સારાંશ

આ પ્રકરણમાં નીચેની સંકલ્પનાઓ અને તેનાં વ્યાપક સ્વરૂપોનો અભ્યાસ કર્યો:

- સમતલમાં નિશ્ચિત બિંદુથી અચળ અંતરે આવેલાં બિંદુઓનો ગણ એટલે વર્તુળ.
- (h, k) કેન્દ્ર અને r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \text{ છે.}$$
- સમતલમાં નિશ્ચિત બિંદુ અને નિશ્ચિત રેખાથી સમાન અંતરે આપેલ બિંદુઓનો ગણ એટલે પરવલય.
- જેની નાભિ $(a, 0)$ $(a > 0)$ અને નિયામિકા $x = - a$ હોય તેવા પરવલયનું સમીકરણ $y^2 = 4ax$ છે.
- નાભિમાંથી પસાર થતાં અને જેનાં અંત્યબિંદુઓ પરવલય પર હોય તેવા અક્ષને લંબ રેખાખંડને નાભિલંબ કહેવાય.
- $y^2 = 4ax$ પરવલયના નાભિલંબની લંબાઈ $4a$ છે
- સમતલમાં બે નિશ્ચિત બિંદુથી જેમનાં અંતરનો સરવાળો અચળ હોય તેવા બિંદુના ગણને ઉપવલય કહેવાય.
- જે ઉપવલયનાં નાભિઓ x-અક્ષ પર હોય તેનું સમીકરણ : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
- પ્રધાન અક્ષને લંબ હોય તેવા ઉપવલયના નાભિમાંથી પસાર થતા અને જેનાં અંત્યબિંદુઓ ઉપવલય પર હોય તેવા રેખાખંડને નાભિલંબ કહેવાય.
- ઉપવલય $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ના નાભિલંબની લંબાઈ $\dfrac{2b^2}{a}$ છે, જ્યાં $a > b$.
- ઉપવલયમાં તેના કેન્દ્રથી કોઈ પણ એક નાભિ અને ઉપવલયના એક શિરોબિંદુ વચ્ચેના અંતરના ગુણોત્તરને ઉત્કેન્દ્રતા કહેવાય.
- સમતલમાં બે નિશ્ચિત બિંદુથી જેમના અંતરનો નિરપેક્ષ તફાવત અચળ હોય તેવા બિંદુગણને અતિવલય કહેવાય.
- જે અતિવલયનાં નાભિઓ x-અક્ષ પર હોય તેનું સમીકરણ : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ છે.
- અતિવલયના નાભિમાંથી પસાર થતા અને જેનાં અંત્યબિંદુઓ અતિવલય પર મુખ્ય અક્ષને લંબ રેખાખંડ ઉપર હોય તેવા રેખાખંડને નાભિલંબ કહેવાય.
- અતિવલય : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ના નાભિલંબની લંબાઈ : $\dfrac{2b^2}{a}$ છે.
- અતિવલયમાં તેના કેન્દ્રથી કોઈ એક નાભિ અને અતિવલયના એક શિરોબિંદુ વચ્ચેના અંતરના ગુણોત્તરને ઉત્કેન્દ્રતા કહેવાય.

Historical Note

Geometry is one of the most ancient branches of mathematics. The Greek geometers investigated the properties of many curves that have theoretical and practical importance. Euclid wrote his treatise on geometry around 300 B.C. He was the first who organised the geometric figures based on certain axioms suggested by physical considerations. Geometry as initially studied by the ancient Indians and Greeks, who made essentially no use of the process of algebra. The synthetic approach to the subject of geometry as given by Euclid and in *Sulbasutras*, etc., was continued for some 1300 years. In the 200 B.C., Apollonius wrote a book called '*The Conic*' which was all about conic sections with many important discoveries that

have remained unsurpassed for eighteen centuries.

Modern analytic geometry is called '*Cartesian*' after the name of Rene Descartes (1596-1650) whose relevant 'La Geometrie' was published in 1637. But the fundamental principle and method of analytical geometry were already discovered by Pierre de Fermat (1601-1665). Unfortunately, Fermat's treatise on the subject, entitled *Ad Locus Planos et So LIDOS Isagoge* (Introduction to Plane and Solid Loci) was published only posthumously in 1679. So, Descartes came to be regarded as the unique inventor of the analytical geometry.

Isaac Barrow avoided using cartesian method. Newton used method of undetermined coefficients to find equations of curves. He used several types of coordinates including polar and bipolar. Leibnitz used the terms '*abscissa*', '*ordinate*' and '*coordinate*'. L' Hospital (about 1700) wrote an important textbook on analytical geometry.

Clairaut (1729) was the first to give the distance formula although in clumsy form. He also gave the intercept form of the linear equation. Cramer (1750) made formal use of the two axes and gave the equation of a circle as

$$(y - a)^2 + (b - x)^2 = r$$

He gave the best exposition of the analytical geometry of his time. Monge (1781) gave the modern 'point-slope' form of equation of a line as

$$y - y' = a(x - x')$$

and the condition of perpendicularity of two lines as $aa' + 1 = 0$.

S.F. Lacroix (1765–1843) was a prolific textbook writer, but his contributions to analytical geometry are found scattered. He gave the 'two-point' form of equation of a line as

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$$

and the length of the perpendicular from (α, β) on $y = ax + b$ as $\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}}$. His formula for finding angle between two lines was $\tan\theta = \left(\frac{a' - a}{1 + aa'}\right)$. It is, of course, surprising that one had to wait for more than 150 years after the invention of analytical geometry before finding such essential basic formula. In 1818, C. Lame, a civil engineer, gave $mE + m'E' = 0$ as the curve passing through the points of intersection of two loci $E = 0$ and $E' = 0$.

Many important discoveries, both in Mathematics and Science, have been linked to the conic sections. The Greeks particularly Archimedes (287–212 B.C.) and Apollonius (200 B.C.) studied conic sections for their own beauty. These curves are important tools for present day exploration of outer space and also for research into behaviour of atomic particles.

પ્રકરણ 12

ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિનો પરિચય

❖*Mathematics is both the queen and the hand-maiden of all sciences – E.T. BELL*❖

12.1 પ્રાસ્તાવિક

Leonhard Euler
(1707-1783)

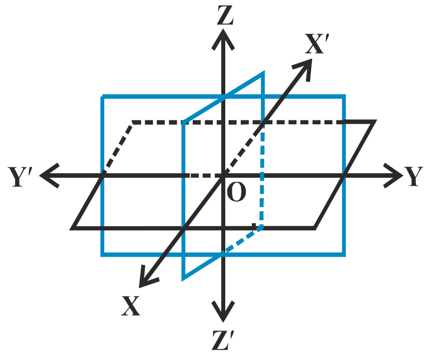
તમને યાદ હશે કે સમતલમાં બિંદુનું સ્થાન દર્શાવવા માટે આપણને સમતલમાં બે પરસ્પર લંબ રેખાઓની જરૂર પડે છે. આ રેખાઓને *યામાક્ષો* કહે છે અને બે સંખ્યાઓને *અક્ષોને સાપેક્ષ તે બિંદુના યામ* કહે છે. વાસ્તવિક જીવનમાં આપણને કેવળ સમતલમાં રહેલાં બિંદુઓ સાથે જ વ્યવહાર કરવાનો હોય છે તેમ નથી; ઉદાહરણ તરીકે, અવકાશમાં ઉછાળેલા દડાનું વિવિધ સમયબિંદુએ સ્થાન અથવા એક સ્થળેથી બીજા સ્થળે ઊડતા વિમાનનું ઉડ્ડયન દરમિયાન જુદાં જુદાં સમયબિંદુએ સ્થાન.

આ જ રીતે જો રૂમની છતથી લટકી રહેલા વીજળીના ગોળાના સૌથી નીચેના બિંદુને અથવા રૂમની છત સાથે લાગેલા પંખાના મધ્યબિંદુને નક્કી કરવું હોય, તો આપણને માત્ર જે બિંદુ નક્કી કરવું છે તેના બે લંબ દીવાલોથી લંબઅંતરો જ નહિ, પરંતુ તે બિંદુની રૂમના તળિયેથી ઊંચાઈની પણ જરૂર પડશે. પરસ્પર ત્રણ લંબ સમતલોથી બિંદુનાં લંબઅંતરો એટલે કે રૂમનું ભોયતળિયું અને રૂમની બે પાસપાસેની દીવાલોથી લંબઅંતરો એવી ત્રણ સંખ્યાઓની આપણને જરૂર પડશે. *અહીં, આ ત્રણ સંખ્યાઓ ત્રણ અંતરો દર્શાવે છે તેમને માત્ર બે જ નહિં ત્રણ યામ-સમતલોને સાપેક્ષ બિંદુના યામ*

કહે છે. આથી અવકાશમાં બિંદુને ત્રણ યામ હોય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે ત્રિપરિમાણીય અવકાશમાં ભૂમિતિના પાયાના સિદ્ધાંતોનો અભ્યાસ કરીશું.

12.2 ત્રિપરિમાણીય અવકાશમાં યામાક્ષો અને યામ સમતલો

બિંદુ O આગળ છેદતાં એકબીજાને પરસ્પર લંબ હોય એવા ત્રણ સમતલો લો. (આકૃતિ 12.1) આ ત્રણ સમતલો અનુરૂપ રેખાઓ X'OX, Y'OY અને Z'OZ માં છેદે છે. તેમને અનુક્રમે x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ કહેવાય છે. આપણે એ પણ નોંધીશું કે, આ રેખાઓ એકબીજીને પરસ્પર લંબ છે. આ રેખાઓ લંબાક્ષ યામ-પદ્ધતિનું નિર્માણ કરે છે. સમતલો XOY, YOZ અને ZOX ને અનુક્રમે XY-સમતલ, YZ-સમતલ અને ZX-સમતલ કહે છે. તે ત્રણ ***યામ-સમતલો*** તરીકે ઓળખાય છે. આપણે XOY સમતલને કાગળનું સમતલ અને રેખા Z'OZ ને સમતલ XOY ને લંબરેખા તરીકે લઈએ. જો કાગળના સમતલને સમક્ષિતિજ સમતલ લઈએ તો રેખા Z'OZ શિરોલંબ થશે.



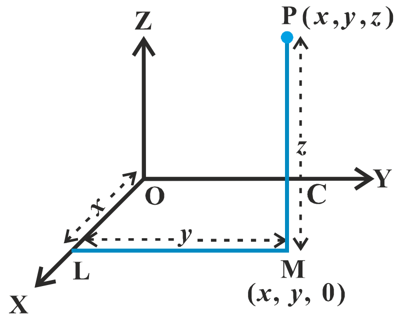
આકૃતિ 12.1

XY- સમતલથી ઊર્ધ્વ તરફ OZ ની દિશામાં અંતર ધન લેવામાં આવે છે તથા અધઃ તરફ OZ' ની દિશામાં અંતર ઋણ લેવામાં આવે છે. આ જ રીતે, ZX-સમતલની જમણી તરફ OY ની દિશામાં અંતર ધન અને ZX-સમતલની ડાબી તરફ OY' ની દિશામાં અંતર ઋણ, YZ-સમતલની સામેની તરફ OX ની દિશામાં અંતર ધન અને પાછળની તરફ OX' ની દિશામાં અંતર ઋણ લેવામાં આવે છે. બિંદુ O ને યામ-પદ્ધતિમાં ઊગમબિંદુ કહે છે. ત્રણેય યામ-સમતલો અવકાશનું અષ્ટાંશો (એકનો આઠમો ભાગ) તરીકે ઓળખાતા આઠ ભાગોમાં વિભાજન કરે છે. આ અષ્ટાંશોનાં નામ અનુક્રમે XOYZ, X'OYZ, X'OY'Z, XOY'Z, XOYZ', X'OYZ', X'OY'Z' અને XOY'Z' છે અને તેઓ અનુક્રમે અષ્ટાંશો I, II, III, ..., VIII સંકેતોથી દર્શાવાય છે.

12.3 અવકાશમાં બિંદુના યામ

યામાક્ષો, યામ-સમતલો અને ઊગમબિંદુ ધરાવતી નિયત યામ-પદ્ધતિની પસંદગી કર્યા પછી, હવે આપણે એ વર્ણવીશું કે અવકાશમાં આપેલ બિંદુ સાથે કેવી રીતે ત્રણ યામ (x, y, z) સાંકળી શકાય અને એથી ઊલટું આપેલ સંખ્યાઓના ત્રય (x, y, z) કેવી રીતે અવકાશમાં બિંદુ દર્શાવે છે.

અવકાશમાં બિંદુ P આપેલ છે. આપણે XY- સમતલ પર લંબ PM દોરીશું. M એ લંબનો લંબપાદ છે.(આકૃતિ 12.2.) હવે આપણે બિંદુ M થી x-અક્ષને L માં મળે એવો લંબ ML દોરીશું. તે x-અક્ષને L આગળ મળે છે. OL ને x, LM ને y અને MP ને z લો. અહીં x, y અને z ને અવકાશમાં બિંદુ P ના અનુક્રમે x, y અને z-યામ કહેવાય છે. આકૃતિ 12.2 પરથી આપણે નોંધી શકીએ કે, બિંદુ P (x, y, z) એ અષ્ટાંશ XOYZ માં આવેલ છે અને તેથી બધા x, y, z ધન છે. જો બિંદુ P અન્ય કોઈ અષ્ટાંશમાં હોત તો, x, y અને z ની સંજ્ઞા તેને અનુરૂપ બદલાઈ હોત. આમ, અવકાશના પ્રત્યેક બિંદુ P ને અનુરૂપ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ક્રમિક ત્રય (x, y, z) સંકળાયેલાં છે.

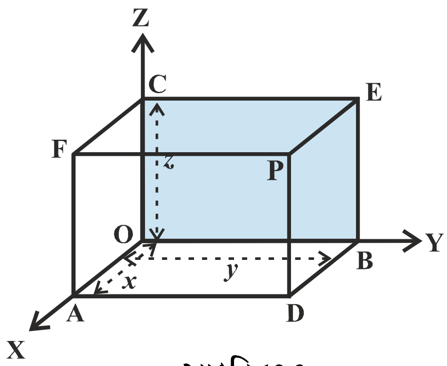


આકૃતિ 12.2

આનાથી ઊલટી રીતે, આપેલ કોઈપણ ત્રય (x, y, z) ને સંગત સૌપ્રથમ આપણે x-અક્ષ પર બિંદુ L એ x ને અનુરૂપ નિયત કરીશું, ત્યાર બાદ XY-સમતલમાં એવું બિંદુ M નિવિષ્ટ કરીશું કે જેથી (x, y) એ બિંદુ XY-સમતલમાં M ના યામ હોય. અહીં એ નોંધીશું કે,

LM એ x-અક્ષને લંબ અથવા y-અક્ષને સમાંતર છે. બિંદુ M સુધી પહોંચીને XY-સમતલ પર લંબ MP દોરીશું અને z ને અનુરૂપ બિંદુ P દર્શાવીશું. આ રીતે મેળવેલા બિંદુ P ના યામ ત્યાર બાદ (x, y, z) થશે. આમ, અવકાશનાં બિંદુઓ અને વાસ્તવિક સંખ્યાઓનાં ક્રમિક ત્રય વચ્ચે એક-એક સંગતતા અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

અન્યથા, અવકાશના બિંદુ P માંથી યામ-સમતલોને સમાંતર ત્રણ સમતલો એવા મળે કે જે x- અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષને અનુક્રમે બિંદુઓ A, B અને C માં છેદે. (આકૃતિ 12.3.) હવે, OA = x, OB = y અને OC = z લો. તેથી બિંદુ P ના યામ x, y અને z થશે અને આપણે P (x, y, z) લખીશું. એથી ઊલટી રીતે, આપણે આપેલ x, y અને z ને સંગત ત્રણ બિંદુઓ A, B અને C ને ત્રણેય યામાક્ષો પર દર્શાવીશું. આપણે બિંદુઓ A, B અને C માંથી અનુક્રમે YZ-સમતલ, ZX-સમતલ અને XY-સમતલને સમાંતર સમતલો દોરીશું. આ ત્રણેય સમતલો ADPF, BDPE અને CEPF નું છેદબિંદુ એ સ્પષ્ટપણે બિંદુ P છે, જે ક્રમિક ત્રય (x, y, z) ને અનુરૂપ છે. આપણે અત્રે એ નિરીક્ષણ કરીએ કે જો P (x, y, z) એ અવકાશનું કોઈ બિંદુ હોય તો x, y અને z એ અનુક્રમે YZ, ZX અને XY સમતલોથી લંબઅંતરો છે.



આકૃતિ 12.3

> **નોંધ** ઊગમબિંદુ O ના યામ (0,0,0) છે. x-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ $(x, 0, 0)$ અને YZ-સમતલ પરનાં કોઈ પણ બિંદુના યામ $(0, y, z)$ હોય છે વગેરે.

નોંધ : બિંદુના યામોની સંજ્ઞા નિર્દેશ કરે છે કે બિંદુ કયા અષ્ટાંશમાં છે. નીચેનું કોષ્ટક આઠ અષ્ટાંશમાં યામોની સંજ્ઞા દર્શાવે છે:

કોષ્ટક 12.1

અષ્ટાંશો / યામ	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 12.3 માં જો P (2, 4, 5) હોય તો F ના યામ શોધો.

ઉકેલ : બિંદુ F માટે, OY ની દિશામાં અંતરનું માપ શૂન્ય છે. તેથી બિંદુ F ના યામ (2, 0, 5) થશે.

ઉદાહરણ 2 : બિંદુઓ (–3, 1, 2) અને (–3, 1, –2) કયા અષ્ટાંશમાં આવેલ છે, તે શોધો.

ઉકેલ : કોષ્ટક 12.1 પરથી, બિંદુઓ (–3, 1, 2) દ્વિતીય અષ્ટાંશમાં અને બિંદુ (–3, 1, –2) છઠ્ઠા અષ્ટાંશમાં આવેલા છે.

સ્વાધ્યાય 12.1

1. એક બિંદુ x-અક્ષ પર આવેલ છે. તે બિંદુના y-યામ અને z-યામ શું થશે ?
2. એક બિંદુ XZ- સમતલમાં છે. તે બિંદુના y-યામ અંગે શું કહેશો ?
3. નીચે આપેલાં બિંદુઓ કયા અષ્ટાંશમાં છે તે જણાવો :

   (1, 2, 3), (4, –2, 3), (4, –2, –5), (4, 2, –5), (– 4, 2, –5), (– 4, 2, 5), (–3, –1, 6), (2, – 4, –7)

4. ખાલી જગ્યા પૂરો :

(i) x-અક્ષ અને y-અક્ષ બંને સાથે મળીને જે સમતલનું નિર્માણ કરે છે તે.......................થી ઓળખાય છે.

(ii) XY-સમતલમાં બિંદુઓના યામ.......................સ્વરૂપે હોય છે.

(iii) યામ-સમતલો અવકાશનું.......................અષ્ટાંશોમાં વિભાજન કરે છે.

12.4 બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર

દ્વિપરિમાણીય યામ-પદ્ધતિમાં આપણે બે બિંદુઓ વચ્ચેના અંતર વિશે અભ્યાસ કર્યો છે. ચાલો, હવે આપણે આ અભ્યાસને ત્રિપરિમાણીય પદ્ધતિમાં વિસ્તૃત કરીએ.

ધારો કે $P(x_1, y_1, z_1)$ અને $Q(x_2, y_2, z_2)$ એ લંબાક્ષ પદ્ધતિના અક્ષો OX, OY અને OZ ને સાપેક્ષ બે બિંદુઓ છે. જેનો એક વિકર્ણ PQ હોય તેવો લંબઘન રચવા માટે યામ-સમતલોને સમાંતર હોય એવા સમતલો બિંદુઓ P અને Q માંથી દોરો. (આકૃતિ 12.4)

હવે, $\angle PAQ$ કાટખૂણો હોવાથી ત્રિકોણ PAQ પરથી,

$$PQ^2 = PA^2 + AQ^2 \qquad ...(1)$$

વળી, ત્રિકોણ ANQ એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે તથા $\angle ANQ$ એ કાટખૂણો છે.

માટે $AQ^2 = AN^2 + NQ^2 \qquad ...(2)$

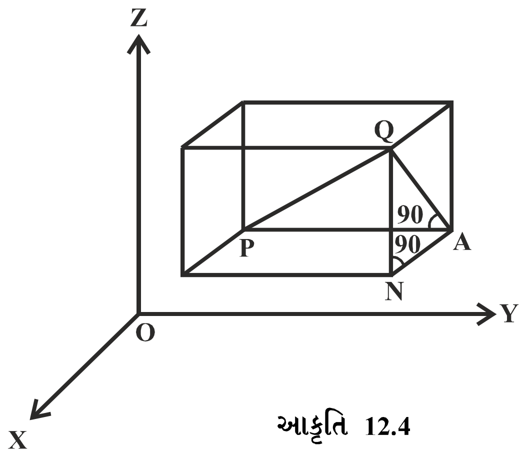
(1) અને (2) પરથી,

$PQ^2 = PA^2 + AN^2 + NQ^2$ મળે છે.

હવે, $PA = y_2 - y_1$, $AN = x_2 - x_1$ અને $NQ = z_2 - z_1$

તેથી, $PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$



આકૃતિ 12.4

આ સૂત્ર આપણને બે બિંદુઓ (x_1, y_1, z_1) અને (x_2, y_2, z_2) વચ્ચેનું અંતર આપે છે.

વિશિષ્ટ વિકલ્પમાં $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ હોય, તો એટલે કે બિંદુ P ઊગમબિંદુ O હોય, તો $OQ = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$. આ સૂત્ર ઊગમબિંદુ O અને કોઈ પણ બિંદુ $Q(x_2, y_2, z_2)$ વચ્ચેનું અંતર આપે છે.

ઉદાહરણ 3 : બિંદુઓ $P(1, -3, 4)$ અને $Q(-4, 1, 2)$ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ : બિંદુઓ $P(1, -3, 4)$ અને $Q(-4, 1, 2)$ વચ્ચેનું અંતર PQ હોય, તો

$$PQ = \sqrt{(-4-1)^2 + (1+3)^2 + (2-4)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 16 + 4}$$

$$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ એકમ}$$

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે બિંદુઓ P (–2, 3, 5), Q (1, 2, 3) અને R (7, 0, –1) સમરેખ છે.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે જો બિંદુઓ એક રેખા પર આવેલાં હોય તો તેમને સમરેખ બિંદુઓ કહે છે.

હવે, $PQ = \sqrt{(1+2)^2+(2-3)^2+(3-5)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$QR = \sqrt{(7-1)^2+(0-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

અને $PR = \sqrt{(7+2)^2+(0-3)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{81+9+36} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$

આમ, PQ + QR = PR.

તેથી P, Q અને R સમરેખ છે.

ઉદાહરણ 5 : શું બિંદુઓ A (3, 6, 9), B (10, 20, 30) અને C (25, – 41, 5) એ કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે ?

ઉકેલ : અંતરસૂત્ર પ્રમાણે આપણી પાસે,

$AB^2 = (10-3)^2 + (20-6)^2 + (30-9)^2$

$= 49 + 196 + 441 = 686$

$BC^2 = (25-10)^2 + (-41-20)^2 + (5-30)^2$

$= 225 + 3721 + 625 = 4571$

$CA^2 = (3-25)^2 + (6+41)^2 + (9-5)^2$

$= 484 + 2209 + 16 = 2709$

સ્પષ્ટ છે કે, $CA^2 + AB^2 \neq BC^2$. સૌથી મોટી બાજુ BC છે.

આથી Δ ABC કાટકોણ ત્રિકોણ નથી.

ઉદાહરણ 6 : જો A અને B અનુક્રમે બિંદુઓ (3, 4, 5) અને (–1, 3, –7) હોય, તો $PA^2 + PB^2 = 2k^2$ થાય એવા બિંદુ P ના બિંદુગણનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે બિંદુ P ના યામ (x, y, z) છે.

અહીં, $PA^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2$

$PB^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2$

આપેલ શરત પ્રમાણે $PA^2 + PB^2 = 2k^2$

$\therefore \quad (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 + (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2 = 2k^2$

એટલે કે, $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 14y + 4z = 2k^2 - 109$.

સ્વાધ્યાય 12.2

1. આપેલ બિંદુઓની જોડ વચ્ચેનું અંતર શોધો :

(i) (2, 3, 5) અને (4, 3, 1) (ii) (–3, 7, 2) અને (2, 4, –1)

(iii) (–1, 3, – 4) અને (1, –3, 4) (iv) (2, –1, 3) અને (–2, 1, 3)

2. સાબિત કરો કે બિંદુઓ (–2, 3, 5), (1, 2, 3) અને (7, 0, –1) સમરેખ છે.

3. નીચે આપેલાં વિધાનો ચકાસો :

(i) (0, 7, –10), (1, 6, – 6) અને (4, 9, – 6) એ સમદ્વિભુજ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

(ii) (0, 7, 10), (–1, 6, 6) અને (– 4, 9, 6) એ કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

(iii) (–1, 2, 1), (1, –2, 5), (4, –7, 8) અને (2, –3, 4) એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

4. બિંદુઓ (1, 2, 3) અને (3, 2, –1) થી સમાન અંતરે આવેલાં બિંદુઓના ગણનું સમીકરણ મેળવો.

