. બિંદુ $(1, 2, -4)$ માંથી પસાર થતી અને બે રેખાઓ $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$ તથા

$\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$ ને લંબ હોય તેવી રેખાનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

21. જો સમતલના અંતઃખંડો a, b, c હોય અને તે ઊગમબિંદુથી p એકમ અંતરે આવેલું હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$.

પ્રશ્નો 22 તથા 23 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

22. બે સમતલો : $2x + 3y + 4z = 4$ અને $4x + 6y + 8z = 12$ વચ્ચેનું અંતર

(A) 2 એકમ (B) 4 એકમ (C) 8 એકમ (D) $\frac{2}{\sqrt{29}}$ એકમ

23. સમતલો : $2x - y + 4z = 5$ અને $5x - 2.5y + 10z = 6$

(A) પરસ્પર લંબ છે. (B) સમાંતર છે. (C) y-અક્ષને છેદે છે. (D) $\left(0, 0, \frac{5}{4}\right)$ માંથી પસાર થાય છે.

સારાંશ

- રેખાએ અક્ષોની ધન દિશા સાથે બનાવેલા ખૂણાઓના કોસાઈનને **રેખાની દિક્કોસાઈન** કહે છે.
- જો રેખાની દિક્કોસાઈન l, m, n હોય, તો $l^2 + m^2 + n^2 = 1$
- બે બિંદુઓ $P(x_1, y_1, z_1)$ અને $Q(x_2, y_2, z_2)$ ને જોડતી રેખાની દિક્કોસાઈન $\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}$

  છે. $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- રેખાની દિક્કોસાઈનની સમપ્રમાણ સંખ્યાઓને તે **રેખાના દિક્ગુણોત્તર** કહે છે.
- જો રેખાની દિક્કોસાઈન l, m, n અને દિક્ગુણોત્તર a, b, c હોય, તો

  $$l = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ m = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ n = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
- અવકાશની જે રેખાઓ સમાંતર નથી તથા છેદતી નથી તેમને **વિષમતલીય રેખાઓ** કહે છે. તેઓ ભિન્ન સમતલમાં આવેલી હોય છે. (તેમને સમાવતું કોઈ સમતલ હોઈ જ ના શકે.)

- કોઈ પણ બિંદુ (પ્રાથમિક ધોરણે ઊગમબિંદુ)માંથી પ્રત્યેક વિષમતલીય રેખાને સમાંતર દોરેલી એકબીજાને છેદતી બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાને **વિષમતલીય રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો** કહે છે.
- જો l_1, m_1, n_1 અને l_2, m_2, n_2 એ રેખાઓની દિક્‌કોસાઇન હોય અને તેમની વચ્ચેનો લઘુકોણ θ હોય, તો $cos\ \theta = |l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|$ થાય.
- જો a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 એ બે રેખાઓના દિક્‌ગુણોત્તર હોય અને આ બે રેખાઓ વચ્ચેનો લઘુકોણ θ હોય, તો

$$cos\ \theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$

- સ્થાન સદિશ $\vec{a}$ વાળા આપેલા બિંદુમાંથી પસાર થતી અને આપેલ સદિશ $\vec{b}$ ને સમાંતર રેખાનું સદિશ સમીકરણ $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ છે.
- બિંદુ (x_1, y_1, z_1) માંથી પસાર થતી અને l, m, n દિક્‌કોસાઇનવાળી રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$ થશે.

- $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ સ્થાન સદિશવાળાં બે બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાનું સદિશ સમીકરણ

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ છે.

- બે બિંદુ (x_1, y_1, z_1) અને (x_2, y_2, z_2) માંથી પસાર થતી રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$ છે.

- જો $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \lambda\vec{b_2}$ વચ્ચેનો લઘુકોણ θ હોય, તો

$$cos\ \theta = \left|\frac{\vec{b_1} \cdot \vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}\right|$$ છે.

- જો બે રેખાનાં સમીકરણ $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ અને $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ હોય તથા તેમની વચ્ચેનો લઘુકોણ θ હોય, તો $cos\ \theta = |l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|$.
- બે વિષમતલીય રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર એટલે કે બંને રેખાઓને લંબ રેખાખંડની લંબાઈ.
- $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \lambda\vec{b_2}$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર

$$\frac{\left|(\vec{b_1} \times \vec{b_2}) \cdot (\vec{a_2} - \vec{a_1})\right|}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|}$$ છે.

- રેખાઓ $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ અને $\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર

$$\left|\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}\right|$$ છે.

- સમાંતર રેખાઓ $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b}$ અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu\vec{b}$ વચ્ચેનું અંતર

$$\left|\frac{\vec{b}\times\left(\vec{a_2}-\vec{a_1}\right)}{|\vec{b}|}\right|$$ છે.

- ઊગમબિંદુથી d અંતરે આવેલા અને ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ પરના અભિલંબ એકમ સદિશ $\hat{n}$ વાળા સમતલનું સદિશ સ્વરૂપમાં સમીકરણ $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$ છે.
- ઊગમબિંદુથી d અંતરે આવેલા અને જેના સમતલ પરના અભિલંબ સદિશની દિક્કોસાઈન l, m, n હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ $lx + my + nz = d$ છે.
- $\vec{a}$ સ્થાન સદિશવાળા બિંદુમાંથી પસાર થતા અને સદિશ $\vec{n}$ ને લંબ હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ $(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n} = 0$
- A, B, C દિક્ગુણોત્તરવાળી આપેલી રેખાને લંબ અને આપેલ બિંદુ (x_1, y_1, z_1) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$
- ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓ (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) અને (x_3, y_3, z_3) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$ છે.

- $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ સ્થાન સદિશવાળાં ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ $(\vec{r}-\vec{a})\cdot\left[\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\times\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\right] = 0$ છે.
- યામાક્ષોને $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ અને $(0, 0, c)$ માં છેદતા સમતલનું સમીકરણ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ છે.
- સમતલો $\vec{r}\cdot\vec{n_1} = d_1$ અને $\vec{r}\cdot\vec{n_2} = d_2$ ના છેદમાંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ $\vec{r}\cdot\left(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2\right) = d_1+\lambda d_2$ છે, જ્યાં λ એ કોઈ પણ શૂન્યેતર અચળ છે.
- આપેલા બે સમતલો $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ અને $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ના છેદમાંથી પસાર થતા સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ
$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$

- જો $(\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2}) = 0$, તો બે રેખાઓ $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{b_1}$ અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu \vec{b_2}$ સમતલીય છે.
- જો $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ હોય, તો કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાંની બે રેખાઓ

  $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$ અને $\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$ સમતલીય થાય.
- જો સદિશ સ્વરૂપે આપેલા બે સમતલો $\vec{r} \cdot \vec{n_1} = d_1$ અને $\vec{r} \cdot \vec{n_2} = d_2$ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો

  $\theta = cos^{-1} \left| \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} \right|$
- રેખા $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ અને સમતલ $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$ વચ્ચેનો ખૂણો ϕ હોય, તો $sin\ \phi = \left| \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|} \right|$
- સમતલો $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ અને $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ વચ્ચેનો ખૂણો

  $cos\ \theta = \left| \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right|$ દ્વારા મળે.
- જે બિંદુનો સ્થાન સદિશ $\vec{a}$ હોય તેનું $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$ થી લંબઅંતર $|d - \vec{a} \cdot \hat{n}|$ છે.
- (x_1, y_1, z_1) નું સમતલ $Ax + By + Cz + D = 0$ થી અંતર $\left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$ છે.