5. બિંદુ A (4, 0, 0) અને B (– 4, 0, 0) થી જેમનાં અંતરોનો સરવાળો 10 થતો હોય તેવા બિંદુગણ P નું સમીકરણ મેળવો.

12.5 વિભાજન સૂત્ર

દ્વિપરિમાણીય ભૂમિતિમાં રેખાખંડનું આપેલ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતાં બિંદુના યામ કેવી રીતે શોધવા તેનો અભ્યાસ આપણે કર્યો છે. હવે, નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે આપણે આ ક્રિયાને ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિમાં વિસ્તૃત કરીશું.

ધારો કે બે બિંદુઓ $P(x_1, y_1, z_1)$ અને $Q (x_2, y_2, z_2)$ આપેલ છે અને બિંદુ $R (x, y, z)$ એ PQ નું આપેલ ગુણોત્તર $m : n$ માં અંતઃવિભાજન કરે છે. XY-સમતલ પર PL, QM અને RN લંબ દોરો. સ્પષ્ટપણે PL || RN || QM અને આ લંબોના લંબપાદ XY-સમતલ પર છે. PL, RN અને QM ને સમાવતા સમતલ અને XY-સમતલનો છેદ એ L, M અને N ને સમાવતી રેખા છે. R માંથી રેખા LM ને સમાંતર રેખા ST દોરો. રેખા ST એ રેખા LP નું બિંદુ S માં બહારથી વિભાજન કરે છે અને રેખા MQ ને T આગળ છેદે છે. આકૃતિ 12.5 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે,

એ પણ જુઓ કે બંને ચતુર્ભુજ LNRS અને NMTR સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

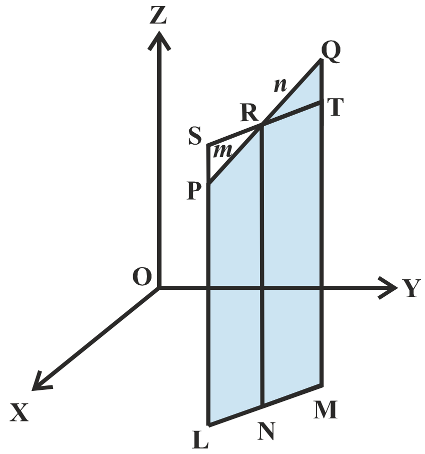
ત્રિકોણો PSR અને QTR સમરૂપ છે. માટે,

$$\frac{m}{n} = \frac{PR}{QR} = \frac{SP}{QT} = \frac{SL - PL}{QM - TM} = \frac{NR - PL}{QM - NR} = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$$

આ દર્શાવે છે કે, $z = \dfrac{mz_2 + nz_1}{m+n}$

આ જ પ્રમાણે, XZ અને YZ-સમતલો પર લંબ દોરીને,

$y = \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}$ અને $x = \dfrac{mx_2 + nx_1}{m + n}$ મેળવી શકાય.



આકૃતિ 12.5

આમ, બે બિંદુઓ $P (x_1, y_1, z_1)$ અને $Q (x_2, y_2, z_2)$ ને જોડતાં રેખાખંડનું ગુણોત્તર $m : n$ માં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુ R ના યામ

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m + n}\right)$$ મળે છે.

જો બિંદુ R એ રેખાખંડ PQ નું $m : n$ ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરે તો તેના યામ n ને બદલે $-n$ લખીને મેળવી શકાય છે. તેથી બિંદુ R ના યામ

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m - n}, \frac{my_2 - ny_1}{m - n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m - n}\right)$$

વિશિષ્ટ વિકલ્પ 1 મધ્યબિંદુના યામ : જો R એ PQ નું મધ્યબિંદુ હોય, તો

$m : n = 1 : 1$ માટે $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ અને $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

આ બિંદુઓ P (x_1, y_1, z_1) અને Q (x_2, y_2, z_2) ને જોડતાં રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ છે.

વિશિષ્ટ વિકલ્પ 2 : જો બિંદુ R એ રેખાખંડ PQ નું $k : 1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તો, $k = \frac{m}{n}$ લેતાં બિંદુ R ના યામ

$$\left(\frac{kx_2+x_1}{1+k}, \frac{ky_2+y_1}{1+k}, \frac{kz_2+z_1}{1+k}\right)$$ મળે છે.

સામાન્ય રીતે, આપેલ બે બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા પર કોઈ પણ બિંદુ શોધો એવા પ્રકારના પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવવા માટે આ પરિણામનો ઉપયોગ થાય છે.

ઉદાહરણ 7 : બિંદુઓ (1, –2, 3) અને (3, 4, –5) ને જોડતાં રેખાખંડનું 2 : 3 ગુણોત્તરમાં (i) અંત:વિભાજન અને (ii) બહિર્વિભાજન કરતાં બિંદુના યામ મેળવો.

ઉકેલ : (i) ધારો કે બિંદુ P (x, y, z) એ A (1, – 2, 3) અને B (3, 4, –5) ને જોડતાં રેખાખંડનું 2 : 3 ગુણોત્તરમાં અંત:વિભાજન કરે છે.

માટે, $$x = \frac{2(3)+3(1)}{2+3} = \frac{9}{5}, \quad y = \frac{2(4)+3(-2)}{2+3} = \frac{2}{5}, \quad z = \frac{2(-5)+3(3)}{2+3} = \frac{-1}{5}$$

આમ, માંગેલ બિંદુ $\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$ છે.

(ii) ધારો કે બિંદુ P (x, y, z) એ A (1, –2, 3) અને B (3, 4, –5) ને જોડતાં રેખાખંડનું ગુણોત્તર 2 : 3 માં બહિર્વિભાજન કરે છે.

$$x = \frac{2(3)+(-3)(1)}{2+(-3)} = -3, \quad y = \frac{2(4)+(-3)(-2)}{2+(-3)} = -14, \quad z = \frac{2(-5)+(-3)(3)}{2+(-3)} = 19$$

આમ, માંગેલ બિંદુ (–3, –14, 19) છે.

ઉદાહરણ 8 : વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે બિંદુઓ (– 4, 6, 10), (2, 4, 6) અને (14, 0, –2) સમરેખ છે.

ઉકેલ : અહીં, A (– 4, 6, 10), B (2, 4, 6) અને C(14, 0, – 2) એ આપેલ બિંદુઓ છે.

ધારો કે બિંદુ P એ AB નું $k : 1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. આથી બિંદુ P ના યામ,

$$\left(\frac{2k-4}{k+1}, \frac{4k+6}{k+1}, \frac{6k+10}{k+1}\right)$$

હવે આપણે એ ચકાસીએ કે k ની કોઈ કિંમત માટે બિંદુઓ P અને C સમાન છે કે નહિં.

$\frac{2k-4}{k+1} = 14$ મૂકતાં, $k = -\frac{3}{2}$ મળે છે.

જ્યારે $k = -\frac{3}{2}$, ત્યારે $\frac{4k+6}{k+1} = \frac{4\left(-\frac{3}{2}\right)+6}{-\frac{3}{2}+1} = 0$

અને $$\frac{6k+10}{k+1} = \frac{6\left(-\frac{3}{2}\right)+10}{-\frac{3}{2}+1} = -2$$

માટે, C (14, 0, –2) બિંદુ પોતે જ AB નું ગુણોત્તર 3 : 2 માં બહિર્વિભાજન કરે છે અને એ જ બિંદુ P છે. આમ, A, B, C સમરેખ બિંદુઓ છે.

ઉદાહરણ 9 : જો ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) અને (x_3, y_3, z_3) હોય તો તે ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ત્રિકોણ ABC નાં શિરોબિંદુઓ A, B, C ના યામ અનુક્રમે (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) અને (x_3, y_3, z_3) છે. જો D એ BC નું મધ્યબિંદુ હોય તો, D ના યામ

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right) \text{ છે.}$$

ધારો કે G એ ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર છે. માટે, તે મધ્યગા AD નું 2 : 1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. તેથી G ના યામ,

$$\left(\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+x_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+y_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)+z_1}{2+1}\right)$$

અથવા $$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

ઉદાહરણ 10 : બિંદુઓ (4, 8, 10) અને (6, 10, – 8) ને જોડતાં રેખાખંડનું YZ-સમતલ કયાં ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તે શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે YZ-સમતલ બિંદુઓ A (4, 8, 10) અને B (6, 10, – 8) ને જોડતાં રેખાખંડનું P (x, y, z) બિંદુએ $k : 1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. તેથી બિંદુ P ના યામ

$$\left(\frac{4+6k}{k+1}, \frac{8+10k}{k+1}, \frac{10-8k}{k+1}\right) \text{ થશે.}$$

બિંદુ P એ YZ-સમતલમાં છે. તેથી તેનો x-યામ શૂન્ય છે એટલે કે $\frac{4+6k}{k+1} = 0$.

અથવા $$k = -\frac{2}{3}$$

આમ, YZ-સમતલ AB નું 2 : 3 ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરે છે.

સ્વાધ્યાય 12.3

1. બિંદુઓ (–2, 3, 5) અને (1,–4, 6) ને જોડતા રેખાખંડનું (i) 2 : 3 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન (ii) 2 : 3 ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન વિભાજન કરતાં બિંદુઓના યામ શોધો.
2. સમરેખ બિંદુઓ P (3, 2, – 4), Q (5, 4, – 6) અને R (9, 8, –10) આપેલ છે. બિંદુ Q એ PR નું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તે શોધો.

3. બિંદુઓ (–2, 4, 7) અને (3, –5, 8) ને જોડતા રેખાખંડનું YZ-સમતલ કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તે શોધો.

4. વિભાજન-સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે બિંદુઓ A (2, –3, 4), B (–1, 2, 1) અને $C\left(0, \frac{1}{3}, 2\right)$ સમરેખ છે.

5. બિંદુઓ P (4, 2, – 6) અને Q (10, –16, 6) ને જોડતા રેખાખંડનું ત્રિભાજન કરતા બિંદુઓના યામ શોધો.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો કે બિંદુઓ A (1, 2, 3), B (–1, –2, –1), C (2, 3, 2) અને D (4, 7, 6) એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDનાં શિરોબિંદુઓ છે પરંતુ લંબચોરસનાં શિરોબિંદુઓ નથી.

ઉકેલ : ABCD ને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બતાવવા માટે સામસામેની બાજુઓના માપ સમાન છે તે બતાવવું જરૂરી છે. અહીં,

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$BC = \sqrt{(2+1)^2+(3+2)^2+(2+1)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

$$CD = \sqrt{(4-2)^2+(7-3)^2+(6-2)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$DA = \sqrt{(1-4)^2+(2-7)^2+(3-6)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

સ્પષ્ટ છે કે, AB = CD અને BC = DA હોવાથી, ABCD એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

હવે, ABCD લંબચોરસ નથી તે સાબિત કરીશું. તેના માટે વિકર્ણો AC અને BD સમાન નથી તે સાબિત કરીશું.

હવે, $$AC = \sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$BD = \sqrt{(4+1)^2+(7+2)^2+(6+1)^2} = \sqrt{25+81+49} = \sqrt{155}$$

અહીં, $AC \neq BD$ હોવાથી ABCD લંબચોરસ નથી.

> **નોંધ** વિકર્ણો AC અને BD એકબીજાને દુભાગે છે. તે ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને પણ ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવી શકાય.

ઉદાહરણ 12 : બિંદુઓ A (3, 4, –5) અને B (– 2, 1, 4) થી સમાન અંતરે હોય તેવાં બિંદુઓ P ના ગણનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, PA = PB થાય તેવું કોઈ બિંદુ P (x, y, z) છે.

હવે, $$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2}$$

અથવા $$(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2 = (x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2$$

અથવા $10x + 6y - 18z - 29 = 0$.

ઉદાહરણ 13 : બિંદુ (1, 1, 1) એ ત્રિકોણ ABC નું મધ્યકેન્દ્ર છે. જો A અને B ના યામ અનુક્રમે (3, –5, 7) અને (–1, 7, – 6), હોય તો બિંદુ C ના યામ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બિંદુ C ના યામ (x, y, z) છે અને ત્રિકોણ ABCના મધ્યકેન્દ્રના યામ (1, 1, 1) છે.

માટે $\frac{x+3-1}{3} = 1$, એટલે કે, $x = 1$; $\frac{y-5+7}{3} = 1$, એટલે કે, $y = 1$; $\frac{z+7-6}{3} = 1$, એટલે કે, $z = 2$.

આમ, બિંદુ C ના યામ (1, 1, 2) છે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 12

1. A(3, – 1, 2), B (1, 2, – 4) અને C (– 1, 1, 2) એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD નાં શિરોબિંદુઓ હોય, તો ચોથા શિરોબિંદુના યામ શોધો.

2. A (0, 0, 6), B (0,4, 0) અને C (6, 0, 0) શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણની મધ્યગાઓની લંબાઈ શોધો.

3. Δ PQR નાં શિરોબિંદુઓ P $(2a, 2, 6)$, Q $(-4, 3b, -10)$ અને R$(8, 14, 2c)$ હોય તથા મધ્યકેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય, તો a, b અને c નાં મૂલ્યો શોધો.

4. બિંદુ P (3, –2, 5) થી $5\sqrt{2}$ અંતરે આવેલા y-અક્ષ પરના બિંદુના યામ શોધો.

5. P(2, –3, 4) અને Q (8, 0, 10) ને જોડતાં રેખાખંડ પર આવેલાં બિંદુ R નો x-યામ 4 હોય, તો બિંદુ R ના યામ શોધો.

[**સૂચનઃ** ધારો કે R એ PQ નું ગુણોત્તર $k : 1$ માં વિભાજન કરે છે, તેથી બિંદુ R ના યામ $\left(\frac{8k+2}{k+1}, \frac{-3}{k+1}, \frac{10k+4}{k+1}\right)$].

6. જો A (3, 4, 5) અને B (–1, 3, –7) આપેલ બિંદુઓ હોય. તો એવા બિંદુઓ P ના બિંદુ ગણનું સમીકરણ મેળવો કે જેથી $PA^2 + PB^2 = k^2$ થાય. જ્યાં k અચળ છે.

સારાંશ

◆ ત્રિપરિમાણમાં, યામાક્ષો એ લંબાક્ષ યામ-પદ્ધતિમાં પરસ્પર લંબરેખાઓ છે. અક્ષોને x, y અને z-અક્ષો કહે છે.

◆ અક્ષોની જોડ દ્વારા નિર્મિત થયેલાં ત્રણ સમતલોને યામ-સમતલો કહે છે. તે XY, YZ અને ZX-સમતલો છે.

◆ ત્રણ યામ સમતલો અવકાશને આઠ ભાગોમાં વિભાજિત કરે છે. પ્રત્યેક ભાગ ***અષ્ટાંશ*** તરીકે ઓળખાય છે.

◆ ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિમાં બિંદુ P ના યામ હંમેશાં ત્રય સ્વરૂપે (x, y, z) તરીકે લખાય છે. અહીં, x, y અને z એ અનુક્રમે P નાં YZ, ZX અને XY-સમતલોથી અંતર દર્શાવે છે.

◆ (i) x-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુનું સ્વરૂપ $(x, 0, 0)$ છે.

(ii) y-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુનું સ્વરૂપ $(0, y, 0)$ છે.

(iii) z-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુનું સ્વરૂપ $(0, 0, z)$ છે.

◆ બિંદુઓ $P(x_1, y_1, z_1)$ અને $Q(x_2, y_2, z_2)$ વચ્ચેનું અંતર $PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

◆ બિંદુઓ $P(x_1, y_1, z_1)$ અને $Q(x_2, y_2, z_2)$ ને જોડતાં રેખાખંડનું અંતઃ(અંદરથી) અને બાહ્ય(બહારથી) ગુણોત્તર $m : n$ માં વિભાજન કરતાં બિંદુ R ના યામ અનુક્રમે નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય છે:

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right) \text{ અને } \left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right).$$

◆ બિંદુઓ P(x_1, y_1, z_1) અને Q(x_2, y_2, z_2) ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ છે.

◆ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) અને (x_3, y_3, z_3) હોય તે ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્રના યામ $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$ છે.

Historical Note

Rene' Descartes (1596–1650), the father of analytical geometry, essentially dealt with plane geometry only in 1637. The same is true of his co-inventor Pierre Fermat (1601-1665) and La Hire (1640-1718). Although suggestions for the three dimensional coordinate geometry can be found in their works but no details. Descartes had the idea of coordinates in three dimensions but did not develop it.

J.Bernoulli (1667-1748) in a letter of 1715 to Leibnitz introduced the three coordinate planes which we use today. It was Antoinne Parent (1666-1716), who gave a systematic development of analytical solid geometry for the first time in a paper presented to the French Academy in 1700.

L.Euler (1707-1783) took up systematically the three dimensional coordinate geometry, in Chapter 5 of the appendix to the second volume of his "Introduction to Geometry" in 1748.

It was not until the middle of the nineteenth century that geometry was extended to more than three dimensions, the well-known application of which is in the Space-Time Continuum of Einstein's Theory of Relativity.

પ્રકરણ 13

લક્ષ અને વિકલન

❖ *With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature – WHITEHEAD* ❖

13.1 પ્રાસ્તાવિક

આ પ્રકરણ કલનશાસ્ત્રનું પ્રવેશક છે. જેમાં મુખ્યત્વે વિધેયના પ્રદેશનાં મૂલ્યોને થતાં ફેરફારને અનુરૂપ વિધેયનાં મૂલ્યોમાં થતાં ફેરફાર વિશે વિચારવામાં આવે છે ગણિતની એવી શાખા કલનશાસ્ત્ર છે. આપણે વિકલનનો ત્વરિત ખ્યાલ (તેની વ્યાખ્યા આપ્યા વગર)આપીશું. ત્યાર બાદ આપણે લક્ષની સરળ વ્યાખ્યા આપીશું અને લક્ષના બીજગણિતનો અભ્યાસ કરીશું. ત્યાર બાદ આપણે વિકલનની વ્યાખ્યા પર પાછા ફરીશું અને વિકલનના બીજગણિતનો અભ્યાસ કરીશું. આપણે કેટલાંક પ્રમાણિત વિધેયોના વિકલિત મેળવીશું.

Sir Issac Newton
(1642-1727)

13.2 વિકલનનો સાહજિક ખ્યાલ :

ભૌતિકવિજ્ઞાનના પ્રયોગો દ્વારા એ પ્રમાણિત થયું છે કે ભેખડ પરથી પડતો પદાર્થ t સેકન્ડમાં 4.9 t^2 મીટર જેટલું અંતર કાપે છે અર્થાત્ પદાર્થે કાપેલ અંતર s (મીટરમાં) એ સમય t (સેકન્ડમાં)નું વિધેય છે. તેને $s = 4.9t^2$ વડે દર્શાવી શકાય.

પૃષ્ઠ 264 માં આપેલ કોષ્ટક 13.1 ભેખડ પરથી પડતા પદાર્થે જુદી જુદી સેકન્ડના સમયગાળામાં મીટરમાં કાપેલ અંતર દર્શાવે છે. તેનો હેતુ આ માહિતી પરથી $t = 2$ સેકન્ડના સમયે પદાર્થનો વેગ શોધવાનો છે. આ પ્રશ્નનો ઉકેલ મેળવવાની એક રીત $t = 2$ સેકન્ડના સમયના અંતે જુદા જુદા સમયગાળામાં સરેરાશ વેગ પ્રાપ્ત કરવાથી મળે છે અને આશા રાખીએ કે તે $t = 2$ સેકન્ડે મળતા વેગની માહિતી આપશે.

$t = t_1$ અને $t = t_2$ વચ્ચેનો સરેરાશ વેગ એ $t = t_1$ અને $t = t_2$ સેકન્ડમાં કપાયેલ અંતર અને $(t_2 - t_1)$ નો ગુણોત્તર છે. આથી, પ્રથમ બે સેકન્ડનો સરેરાશ વેગ

કોષ્ટક 13.1

t	s
0	0
1	4.9
1.5	11.025
1.8	15.876
1.9	17.689
1.95	18.63225
2	19.6
2.05	20.59225
2.1	21.609
2.2	23.716
2.5	30.625
3	44.1
4	78.4

$$= \frac{t_2 = 2 \text{ અને } t_1 = 0 \text{ વચ્ચે કપાયેલ અંતર}}{\text{સમય અંતરાલ } (t_2 - t_1)}$$

$$= \frac{(19.6 - 0)\text{મી}}{(2-0)\text{સે}} = 9.8 \text{ મી/સે}$$

આ જ રીતે, $t = 1$ અને $t = 2$ વચ્ચેનો સરેરાશ વેગ

$$\frac{(19.6 - 4.9)\text{મી}}{(2-1)\text{સે}} = 14.7 \text{ મી/સે}$$

આ જ રીતે, અલગ અલગ t_1 માટે, $t = t_1$ અને $t = 2$ વચ્ચેનો સરેરાશ વેગ શોધી શકાય. નીચેનું કોષ્ટક 13.2, $t = t_1$ સેકન્ડ અને $t = 2$ સેકન્ડ વચ્ચેનો સરેરાશ વેગ (v) આપે છે.

કોષ્ટક 13.2

t_1	0	1	1.5	1.8	1.9	1.95	1.99
v	9.8	14.7	17.15	18.62	19.11	19.355	19.551

આપણે કોષ્ટક 13.2 પરથી જોઈ શકીએ કે સરેરાશ વેગ ક્રમશઃ વધતો જાય છે. જો આપણે $t = 2$ આગળ અંત પામતો નાનો સમયગાળો લઈએ તો આપણને $t = 2$ આગળના વેગનો વધુ સારો ખ્યાલ આવે. ધારો કે 1.99 સેકન્ડ અને 2 સેકન્ડ વચ્ચેના સમયગાળામાં કશું જ અનપેક્ષિત (નાટકીય) બનતું નથી. આપણે તારવી શકીએ કે $t = 2$ સેકન્ડે વેગ 19.551 મી/સે થી થોડો વધારે છે.

નીચેની ગણતરીથી આ તારણ થોડું વધુ મજબૂત થશે. $t = 2$ સેકન્ડથી શરૂ થતા જુદા જુદા સમયગાળામાં સરેરાશ વેગની ગણતરી કરીશું. આગળ પ્રમાણે $t = 2$ સેકન્ડ અને $t = t_2$ સેકન્ડ માટે સરેરાશ વેગ

$$= \frac{t_2 \text{સેકન્ડ અને 2 સેકન્ડ વચ્ચે કાપેલ અંતર}}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{t_2 \text{સેકન્ડમાં કાપેલ અંતર } - 2 \text{ સેકન્ડમાં કાપેલ અંતર}}{t_2 - 2}$$

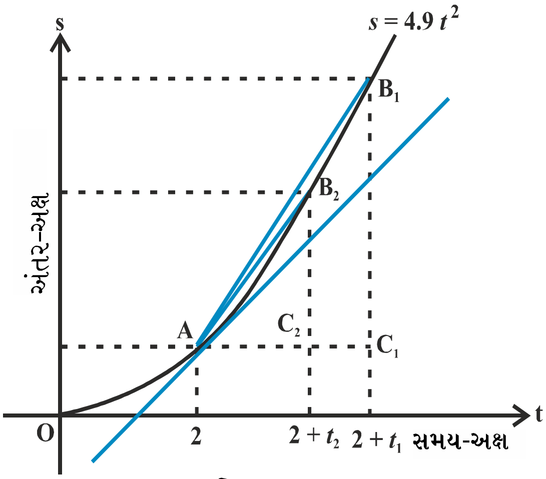
$$= \frac{t_2 \text{સેકન્ડમાં કાપેલ અંતર} - 19.6}{t_2 - 2}$$

નીચેનું કોષ્ટક 13.3, $t = t_2$ સેકન્ડ અને $t = 2$ સેકન્ડ વચ્ચેનો સરેરાશ વેગ v મી/સે માં દર્શાવે છે.

કોષ્ટક 13.3

t_2	4	3	2.5	2.2	2.1	2.05	2.01
v	29.4	24.5	22.05	20.58	20.09	19.845	19.649

અહીં, ફરીથી આપણે નોંધીશું કે $t = 2$ થી શરૂ થતા નાના સમય અંતરાલ માટે, $t = 2$ આગળના વેગનો વધુ સારો ખ્યાલ મળે છે.



આકૃતિ 13.1

પ્રથમ ગણતરીમાં આપણે $t = 2$ સુધીના વધતા સમયગાળાના અંતરાલમાં સરેરાશ વેગ શોધ્યો અને $t = 2$ પહેલા કાંઈ જ અચાનક અને અનપેક્ષિત ફેરફાર થતો નથી તેમ ધાર્યું હતું. બીજી ગણતરીમાં $t = 2$ પછી $t = 2$ સુધી થતા સમયગાળામાં પણ કાંઈ જ અચાનક અને અનપેક્ષિત ફેરફાર થતો નથી તેમ ધાર્યું હતું. માત્ર ભૌતિકવિજ્ઞાનની રીતે વિચારતાં આ બંને સરેરાશ વેગની શ્રેણીઓ એક જ લક્ષને અનુલક્ષે છે. આપણે સલામત રીતે તારવી શકીએ કે, $t = 2$ આગળનો સરેરાશ વેગ 19.551 મી/સે અને 19.649 મી/સે વચ્ચે હશે. તકનીકી રીતે કહી શકાય કે, $t = 2$ આગળનો વેગ 19.551 મી/સે અને 19.649 મી/સે વચ્ચે હશે. એ તો જાણીતું છે કે *વેગ એ સ્થાનાંતરનો દર છે.* આથી,આપણે નીચે પ્રમાણેની તારવણી કરી.

વેગ એ જુદા જુદા સમયે કપાતા તાત્ક્ષણિક અંતરના તાત્ક્ષણિક સમય સાથેના ફેરફારનો દર છે. આપણે કહી શકીએ કે અંતર વિધેય $s = 4.9t^2$ના $t = 2$ આગળના *'વિકલિત'*નું મૂલ્ય 19.551 અને 19.649 વચ્ચે હશે.

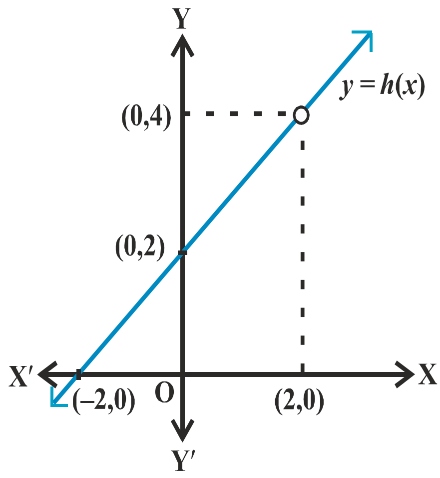
આકૃતિ 13.1 માં લક્ષનો વિધિ નિહાળવાનો આ એક વૈકલ્પિક માર્ગ છે. આ આલેખ ભેખડની ટોચ પરથી પડતા પદાર્થે જુદા જુદા સમય t વખતે કાપેલ અંતર s નો છે. સમયના અંતરાલની શ્રેણી $h_1, h_2, \ldots$, જેમ શૂન્યને અનુલક્ષે તેમ સરેરાશ વેગની શ્રેણી પણ આ જ ગુણોત્તરો દ્વારા બનતી શ્રેણી

$$\frac{C_1B_1}{AC_1}, \frac{C_2B_2}{AC_2}, \frac{C_3B_3}{AC_3}, \ldots \text{ ને અનુલક્ષે.}$$

અહીં $C_1B_1 = s_1 - s_0$ એ $h_1 = AC_1$, સમયગાળામાં પદાર્થે કાપેલ અંતર છે વગેરે. આકૃતિ 13.1 થી નિશ્ચિત રીતે તારવી શકાય કે આ રીતે બનતી શ્રેણી વક્ર પરના બિંદુ A આગળના સ્પર્શકના ઢાળને અનુલક્ષે છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો $t = 2$ સમયે પદાર્થનો તાત્ક્ષણિક વેગ $v(t)$ એ $s = 4.9t^2$ વક્રના $t = 2$ આગળના સ્પર્શકના ઢાળ જેટલો છે.

13.3 લક્ષ

લક્ષના વિધિને વધારે સ્પષ્ટતાપૂર્વક સમજવાની જરૂર છે, એવું આપણને આગળની ચર્ચા પરથી સ્પષ્ટ જણાય છે. આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો પરથી લક્ષનો સાહજિક ખ્યાલ મેળવીશું.



આકૃતિ 13.2

વિધેય $f(x) = x^2$ લો. જુઓ કે જેમ x નું મૂલ્ય 0 ની નજીક હોય તેમ $f(x)$ પણ 0 ની નજીક જાય છે. (જુઓ આકૃતિ 2.10 પ્રકરણ 2) આપણે કહી શકીએ કે,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

(જેમ x શૂન્યને અનુલક્ષે તેમ $f(x)$ નું લક્ષ 0 બને તેમ વંચાય). આમ, જેમ x, 0 ને અનુલક્ષે તેમ વિધેય $f(x)$ નું મૂલ્ય 0 છે તેવું અનુમાન કરી શકાય.

વ્યાપક રીતે, જેમ $x \to a$ તેમ $f(x) \to l$, તો l ને *વિધેય $f(x)$ નું લક્ષ* કહેવાય છે. આ માહિતીને સંકેતમાં $\lim_{x \to a} f(x) = l$ એમ લખાય.

વિધેય $g(x) = |x|$, $x \neq 0$ નો વિચાર કરો. જુઓ કે $g(0)$ વ્યાખ્યાયિત નથી. x ની કિંમત 0 ની ઘણી નજીક લઈએ તો $g(x)$ નાં મૂલ્યની ગણતરી કરતાં આપણે જોઈ શકીએ તે 0 ની નજીક જતી જાય છે. આથી, $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$.

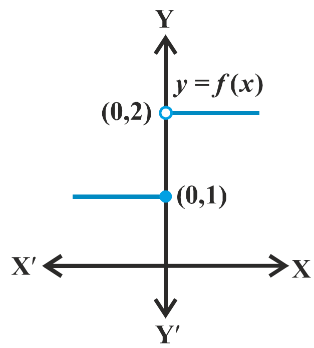
આ વસ્તુ $y = |x|$, $x \neq 0$ ના આલેખ પરથી ત્વરિત સ્પષ્ટ થાય છે (જુઓ આકૃતિ 2.13, પ્રકરણ 2).

$$\text{હવે, } h(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2},\ x \neq 2 \text{ નો વિચાર કરો.}$$

2 ની ઘણી નજીક (પરંતુ 2 નહિ) હોય તેવી x ની કિંમતો લઈને $h(x)$ ની ગણતરી કરીએ. તમે માની શકો કે બધી જ કિંમતો 4 ની નજીક હશે. અહીં, આપેલ વિધેય $y = h(x)$ ના આલેખ પરથી તે વધુ સ્પષ્ટ થાય છે. (આકૃતિ 13.2)

આ બધાં જ ઉદાહરણોમાં વિધેયનું $x = a$ આગળનું મૂલ્ય, x એ a ને કઈ રીતે અનુલક્ષે છે તેના પર આધારિત નથી. નોંધો કે x એ a ને ડાબી અથવા જમણી બાજુથી એમ બે રીતે અનુલક્ષે છે. અર્થાત્ x નાં તમામ મૂલ્યો કે જે a થી નજીક છે તે a થી મોટાં અથવા a થી નાનાં હોઈ શકે. સ્વાભાવિક રીતે તે બે લક્ષ તરફ દોરે છે, જમણી બાજુનું લક્ષ અને ડાબી બાજુનું લક્ષ. વિધેય $f(x)$ ના જમણી બાજુના લક્ષ દ્વારા મળતાં મૂલ્યો એ x, a ને જમણી બાજુથી અનુલક્ષે ત્યારે મળતા $f(x)$ નાં મૂલ્યો જેટલાં છે. આ જ રીતે, ડાબી બાજુના લક્ષનું ઉદાહરણ આપવા, વિધેય

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases} \text{ નો વિચાર કરીએ.}$$



આકૃતિ 13.3

તેનો આલેખ આકૃતિ 13.3 માં દર્શાવેલ છે. વિધેય f ના $x \leq 0$ દ્વારા મળતા $f(x)$ નાં મૂલ્યો લખતાં એ સ્પષ્ટ છે કે $f(x)$ નું 0 આગળનું મૂલ્ય 1 થાય અર્થાત્ વિધેય $f(x)$ નું 0 આગળનું ડાબી બાજુનું લક્ષ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$ તેમ લખાય.

આ જ રીતે, વિધેય f ના $x > 0$ દ્વારા મળતાં $f(x)$ નાં મૂલ્યો લખતાં તે 2 છે. અર્થાત્ વિધેય $f(x)$ નું 0 આગળનું જમણી બાજુનું લક્ષ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$ તેમ લખાય.

આ કિસ્સામાં ડાબી તથા જમણી બાજુનાં લક્ષનાં મૂલ્યો અલગ છે અને આથી આપણે કહી શકીએ કે વિધેય $f(x)$ નું લક્ષ x,0 ને અનુલક્ષે ત્યારે શક્ય નથી. (જો કે અહીં વિધેય $x = 0$ આગળ વ્યાખ્યાયિત છે.)

સારાંશ

f ની a થી ડાબી બાજુની x ની કિંમતો માટે $\lim_{x \to a^-} f(x)$ એ વિધેય f ની $x = a$ આગળ અપેક્ષિત કિંમત છે.

x ની a થી જમણી બાજુની કિંમતો માટે x ની a આગળ અપેક્ષિત કિંમત $\lim_{x \to a^+} f(x)$ છે.

જો ડાબી અને જમણી બાજુના લક્ષનાં મૂલ્યો સમાન હોય, તો આ સામાન્ય કિંમતને $f(x)$ નું $x = a$ આગળનું લક્ષ કહે છે તથા તેનો સંકેત $\lim_{x \to a} f(x)$ છે.

દ્રષ્ટાંત 1 : વિધેય $f(x) = x + 10$ નો વિચાર કરો. આપણે આ વિધેયનું $x = 5$ આગળનું લક્ષ શોધીશું. આપણે જ્યારે x ની કિંમત 5 ની ઘણી જ નજીક હોય ત્યારે વિધેય $f(x)$ નાં મૂલ્યો શોધીશું. 5 થી ડાબી તરફની કેટલીક કિંમતો 4.9, 4.95, 4.99, 4.995. . ., વગેરે છે. આ બિંદુઓ આગળના વિધેયનાં મૂલ્યો નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. આ જ રીતે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ 5.001, 5.01, 5.1 5 થી જમણી તરફના નજીકનાં બિંદુઓ છે. વિધેયમાં આ બિંદુઓ આગળનાં મૂલ્યો પણ કોષ્ટક 13.4 માં દર્શાવેલ છે.

કોષ્ટક 13.4

x	4.9	4.95	4.99	4.995	5.1	5.01	5.001
$f(x)$	14.9	14.95	14.99	14.995	15.1	15.01	15.001

કોષ્ટક 13.4 પરથી, આપણે x = 4.995 અને 5.001 વચ્ચેની કિંમત પરથી તારવી શકીએ કે $x = 5$ આગળ $f(x)$ નું મૂલ્ય 14.995 કરતાં મોટું અને 15.001 કરતાં નાનું હશે. એ માનવું યોગ્ય રહેશે કે વિધેય $f(x)$ નું $x = 5$ આગળનું મૂલ્ય 5 ની ડાબી બાજુની સંખ્યાઓ માટે 15 છે અર્થાત્, $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 15$.

આ જ રીતે જેમ x, 5 ને જમણી તરફથી અનુલક્ષે તેમ $f(x)$ નું મૂલ્ય 15 લઈ શકાય અર્થાત્, $\lim_{x \to 5^+} f(x) = 15$.

આથી, વિધેય f ના ડાબી તથા જમણી બાજુના લક્ષનાં મૂલ્યો 15 હોય તે સંભવિત છે.

$$\text{આમ, } \lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5} f(x) = 15.$$

આ અનુમાન કે, લક્ષનું મૂલ્ય 15 છે તે આકૃતિ 2.16, પ્રકરણ 2 ના આલેખ પરથી થોડું વધુ સારી રીતે સમજી શકાય. આ આકૃતિ પરથી, આપણે નોંધીએ કે જેમ x, 5 ને ડાબી અથવા જમણી બાજુથી અનુલક્ષે તેમ $f(x) = x + 10$ નો આલેખ બિંદુ (5, 15) ને અનુલક્ષે. આપણે જોઈ શકીએ કે વિધેયનું $x = 5$ આગળનું મૂલ્ય પણ 15 છે.

દ્રષ્ટાંત 2 : વિધેય $f(x) = x^3$ લો. આપણે $x = 1$ આગળ લક્ષ મેળવવાનો પ્રયત્ન કરીએ. આગળ પ્રમાણે આપણે x ની 1 થી નજીકની કિંમતો માટે $f(x)$ નાં મૂલ્યોનું કોષ્ટક બનાવીએ. (જુઓ કોષ્ટક 13.5)

કોષ્ટક 13.5

x	0.9	0.99	0.999	1.1	1.01	1.001
$f(x)$	0.729	0.970299	0.997002999	1.331	1.030301	1.003003001

કોષ્ટક પરથી આપણે તારવી શકીએ કે f નું $x = 1$ આગળનું મૂલ્ય 0.997002999 થી વધુ અને 1.003003001 થી નાનું છે. એવું માની લઈએ કે x = 0.999 અને x = 1.001 વચ્ચે કશું જ અનપેક્ષિત બનતું નથી. આથી, એવું અનુમાન કરવું વ્યાજબી છે કે વિધેય $f(x)$ નું $x = 1$ આગળનું ડાબી બાજુનું લક્ષ 1 છે. અર્થાત્

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1.$$

આ જ રીતે, જેમ x, 1ને જમણી બાજુથી અનુલક્ષે તેમ પણ $f(x)$ નું મૂલ્ય 1 બને. અર્થાત્

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1.$$

આથી કહી શકાય કે $f(x)$ નું ડાબી બાજુનું લક્ષ અને જમણી બાજુનું લક્ષ સમાન છે અને તે 1 જેટલું છે. આમ,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 1.$$

વિધેયનો આલેખ (આકૃતિ 2.11, પ્રકરણ 2) જોતાં લક્ષનું મૂલ્ય 1 છે તે તારણને સમર્થન મળે છે. આ આકૃતિમાં આપણે નોંધીએ કે જેમ x ડાબી કે જમણી બાજુથી 1 ને અનુલક્ષે તેમ $f(x) = x^3$ વિધેયનો આલેખ બિંદુ (1, 1)ને અનુલક્ષે છે.

આપણે પુનઃ જોઈ શકીએ કે વિધેયનું $x = 1$ આગળનું લક્ષ 1 છે.

દ્રષ્ટાંત 3 : વિધેય $f(x) = 3x$ લો. આપણે આ વિધેયનું $x = 2$ આગળ લક્ષ શોધવાનો પ્રયત્ન કરીએ. નીચેનું કોષ્ટક 13.6 હવે સ્વયં સ્પષ્ટ છે.

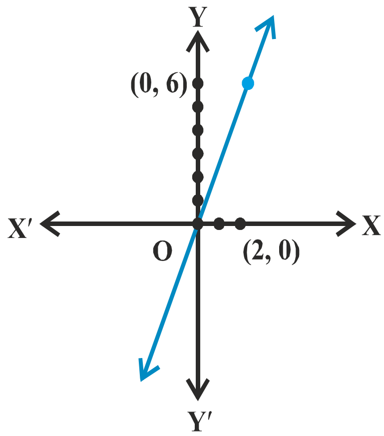
કોષ્ટક 13.6

x	1.9	1.95	1.99	1.999	2.1	2.01	2.001
$f(x)$	5.7	5.85	5.97	5.997	6.3	6.03	6.003

આગળ જોઈ ગયાં તેમ x ડાબી કે જમણી બાજુથી 2 ને અનુલક્ષે તેમ વિધેય $f(x)$, 6 ને અનુલક્ષે તેમ લાગે છે.

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 6$ છે એમ નોંધીએ. આકૃતિ 13.4 દ્વારા આ વાતને સમર્થન મળે છે.

અહીં, ફરીથી આપણે નોંધીએ કે વિધેયનું $x = 2$ આગળનું મૂલ્ય એ જ $x = 2$ આગળનું લક્ષ છે.



આકૃતિ 13.4

દ્રષ્ટાંત 4 : અચળ વિધેય $f(x) = 3$ નો વિચાર કરો. $x = 2$ આગળ લક્ષ શોધવાનો પ્રયત્ન કરીએ. આ વિધેય અચળ હોવાથી બધે જ તેની સમાન કિંમત (આ કિસ્સામાં 3) મળશે. આથી 2 ની નજીકના બિંદુ માટે તેનું મૂલ્ય 3 છે. આથી,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

$f(x) = 3$ નો આલેખ (0, 3)માંથી પસાર થતી x-અક્ષને સમાંતર રેખા છે તે આકૃતિ 2.9, પ્રકરણ 2 દ્વારા દર્શાવેલ છે. આથી પણ સ્પષ્ટ છે કે, જરૂરી લક્ષ 3 છે. અલબત્ત સહેલાઈથી તારવી શકાય કે કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા a માટે $\lim_{x\to a} f(x) = 3$.

દ્રષ્ટાંત 5 : વિધેય $f(x) = x^2 + x$ નો વિચાર કરો. આપણે $\lim_{x\to 1} f(x)$ મેળવવું છે. આપણે કોષ્ટક 13.7 પ્રમાણે $x = 1$ ની નજીકની કિંમતો માટે $f(x)$નાં મૂલ્યોનો વિચાર કરીશું.

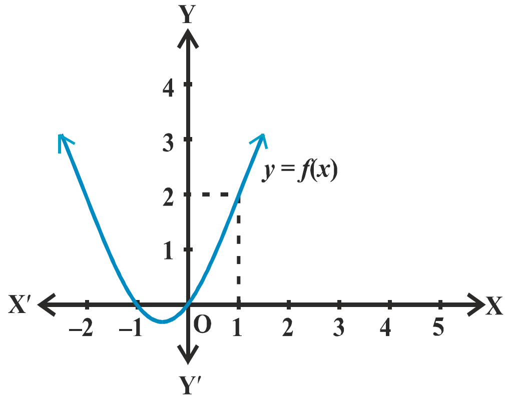
કોષ્ટક 13.7

x	0.9	0.99	0.999	1.2	1.1	1.01
$f(x)$	1.71	1.9701	1.997001	2.64	2.31	2.0301

આ પરથી તારવવું યોગ્ય છે કે,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2.$$

$f(x) = x^2 + x$ ના આકૃતિ 13.5 માં દર્શાવેલ આલેખ પરથી સ્પષ્ટ છે કે જેમ x, 1 ને અનુલક્ષે તેમ આલેખ (1, 2) ને અનુલક્ષે.



આકૃતિ 13.5

અહીં, એ પણ જોઈ શકાય કે,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

હવે, નીચેની ત્રણ બાબતોનો સ્વીકાર કરો :

$$\lim_{x\to 1} x^2 = 1, \quad \lim_{x\to 1} x = 1 \quad \text{અને} \quad \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

અને $$\lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} x = 1 + 1 = 2 = \lim_{x\to 1} (x^2 + x)$$

તથા $$\lim_{x\to 1} x. \lim_{x\to 1} (x+1) = 1\cdot 2 = 2 = \lim_{x\to 1} [x(x+1)] = \lim_{x\to 1} [x^2 + x].$$

દ્રષ્ટાંત 6 : વિધેય $f(x) = sin\, x$ લો. આપણને $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} sin\, x$, શોધવામાં રસ છે, અહીં ખૂણાનું માપ રેડિયનમાં છે.

અહીં, આપણે $\frac{\pi}{2}$ ની નજીકની $f(x)$ની કિંમતો (અંદાજિત) માટેનું કોષ્ટક બનાવીશું (કોષ્ટક 13.8). આ પરથી, આપણે તારવી શકીએ કે $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$.

વળી, આકૃતિ 3.8 (પ્રકરણ 3) માં દોરેલ $f(x) = sin\, x$ ના આલેખ પરથી આ બાબતને સમર્થન મળે છે. આ કિસ્સામાં પણ આપણે જોઈ શકીએ કે, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} sin\, x = 1$.

કોષ્ટક 13.8

x	$\frac{\pi}{2} - 0.1$	$\frac{\pi}{2} - 0.01$	$\frac{\pi}{2} + 0.1$	$\frac{\pi}{2} + 0.01$
$f(x)$	0.9950	0.9999	0.9950	0.9999

દ્રષ્ટાંત 7 : વિધેય $f(x) = x + cos\, x$ નો વિચાર કરો. આપણે $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ શોધીશું.

અહીં, આપણે $f(x)$ ની 0 ની નજીકની કિંમતો (અંદાજિત) માટેનું કોષ્ટક બનાવીશું (કોષ્ટક 13.9).

કોષ્ટક 13.9

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	0.9850	0.98995	0.9989995	1.0950	1.00995	1.0009995

કોષ્ટક 13.9 પરથી, આપણે તારવી શકીએ કે,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

અહીં પણ તારવી શકાય કે $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$.

હવે, તમે નીચેના નિર્ણય પર આવવા માટે માનસિક રીતે તૈયાર છો કે,

$\lim\limits_{x \to 0} (x + cos\, x) = \lim\limits_{x \to 0} x + \lim\limits_{x \to 0} cos\, x$ એ ખરેખર સત્ય છે?

દ્રષ્ટાંત 8 : $x > 0$ માટે વિધેય $f(x) = \frac{1}{x^2}$ નો વિચાર કરો. આપણે $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ શોધીશું.

અહીં, અવલોકન કરો કે વિધેયનો પ્રદેશ તમામ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે. આથી, આપણે જ્યારે $f(x)$નું કોષ્ટક તૈયાર કરીએ ત્યારે x એ 0 ને ડાબી બાજુથી અનુલક્ષે છે તેમ કહેવાનો અર્થ નથી. આપણે નીચે x ની 0 થી નજીકની ધન કિંમતો માટેની $f(x)$ની કિંમતો માટેનું કોષ્ટક તૈયાર કરીએ. (આ કોષ્ટકમાં n કોઈ ધન પૂર્ણાંક દર્શાવે છે.)

નીચે આપેલ કોષ્ટક 13.10 પરથી, આપણે જોઈ શકીએ કે જેમ x, 0ને અનુલક્ષે તેમ $f(x)$ની કિંમત મોટી અને મોટી બનતી જાય છે. આપણો કહેવાનો અર્થ એ કે $f(x)$ ની કિંમત કોઈ પણ આપેલ સંખ્યા કરતાં મોટી બનાવી શકાય.

કોષ્ટક 13.10

x	1	0.1	0.01	10^{-n}
$f(x)$	1	100	10000	10^{2n}

ગાણિતિક રીતે,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \text{ કહીશું.}$$

ખરેખર તો જેમ $x \to 0^+$ તેમ $f(x) \to \infty$ કહેવાય

આપણે એ નોંધીશું કે આ પ્રકારના લક્ષનો આપણા અભ્યાસક્રમમાં સમાવેશ નહિ કરીએ.

દ્રષ્ટાંત 9 : આપણે $\lim_{x\to 0} f(x)$ શોધીશું.

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+2, & x>0 \end{cases}$$

દર વખતની જેમ આપણે x ની 0 ની નજીકની કિંમતો માટે $f(x)$ નું કોષ્ટક તૈયાર કરીશું. નોંધીએ કે x ની ઋણ કિંમતો માટે આપણે $x - 2$ ની અને x ની ધન કિંમતો માટે આપણે $x + 2$ ની કિંમતો શોધવી પડે.

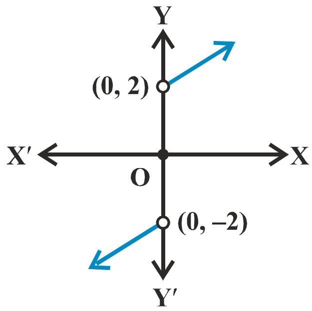
કોષ્ટક 13.11

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	– 2.1	– 2.01	– 2.001	2.1	2.01	2.001

કોષ્ટક 13.11 ની શરૂઆતની ઋણ કિંમતો માટે આપણે તારવીએ કે વિધેયની કિંમતો –2 તરફ વધતી જાય છે. અને આથી,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2$$

કોષ્ટકની છેલ્લી ત્રણ કિંમતો પરથી આપણે તારવીએ કે, વિધેયની કિંમતો 2 થી વધુ રહીને 2 તરફ ઘટતી જાય છે.



આકૃતિ 13.6

$$\text{આમ } \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$$

ડાબી તથા જમણી બાજુના લક્ષનાં મૂલ્યો સમાન ન હોવાથી, આપણે કહી શકીએ વિધેયનું 0 આગળનું લક્ષ શક્ય નથી.

આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 13.6 માં આપેલ છે. અહીં, આપણે નોંધીએ કે $x = 0$ આગળ વિધેયની કિંમત વ્યાખ્યાયિત છે અને તે 0 છે. પરંતુ $x = 0$ આગળ વિધેયનું લક્ષ વ્યાખ્યાયિત નથી.

દ્રષ્ટાંત 10 : છેલ્લા ઉદાહરણ તરીકે આપણે $\lim_{x\to 1} f(x)$ શોધીએ, જ્યાં

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

કોષ્ટક 13.12

x	0.9	0.99	0.999	1.1	1.01	1.001
$f(x)$	2.9	2.99	2.999	3.1	3.01	3.001

દર વખતની જેમ x ની 1 ની નજીકની કિંમતો માટે $f(x)$ નું કોષ્ટક તૈયાર કરીએ. x ની 1 થી નાની કિંમતો માટે $f(x)$ની કિંમતો જોતાં એવું લાગે છે કે $x = 1$ આગળ તેનું મૂલ્ય 3 થવું જોઈએ અર્થાત્

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3.$$

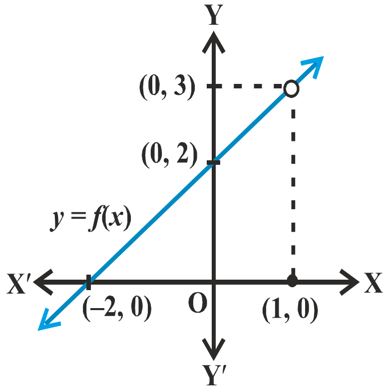
આ જ રીતે, ચર્ચા કર્યા પ્રમાણે x ની 1 થી મોટી કિંમતો માટે પણ $f(x)$ નું મૂલ્ય 3 બનવું જોઈએ અર્થાત્

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=3.$$

આથી ડાબી અને જમણી બાજુનાં લક્ષ સમાન છે અને આથી,

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1} f(x)=3.$$

વિધેયના આકૃતિ 13.7 માં દર્શાવેલ આલેખ પરથી લક્ષના આ તારણને સમર્થન મળે છે. અહીં, આપણે નોંધીએ કે વ્યાપક રીતે, આપેલ વિધેયનું મૂલ્ય અને તેનું લક્ષ અલગ હોઈ શકે. (જ્યારે બંને વ્યાખ્યાયિત હોય, ત્યારે પણ)



આકૃતિ 13.7

13.3.1 લક્ષનું બીજગણિત

ઉપરનાં ઉદાહરણોમાં આપણે જોયું કે જો વિચારણા હેઠળના લક્ષ અને વિધેય સુવ્યાખ્યાયિત હોય તો લક્ષની પ્રક્રિયા સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારની પ્રક્રિયાને અનુસરે છે. આ યોગાનુયોગ નથી. અલબત, આપણે સાબિતી આપ્યા વગર નીચેનાં સૂત્રો પ્રમેય તરીકે લઈશું:

પ્રમેય 1: જો f અને g એ બે વિધેયો માટે $\lim_{x\to a} f(x)$ અને $\lim_{x\to a} g(x)$ નાં અસ્તિત્વ હોય, તો

(i) બે વિધેયોના સરવાળાનું લક્ષ, વિધેયના લક્ષના સરવાળા જેટલું હોય છે, અર્થાત્

$$\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

(ii) બે વિધેયોની બાદબાકીનું લક્ષ, વિધેયના લક્ષની બાદબાકી જેટલું હોય છે, અર્થાત્

$$\lim_{x\to a} [f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x).$$

(iii) બે વિધેયોના ગુણાકારનું લક્ષ, વિધેયના લક્ષના ગુણાકાર જેટલું હોય છે, અર્થાત્

$$\lim_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

(iv) જ્યારે છેદ શૂન્યેતર હોય ત્યારે બે વિધેયોના ભાગાકારનું લક્ષ, વિધેયના લક્ષના ભાગાકાર જેટલું હોય છે અર્થાત્

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

નોંધ ખાસ કરીને ઉપરોક્ત વિકલ્પ (iii) માં જો g અચળ વિધેય હોય કે જેથી $g(x) = \lambda$, λ, કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો

$$\lim_{x\to a}[(\lambda\cdot f)(x)]=\lambda\cdot\lim_{x\to a} f(x).$$

નીચેના બે ઉપવિભાગોમાં આ પ્રમેયોનો ઉપયોગ ખાસ પ્રકારનાં વિધેયોનાં લક્ષ શોધવા કેવી રીતે કરીશું તે જોઈશું.

13.3.2 *બહુપદી વિધેયનું તથા સંમેય વિધેયનું લક્ષ :* વિધેય f માટે જો $f(x)$ એ શૂન્ય વિધેય હોય અથવા પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, જ્યાં a_i વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને $a_n \neq 0$ તો વિધેય f ને બહુપદી વિધેય કહેવાય.

આપણે જાણીએ છીએ કે $\lim_{x\to a} x = a$.

આથી, $\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a}(x\cdot x) = \lim_{x\to a} x\cdot\lim_{x\to a} x = a\cdot a = a^2$

ગાણિતિક અનુમાનના n પરના સરળ ઉપયોગથી કહી શકાય કે $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

હવે, ધારો કે $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ એ બહુપદી વિધેય છે. પ્રત્યેક $a_0, a_1x, a_2x^2, \ldots, a_nx^n$ ને વિધેય

તરીકે વિચારતાં,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n\right]$$

$$= \lim_{x \to a} a_0 + \lim_{x \to a} a_1x + \lim_{x \to a} a_2x^2 + \ldots + \lim_{x \to a} a_nx^n$$

$$= a_0 + a_1 \lim_{x \to a} x + a_2 \lim_{x \to a} x^2 + \ldots + a_n \lim_{x \to a} x^n$$

$$= a_0 + a_1a + a_2a^2 + \ldots + a_na^n$$

$$= f(a)$$

(ખાતરી કરો કે ઉપરના દરેક પદને તમે યોગ્ય રીતે સમજી શકો છો.)

જો $g(x)$ અને $h(x)$ એ બહુપદી વિધેયો હોય અને $h(x) \neq 0$ તો, વિધેય $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ને સંમેય વિધેય કહેવાય. આથી,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{g(a)}{h(a)}$$

અલબત, જો $h(a) = 0$ તો બે પરિસ્થિતિ સર્જાય (i) $g(a) \neq 0$ અને (ii) $g(a) = 0$. પ્રથમ વિકલ્પમાં લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી. બીજા કિસ્સામાં $g(x) = (x - a)^k g_1(x)$, જ્યાં k, $g(x)$ માં$(x - a)$ નો મહત્તમ ઘાતાંક છે.

આ જ રીતે, $h(x) = (x - a)^l h_1(x)$ કારણ કે $h(a) = 0$. અહીં l એ $h(x)$ માં $x - a$ નો મહત્તમ ઘાતાંક છે. અહીં પણ $g_1(a) \neq 0$, $h_1(a) \neq 0$. હવે, જો $k > l$, તો

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{\lim_{x \to a} (x-a)^k g_1(x)}{\lim_{x \to a} (x-a)^l h_1(x)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to a} (x-a)^{(k-l)} g_1(x)}{\lim_{x \to a} h_1(x)} = \frac{0 \cdot g_1(a)}{h_1(a)} = 0$$

જો $k < l$ તો, લક્ષ વ્યાખ્યાયિત નથી. જો $k = l$ તો $\lim_{x \to a} f(x) = \frac{g_1(a)}{h_1(a)}$

ઉદાહરણ 1 : લક્ષ શોધો : (i) $\lim_{x \to 1}\left[x^3 - x^2 + 1\right]$ (ii) $\lim_{x \to 3}\left[x(x+1)\right]$

(iii) $\lim_{x \to -1}\left[1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}\right]$

ઉકેલ : આવશ્યક લક્ષ એ બહુપદી વિધેયનાં લક્ષ છે. આથી, લક્ષનાં મૂલ્ય એ વિધેયની તે આગળની કિંમત બને.

(i) $\lim_{x \to 1} [x^3 - x^2 + 1] = 1^3 - 1^2 + 1 = 1$

(ii) $\lim_{x \to 3}\left[x(x+1)\right] = 3(3+1) = 3(4) = 12$

(iii) $\lim_{x \to -1}\left[1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}\right] = 1 + (-1) + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{10} = 1 - 1 + 1 - \ldots + 1 = 1$

ઉદાહરણ 2 : લક્ષ શોધો :

(i) $\lim_{x \to 1}\left[\frac{x^2 + 1}{x + 100}\right]$ (ii) $\lim_{x \to 2}\left[\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 4}\right]$

(iii) $\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x}\right]$

(iv) $\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6}\right]$

(v) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]$

ઉકેલ : અહીં, તમામ વિધેયો સંમેય વિધેય છે. આથી, આપણે પહેલાં આપેલ બિંદુ આગળ વિધેયનું મૂલ્ય શોધીશું. જો તે $\frac{0}{0}$ સ્વરૂપનું હોય, તો તે $\frac{0}{0}$ બનાવતા અવયવને દૂર કરી અને ફરી લખવાનો પ્રયત્ન કરીશું.

(i) અહીં, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x+100}=\frac{1^2+1}{1+100}=\frac{2}{101}$

(ii) વિધેયનું 2 આગળ મૂલ્ય શોધતાં તે $\frac{0}{0}$ સ્વરૂપનું છે.

આથી, $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x+2)}, \text{ કારણ કે } x\neq 2$$

$$= \frac{2(2-2)}{2+2}=\frac{0}{4}=0$$

(iii) વિધેયનું 2 આગળ મૂલ્ય શોધતાં, તે $\frac{0}{0}$ સ્વરૂપનું છે.

આથી, $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{x(x-2)}=\frac{2+2}{2(2-2)}=\frac{4}{0} \text{ અવ્યાખ્યાયિત છે.}$$

(iv) વિધેયનું 2 આગળ મૂલ્ય શોધતાં આપણને $\frac{0}{0}$ સ્વરૂપ મળે છે.

આથી, $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2}{(x-3)}=\frac{(2)^2}{2-3}=\frac{4}{-1}=-4$$

(v) પ્રથમ આપણે વિધેયને સંમેય વિધેય સ્વરૂપે લખીએ.

$$\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]=\left[\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{1}{x\left(x^2-3x+2\right)}\right]$$

$$=\left[\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$=\left[\frac{x^2-4x+4-1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$=\frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

વિધેયનું 1 આગળ મૂલ્ય શોધતાં આપણને $\frac{0}{0}$ સ્વરૂપ મળે છે.

આથી $$\lim_{x\to1}\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]=\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-3)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-3}{x(x-2)}=\frac{1-3}{1(1-2)}=2$$

આપણે નોંધીએ કે આપણે $(x-1)$ પદ ગણતરીમાંથી દૂર કરી શકીએ છીએ, કારણ કે $x\neq1$.

જેનો ઉપયોગ આગળની ચર્ચામાં કરીશું, તેવા એક અગત્યના લક્ષની ગણતરી નીચે આપેલ છે:

પ્રમેય 2 : કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક n માટે

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

નોંધ : ઉપરના પ્રમેયમાં આપેલ લક્ષ કોઈ પણ સંમેય સંખ્યા n તથા ધન a માટે પણ સત્ય છે.

સાબિતી : (x^n-a^n) ને $(x-a)$ વડે ભાગતાં, જોઈ શકાય કે

$$x^n-a^n=(x-a)\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots+x\,a^{n-2}+a^{n-1}\right)$$

આથી, $$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots+x\,a^{n-2}+a^{n-1}\right)$$

$$=a^{n-1}+a\cdot a^{n-2}+\ldots+a^{n-2}\cdot(a)+a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a^{n-1}+\ldots+a^{n-1}+a^{n-1} \qquad (n \text{ પદ})$$

$$=na^{n-1}$$

ઉદાહરણ 3 : ગણતરી કરો :

(i) $\lim_{x\to1}\frac{x^{15}-1}{x^{10}-1}$ (ii) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

ઉકેલ : (i) અહીં

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{15}-1}{x^{10}-1} = \lim_{x\to1}\left[\frac{x^{15}-1}{x-1}\div\frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= \lim_{x\to1}\left[\frac{x^{15}-1}{x-1}\right]\div\lim_{x\to1}\left[\frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= 15\,(1)^{14}\div10(1)^{9}$$ (આગળના પ્રમેય પરથી)

$$= 15\div10=\frac{3}{2}$$

(ii) $y = 1 + x$, લેતાં, જેમ $x\to0$ તેમ $y\to1$

આથી, $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{y\to1}\frac{\sqrt{y}-1}{y-1}$$

$$= \lim_{y\to1}\frac{y^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}}{y-1}$$

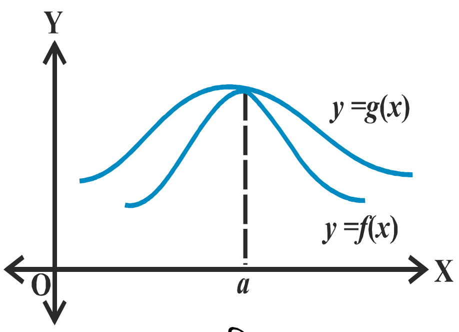
$$= \frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2}-1}$$ (આગળની નોંધ પરથી)

$$= \frac{1}{2}$$

13.4 ત્રિકોણમિતિય વિધેયનાં લક્ષ

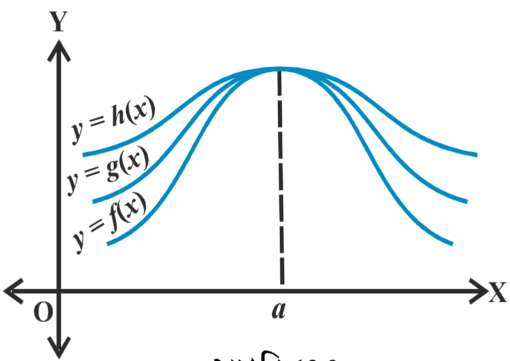
નીચે આપેલ વિધેયની માહિતી (જેનો પ્રમેય તરીકે ઉપયોગ કરેલ છે) ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં લક્ષ શોધવા ઉપયોગી થશે.

પ્રમેય 3 : ધારો કે f અને g વાસ્તવિક સંખ્યા પરના સમાન પ્રદેશવાળાં વિધેય છે અને વ્યાખ્યામાં આવતા પ્રદેશના પ્રત્યેક x માટે $f(x) < g(x)$ છે. કોઈ a માટે જો $\lim_{x\to a} f(x)$ અને $\lim_{x\to a} g(x)$નું અસ્તિત્વ હોય, તો $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$. આ હકીકત આકૃતિ 13.8 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ13.8

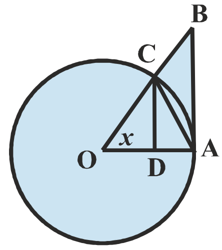
પ્રમેય 4 : (સેન્ડવિચ પ્રમેય) ધારો કે f, g અને h વાસ્તવિક વિધેયો છે, અને વ્યાખ્યામાં આવતા પ્રદેશના પ્રત્યેક x માટે $f(x) < g(x) < h(x)$. કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા a માટે, જો $\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$, તો $\lim_{x\to a} g(x) = l$. આ આકૃતિ 13.9માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 13.9

ત્રિકોણમિતિય વિધેયની એક અગત્યની અસમતા માટે નીચે સુંદર ભૌમિતિક સાબિતી આપેલ છે:

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2} \text{ માટે } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (*)$$



આકૃતિ 13.10

સાબિતી : આપણે જાણીએ છીએ કે $\sin(-x) = -\sin x$ અને $\cos(-x) = \cos x$.

આથી, આ સાબિતી અસમતા $0 < x < \frac{\pi}{2}$ માટે આપવી પૂરતી છે. આકૃતિ 13.10 માં, $\angle AOC$, x રેડિયન માપનો છે અને $0 < x < \frac{\pi}{2}$ થાય તે રીતે O કેન્દ્રવાળું એકમ વર્તુળ છે. રેખાખંડ BA અને CD OAને લંબ છે. હવે, AC જોડો.

આથી, ΔOAC નું ક્ષેત્રફળ < વૃત્તાંશ OAC નું ક્ષેત્રફળ < ΔOAB નું ક્ષેત્રફળ.

અર્થાત્ $\frac{1}{2} OA \cdot CD < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot (OA)^2 < \frac{1}{2} OA \cdot AB.$

અર્થાત્ $CD < x \cdot OA < AB.$

ΔOCD માં, $\sin x = \frac{CD}{OA}$ (કેમ કે OC = OA). તેથી $CD = OA \sin x$. વળી, $\tan x = \frac{AB}{OA}$. તેથી $AB = OA \tan x$.

આમ, $OA \cdot \sin x < OA \cdot x < OA \tan x$

લંબાઈ OA ધન હોવાથી, આપણને $\sin x < x < \tan x$ મળે.

વળી, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ હોવાથી $\sin x$ ધન છે. આથી $\sin x$ વડે ભાગતાં,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

બધાં જ પદનાં વ્યસ્ત લેતાં, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

આમ, સાબિતી પૂર્ણ થઈ.

પ્રમેય 5 : નીચેનાં બે લક્ષ મહત્ત્વપૂર્ણ છે.

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (ii) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

સાબિતી : (i) ઉપરોક્ત અસમતા (*) પરથી કહેવાય કે $\frac{\sin x}{x}$ વિધેયનાં મૂલ્ય એ વિધેય $\cos x$ અને જેની કિંમત 1 હોય તેવા અચળ વિધેયની વચ્ચે આવેલાં છે.

વળી, $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$, હોવાથી આપણે જોઈ શકીએ કે સેન્ડવિચ પ્રમેયની મદદથી (i) સાબિતી થાય.

(ii) સાબિત કરવા, ત્રિકોણમિતિય નિત્યસમ $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ યાદ કરીએ.

આથી, $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\cdot \lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1\cdot 0 = 0$$

આપણે જોયું કે માહિતી $x \to 0$ ને $\frac{x}{2} \to 0$ તરીકે લીધેલ છે. આ હકીકત $y = \frac{x}{2}$ લઈને સાર્થક સિદ્ધ કરી શકાય.

ઉદાહરણ 4 : ગણતરી કરો : (i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

ઉકેલ : (i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot 2\right]$

$$= 2\cdot\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right]\div\left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

$$= 2\cdot\lim_{4x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right]\div\lim_{2x\to 0}\left[\frac{\sin 2x}{2x}\right] \qquad (x \to 0,\text{ હોવાથી } 4x \to 0 \text{ અને } 2x \to 0)$$

$$= 2\cdot 1\cdot 1 = 2$$

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1$

આ લક્ષની ગણતરી કરતી વખતે જે સામાન્ય ખ્યાલ મનમાં રાખવો જોઈએ તે નીચે પ્રમાણેનો છે:

ધારો કે $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ નું અસ્તિત્વ છે અને આપણે આ લક્ષ શોધવું છે. પ્રથમ આપણે $f(a)$ અને $g(a)$ ની કિંમતો ચકાસીશું. જો બંને 0 હોય તો, આપણે જોઇ શકીએ કે આપણને એવો અવયવ મળે, જેને કારણે પદો 0 બને. અર્થાત્ આપણે $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ લખી શકીએ કે જેથી $f_1(a) = 0$ અને $f_2(a) \neq 0$. આ જ રીતે, આપણે $g(x) = g_1(x) g_2(x)$ લખી શકીએ કે જેથી $g_1(a) = 0$ અને $g_2(a) \neq 0$. $f(x)$ અને $g(x)$ નો સામાન્ય અવયવ શક્ય હોય, તો દૂર કરી $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$ લખો, જ્યાં $q(a) \neq 0$.

આમ, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$.

સ્વાધ્યાય 13.1

નીચેના લક્ષની ગણતરી કરો: (ક્રમાંક 1 to 22)

1. $\lim_{x\to 3}(x+3)$
2. $\lim_{x\to \pi}\left(x-\frac{22}{7}\right)$
3. $\lim_{r\to 1}\pi r^2$
4. $\lim_{x\to 4}\frac{4x+3}{x-2}$
5. $\lim_{x\to -1}\frac{x^{10}+x^5+1}{x-1}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^5-1}{x}$
7. $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x-10}{x^2-4}$
8. $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{2x^2-5x-3}$
9. $\lim_{x\to 0}\frac{ax+b}{cx+1}$

10. $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{z^{\frac{1}{3}} - 1}{z^{\frac{1}{6}} - 1}$

11. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a}, a + b + c \neq 0$

12. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x + 2}$

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{bx}$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}, a, b \neq 0$

15. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$

16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{\pi - x}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1}$

18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax + x\cos x}{b \sin x}$

19. $\lim\limits_{x \to 0} x \sec x$

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx}$ $a, b, a + b \neq 0$,

21. $\lim\limits_{x \to 0} (\text{cosec}\, x - \cot x)$

22. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$

23. જો $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 3(x + 1), & x > 0 \end{cases}$ તો $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ અને $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ શોધો.

24. જો $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ -x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$ તો $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ શોધો.

25. જો $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ તો $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ની ગણતરી કરો.

26. જો $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ તો $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ શોધો.

27. જો $f(x) = |x| - 5$ તો $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ શોધો.

28. ધારો કે $f(x) = \begin{cases} a + bx, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ b - ax, & x > 1 \end{cases}$

અને જો, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ તો a અને b ની શક્ય કિંમતો કઈ છે?

29. ધારો કે $a_1, a_2, \ldots, a_n$ એ નિશ્ચિત વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને

$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$ વ્યાખ્યાયિત કરો,

તો $\lim\limits_{x \to a_1} f(x)$ શું થાય? કોઈક $a \neq a_1, a_2, \ldots, a_n$ હોય તો $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ગણો.

30. જો $f(x)=\begin{cases}|x|+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ |x|-1, & x>0\end{cases}$.

a ની કઈ કિંમત (કે કિંમતો) માટે $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ નું અસ્તિત્વ છે?

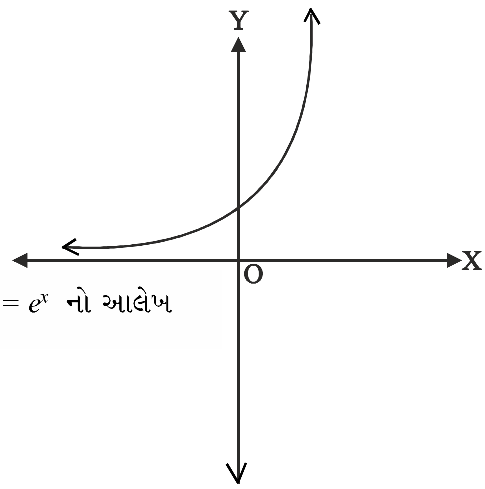
31. જો વિધેય $f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x^2-1}=\pi$ ને સંતોષે, તો $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ શોધો.

32. જો $f(x)=\begin{cases}mx^2+n, & x<0\\ nx+m, & 0\le x\le 1\\ nx^3+m, & x>1\end{cases}$ તો કયા પૂર્ણાંકો m અને n માટે $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ અને $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ એ બંને લક્ષનાં અસ્તિત્વ હોય?

13.5 ઘાતાંકીય અને લઘુગણકીય વિધેય

ઘાતાંકીય અને લઘુગણકીય વિધેયને આવરી લેતી અભિવ્યક્તિઓના લક્ષના મૂલ્યાંકનની ચર્ચા કરતાં પહેલાં આપણે બે વિધેયોના પ્રદેશ, વિસ્તાર અને તેમના કાચા આલેખોનું આલેખન કરી તેમનો પરિચય કરીએ.

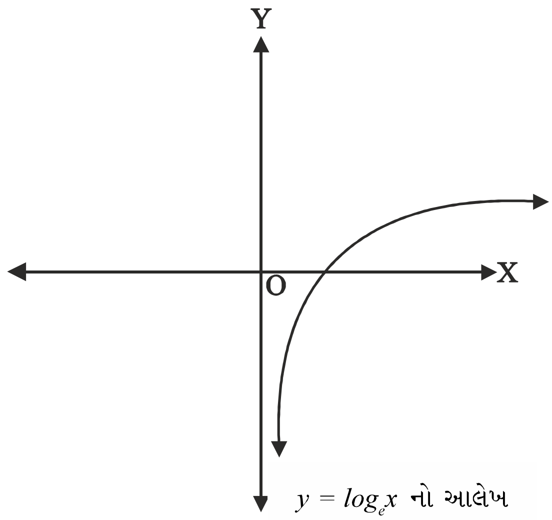
જેનું મૂલ્ય 2 અને 3 ને વચ્ચે છે એવી સંખ્યા e નો પરિચય મહાન સ્વિસ ગણિતશાસ્ત્રી ***Leonhard Euler*** એ (1707-1783) કરાવ્યો. આ સંખ્યાનો ઘાતાંકીય વિધેયની વ્યાખ્યામાં ઉપયોગ થાય છે અને તેની વ્યાખ્યા $f(x)=e^x$, $x\in \mathbf{R}$ તરીકે કરવામાં આવી છે. તેનો પ્રદેશ $\mathbf{R}$ અને વિસ્તાર ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. આકૃતિ 13.11 માં ઘાતાંકીય વિધેય $y = e^x$ નો આલેખ આપ્યો છે.



આકૃતિ 13.11

તે જ પ્રમાણે લઘુગણકીય વિધેય $log_e : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$. જો $e^y = x$ તો અને તો જ $log_e x = y$ વડે દર્શાવાય છે. તેનો પ્રદેશ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ $\mathbf{R}^+$ અને વિસ્તાર $\mathbf{R}$ છે. લઘુગણકીય વિધેય $y = log_e x$ નો આલેખ આકૃતિ 13.12 માં દર્શાવેલ છે.

પરિણામ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ સાબિત કરવા માટે આપણે અભિવ્યક્તિ $\dfrac{e^x-1}{x}$ નો સમાવેશ કરતી એક અસમતાનો ઉપયોગ કરીશું. તે આગળ દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે :



આકૃતિ 13.12

$\frac{1}{1+|x|} \le \frac{e^x - 1}{x} \le 1 + (e-2)|x|$. આ અસમતા $[-1, 1] - \{0\}$ ના પ્રત્યેક x માટે સત્ય છે.

પ્રમેય 6 : સાબિત કરો કે $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

સાબિતી : ઉપરની અસમતાનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{1}{1+|x|} \le \frac{e^x - 1}{x} \le 1 + |x|(e-2), x \in [-1, 1] - \{0\}$$

વળી, $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{1 + \lim_{x \to 0}|x|} = \frac{1}{1+0} = 1$$

અને $$\lim_{x \to 0} \left[1 + (e-2)|x|\right] = 1 + (e-2)\lim_{x \to 0}|x| = 1 + (e-2)0 = 1$$

આથી, સેન્ડવિચ પ્રમેય પરથી,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ થાય.}$$

પ્રમેય 7 : સાબિત કરો કે $\lim_{x \to 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$

સાબિતી : ધારો કે $\frac{\log_e(1+x)}{x} = y$

તો, $\log_e(1+x) = xy$

$\therefore \quad 1 + x = e^{xy}$

$\therefore \quad \frac{e^{xy} - 1}{x} = 1$

અથવા $\frac{e^{xy} - 1}{xy} . y = 1$

હવે $\lim_{xy \to 0} \frac{e^{xy} - 1}{xy} \lim_{x \to 0} y = 1$ (કારણ કે $x \to 0$ પરથી $xy \to 0$)

$\therefore \quad \lim_{x \to 0} y = 1$ $\left(\text{કારણ કે } \lim_{xy \to 0} \frac{e^{xy} - 1}{xy} = 1\right)$

$\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$

ઉદાહરણ 5 : $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$ શોધો.

ઉકેલ :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{3x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot 3$$

$$= 3\left(\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y}\right), \quad \text{જ્યાં } y = 3x$$

$$= 3 \cdot 1 = 3$$

ઉદાહરણ 6 : ગણતરી કરો $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x}$

ઉકેલ :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{e^x - 1}{x} - \frac{\sin x}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 - 1 = 0$$

ઉદાહરણ 7 : $\lim_{x \to 1} \frac{\log_e x}{x - 1}$ મેળવો.

ઉકેલ : $x = 1 + h$ લેતાં, $x \to 1$ તો $h \to 0$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log_e x}{x - 1} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_e (1 + h)}{h}$$

$$= 1 \qquad \left(\text{કારણ કે } \lim_{x \to 0} \frac{\log_e (1 + x)}{x} = 1 \right)$$

સ્વાધ્યાય 13.2

નીચેનાં લક્ષ અસ્તિત્વ ધરાવે તો મેળવો :

1. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x} - 1}{x}$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2+x} - e^2}{x}$
3. $\lim_{x \to 5} \frac{e^x - e^5}{x - 5}$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$
5. $\lim_{x \to 3} \frac{e^x - e^3}{x - 3}$
6. $\lim_{x \to 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}$

7. $\lim_{x \to 0} \frac{\log_e (1 + 2x)}{x}$
8. $\lim_{x \to 0} \frac{\log (1 + x^3)}{\sin^3 x}$

13.6 વિકલન

આપણે વિભાગ 13.2માં જોઈ ગયાં કે પદાર્થના અલગ અલગ સમય અંતરાલના સ્થાન પરથી એ શોધવું શક્ય બને કે તેના સ્થાનનો બદલાવનો દર કેટલો છે. જીવનમાં બનતી એવી ઘણી ઘટનાઓ છે કે જ્યાં આ પ્રક્રિયા ઉપયોગી બને. દાખલા તરીકે, ડેમની ઊંડાઈ પરથી તે ક્યારે છલકાશે તે ડેમની સંભાળ રાખતા માણસે જાણવું જરૂરી બને છે. રૉકેટશાસ્ત્રમાં વૈજ્ઞાનિકોને રોકેટની ઊંચાઈની માહિતી પરથી ઉપગ્રહ છોડવાની ગતિની ગણતરી કરવાની હોય છે. કોઈ શૅરના વર્તમાનભાવ પરથી તેમાં થનારા ફેરફારની આગાહી નાણા સંસ્થાઓ કરતી હોય છે. આ બધામાં કોઈ રાશિ (સાપેક્ષ ચલ)માં અન્ય કોઈ રાશિ (નિરપેક્ષ ચલ)ને સાપેક્ષ થતાં ફેરફારની માહિતી જરૂરી છે. આ બધી જ માહિતીનું હાર્દ વિધેયના પ્રદેશમાં રહેલ નિશ્ચિત બિંદુએ તેનું વિકલન શોધવાનું છે.

વ્યાખ્યા 1 : ધારો કે f વાસ્તવિક વિધેય છે અને a તેની વ્યાખ્યાના પ્રદેશનું બિંદુ છે. જો $\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો *તેને $f(x)$ નું a આગળનું વિકલિત કહે છે અને તેને સંકેત $f'(a)$ વડે દર્શાવાય છે.*

ઉદાહરણ 8 : વિધેય $f(x)=3x$ નું $x=2$ આગળ વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : અહીં,

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)-3(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6+3h-6}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0}3 = 3$$

વિધેય $3x$ નું $x=2$ આગળનું વિકલિત 3 છે.

ઉદાહરણ 9 : વિધેય $f(x)=2x^2+3x-5$ નું $x=-1$આગળનું વિકલિત શોધો તથા સાબિત કરો કે $f'(0)+3f'(-1)=0$.

ઉકેલ : આપણે પ્રથમ વિધેય $f(x)$ ના $x=-1$ અને $x=0$ આગળના વિકલિત શોધીશું.

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[2(-1+h)^2+3(-1+h)-5\right]-\left[2(-1)^2+3(-1)-5\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h^2-h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2h-1) = 2(0)-1 = -1$$

અને

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[2(0+h)^2+3(0+h)-5\right]-\left[2(0)^2+3(0)-5\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h^2+3h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2h+3) = 2(0)+3 = 3$$

સ્પષ્ટ છે કે, $f'(0)+3f'(-1)=0$

નોંધ : આ તબક્કે નોંધો કે કોઈ બિંદુ આગળ વિકલિત શોધવા લક્ષના ઘણાબધા નિયમોનો અસરકારક ઉપયોગ થાય છે. આગળનું ઉદાહરણ આ બતાવે છે:

ઉદાહરણ 10 : $sin\ x$ નું $x = 0$ આગળ વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = sin\ x$.

આથી $$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{sin(0+h)-sin(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{sin\ h}{h} = 1$$

ઉદાહરણ 11 : વિધેય $f(x) = 3$ નું $x = 0$ અને $x = 3$ આગળ વિકલિત શોધો.

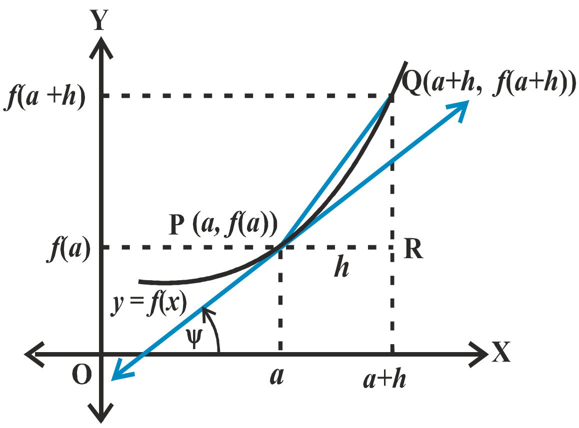
ઉકેલ : વિકલિત એ વિધેયમાં થતા ફેરફારનો દર છે. આથી, પ્રથમ દૃષ્ટિએ રીતે સ્પષ્ટ છે કે અચળ વિધેયનું પ્રત્યેક બિંદુએ વિકલિત શૂન્ય થાય. નીચેની ગણતરીથી આ ધારણાને સમર્થન મળે છે:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$

આ જ રીતે, $$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h} = 0.$$

હવે, આપણે કોઈ બિંદુએ વિકલિતની સંકલ્પનાનું ભૌમિતિક અર્થઘટન કરીશું. ધારો કે $y = f(x)$ એક વિધેય છે અને $P = (a, f(a))$ અને $Q = (a + h, f(a + h))$ એ વિધેયના આલેખ પરનાં બે નજીકનાં બિંદુઓ છે. આ આકૃતિ 13.11 માં સ્વયંસ્પષ્ટ છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, $$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



આકૃતિ 13.13

ત્રિકોણ PQR પરથી, એ સ્પષ્ટ છે કે આપણે જેનું લક્ષ શોધીએ છીએ તે ગુણોત્તર એ જીવા PQ ના ઢાળ $tan\ \angle QPR$ જેટલો છે. લક્ષની પ્રક્રિયામાં જેમ h એ 0 ને અનુલક્ષે તેમ બિંદુ Q એ P ને અનુલક્ષે અને આથી,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{Q\to P}\frac{QR}{PR}$$

આ હકીકત વક્ર $y = f(x)$ માટે જીવા PQ એ P આગળના સ્પર્શકને અનુલક્ષે છે તે રીતે સમજી શકાય. આથી, લક્ષ સ્પર્શકના ઢાળ બરાબર છે. આથી, $f'(a) = \tan\psi$.

આપેલ વિધેય f નું આપણે તેના પ્રદેશના પ્રત્યેક બિંદુએ વિકલિત કરી શકીએ તો તે એક નવું વિધેય વ્યાખ્યાયિત કરે. તેને f નું વિકલિત કહેવાય. ઔપચારિક રીતે, આપણે વિકલિતની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપીશું:

વ્યાખ્યા 2 : *ધારો કે વિધેય f વાસ્તવિક વિધેય છે. જો લક્ષનું અસ્તિત્વ હોય, તો*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ને વિધેય f નું x આગળનું વિકલિત કહીશું અને તેને $f'(x)$ વડે દર્શાવીશું. વ્યાખ્યાથી શોધાતા વિકલિતને પ્રથમ સિદ્ધાંતથી મેળવેલ વિકલિત કહીશું.

આમ, $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

જે પ્રદેશમાં ઉપરનું લક્ષ મળે તે $f'(x)$ ની વ્યાખ્યાનો પ્રદેશ છે. વિધેયના વિકલિતને દર્શાવતાં અલગ અલગ સંકેતો છે. કેટલીક વખત $f'(x)$ ને $\frac{d}{dx}(f(x))$ અથવા જો $y = f(x)$ તો તે $\frac{dy}{dx}$ દ્વારા દર્શાવાય છે. તેનો અર્થ $f(x)$ અથવા y નું x ને સાપેક્ષ વિકલિત, એમ થાય. તેને $D(f(x))$ વડે પણ દર્શાવાય. વળી, f નું $x = a$ આગળનું વિકલિત $\left.\frac{d}{dx} f(x)\right|_a$ અથવા $\left.\frac{df}{dx}\right|_a$ અથવા $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$ વડે પણ દર્શાવાય છે.

ઉદાહરણ 12: $f(x) = 10x$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{10(x+h) - 10(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{10h}{h} = \lim_{h \to 0} (10) = 10$$

ઉદાહરણ 13 : $f(x) = x^2$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ: અહીં, $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (h + 2x) = 2x$$

ઉદાહરણ 14 : અચળ વિધેય $f(x) = a$ નું કોઈ નિશ્ચિત વાસ્તવિક અચળ કિંમત માટે વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{a-a}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0, \text{ કારણ કે } h \neq 0$$

ઉદાહરણ 15 : $f(x) = \frac{1}{x}$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

13.6.1 વિધેયના વિકલિતનું બીજગણિત: વિકલનની વ્યાખ્યામાં લક્ષના બધા જ નિયમો ઉપયોગમાં લેવાતાં હોવાથી આપણે અપેક્ષા રાખીએ કે વિકલનના નિયમો લક્ષના નિયમોને અનુસરશે. આપણે નીચેના પ્રમેય તરીકે તેમની ચર્ચા કરીશું:

પ્રમેય 8 : ધારો કે વિધેયો f અને g સામાન્ય પ્રદેશમાં વિકલનીય હોય, તો

(i) બે વિધેયના સરવાળાનું વિકલિત એ તેમના વિકલિતના સરવાળા જેટલું હોય.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x).$$

(ii) બે વિધેયના તફાવતનું વિકલિત એ તેમના વિકલિતના તફાવત જેટલું હોય.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x).$$

(iii) બે વિધેયના ગુણાકારનું વિકલિત એ નીચેના ગુણાકારના વિકલિતના નિયમ દ્વારા દર્શાવી શકાય.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)$$

(iv) જ્યારે છેદ શૂન્યેતર હોય ત્યારે બે વિધેયના ભાગાકારના વિકલિતનો નિયમ નીચેના ભાગાકારના નિયમ દ્વારા દર્શાવી શકાય:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

આની સાબિતી લક્ષના પ્રમેયોની સાબિતીને જ અનુસરશે. આપણે આ સાબિતીઓ અહીં આપીશું નહિ. લક્ષની જેમ જ આ પ્રમેયોનો ઉપયોગ કેટલાંક વિશિષ્ટ વિધેયોના વિકલિત મેળવવા માટે કરી શકાય. છેલ્લા બે પ્રમેયોને ફરીથી યાદ ફરીથી યાદ રાખવાનું સરળ બને તે રીતે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય:

ધારો કે $u = f(x)$ અને $v = g(x)$, તો

$$(uv)' = u'v+uv'$$

આને લિબનિટ્ઝનો વિકલિતના ગુણાકારનો નિયમ અથવા ગુણાકારનો નિયમ કહીશું. આ જ રીતે, ભાગાકારનો નિયમ

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

હવે, કેટલાંક પ્રમાણિત વિધેયના વિકલનની ક્રિયા હાથ ધરીએ. એ જોવું સરળ છે કે વિધેય $f(x) = x$ નું વિકલિત અચળ વિધેય 1 છે.

કારણ કે $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0}1=1$.

આપણે આ અને ઉપરના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી.

$f(x) = 10x = x + ... + x$ (10 વખત) નું વિકલિત શોધીએ. ઉપરના પ્રમેય (*i*) મુજબ,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x+...+x) \quad \text{(દસ પદ)}$$

$$= \frac{d}{dx}x+\ldots+\frac{d}{dx}x \quad \text{(દસ પદ)}$$

$$= 1+...+1 \quad \text{(દસ પદ)}$$

$$= 10$$

આપણે નોંધીએ કે આ લક્ષ ગુણાકારના નિયમથી પણ શોધી શકાય. $f(x) = 10x = uv$ લખો, જ્યાં u એ અચળ વિધેય છે અને તેનું મૂલ્ય 10 અને $v(x) = x$ છે. અહીં, ગુણાકારના નિયમ મુજબ

$$f'(x) = (10x)' = (uv)' = u'v + uv' = 0 \cdot x + 10 \cdot 1 = 10$$

આ જ રીતે $f(x) = x^2$ નું વિકલિત મેળવી શકાય. અહીં, $f(x) = x^2 = x \cdot x$ અને આથી,

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot x + x \cdot \frac{d}{dx}(x)$$

$$= 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

વ્યાપક રીતે આપણે નીચેનું પ્રમેય લઈએ.

પ્રમેય 9 : જો n એ ધન પૂર્ણાંક હોય તો $f(x) = x^n$ નું વિકલત nx^{n-1} છે.

સાબિતી : વિકલનની વ્યાખ્યાથી,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

દ્વિપદી પ્રમેયથી, $(x + h)^n = ({}^nC_0)x^n + ({}^nC_1)x^{n-1}h + {}^nC_2x^{n-2}h^2 + ... + ({}^nC_n)h^n$ અને

આથી, $(x + h)^n - x^n = h(nx^{n-1} + {}^nC_2x^{n-2}h + ... + h^{n-1})$.

આમ,
$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left(nx^{n-1} + {}^nC_2x^{n-2}h + ... + h^{n-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(nx^{n-1} + {}^nC_2x^{n-2}h + ... + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}$$

બીજી રીત : n પરના ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પણ આ પ્રમેય સાબિત કરી શકાય.

આ પરિણામ $n = 1$ માટે સત્ય છે, તે આગળ સાબિત કરેલ છે

હવે, $$\frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}(x \cdot x^{n-1})$$

$$= \frac{d}{dx}(x) \cdot (x^{n-1}) + x \cdot \frac{d}{dx}(x^{n-1}) \quad \text{(ગુણાકારના નિયમ પરથી)}$$

$$= 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot \left((n-1)x^{n-2}\right)$$ (અનુમાનની પૂર્વધારણા)

$$= x^{n-1} + (n-1)x^{n-1}$$

$$= nx^{n-1}$$

નોંધ : ઉપરનું પ્રમેય x ના પ્રત્યેક ઘાતાંક માટે સત્ય છે. અર્થાત્, n કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોઈ શકે. (પરંતુ આપણે અહીં તેની સાબિતી આપીશું નહિ.)

13.6.2 બહુપદી અને ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં વિકલિત

આપણે નીચેના બહુપદી વિધેયના વિકલિતના પ્રમેયથી શરૂઆત કરીએઃ

પ્રમેય 10: જો પ્રત્યેક a_i વાસ્તવિક સંખ્યા હોય અને $a_n \neq 0$ તો બહુપદી વિધેય $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ નું વિકલિત

$$\frac{df(x)}{dx} = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + \; 2a_2 x + a_1 .$$

આની સાબિતી પ્રમેય 8નો ભાગ (i) અને પ્રમેય 9 સાથે લેવાથી મળે.

ઉદાહરણ 16 : $6x^{100} - x^{55} + x$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : ઉપરના પ્રમેયનો પ્રત્યક્ષ ઉપયોગ કરતાં વિકલિત $600x^{99} - 55x^{54} + 1$ મળે.

ઉદાહરણ 17: $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{50}$ નું $x = 1$ આગળ વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : ઉપરના પ્રમેય 9 નો ઉપયોગ કરતાં, વિકલિત $1 + 2x + 3x^2 + . . . + 50x^{49}$ મળે.

$x = 1$ આગળ આ વિધેયનું મૂલ્ય $1 + 2(1) + 3(1)^2 + . . . + 50(1)^{49} = 1 + 2 + 3 + . . . + 50 = \frac{(50)(51)}{2} = 1275.$

ઉદાહરણ 18 : $f(x) = \frac{x+1}{x}$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે વિધેય $x = 0$ સિવાય વ્યાખ્યાયિત છે. $u = x + 1$ અને $v = x$ લઈ ભાગાકારનો નિયમ વાપરીએ. $u' = 1$ અને $v' = 1$.

આથી, $$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1(x) - (x+1)1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

ઉદાહરણ 19 : $sin\, x$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $f(x) = sin\, x$.

આથી, $$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sin(x+h) - sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$ (sin A $- sin$ Bના સૂત્રથી)

$$= \lim_{h\to 0} cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= cosx \cdot 1 = cosx$$

ઉદાહરણ 20 : *tan x* નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = tan\, x$

આથી, $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{tan(x+h)-tan(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{sin(x+h)}{cos(x+h)} - \frac{sin\, x}{cosx}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{sin(x+h)cos\, x - cos(x+h)sinx}{hcos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{sin(x+h-x)}{hcos(x+h)cos\, x}$$ (*sin* (A + B)ના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{sin\, h}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{cos(x+h)cos\, x}$$

$$= 1.\frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$$

ઉદાહરણ 21 : $f(x) = sin^2 x$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : આપણે લિબનિટ્ઝના ગુણાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરીએ.

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(sin\, x\, sin\, x)$$

$$= (sin\, x)'\, sin\, x + sin\, x(sin\, x)'$$

$$= (cos\, x)sin\, x + sin\, x(cos\, x)$$

$$= 2sin\, xcos\, x = sin\, 2x$$

સ્વાધ્યાય 13.3

1. $x^2 - 2$ નું $x = 10$ આગળનું વિકલિત મેળવો.

2. $99x$ નું $x = 100$ આગળનું વિકલિત મેળવો.

3. x નું $x = 1$ આગળનું વિકલિત મેળવો.

4. નીચેનાં વિધેયોના વિકલિત પ્રથમ સિદ્ધાંતથી શોધો :

   (i) $x^3 - 27$ (ii) $(x-1)(x-2)$ (iii) $\frac{1}{x^2}$ (iv) $\frac{x+1}{x-1}$

5. વિધેય $f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + ... + \frac{x^2}{2} + x + 1$ માટે સાબિત કરો કે $f'(1) = 100 f'(0)$.

6. કોઈક નિશ્ચિત વાસ્તવિક સંખ્યા a માટે $x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + ... + a^{n-1}x + a^n$ નું વિકલિત શોધો.

7. કોઈ અચળ a અને b માટે વિકલિત શોધો :

   (i) $(x-a)(x-b)$ (ii) $(ax^2+b)^2$ (iii) $\frac{x-a}{x-b}$

8. કોઈક અચળ a માટે $\frac{x^n - a^n}{x-a}$ નું વિકલિત શોધો.

9. વિકલિત શોધો:

   (i) $2x - \frac{3}{4}$ (ii) $(5x^3 + 3x - 1)(x-1)$ (iii) $x^{-3}(5+3x)$

   (iv) $x^5(3 - 6x^{-9})$ (v) $x^{-4}(3 - 4x^{-5})$ (vi) $\frac{2}{x+1} - \frac{x^2}{3x-1}$

10. પ્રથમ સિદ્ધાંતથી $\cos x$ નું વિકલિત શોધો :

11. નીચેનાં વિધેયોનાં વિકલિત શોધો :

    (i) $\sin x \cos x$ (ii) $\sec x$ (iii) $5\sec x + 4\cos x$

    (iv) $\operatorname{cosec} x$ (v) $3\cot x + 5\operatorname{cosec} x$ (vi) $5\sin x - 6\cos x + 7$

    (vii) $2\tan x - 7\sec x$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 22 : f નું પ્રથમ સિદ્ધાંતથી વિકલિત શોધો, જ્યાં

(i) $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ (ii) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

ઉકેલ : (i) આપણે નોંધીએ કે $x = 2$ આગળ વિધેય વ્યાખ્યાયિત નથી.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2(x+h)+3}{x+h-2} - \frac{2x+3}{x-2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2x+2h+3)(x-2)-(2x+3)(x+h-2)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2x+3)(x-2)+2h(x-2)-(2x+3)(x-2)-h(2x+3)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-7}{(x-2)(x+h-2)}$$

$$= -\frac{7}{(x-2)^2}$$

ફરી નોંધો કે વિધેય f' પણ $x = 2$ આગળ વ્યાખ્યાયિત નથી, વિધેય પોતે જ $f = 2$ આગળ વ્યાખ્યાયિત નથી. વિકલિતની વ્યાખ્યા અનુસાર f એ $x = a$ આગળ વ્યાખ્યાયિત હોય તે જરૂરી છે.

(ii) વિધેય $x = 0$ આગળ વ્યાખ્યાયિત નથી.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(x+h+\frac{1}{x+h}\right) - \left(x+\frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[h + \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[h + \frac{x-x-h}{x(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[h\left(1 - \frac{1}{x(x+h)}\right)\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[1 - \frac{1}{x(x+h)}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{x^2}$$

ફરી નોંધો કે, વિધેય f' એ $x = 0$ આગળ વ્યાખ્યાયિત નથી. (કેમ ?)

ઉદાહરણ 23 : $f(x)$= (i) $\sin x + \cos x$ (ii) $x \sin x$ નું પ્રથમ સિદ્ધાંતથી વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : (i) અહીં, $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) + \cos(x+h) - \sin x - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h + \cos x \cos h - \sin x \sin h - \sin x - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h(\cos x - \sin x) + \sin x(\cos h - 1) + \cos x(\cos h - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}(\cos x - \sin x) + \lim_{h\to 0} \sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \frac{(\cos h - 1)}{h}$$

$$= \cos x - \sin x$$

(ii) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\sin(x+h) - x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(\sin x \cos h + \sin h \cos x) - x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x\sin x(\cos h - 1) + x\cos x \sin h + h(\sin x \cos h + \sin h \cos x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} x\cos x \frac{\sin h}{h} + \lim_{h\to 0}(\sin x \cos h + \sin h \cos x)$$

$$= x\cos x + \sin x$$

ઉદાહરણ 24 : વિકલિત શોધો :

(i) $f(x) = \sin 2x$ (ii) $g(x) = \cot x$

ઉકેલ : (i) ત્રિકોણમિતિના સૂત્ર $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ને યાદ કરીએ.

આથી, $$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(2 \sin x \cos x)$$

$$= 2\frac{d}{dx}(\sin x \cos x)$$

$$= 2\left[(\sin x)' \cos x + \sin x(\cos x)'\right]$$

$$= 2\left[(\cos x)\cos x + \sin x(-\sin x)\right]$$

$$= 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

(ii) વ્યાખ્યા મુજબ, $g(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. આપણે આ વિધેય પર, જ્યાં પણ વ્યાખ્યાયિત હોય ત્યાં, ભાગાકારનો નિયમ

વાપરીએ. $\dfrac{dg}{dx}=\dfrac{d}{dx}(cot\, x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{cos\, x}{sin\, x}\right)$

$$=\frac{(cos\, x)'(sin\, x)-(cos\, x)(sin\, x)'}{(sin\, x)^2}$$

$$=\frac{(-sin\, x)(sin\, x)-(cos\, x)(cos\, x)}{(sin\, x)^2}$$

$$=-\frac{sin^2 x+cos^2 x}{sin^2 x}=-cosec^2 x$$

બીજી રીતે, આની ગણતરી $cot\, x=\dfrac{1}{tan\, x}$ લઈને પણ કરી શકાય. અહીં, આપણે એ માનીશું કે, $tan\, x$ નો વિકલિત $sec^2 x$ થાય. તે આપણે ઉદાહરણ 20 માં જોયું અને અચળ વિધેયનો વિકલત 0 થાય.

આથી, $\dfrac{dg}{dx}=\dfrac{d}{dx}(cot\, x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{tan\, x}\right)$

$$=\frac{(1)'(tan\, x)-(1)(tan\, x)'}{(tan\, x)^2}$$

$$=\frac{(0)(tan\, x)-(sec\, x)^2}{(tan\, x)^2}$$

$$=\frac{-sec^2 x}{tan^2 x}=-cosec^2 x$$

ઉદાહરણ 25 : વિકલિત શોધો :

(i) $\dfrac{x^5-cos\, x}{sin\, x}$ (ii) $\dfrac{x+cos\, x}{tan\, x}$

ઉકેલ : (i) ધારો કે જ્યાં પણ વ્યાખ્યાયિત હોય ત્યાં, $h(x)=\dfrac{x^5-cos\, x}{sin\, x}$ પર આપણે આ વિધેયના વિકલિત માટે ભાગાકારનો નિયમ વાપરીએ.

$$h'(x)=\frac{(x^5-cos\, x)'\, sin\, x-(x^5-cos\, x)(sin\, x)'}{(sin\, x)^2}$$

$$=\frac{(5x^4+sin\, x)\, sin\, x-(x^5-cos\, x)\, cos\, x}{sin^2 x}$$

$$=\frac{-x^5 cos\, x+5x^4 sin\, x+1}{(sin\, x)^2}$$

(ii) વિધેય જ્યાં પણ વ્યાખ્યાયિત હોય ત્યાં, $h(x)=\dfrac{x+cos\, x}{tan\, x}$ પર આપણે ભાગાકારનો નિયમ વાપરીએ.

આથી, $h'(x)=\dfrac{(x+cos\, x)'\, tan\, x-(x+cos\, x)(tan\, x)'}{(tan\, x)^2}$

$$=\frac{(1-sin\, x)\, tan\, x-(x+cos\, x)\, sec^2 x}{(tan\, x)^2}$$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 13

1. વ્યાખ્યાની મદદથી નીચેના વિકલિત મેળવો :

(i) $-x$ (ii) $(-x)^{-1}$ (iii) $sin\ (x+1)$ (iv) $cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$

નીચેનાં વિધેયોના વિકલિત મેળવો :

(એ માની લો કે a, b, c, d, p, q, r અને s નિશ્ચિત શૂન્યેતર અચળ અને m તથા n પૂર્ણાંક છે.)

2. $(x+a)$

3. $(px+q)\left(\frac{r}{x}+s\right)$

4. $(ax+b)(cx+d)^2$

5. $\frac{ax+b}{cx+d}$

6. $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

7. $\frac{1}{ax^2+bx+c}$

8. $\frac{ax+b}{px^2+qx+r}$

9. $\frac{px^2+qx+r}{ax+b}$

10. $\frac{a}{x^4}-\frac{b}{x^2}+\cos x$

11. $4\sqrt{x}-2$

12. $(ax+b)^n$

13. $(ax+b)^n(cx+d)^m$

14. $sin\ (x+a)$

15. $cosec\ x\ \cot x$

16. $\frac{cos\ x}{1+sin\ x}$

17. $\frac{sin\ x+cos\ x}{sin\ x-cos\ x}$

18. $\frac{sec\ x-1}{sec\ x+1}$

19. $sin^n x$

20. $\frac{a+b\,sin\,x}{c+d\,cos\,x}$

21. $\frac{sin(x+a)}{cos x}$

22. $x^4(5\,sin\,x-3cos\,x)$

23. $(x^2+1)cos\ x$

24. $(ax^2+sin\ x)(p+q\,cosx)$

25. $(x+cos\ x)(x-tan\ x)$

26. $\frac{4x+5sin\ x}{3x+7cos\ x}$

27. $\frac{x^2cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{sinx}$

28. $\frac{x}{1+tanx}$

29. $(x+secx)(x-tanx)$

30. $\frac{x}{sin^n x}$

સારાંશ

- આપેલ બિંદુની ડાબી બાજુનાં બિંદુઓ દ્વારા મળતા વિધેયના અપેક્ષિત મૂલ્યને ડાબી બાજુનું લક્ષ કહેવાય. આ જ રીતે જમણી બાજુનું લક્ષ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.
- જો ડાબી તથા જમણી બાજુના લક્ષનાં મૂલ્યો સમાન હોય, તો તે મૂલ્ય આ બિંદુ આગળ વિધેયનું લક્ષ કહેવાય.
- વિધેય f અને વાસ્તવિક સંખ્યા a માટે $\lim_{x\to a} f(x)$ અને $f(a)$ સમાન ના પણ હોય. (અલબત, એક વ્યાખ્યાયિત હોય અને એક ના પણ હોય.)

◆ વિધેયો f અને g માટે નીચેનાં વિધાન સત્ય છે:

$$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

◆ નીચે કેટલાંક પ્રમાણિત લક્ષ આપેલ છે:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x} = 0$$

◆ વિધેય fનું a આગળનું વિકલિત

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

◆ વિધેય fનું કોઈ બિંદુ x આગળનું વિકલિત

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

◆ વિધેયો u અને v માટે

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. શરત માત્ર એટલી કે તમામ વિકલિત વ્યાખ્યાયિત હોય.

◆ નીચે કેટલાંક પ્રમાણિત વિકલન આપેલ છે:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(sin\ x) = cos\ x$$

$$\frac{d}{dx}(cos\ x) = -\ sin\ x$$

Historical Note

In the history of mathematics two names are prominent to share the credit for inventing calculus, Issac Newton (1642 – 1727) and G.W. Leibnitz (1646 – 1717). Both of them independently invented calculus around the seventeenth century. After the advent of calculus many mathematicians contributed for further development of calculus. The rigorous concept is mainly attributed to the great mathematicians, A.L. Cauchy, J.L.Lagrange and Karl Weierstrass. Cauchy gave the foundation of calculus as we have now generally accepted in our textbooks. Cauchy used D' Alembert's limit concept to define the derivative of a function. Starting with definition of a limit, Cauchy gave examples such as the limit of

$\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ for $\alpha = 0$. He wrote $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+i) - f(x)}{i}$, and called the limit for $i \to 0$, the "function derive'e, y' for $f'(x)$".

Before 1900, it was thought that calculus is quite difficult to teach. So calculus became beyond the reach of youngsters. But just in 1900, John Perry and others in England started propagating the view that essential ideas and methods of calculus were simple and could be taught even in schools. F.L. Griffin, pioneered the teaching of calculus to first year students. This was regarded as one of the most daring act in those days.

Today not only the mathematics but many other subjects such as Physics, Chemistry, Economics and Biological Sciences are enjoying the fruits of calculus.

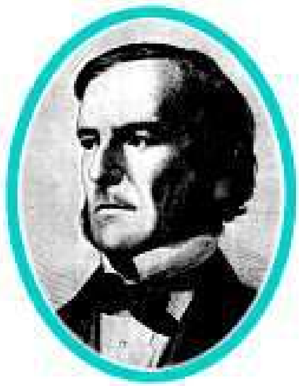
પ્રકરણ 14

ગાણિતિક તર્ક

❖ *There are few things which we know which are not capable of mathematical reasoning and when these can not, it is a sign that our knowledge of them is very small and confused and where a mathematical reasoning can be had, it is as great a folly to make use of another, as to grope for a thing in the dark when you have a candle stick standing by you. – ARTHENBOT* ❖

14.1 પ્રાસ્તાવિક

આ પ્રકરણમાં આપણે ગાણિતિક તર્કના કેટલાક મૂળભૂત વિચારો વિશે ચર્ચા કરીશું. આપણે બધાં જાણીએ છીએ કે, ઘણાં વર્ષોથી મનુષ્યો નીચલી પ્રજાતિમાંથી વિકાસ પામ્યા છે. તેઓ અન્ય પ્રજાતિઓ કરતાં શ્રેષ્ઠ છે, કારણ કે મનુષ્યની તર્ક કરવાની ક્ષમતા એ તેની મુખ્ય સંપત્તિ છે. આ ક્ષમતાનો કેટલી સારી રીતે ઉપયોગ કરી શકાય તે દરેક વ્યક્તિની તર્ક કરવાની શક્તિ પર આધાર રાખે છે. આ શક્તિનો કેવી રીતે વિકાસ કરવો ? અહીં આપણે ખાસ કરીને ગણિતના સંદર્ભમાં તર્કની પ્રક્રિયા અંગે ચર્ચા કરીશું.



George Boole
(1815 - 1864)

ગણિતમાં મુખ્યત્વે બે પ્રકારની દલીલો છે : અનુમાનિત દલીલો અને તર્કસંગત તારણ મેળવવાની દલીલો. આપણે ગાણિતિક અનુમાનના સંદર્ભમાં અનુમાનિત દલીલોની ચર્ચા કરી લીધી છે. આ પ્રકરણમાં આપણે તર્કસંગત તારણોના કેટલાક મૂળભૂત વિચારોની ચર્ચા કરીશું.

14.2 વિધાન

ગાણિતિક વિધાન એ ગાણિતિક તર્કનો મૂળભૂત એકમ છે.

ચાલો આપણે બે વાક્યોથી શરૂઆત કરીએ.

2003માં ભારતના રાષ્ટ્રપતિ એક સ્ત્રી હતાં.

હાથીનું વજન મનુષ્યના વજન કરતાં વધુ હોય છે.

જ્યારે આપણે આ વાક્યો વાંચીએ છીએ ત્યારે આપણે તરત જ નક્કી કરી શકીએ છીએ કે પ્રથમ વાક્ય અસત્ય છે, જ્યારે બીજું વાક્ય સત્ય છે. આ અંગે કોઈ મૂંઝવણ નથી. ગણિતમાં આવાં વાક્યોને ***વિધાન*** *(Statement)* કહે છે.

હવે નીચેના વાક્યનો વિચાર કરો :

સ્ત્રીઓ પુરુષો કરતાં વધુ બુદ્ધિશાળી છે.

કેટલાક લોકો આ સત્ય છે તેમ માને છે તથા કેટલાક લોકો આ સાથે અસંમત થઈ શકે છે. આ વાક્ય અંગે આપણે કહી શકીએ નહિ કે તે હંમેશાં સત્ય છે કે અસત્ય છે. આનો અર્થ કે આ વાક્ય સંદિગ્ધ છે. ગણિતમાં આવાં વાક્યોનો વિધાન તરીકે સ્વીકાર થતો નથી.

જો આપેલ વાક્ય સત્ય કે અસત્ય હોય પરંતુ બંને ન હોય, તો તેને ગાણિતિક રીતે ***સ્વીકાર્ય વિધાન*** *કહે છે.* જ્યારે આપણે અહીં 'વિધાન'નો ઉલ્લેખ કરીએ ત્યારે તે ગાણિતિક રીતે સ્વીકાર્ય વિધાન હોવું જોઈએ.

ગણિતનો અભ્યાસ કરતી વખતે આપણને આવાં ઘણાં વાક્યો જોવા મળે છે. જેમકે,

બે વત્તા બે બરાબર ચાર.

બે ધન સંખ્યાઓનો સરવાળો ધન મળે.

બધી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અયુગ્મ છે.

આ વાક્યોમાં પ્રથમ બે સત્ય છે અને ત્રીજું વાક્ય અસત્ય છે.

આ વાક્યો વિષે કોઈ સંદિગ્ધતા નથી. આથી તેઓ વિધાન છે. શું તમે કોઈ એવા વાક્યનું ઉદાહરણ આપી શકો કે જે અસ્પષ્ટ અથવા સંદિગ્ધ હોય ? આ વાક્યનો વિચાર કરો :

x અને y નો સરવાળો શૂન્ય કરતાં વધુ છે.

અહીં જ્યાં સુધી આપણે x અને y ની કિંમતો જાણતા ન હોઈએ ત્યાં સુધી આપણે આ વાક્ય સત્ય છે કે અસત્ય છે તે નક્કી કરવાની સ્થિતિમાં નથી. ઉદાહરણ તરીકે જ્યારે $x = 1, y = -3$ હોય ત્યારે તે અસત્ય છે અને જો $x = 1$ અને $y = 0$ હોય ત્યારે તે સત્ય છે. આથી આ વાક્ય વિધાન નથી. પરંતુ વાક્ય,

"કોઈ પણ બે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ x અને y માટે, x અને y નો સરવાળો 0 થી વધુ છે" એ વિધાન છે.

હવે નીચેનાં વાક્યોનો વિચાર કરો :

કેટલું સુંદર !

દરવાજો ખોલો.

તમે ક્યાં જઈ રહ્યા છો ?

આ વાક્યો વિધાન છે ? ના, કારણ કે પ્રથમ વાક્ય ઉદ્‌ગાર છે, બીજું આજ્ઞાર્થ છે અને ત્રીજું પ્રશ્નાર્થ છે. ગાણિતીય રીતે આ બધામાંથી કોઈને પણ વિધાન છે તેમ કહી શકાય નહિ. જો વાક્યમાં 'સમય' ચલ સ્વરૂપે હોય જેમકે, 'આજે', 'આવતી કાલે', 'ગઈ કાલે' તો તે વિધાન નથી. કારણ કે કયા સમયની વાત કરવામાં આવે છે તે આપણે જાણતા નથી. ઉદાહરણ તરીકે વાક્ય

'આવતીકાલે શુક્રવાર છે.'

એ વિધાન નથી. આ વાક્ય ગુરુવારે સત્ય છે પરંતુ બીજા કોઈ દિવસે સત્ય નથી.

આ પ્રકારની સમાન દલીલો એવાં પ્રકારનાં વાક્યો માટે પણ સાચી હોય છે કે જેમાં કોઈ ચોક્કસ વ્યક્તિની ઓળખ આપ્યા વગર સર્વનામ સ્વરૂપે હોય અને તે જ રીતે વાક્યમાં સ્થળો ચલ સ્વરૂપે હોય જેમ કે 'અહીં', 'ત્યાં' વગેરે. ઉદાહરણ તરીકે વાક્યો

તે ગણિતની સ્નાતક છે.

કાશ્મીર અહીંથી દૂર છે.

એ વિધાન નથી.

વધુ એક વાક્ય *એક મહિનામાં 40 દિવસો હોય છે.*

આને તમે વિધાન કહેશો ? આપણે નોંધીએ કે વાક્યમાં જે સમય દર્શાવ્યો છે તે ચલ સ્વરૂપે છે કારણ કે તે 12 મહિનાઓમાંથી ગમે તે મહિનો હોઈ શકે. પરંતુ આપણે જાણીએ છીએ કે, આ વાક્ય હંમેશાં અસત્ય છે.(ગમે તે મહિનો હોય તો પણ) કારણ કે કોઈ પણ મહિનામાં દિવસોની મહત્તમ સંખ્યા 31 થી વધુ ન હોય. માટે આ વાક્ય વિધાન છે. જો વાક્ય સત્ય કે અસત્ય હોય પરંતુ બંને ન હોય તો તે વાક્ય વિધાન બને છે.

સામાન્ય રીતે વિધાનોને $p, q, r, ...$ વગેરે નાના મૂળાક્ષરોથી દર્શાવવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે આપણે આપેલ વિધાનને નીચે પ્રમાણે પણ લખી શકીએ.

વિધાન *'આગ હંમેશાં ગરમ હોય છે'* ને p વડે દર્શાવીએ.

p : આગ હંમેશાં ગરમ હોય છે.

ઉદાહરણ 1 : નીચેનાં વાક્યો વિધાન છે કે નહિ તે કારણ સહિત દર્શાવો:

(i) 8 એ 6 કરતાં નાનો છે.

(ii) દરેક ગણ એ સાન્ત ગણ છે.

(iii) સૂર્ય એક તારો છે.

(iv) ગણિત એક રમત છે.

(v) વાદળો વગર વરસાદ નથી.

(vi) ચેન્નઈ અહીંથી કેટલું દૂર છે ?

ઉકેલ : (i) આ વાક્ય અસત્ય છે કારણ કે 8 એ 6 કરતાં મોટો છે. તેથી આ વિધાન છે.

(ii) આ વાક્ય પણ અસત્ય છે, કારણ કે સાન્ત ન હોય તેવા ગણનું અસ્તિત્વ છે. તેથી આ વિધાન છે.

(iii) વૈજ્ઞાનિક રીતે સ્થાપિત થયેલ છે કે સૂર્ય એક તારો છે. આથી આ વાક્ય હંમેશાં સત્ય છે. તેથી આ વિધાન છે.

(iv) આ વાક્ય વ્યક્તિલક્ષી છે કારણ કે જેમને ગણિત ગમતું હોય તેમના માટે રમત હોઈ શકે, પરંતુ બીજા માટે એવું ન હોઈ શકે. આનો અર્થ એ કે આ વાક્ય હંમેશાં સત્ય નથી. તેથી આ વિધાન નથી.

(v) વરસાદ પહેલાં વાદળ બંધાય છે તે એક વૈજ્ઞાનિક રીતે સ્થાપિત કુદરતી ઘટના છે. આથી આ વાક્ય હંમેશાં સત્ય છે. તેથી આ વિધાન છે.

(vi) આ પ્રશ્નાર્થ વાક્ય છે. વળી, આ વાક્યમાં 'અહીં' (ચલસ્વરૂપે) નો ઉપયોગ થયેલ છે. તેથી આ વિધાન નથી.

ઉપરનાં ઉદાહરણો પરથી જોઈ શકાય છે કે જ્યારે આપણે કોઈ વાક્યને વિધાન છે તેવું કહીએ ત્યારે આપણે હંમેશાં કહેવું જોઇએ તે શા માટે વિધાન છે ? પ્રશ્નના જવાબ કરતાં "તે શા માટે વિધાન છે ?" એ વધારે મહત્ત્વપૂર્ણ છે.

સ્વાધ્યાય 14.1

1. નીચેનામાંથી કયાં વાક્યો વિધાન છે ? તમારા જવાબ માટેના કારણ દર્શાવો.

(i) એક મહિનામાં 35 દિવસો હોય છે.

(ii) ગણિત અઘરું છે.

(iii) 5 અને 7 નો સરવાળો 10 કરતાં વધુ છે.

(iv) કોઈ પણ સંખ્યાનો વર્ગ એ યુગ્મ સંખ્યા હોય છે.

(v) કોઈ પણ ચતુષ્કોણની બાજુઓ સમાન લંબાઈ ધરાવે છે.

(vi) આ પ્રશ્નનો ઉત્તર આપો.

(vii) (–1) અને 8 નો ગુણાકાર 8 થાય છે.

(viii) ત્રિકોણના બધા અંતઃકોણનો સરવાળો 180° થાય છે.

(ix) આજે તોફાની દિવસ છે.

(x) બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ સંકર સંખ્યાઓ છે.

2. વિધાન ન હોય તેવાં ત્રણ વાક્યોનાં ઉદાહરણો આપો. તમારા જવાબનાં કારણો આપો.

14.3 જૂનાં વિધાનોમાંથી નવાં વિધાનો

આપણી પાસે પહેલેથી જ હોય તેવાં વિધાનોમાંથી નવાં વિધાનોની રચના કરવાની રીત હવે આપણે જોઈશું. અંગ્રેજ ગણિતશાસ્ત્ર ***George Boole*** એ 1854 માં તેના પુસ્તક *"The laws of Thought"* માં આ રીતોની ચર્ચા કરી હતી. અહીં આપણે બે રીતોની ચર્ચા કરીશું.

વિધાનોના અભ્યાસના પ્રથમ પગલા તરીકે આપણે એક મહત્ત્વની યુક્તિનો વિચાર કરીશું. ગાણિતિક વિધાનોના ઊંડાણપૂર્વકની સમજણ માટે આપણે તેનો ઉપયોગ કરીશું. આ યુક્તિ માત્ર આપેલ વિધાન સત્ય છે તે કહેવા માટે જ નહીં પરંતુ આપેલ વિધાન અસત્ય છે તે કહેવાનો અર્થ જાણવા પણ ઉપયોગી છે.

14.3.1 વિધાનનું નિષેધ :

વિધાનનો ઈન્કાર એ વિધાનનું નિષેધ છે.

ચાલો આપણે એક વિધાનનો વિચાર કરીએ.

p : નવી દિલ્લી એક શહેર છે.

આ વિધાનનું નિષેધ

એ સાચું નથી કે નવી દિલ્લી એક શહેર છે.

આ રીતે પણ લખી શકાય.

નવી દિલ્લી એક શહેર છે તે અસત્ય છે.

આને સાદી રીતે આમ દર્શાવી શકાય.

નવી દિલ્લી એક શહેર નથી.

વ્યાખ્યા 1 : જો p વિધાન હોય તો p નું નિષેધ પણ વિધાન છે. તેને સંકેતમાં $\sim p$ વડે દર્શાવાય છે તથા 'not p' તરીકે વંચાય છે.

નોંધ વિધાનનું નિષેધ બનાવતી વખતે 'એ સત્ય નથી કે,' અથવા 'તે અસત્ય છે.' એવા શબ્દસમૂહો વાપરી શકાય.

અહીં એક ઉદાહરણ દર્શાવે છે કે આપણે એક વિધાનના નિષેધનું અવલોકન કરીને કેવી રીતે તેની સમજણને સુધારી શકીએ છીએ.

ચાલો આપણે એક વિધાનનો વિચાર કરીએ.

p : *જર્મનીમાં દરેક વ્યક્તિ જર્મન ભાષા બોલે છે.*

આપણે આ વિધાનનો ઇન્કાર આ રીતે કરીએ: જર્મનીમાં દરેક વ્યક્તિ જર્મન ભાષા બોલતી નથી. આનો અર્થ એ નથી કે જર્મનીમાં કોઈ પણ વ્યક્તિ જર્મન ભાષા બોલતી નથી. આ ફક્ત એટલું જ કહે છે કે જર્મનીમાં ઓછામાં ઓછી એક વ્યક્તિ જર્મન ભાષા બોલતી નથી.

આપણે વધુ ઉદાહરણોનો વિચાર કરીશું.

ઉદાહરણ 2 : નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

(i) લંબચોરસના બંને વિકર્ણની લંબાઈ સમાન હોય છે.

(ii) $\sqrt{7}$ એ સંમેય છે.

ઉકેલ : (i) આપેલ વિધાન એવું જણાવે છે કે લંબચોરસમાં બંને વિકર્ણોની લંબાઈ સમાન હોય છે. આનો અર્થ એ થાય કે જો તમે કોઈ પણ લંબચોરસ લો તો તેના બંને વિકર્ણોની લંબાઈ સમાન હશે. આપેલા વિધાનનું નિષેધ *'લંબચોરસના બંને વિકર્ણોની લંબાઈ સમાન હોય એ અસત્ય છે.'*

જેના બંને વિકર્ણોની લંબાઈ સમાન ન હોય એવો *ઓછામાં ઓછો એક લંબચોરસ મળશે.*

વિધાન (ii) ના નિષેધને પણ નીચે પ્રમાણે લખી શકાશે :

એ સત્ય નથી કે $\sqrt{7}$ સંમેય છે.

આને આ રીતે પણ લખી શકાય :

$\sqrt{7}$ સંમેય નથી.

ઉદાહરણ 3 : નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો તથા પરિણામી વિધાનની સત્યાર્થતા ચકાસો:

(i) ઑસ્ટ્રેલિયા એ ખંડ છે.

(ii) બધી બાજુઓ સમાન હોય તેવા ચતુષ્કોણનું અસ્તિત્વ નથી.

(iii) દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા 0 થી મોટી હોય છે.

(iv) 3 અને 4 નો સરવાળો 9 છે.

ઉકેલ : (i) આપેલા વિધાનનું નિષેધ *'ઑસ્ટ્રેલિયા ખંડ છે તે અસત્ય છે.'*

આમ પણ લખી શકાય, *'ઑસ્ટ્રેલિયા એ ખંડ નથી.'*

આપણે જાણીએ છીએ કે આ વિધાન મિથ્યા છે.

(ii) આપેલ વિધાનનું નિષેધ : *'એ સત્ય નથી કે બધી બાજુઓ સમાન હોય તેવા ચતુષ્કોણનું અસ્તિત્વ નથી.'*

આનો અર્થ નીચે પ્રમાણે પણ થાય :

બધી બાજુઓ સમાન હોય તેવા ચતુષ્કોણનું અસ્તિત્વ છે.

આ વિધાન સત્ય છે કારણ કે આપણે જાણીએ છીએ કે, જેની ચારેય બાજુઓ સમાન હોય તેવો એક ચતુષ્કોણ ચોરસ છે.

(iii) આપેલ વિધાનનું નિષેધ : *'દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા એ શૂન્યથી મોટી છે તે અસત્ય છે.'*

આને આમ પણ લખી શકાય; *'જે 0 કરતાં મોટી ન હોય એવી પ્રાકૃતિક સંખ્યાનું અસ્તિત્વ છે.'*

આ મિથ્યા વિધાન છે.

(iv) આપેલ વાક્યનું નિષેધ : *'3 અને 4 નો સરવાળો 9 થાય તે અસત્ય છે.'*

આને આમ પણ લખી શકાય; *'3 અને 4 નો સરવાળો 9 બરાબર નથી.'*

આ વિધાન સત્ય છે.

14.3.2 સંયુક્ત વિધાનો

એક અથવા વધુ વિધાનોને અમુક કારક જેમકે "અને", "અથવા", વગેરે દ્વારા જોડવાથી ઘણાં ગાણિતિક વિધાનો મેળવી શકાય છે. આગળ આપેલ વિધાનનો વિચાર કરીએ.

p : *વીજગોળા અથવા વાયરિંગમાં કંઈક ખોટું છે.*

આ વિધાન આપણને એવું જણાવે છે કે ***વીજગોળા*** માં કંઈક ખોટું છે અથવા વાયરિંગમાં કંઈક ખોટું છે. આનો અર્થ એમ થાય કે આપેલ વિધાન બે સાદાં વિધાનો

q : *વીજગોળામાં કંઈક ખોટું છે.*

r : *વાયરિંગમાં કંઈક ખોટું છે.*

ને "અથવા" દ્વારા જોડવાથી બનાવવામાં આવ્યું છે. હવે, ધારો કે બે વિધાન નીચે પ્રમાણે આપેલ છે :

p : 7 એ અયુગ્મ સંખ્યા છે.

q : *7 એ વિભાજ્ય સંખ્યા છે.*

આ બંને વિધાનોને "અને" દ્વારા ભેગા કરી શકાય.

r: *7 એ અયુગ્મ અને અવિભાજ્ય સંખ્યા બંને છે.*

આ સંયુક્ત વિધાન છે. તે નીચેની વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે :

વ્યાખ્યા 2 *જે બે અથવા વધુ વિધાનો દ્વારા બનેલું વિધાન હોય તેને **સંયુક્ત વિધાન** (compound statement) કહે છે. આ પ્રકારના વિધાનમા દરેક વિધાનને **ઘટક વિધાન** (component statement) કહે છે.*

ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોનો વિચાર કરીએ.

ઉદાહરણ 4 : નીચેનાં સંયુક્ત વિધાનોનાં ઘટક વિધાનો શોધો :

(i) આકાશ વાદળી છે અને ઘાસ લીલું છે.

(ii) વરસાદ પડે છે અને ઠંડી પડે છે.

(iii) બધી સંમેય સંખ્યાઓ એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે અને બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ એ સંકર સંખ્યાઓ છે.

(iv) 0 એ ધન સંખ્યા છે અથવા ઋણ સંખ્યા છે.

ઉકેલ : ચાલો એક પછી એક વિચાર કરીએ.

(i) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : આકાશ વાદળી છે.

q : ઘાસ લીલું છે.

અહીં સંયોજક 'અને' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

(ii) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે.

p : વરસાદ પડે છે.

q : ઠંડી પડે છે.

અહીં સંયોજક 'અને' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

(iii) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : બધી સંમેય સંખ્યાઓ એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

q : બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ એ સંકર સંખ્યાઓ છે.

અહીં સંયોજક 'અને' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

(iv) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : 0 એ ધન સંખ્યા છે.

q : 0 એ ઋણ સંખ્યા છે.

અહીં સંયોજક 'અથવા' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

ઉદાહરણ 5 : નીચેનાં સંયુક્ત વિધાનોમાં ઘટક વિધાનો શોધો અને તે સત્ય છે કે અસત્ય તે ચકાસો :

(i) ચોરસ એ ચતુષ્કોણ છે અને તેની ચારેય બાજુઓ સમાન છે.

(ii) બધી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ યુગ્મ અથવા અયુગ્મ હોય છે.

(iii) જે વ્યક્તિએ ગણિતશાસ્ત્ર અથવા કમ્પ્યૂટરવિજ્ઞાન વિષય લીધો હોય તે MCA માં જઈ શકે છે.

(iv) ચંદીગઢ એ હરિયાણા અને ઉત્તરપ્રદેશનું પાટનગર છે.

(v) $\sqrt{2}$ એ સંમેય સંખ્યા છે અથવા અસંમેય સંખ્યા છે.

(vi) 24 એ 2, 4 અને 8 નો ગુણિત છે.

ઉકેલ : (i) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : ચોરસ એ ચતુષ્કોણ છે.

q : ચોરસની બધી બાજુઓ સમાન છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે બંને વિધાન સત્ય છે. અહીં સંયોજક 'અને' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

(ii) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : બધી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અયુગ્મ સંખ્યાઓ છે.

q : બધી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ યુગ્મ સંખ્યાઓ છે.

બંને વિધાનો મિથ્યા છે અને સંયોજક 'અથવા' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

(iii) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : જે વ્યક્તિએ ગણિતશાસ્ત્ર વિષય લીધો હોય તે MCA માં જઈ શકે છે.

q : જે વ્યક્તિએ કમ્પ્યુટરવિજ્ઞાન વિષય લીધો હોય તે MCA માં જઈ શકે છે.

બંને વિધાનો સત્ય છે. અહીં સંયોજક 'અથવા' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

(iv) ઘટક વિધાન આ પ્રમાણે છે :

p : ચંદીગઢ એ હરિયાણાનું પાટનગર છે.

q : ચંદીગઢ એ ઉત્તરપ્રદેશનું પાટનગર છે.

પ્રથમ વિધાન સત્ય છે, પરંતુ બીજું વિધાન મિથ્યા છે. અહીં સંયોજક 'અને' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

(v) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : $\sqrt{2}$ *એ સંમેય સંખ્યા છે.*

q : $\sqrt{2}$ *એ અસંમેય સંખ્યા છે.*

પ્રથમ વિધાન અસત્ય છે, પરંતુ બીજું વિધાન સત્ય છે. અહીં સંયોજક 'અથવા' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

(vi) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : 24 એ 2 નો ગુણિત છે

q : 24 એ 4 નો ગુણિત છે.

r : 24 એ 8 નો ગુણિત છે.

ત્રણે વિધાનો સત્ય છે. અહીં સંયોજક 'અને' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

આમ, આપણે અવલોકન કર્યું કે સંયુક્ત વિધાનો એ ખરેખર બે અથવા વધુ વિધાનોને સંયોજક 'અને', 'અથવા' વગેરે દ્વારા જોડવાથી બને છે. આ શબ્દોનો ગણિતમાં વિશેષ અર્થ છે. આપણે આ બાબતની ચર્ચા હવે પછીના વિભાગમાં કરીશું.

સ્વાધ્યાય 14.2

1. નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

(i) ચેન્નઈ તમિલનાડુનું પાટનગર છે.

(ii) $\sqrt{2}$ સંકર સંખ્યા નથી.

(iii) બધા ત્રિકોણો એ સમબાજુ ત્રિકોણ નથી.

(iv) 2 એ 7 કરતાં મોટી સંખ્યા છે.

(v) દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

2. નીચેનાં વિધાનોની જોડ પરસ્પર નિષેધ દર્શાવે છે ?

(i) સંખ્યા x એ સંમેય સંખ્યા નથી.
સંખ્યા x એ અસંમેય સંખ્યા નથી.

(ii) સંખ્યા x એ સંમેય સંખ્યા છે.
સંખ્યા x એ અસંમેય સંખ્યા છે.

3. નીચેનાં સંયુક્ત વિધાનોનાં ઘટક વિધાનો શોધો અને તે સત્ય છે કે અસત્ય તે ચકાસો :

(i) 3 એ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે અથવા અયુગ્મ છે.

(ii) બધા પૂર્ણાંકો ધન અથવા ઋણ છે.

(iii) 100 એ 3, 11 અને 5 થી વિભાજ્ય છે.

14.4 વિશિષ્ટ શબ્દો/ શબ્દસમૂહો

સંયુક્ત વિધાનોમાં અમુક શબ્દો જેવા કે “અને” , “અથવા” વગેરે જોવા મળે છે. તેમનો ગાણિતિક વિધાનોમાં વારંવાર ઉપયોગ થાય છે. આને સંયોજકો કહેવામાં આવે છે. જ્યારે આપણે આ સંયુક્ત વિધાનોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ ત્યારે આ શબ્દોની ભૂમિકાની સમજણ હોવી જરૂરી છે. આની ચર્ચા આપણે નીચે કરીશું :

14.4.1 શબ્દ **“અને” :** ચાલો આપણે “અને” દ્વારા બનતા સંયુક્ત વિધાનો જોઈએ.

p : *બિંદુને સ્થાન હોય છે અને તે સ્થાન નક્કી કરી શકાય છે.*

આ વિધાનને આ પ્રમાણે બે ઘટક વિધાનોમાં વિભાજિત કરી શકાય છે :

q : *બિંદુને સ્થાન હોય છે.*

r : *તે સ્થાન નક્કી કરી શકાય છે.*

અહીં આપણે અવલોકન કરી શકીએ કે બંને વિધાનો સત્ય છે.

ચાલો આપણે બીજું વિધાન જોઈએ.

p : *42 એ 5, 6 અને 7 થી વિભાજ્ય છે.*

આ વિધાનનાં ઘટક વિધાનો નીચે પ્રમાણે મળશે.

q : *42 એ 5 થી વિભાજ્ય છે.*

r : *42 એ 6 થી વિભાજ્ય છે.*

s : *42 એ 7 થી વભિાજ્ય છે.*

અહીં આપણે જાણીએ છીએ કે પ્રથમ વિધાન મિથ્યા છે, જ્યારે બાકીનાં બે સત્ય છે.

આપણે સંયોજક ''અને'' સંબંધિત નીચે પ્રમાણેના નિયમો નોંધીશું :

1. *જો બધાં ઘટક વિધાનો સત્ય હોય તો કારક ''અને'' દ્વારા બનેલું સંયુક્ત વિધાન સત્ય હોય છે.*

2. *જો કોઈપણ એક ઘટક વિધાન મિથ્યા હોય તો કારક ''અને'' દ્વારા બનેલું ઘટક વિધાન મિથ્યા હોય છે.*

(અમુક ઘટક વિધાનો મિથ્યાં હોય અથવા બધાં ઘટક વિધાનો મિથ્યાં હોય તેવા પ્રકારનો પણ આમાં સમાવેશ થાય છે.)

ઉદાહરણ 6 : નીચેના સંયુક્ત વિધાનનાં ઘટક વિધાનો લખો અને સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે કે મિથ્યા તે ચકાસો :

(i) રેખા સીધી લીટીમાં છે અને બંને દિશામાં અનંત સુધી વિસ્તરેલી છે.

(ii) 0 એ દરેક ધન પૂર્ણાંક અને ઋણ પૂર્ણાંક કરતાં નાનો છે.

(iii) બધી જીવંત વસ્તુઓને બે પગ અને બે આંખો હોય છે.

ઉકેલ : (i) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : *રેખા સીધી લીટીમાં છે.*

q : *રેખા બંને દિશામાં અનંત સુધી વિસ્તરેલી છે.*

બંને વિધાનો સત્ય છે. તેથી સંયુક્ત વિધાન સત્ય થશે.

(ii) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : *0 એ દરેક ધન પૂર્ણાંક કરતાં નાનો છે.*

q : *0 એ દરેક ઋણ પૂર્ણાંક કરતાં નાનો છે.*

બીજું વિધાન મિથ્યા છે. તેથી સંયુક્ત વિધાન મિથ્યા થશે.

(iii) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : *બધી જીવંત વસ્તુઓને બે પગ હોય છે.*

q : *બધી જીવંત વસ્તુઓને બે આંખો હોય છે.*

બંને વિધાનો મિથ્યા છે. તેથી સંયુક્ત વિધાન મિથ્યા થશે.

હવે નીચેના વિધાનનો વિચાર કરો :

p : *આલ્કોહોલ અને પાણીનું મિશ્રણ રાસાયણિક પદ્ધતિઓ દ્વારા અલગ કરી શકાય છે.*

આ વિધાનને સંયોજક "અને" દ્વારા મળતું સંયુક્ત વિધાન ગણી શકાય નહિ. અહીં શબ્દ "અને" એ આલ્કોહૉલ અને પાણી બે વસ્તુઓના સંદર્ભે છે. આ આપણને અગત્યની નોંધ તરફ દોરી જાય છે.

નોંધ : ઉપરના ઉદાહરણ પરથી જોઈ શકાય છે કે "અને" શબ્દ ધરાવતું વિધાન હંમેશાં સંયુક્ત વિધાન હોય તેવું વિચારી શકાય નહિ. તેથી શબ્દ "અને" હંમેશાં સંયોજક તરીકે વપરાતો નથી.

14.4.2 શબ્દ "અથવા" : ચાલો નીચેના વિધાનનો વિચાર કરીએ :

p : *સમતલમાં બે રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે અથવા સમાંતર હોય.*

આપણે જાણીએ છીએ કે આ વિધાન સત્ય છે. આનો અર્થ શું થાય ? આનો અર્થ એમ થાય કે જો સમતલમાં બે રેખાઓ એકબીજીને

છેદે તો તેઓ સમાંતર ન હોય. બીજી રીતે જો બે રેખાઓ સમાંતર ન હોય, તો તેઓ એક બિંદુમાં છેદશે. એટલે કે આ વિધાન બંને પરિસ્થિતિમાં સત્ય છે.

"અથવા" સાથેનાં વિધાનોને સમજવા માટે આપણે પ્રથમ નોંધીશું કે અંગ્રેજી ભાષામાં "અથવા" નો ઉપયોગ બે પ્રકારે થાય છે. ચાલો આપણે પ્રથમ નીચેનું વિધાન જોઈએ.

p : ભોજનાલયમાં થાળી સાથે આઈસક્રીમ અથવા ઠંડું પીણું ઉપલબ્ધ છે.

આનો અર્થ એમ થાય કે જો કોઈ વ્યક્તિને થાળી સાથે આઈસ્ક્રીમની ઈચ્છા ન હોય તો તેને ઠંડા પીણા મળી શકે છે અથવા જો ઠંડા પીણાની ઈચ્છા ન હોય તો થાળી સાથે આઈસ્ક્રીમ મળી શકે છે. એટલે કે કોઇને ઠંડા પીણાની ઈચ્છા ન હોય તો તે આઈસ્ક્રીમ લઈ શકે છે. કોઈ પણ વ્યક્તિ આઈસ્ક્રીમ અને ઠંડુ પીણું બંને ન લઈ શકે. આને ***'નિવારક વિકલ્પ'*** *(Exclusive or)* કહેવાય છે.

બીજું વિધાન જોઈએ.

જે વિદ્યાર્થીએ જીવવિજ્ઞાન અથવા રસાયણ વિજ્ઞાન વિષય લીધા હોય તે M.Sc. માટે સૂક્ષ્મજીવવિજ્ઞાન (microbiology) વિષય માટે અરજી કરી શકે છે.

અહીં આપણે એવું સમજીશું કે જે વિદ્યાર્થીએ જીવવિજ્ઞાન અને રસાયણ વિજ્ઞાન બંને વિષયો લીધા હોય તેમજ જે વિદ્યાર્થીઓએ ફક્ત આ પૈકી એક જ વિષય લીધો હોય તે પણ સૂક્ષ્મજીવવિજ્ઞાનના અભ્યાસ માટે અરજી કરે શકે છે. અહીં આપણે ***"સમાવેશ વિકલ્પ"*** *(Inclusive or)* નો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

બંને પ્રકાર વચ્ચેનો તફાવત નોંધવો અગત્યનો છે. જ્યારે આપણું વિધાન સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસવાનું હોય ત્યારે તેની જરૂર પડશે. ચાલો આપણે એક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 7 : નીચેનાં વિધાનોમાં "અથવા" નો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે કે નિવારક વિકલ્પ તરીકે થયો છે તે નક્કી કરો. તમારા જવાબનાં કારણો આપો :

(i) દેશમાં દાખલ થવા માટે તમારે પાસપૉર્ટ અથવા મતદાર કાર્ડની જરૂર પડશે.

(ii) જો કોઈ દિવસે તહેવાર અથવા રવિવાર હોય તો શાળામાં રજા હોય છે.

(iii) બે રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે અથવા સમાંતર હોય.

(iv) વિદ્યાર્થીઓ ત્રીજી ભાષા તરીકે, ફ્રેન્ચ અથવા સંસ્કૃત વિષય લઈ શકે છે.

ઉકેલ : (i) અહીં "અથવા" સમાવેશ વિકલ્પના અર્થમાં છે. દેશમાં દાખલ થવા માટે કોઈ વ્યક્તિ પાસે પાસપોર્ટ અને મતદાર કાર્ડ બંને હોઈ શકે.

(ii) અહીં "અથવા" સમાવેશ વિકલ્પના અર્થમાં છે. રવિવાર અને તહેવાર બંને એક સાથે હોય ત્યારે પણ શાળામાં રજા હોય છે.

(iii) અહીં "અથવા" નિવારક વિકલ્પ છે. બે રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે તથા સમાંતર પણ હોય તે શક્ય નથી.

(iv) અહીં "અથવા" નિવારક વિકલ્પ છે. વિદ્યાર્થી ફ્રેન્ચ અને સંસ્કૃત બંને ભાષા પસંદ કરી શકે નહિ.

"અથવા" વડે બનતા સંયુક્ત વિધાન માટેનો નિયમ :

1. જો સંયોજક "અથવા" વડે બનતા સંયુક્ત વિધાનમાં એક ઘટક વિધાન સત્ય હોય અથવા બંને ઘટક વિધાનો સત્ય હોય તો સંયુક્ત વિધાન સત્ય બને છે.

2. જો સંયોજક "અથવા" વડે બનતા સંયુક્ત વિધાનમાં બંને ઘટક વિધાનો મિથ્યા હોય, તો સંયુક્ત વિધાન મિથ્યા બને છે.

ઉદાહરણ તરીકે નીચેનું વિધાન વિચારો :

p : *બે રેખા એક બિંદુમાં છેદે અથવા સમાંતર હોય.*

ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે.

q : *બે રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે.*

r : *બે રેખાઓ સમાંતર હોય.*

જ્યારે q સત્ય હોય ત્યારે r મિથ્યા હોય અને જ્યારે r સત્ય હોય ત્યારે q મિથ્યા હોય. આથી સંયુક્ત વિધાન p સત્ય થશે.

બીજું વિધાન વિચારો :

p : *125 એ 7 અથવા 8 નો ગુણિત છે.*

ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે.

q : *125 એ 7 નો ગુણિત છે.*

r : *125 એ 8 નો ગુણિત છે.*

q અને r બંને મિથ્યા છે. આથી સંયુક્ત વિધાન p *મિથ્યા હશે.*

ફરીથી નીચેના વિધાનનો વિચાર કરીએ :

p : *જો કોઈ દિવસે તહેવાર અથવા રવિવાર હોય તો શાળામાં રજા હોય છે.*

ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

q : *જો કોઈ દિવસે તહેવાર હોય તો શાળામાં રજા હોય છે.*

r : *જો કોઈ દિવસે રવિવાર હોય તો શાળામાં રજા હોય છે.*

q અને r બંને સત્ય છે. તેથી સંયુક્ત વિધાન સત્ય થશે.

બીજું વિધાન વિચારો :

p : *મુંબઈ એ કોલકતા અને કર્ણાટકનું પાટનગર છે.*

ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

q : *મુંબઈ એ કોલકતાનું પાટનગર છે.*

r : *મુંબઈ એ કર્ણાટકનું પાટનગર છે.*

બંને ઘટક વિધાનો મિથ્યા છે. તેથી સંયુક્ત વિધાન મિથ્યા હશે.

ચાલો કેટલાંક ઉદાહરણોનો વિચાર કરીએ :

ઉદાહરણ 8 : નીચેનાં વિધાનોમાં "અથવા" નો ઉપયોગ કયા પ્રકારે થયો છે તે નક્કી કરો તથા વિધાન સત્ય છે કે મિથ્યા તે ચકાસો :

(i) $\sqrt{2}$ એ સંમેય અથવા અસંમેય સંખ્યા છે.

(ii) જાહેર પુસ્તકાલયમાં દાખલ થવા માટે બાળકો પાસે શાળામાંથી આપેલ ઓળખપત્ર અથવા શાળાના અધિકારીનો પત્ર હોવો જરૂરી છે.

(iii) લંબચોરસ એ ચતુષ્કોણ છે અથવા 5 બાજુવાળો બહુકોણ છે.

ઉકેલ : (i) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

$p : \sqrt{2}$ *એ સંમેય સંખ્યા છે.*

$q : \sqrt{2}$ *એ અસંમેય સંખ્યા છે.*

અહીં પ્રથમ વિધાન મિથ્યા છે, જ્યારે બીજું વિધાન સત્ય છે તથા "અથવા" એ નિવારક વિકલ્પ છે. તેથી સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે.

(ii) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : *જાહેર પુસ્તકાલયમાં દાખલ થવા માટે બાળકો પાસે ઓળખપત્ર હોવું જરૂરી છે.*

q : *જાહેર પુસ્તકાલયમાં દાખલ થવા માટે બાળકો પાસે શાળાના અધિકારીએ આપેલ પત્ર હોવો જરૂરી છે.*

જો બાળકો પાસે ઓળખપત્ર અથવા પત્ર બંનેમાંથી ગમે તે એક હોય અથવા બંને હોય તો પુસ્તકાલયમાં દાખલ થઈ શકે છે. તેથી "અથવા" એ સમાવેશ વિકલ્પ છે. જ્યારે બાળકો પાસે ઓળખપત્ર અને પત્ર બંને હોય ત્યારે પણ સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે.

(iii) અહીં "અથવા" એ નિવારક વિકલ્પના સંદર્ભમાં છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે.

14.4.3 કારકો :

"કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે." કે "પ્રત્યેક માટે" વગેરે જેવા શબ્દસમૂહો એ કારકો (*Quantifiers*) છે.

ગાણિતિક વિધાનોમાં "કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે" તેવો શબ્દસમૂહ જોઈ શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે આ વિધાનનો વિચાર કરીએ.

p : *બધી બાજુઓ સરખી હોય તેવો કોઈક લંબચોરસ અસ્તિત્વ ધરાવે છે.*

આનો અર્થ એ થાય કે જેની બધી બાજુઓ સરખી હોય તેવો ઓછામાં ઓછો એક લંબચોરસ મળે છે.

"કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે" ની નજીક સંકળાયેલો શબ્દ "પ્રત્યેક માટે" કે "બધા માટે" છે. નીચેના વિધાનનો વિચાર કરીએ :

p : *દરેક અવિભાજ્ય સંખ્યા p માટે $\sqrt{p}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે.*

આનો અર્થ એમ થાય કે જો S એ બધી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ દર્શાવે તો S ના પ્રત્યેક સભ્ય p માટે $\sqrt{p}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે.

સામાન્ય રીતે ગાણિતિક વિધાનમાં કારક "પ્રત્યેક માટે" એવું કહેવામાં આવે ત્યારે તેનું અર્થઘટન આ રીતે કરી શકાય. આપેલ ગણને જે ગુણધર્મ લાગુ પડે છે તે ગુણધર્મનું પાલન ગણના પ્રત્યેક સભ્યએ કરવું જ જોઈએ.

કોઈ પણ વાક્યમાં આપેલ કારક કયા ચોક્કસ સ્થાને રજૂ કરવામાં આવે છે તે જાણવું આપણા માટે અગત્યનું છે. ઉદાહરણ તરીકે નીચેનાં બે વાક્યોની સરખામણી કરો :

1. પ્રત્યેક ધન સંખ્યા x માટે એવી ધન સંખ્યા y મળે કે જેથી $y < x$ થાય.

2. કોઈક એવી ધન સંખ્યા y મળે કે જેથી બધી જ ધન સંખ્યા x માટે $y < x$ થાય.

આ વિધાનો દેખાવમાં સમાન લાગે છે તેમ છતાં તેઓ સમાન અર્થ ધરાવતાં નથી. ખરું જોતાં વિધાન (1) સત્ય છે અને વિધાન(2) મિથ્યા છે. આમ, ગાણિતિક લેખન અર્થસભર બનાવવા માટે બધા જ સંકેતોનો કાળજીપૂર્વક પરિચય કરાવવો જોઈએ અને દરેક સંકેતને ખૂબ વહેલા નહિ અને ખૂબ મોડા નહિ તે રીતે ચોક્કસપણે યોગ્ય જગ્યાએ રજૂ કરવો જોઈએ.

"અને" તથા "અથવા" શબ્દોને સંયોજકો અને "કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે" તથા "પ્રત્યેક માટે" ને કારકો કહે છે.

આમ, આપણે જોયું કે ગાણિતિક વિધાનો અમુક વિશિષ્ટ શબ્દો ધરાવે છે અને જ્યારે આપણે ભિન્ન વિધાનોની સત્યાર્થતા ચકાસવી હોય ત્યારે તેમની સાથે જોડાયેલો અર્થ જાણવો જરૂરી છે.

સ્વાધ્યાય 14.3

1. નીચેનાં પૈકી દરેક સંયુક્ત વિધાનમાં પ્રથમ સંયોજકો ઓળખો અને પછી તેને ઘટક વિધાનોમાં છૂટું પાડો :

    (i) બધી સંમેય સંખ્યાઓ વાસ્તવિક છે અને બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ સંકર સંખ્યાઓ નથી.

    (ii) પૂર્ણાંકનો વર્ગ ધન અથવા ઋણ છે.

    (iii) રેતી સૂર્યના પ્રકાશમાં ઝડપથી ગરમ થાય છે અને રાત્રિના સમયે ઝડપથી ઠંડી થતી નથી.

    (iv) $x = 2$ અને $x = 3$ એ સમીકરણ $3x^2 - x - 10 = 0$ નાં બીજ છે.

2. નીચેનાં વિધાનોમાં કારક ઓળખો અને વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

    (i) કોઈક સંખ્યાનો વર્ગ તે સંખ્યા જેટલો જ હોય તેવી સંખ્યા અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

    (ii) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે x એ $x + 1$ કરતાં નાની સંખ્યા છે.

    (iii) ભારતમાં દરેક રાજ્યને એક રાજધાની હોય છે.

3. નીચેનાં વિધાનયુગ્મ એકબીજાનાં નિષેધ છે કે નહિ તે ચકાસો. તમારા જવાબ માટેનાં કારણો આપો :

    (i) બધી જ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x અને y માટે $x + y = y + x$ એ સત્ય છે.

    (ii) $x + y = y + x$ થાય તેવી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x અને y અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

4. નીચેનાં વિધાનોમાં “અથવા”નો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે થયો છે કે નિવારક વિકલ્પ તરીકે તે જણાવો. તમારા જવાબ માટેનાં કારણો આપો :

    (i) સૂર્ય ઊગે છે અથવા ચંદ્ર આથમે છે.

    (ii) ડ્રાઈવિંગ લાયસન્સ મેળવવા માટેની અરજી કરવા માટે તમારી પાસે રેશનકાર્ડ અથવા પાસપૉર્ટ હોવા જોઈએ.

    (iii) બધી જ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ ધન અથવા ઋણ છે.

14.5 પ્રેરણ

આ વિભાગમાં આપણે ‘‘જો....તો....’’, ‘‘....તો જ....’’ અને ‘‘...તો અને તો જ....’’ પ્રકારના પ્રેરણની ચર્ચા કરીશું.

ગણિતમાં ‘‘જો...તો....’’ વાળા વિધાનો ખૂબ જ સામાન્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે નીચેનું વિધાન જોઈએ :

r : *જો* x *ધન હોય તો* $2x > x$

જ્યારે આપણે આ વિધાન જોઈએ છીએ ત્યારે આપણે અવલોકન કરી શકીએ કે તે આ પ્રમાણેનાં બે વિધાનો p અને q ને અનુરૂપ છે.

p : x *ધન છે.*

q : $2x > x$ *છે.*

“જો p તો q” વાક્ય એવું કહેવા માંગે છે કે કોઈ ઘટના માટે જો p સત્ય હોય તો q હંમેશાં સત્ય થાય.

“જો p તો q” પ્રકારના વાક્યની સૌથી મહત્ત્વપૂર્ણ હકીકત એ છે કે જ્યારે p અસત્ય હોય ત્યારે q માટે કશું કહી ન શકાય. ઉદાહરણ તરીકે, જો x ધન ના હોય તો q વિશે કશું કહી ન શકાય. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો p ન ઉદ્ભવે તેની કોઈ અસર q ના ઉદ્ભવ પર થતી નથી.

વિધાન “જો p તો q” માટે બીજો મુદ્દો નોંધવા જેવો એ છે કે p ઉદ્ભવે છે એવું આ વિધાન સૂચિત કરતું નથી.

વિધાન "જો p તો q" સમજવા માટે અનેક રીતો છે. આપણે આ રીતોને નીચેના વિધાનના સંદર્ભમાં દર્શાવીશું :

r : જો કોઈ સંખ્યા 9 ની ગુણિત હોય તો તે 3 ની ગુણિત હોય.

ધારો કે p અને q નીચે દર્શાવેલ વિધાનો છે :

p : સંખ્યા 9 ની ગુણિત હોય.

q : સંખ્યા 3 ની ગુણિત હોય.

જો p તો q એ નીચે પ્રમાણે સમકક્ષ હશે :

1. જો p તો q પ્રકારના વિધાનને પ્રેરણ કહે છે.

   આ વિધાન આમ કહે છે : કોઈક સંખ્યા 9 ની ગુણિત હોય, તો તે 3ની ગુણિત હોય એમ સૂચિત થાય છે.

2. p એ q માટેની પર્યાપ્ત શરત છે.

   આ વિધાન આમ કહે છે : કોઈક સંખ્યા 3 ની ગુણિત હોય તે નક્કી કરવા માટે એ સંખ્યા 9 ની ગુણિત છે એમ જાણવું પર્યાપ્ત છે.

3. q તો જ p.

   આ વિધાન આમ કહે છે : કોઈક સંખ્યા 3 ની ગુણિત હોય તો જ તે સંખ્યા 9 ની ગુણિત કહેવાય.

4. q એ p માટેની આવશ્યક શરત છે.

   આ વિધાન આમ કહે છે : સંખ્યા 3 ની ગુણિત હોય એ સંખ્યા 9 ની ગુણિત હોય તે માટેની આવશ્યક શરત છે.

5. જો $\sim q$ તો $\sim p$.

   આ વિધાન આમ કહે છે : જો સંખ્યા 3 ની ગુણિત ન હોય, તો તે 9 ની ગુણિત ન હોય.

   પ્રેરણને સંકેતમાં $p \Rightarrow q$ વડે દર્શાવાય છે. પ્રેરણ માટેનો સંકેત $\Rightarrow$ છે.

14.5.1 સમાનાર્થી પ્રેરણ અને પ્રતીપ :

સમાનાર્થી પ્રેરણ અને પ્રતીપ એ ''જો....તો'' પ્રકારના વિધાનો વડે રચના કરી શકાતાં ચોક્કસ પ્રકારનાં બીજાં વિધાનો છે.

ઉદાહરણ તરીકે નીચેના ''જો....તો'' પ્રકારના વિધાનનો વિચાર કરીએ.

જો ભૌતિક પર્યાવરણમાં ફેરફાર થાય તો જૈવિક વાતાવરણ બદલાય છે.

આ વિધાનનું સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો જૈવિક વાતાવરણ ન બદલાય તો ભૌતિક પર્યાવરણમાં ફેરફાર થતો નથી.

અહીં નોંધીશું કે આ વિધાનો સમાનાર્થી અભિવ્યક્તિ ધરાવે છે.

ચાલો આ સમજવા માટે આપણે વધુ ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 9 : નીચેનાં વિધાનોનાં સમાનાર્થી પ્રેરણ લખો :

(i) જો કોઈ સંખ્યા 9 વડે વિભાજ્ય હોય તો તે 3 વડે વિભાજ્ય હોય.

(ii) જો તમે ભારતમાં જન્મ્યા હોવ તો તમે ભારતના નાગરિક છો.

(iii) જો ત્રિકોણ સમબાજુ હોય તો તે સમદ્વિબાજુ હોય છે.

ઉકેલ : આ વિધાનોના સમાનાર્થી પ્રેરણ આ પ્રમાણે છે :

(i) જો કોઈ સંખ્યા 3 વડે વિભાજ્ય ન હોય તો તે 9 વડે વિભાજ્ય ન હોય.

(ii) જો તમે ભારતના નાગરિક ન હો તો તમે ભારતમાં જન્મ્યા નથી.

(iii) જો ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ ન હોય તો તે સમબાજુ ન હોય.

ઉપરનાં ઉદાહરણો દર્શાવે છે કે જો p તો q પ્રકારના વિધાનનું સમાનાર્થી પ્રેરણ એ જો $\sim q$ તો $\sim p$ થાય.

હવે આપણે બીજા શબ્દ"પ્રતીપ"નો વિચાર કરીશું.

'જો p તો q' પ્રકારના વિધાનનું પ્રતીપ 'જો q તો p' છે.

ઉદાહરણ તરીકે, વિધાન

p : જો સંખ્યા 10 વડે વિભાજ્ય હોય તો તે 5 વડે વિભાજ્ય હોય

તો પ્રતીપ એ q : જો સંખ્યા 5 વડે વિભાજ્ય હોય તો તે 10 વડે વિભાજ્ય હોય છે.

ઉદાહરણ 10 : નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ લખો :

(i) જો n યુગ્મ સંખ્યા હોય, તો n^2 યુગ્મ છે.

(ii) જો તમે પુસ્તકના બધા સ્વાધ્યાયો કરશો તો વર્ગમાં તમને A ગ્રેડ મળશે.

(iii) જો બે પૂર્ણાંકો a અને b માટે $a > b$ હોય, તો $a - b$ એ હંમેશાં ધન પૂર્ણાંક છે.

ઉકેલ : આ વિધાનોનાં પ્રતીપ :

(i) જો n^2 યુગ્મ સંખ્યા હોય તો n યુગ્મ છે.

(ii) જો તમને વર્ગમાં A ગ્રેડ મળ્યો હોય તો તમે પુસ્તકના બધા સ્વાધ્યાય કર્યા હશે.

(iii) જો બે પૂર્ણાંકો a અને b માટે $a - b$ હંમેશાં ધન પૂર્ણાંક હોય, તો $a > b$.

ચાલો કેટલાંક વધુ ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 11 : નીચેનાં દરેક સંયુક્ત વિધાનોમાં પહેલા ઘટક વિધાનો ઓળખો. પછી વિધાન સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસો.

(i) જો ત્રિકોણ ABC એ સમબાજુ હોય તો તે સમદ્વિબાજુ છે.

(ii) જો a અને b પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ હોય તો ab સંમેય સંખ્યા છે.

ઉકેલ : (i) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : ત્રિકોણ ABC સમબાજુ છે.

q : ત્રિકોણ ABC સમદ્વિબાજુ છે.

સમબાજુ ત્રિકોણ એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ હોવાથી આપણે તારવી શકીએ કે આપેલ સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે.

(ii) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : a અને b પૂર્ણાંકો છે.

q : ab એ સંમેય સંખ્યા છે.

બે પૂર્ણાંક સંખ્યાનો ગુણાકાર પૂર્ણાંક હોય અને તેથી તે સંમેય સંખ્યા પણ છે. તેથી આપેલ સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે.

'તો અને તો જ', પ્રકારના વિધાનને સંકેતમાં '$\Leftrightarrow$' વડે દર્શાવાય છે :

આપેલ વિધાનો p અને q માટે નીચેનાં વિધાનો સમકક્ષ સ્વરૂપમાં થશે.

(i) જો p તો અને તો જ q

(ii) જો q તો અને તો જ p

(iii) p એ q માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત છે અને તે જ રીતે ઊલટું પણ કહેવાય.

(iv) $p \Leftrightarrow q$

એક ઉદાહરણનો વિચાર કરીએ.

ઉદાહરણ 12 : નીચે બે વિધાનની જોડ આપેલ છે. બંને વિધાનોને "તો અને તો જ" વડે જોડો.

(i) p : જો લંબચોરસ એ ચોરસ હોય તો તેની ચારેય બાજુઓ એકરૂપ હોય.

q : જો લંબચોરસની ચારેય બાજુઓ એકરૂપ હોય તો લંબચોરસ એ ચોરસ છે.

(ii) p : જો કોઇ સંખ્યા 3 વડે વિભાજ્ય હોય, તો તેના અંકોનો સરવાળો 3 વડે વિભાજ્ય છે.

q : જો કોઈ સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો 3 વડે વિભાજ્ય હોય તો સંખ્યા 3 વડે વિભાજ્ય છે.

ઉકેલ : (i) લંબચોરસ એ ચોરસ હોય તો અને તો જ તેની ચારેય બાજુઓ એકરૂપ હોય.

(ii) કોઈ સંખ્યા 3 વડે વિભાજ્ય હોય તો અને તો જ તેના અંકોનો સરવાળો 3 વડે વિભાજ્ય હોય.

સ્વાધ્યાય 14.4

1. નીચેના વિધાનને પાંચ જુદી જુદી રીતે સમાન અર્થમાં "જો...તો..." નો ઉપયોગ કરીને ફરીથી લખો :

જો કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા અયુગ્મ હોય તો તેનો વર્ગ પણ અયુગ્મ છે.

2. નીચેનાં વિધાનોનાં સમાનાર્થી પ્રેરણ અને પ્રતીપ લખો :

(i) જો x અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય તો x અયુગ્મ હોય.

(ii) જો બે રેખાઓ સમાંતર હોય તો તે સમતલમાં છેદશે નહિ.

(iii) કંઇક ઠંડું છે તે સૂચવે છે કે તેનું તાપમાન નીચું છે.

(iv) જો તમે ભૂમિતિ સમજી શકો નહિ તો તમે તાર્કિક સાબિતી આપવાનું જાણતા ન હો.

(v) x એ યુગ્મ સંખ્યા છે તે સૂચવે છે કે x એ 4 થી વિભાજ્ય છે.

3. નીચેનાં દરેક વિધાનોને "જો... તો..." સ્વરૂપમાં લખો :

(i) તમને નોકરી મળી એ સૂચવે છે કે તમારાં પ્રમાણપત્રો સારાં છે.

(ii) એક મહિના માટે હૂંફવાળા રહે તો કેળાનાં ઝાડ ખીલે છે.

(iii) ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(iv) વર્ગમાં A^+ મેળવવા માટે તમારે પુસ્તકના બધા જ સ્વાધ્યાય કરવા જરૂરી છે.

4. નીચે વિધાનો (a) અને (b) આપેલ છે. જે વિધાનો એકબીજાના સમાનાર્થી પ્રેરણ અને પ્રતીપ હોય તે ઓળખો :

(a) જો તમે દિલ્લીમાં રહેતા હોય તો તમારી પાસે શિયાળુ કપડાં છે.

(i) જો તમારી પાસે શિયાળુ કપડાં ન હોય, તો તમે દિલ્લીમાં રહેતા નથી.

(ii) જો તમારી પાસે શિયાળુ કપડાં હોય, તો તમે દિલ્લીમાં રહો છો.

(b) જો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તો તેના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.

(i) જો ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર ન દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી.

(ii) જો ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

14.6 વિધાનોની યથાર્થતા

આ વિભાગમાં આપણે વિધાન ક્યારે સત્ય હોય છે તેની ચર્ચા કરીશું. આ પ્રશ્નનો ઉત્તર આપવા માટે નીચેના બધા જ પ્રશ્નના ઉત્તર આપવા જ જોઈએ.

વિધાનનો અર્થ શું છે ?

આ વિધાન સત્ય છે અને આ વિધાન મિથ્યા છે તેવું કહેવું તેનો અર્થ શું થાય ?

આ પ્રશ્નના જવાબનો આધાર કયા વિશિષ્ટ શબ્દો અને શબ્દસમૂહો ''અને'', 'અથવા' અને કયા પ્રેરણ ''જો...તો'', ''જો તો અને તો જ'' અને કયા કારકો ''પ્રત્યેક માટે'', ''કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે'' વિધાનમાં દેખાય છે તેના ઉપર છે.

અહીં આપણે ક્યારે વિધાન યથાર્થ છે તે શોધવા માટેની કેટલીક રીતોની ચર્ચા કરીશું.

વિધાન સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસવા માટે આપણે કેટલાક સામાન્ય નિયમોની યાદી બનાવીશું.

નિયમ 1 : જો p અને q એ ગાણિતિક વિધાનો હોય તો વિધાન "p અને q" સત્ય બને તે માટે નીચેનાં પદનું પાલન કરવું જોઈએ.

પદ 1 : વિધાન p સત્ય છે તેમ બતાવો.

પદ 2 : વિધાન q સત્ય છે તેમ બતાવો.

નિયમ 2 : ''અથવા'' વાળું વિધાન

જો p અને q એ ગાણિતિક વિધાનો હોય તો વિધાન "p અથવા q" સત્ય બને તે માટે નીચે પ્રમાણે વિચારો :

પદ 1 : વિધાન p મિથ્યા છે તેમ ધારીને q સત્ય છે તેમ બતાવો.

પદ 2 : વિધાન q મિથ્યા છે તેમ ધારીને p સત્ય છે તેમ બતાવો.

પદ 3 : વિધાન p અને q બંનેની સત્યાર્થતાની ચકાસણી કરો.

નિયમ 3 : "જો... તો..." વાળું વિધાન

વિધાન "જો p તો q" માટે નીચેના વિકલ્પમાંથી ગમે તે એક સત્ય હોય.

પદ 1 : વિધાન p સત્ય છે તેમ ધારીને સાબિત કરો કે q સત્ય હોય. (પ્રત્યક્ષ પદ્ધતિ)

પદ 2 : વિધાન q મિથ્યા છે તેમ ધારીને સાબિત કરો કે p મિથ્યા હોય. (સમાનાર્થી પ્રેરણ પદ્ધતિ)

નિયમ 4 : "તો અને તો જ" વાળા વિધાન

વિધાન "જો p તો અને તો જ q", માટે આપણે

(i) જો p સત્ય હોય તો q સત્ય અને (ii) જો q સત્ય હોય, તો p સત્ય છે તેમ બતાવવું જોઈએ.

હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોનો વિચાર કરીશું.

ઉદાહરણ 13 : નીચેનું વિધાન સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસો :

જો $x, y \in \mathbf{Z}$ તથા x અને y અયુગ્મ હોય તો xy અયુગ્મ છે.

ઉકેલ : ધારો કે $p : x, y \in \mathbf{Z}$ તથા x અને y અયુગ્મ છે. $q : xy$ અયુગ્મ છે.

આપેલા વિધાનની યથાર્થતા ચકાસવા માટે આપણે નિયમ 3 નો વિકલ્પ 1 વાપરીશું. તે આ પ્રમાણે છે. જો વિધાન p સત્ય છે એમ સ્વીકારીએ તો q સત્ય સાબિત કરવું.

વિધાન p સત્ય છે એટલે કે x અને y અયુગ્મ પૂર્ણાંકો છે.

આથી કોઈક પૂર્ણાંક m માટે, $x = 2m + 1$ તથા કોઈક પૂર્ણાંક n માટે, $y = 2n + 1$

$$xy = (2m + 1)(2n + 1)$$
$$= 2(2mn + m + n) + 1$$

આ દર્શાવે છે xy અયુગ્મ છે.

આમ, આપેલ વિધાન સત્ય છે. જો આપણે નિયમ 3 ના વિકલ્પ-2 નો ઉપયોગ કરીને ચકાસવું હોય, તો નીચે પ્રમાણે આગળ વધવું પડશે :

આપણે ધારી લઈશું કે q સત્ય નથી. તે એમ સૂચિત કરે છે કે આપણે વિધાન q ના નિષેધનો વિચાર કરવો. તે વિધાન આ પ્રમાણે છે.

$$\sim q : xy \text{ યુગ્મ છે.}$$

જો x અથવા y યુગ્મ હોય ત્યારે તે શક્ય છે. આ દર્શાવે છે કે વિધાન p સત્ય નથી. આમ આપણે બતાવ્યું કે,

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

નોંધ ઉપરનું ઉદાહરણ દર્શાવે છે કે $p \Rightarrow q$, સાબિત કરવા માટે તેનું સમાનાર્થી પ્રેરણ $\sim q \Rightarrow \sim p$ સાબિત કરવું પૂરતું છે.

ઉદાહરણ 14 : સમાનાર્થી પ્રેરણની રીતે નીચેનું વિધાન સત્ય છે કે મિથ્યા તે ચકાસો :

જો $xy \in \mathbf{Z}$ અયુગ્મ હોય તો $x \in \mathbf{Z}$ $y \in \mathbf{Z}$ માટે x અને y અયુગ્મ છે.

ઉકેલ : વિધાનોને નીચે પ્રમાણે દર્શાવીએ :

p : xy એ અયુગ્મ છે.

q : x અને y બંને અયુગ્મ પૂર્ણાંકો છે.

આપણે વિધાન $p \Rightarrow q$ સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસવું છે. આપણે સમાનાર્થી પ્રેરણની રીતે ચકાસવું છે એટલે કે $\sim q \Rightarrow \sim p$.

હવે, $\sim q$: x અને y બંને અયુગ્મ છે તે અસત્ય છે એટલે x (અથવા y) એ યુગ્મ છે.

$\therefore$ આથી કોઈક પૂર્ણાંક n માટે $x = 2n$

$\therefore$ કોઈક પૂર્ણાંક n માટે $xy = 2ny$ છે.

$\therefore$ xy એ યુગ્મ છે.

$\therefore$ $\sim p$ એ સત્ય છે.

આમ, આપણે બતાવ્યું કે $\sim q \Rightarrow \sim p$ અને તેથી આપેલ વિધાન સત્ય છે.

જ્યારે આપણે પ્રેરણ અને પ્રતીપ ભેગા કરીએ ત્યારે શું થાય ? હવે આપણે આ ચર્ચા કરીશું.

ચાલો આપણે નીચેનાં વિધાનોનો વિચાર કરીએ :

p : લોટો અડધો ખાલી છે.

q : લોટો અડધો ભરેલો છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે જો પ્રથમ વિધાન સત્ય થાય ત્યારે બીજું વિધાન પણ સત્ય થાય છે અને જો બીજું વિધાન સત્ય થાય ત્યારે પ્રથમ વિધાન પણ સત્ય થાય છે. આપણે આ હકીકતને આ પ્રમાણે દર્શાવીએ.

જો લોટો અડધો ખાલી હોય તો તે અડધો ભરેલો છે.

જો લોટો અડધો ભરેલો હોય તો તે અડધો ખાલી છે.

આપણે બંને વિધાનોને ભેગા કરીને નીચે પ્રમાણે મેળવી શકીએ :

લોટો અડધો ખાલી હોય તો અને તો જ તે અડધો ભરેલો છે.

હવે આપણે બીજી રીતની ચર્ચા કરીશું.

14.6.1 અનિષ્ટાપત્તિની રીત

અહીં વિધાન p સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસવા માટે આપણે ધારી લઈએ છીએ કે p સત્ય નથી. એટલે કે $\sim p$ સત્ય છે. પછી આપણે કોઈ એવા પરિણામ પર આવીએ છીએ જે આપણી ધારણાથી વિરુદ્ધ હોય. તેથી આપણે એવા નિષ્કર્ષ પર આવીએ કે છીએ વિધાન p સત્ય છે.

ઉદાહરણ 15 : અનિષ્ટાપત્તિની રીતથી ચકાસો કે,

p : $\sqrt{7}$ એ અસંમેય છે.

ઉકેલ : આ રીતમાં આપણે ધારીશું કે આપેલ વિધાન મિથ્યા છે. એટલે કે આપણે ધારીશું કે $\sqrt{7}$ એ સંમેય છે. આનો અર્થ એમ થાય કે એવાં ધન પૂર્ણાંકો a અને b મળે જેથી $\sqrt{7}=\frac{a}{b}$ થાય. અત્રે a અને b ને કોઈ સામાન્ય અવયવ નથી. વર્ગ લેતાં $7=\frac{a^2}{b^2}$.

$\therefore \quad a^2 = 7b^2$

$\therefore$ 7 એ a નો અવયવ છે. માટે કોઈ પૂર્ણાંક c એવો મળે કે જેથી $a = 7c$ થાય.

માટે $a^2 = 49c^2$ અને $a^2 = 7b^2$

તેથી, $7b^2 = 49c^2$.

આમ $b^2 = 7c^2$ માટે 7 એ b નો અવયવ છે.

પરંતુ આપણે એવું બતાવ્યું કે 7 એ a નો અવયવ છે.

એનાથી સૂચિત થાય છે કે 7 એ a અને b બંનેનો અવયવ છે. આ આપણી અગાઉની ધારણા 'a અને b ને કોઇ સામાન્ય અવયવ નથી.' થી વિપરીત છે. આ દર્શાવે છે કે આપણી ધારણા $\sqrt{7}$ સંમેય છે તે અસત્ય છે. તેથી વિધાન $\sqrt{7}$ અસંમેય છે તે સત્ય છે.

હવે આપણે એવી એક રીતની ચર્ચા કરીશું જેના દ્વારા આપણે બતાવી શકીએ કે વિધાન અસત્ય છે. આ રીતમાં એક એવી પરિસ્થિતિનું ઉદાહરણ આપો જ્યાં, વિધાન યથાર્થ નથી. આવા ઉદાહરણને પ્રતિઉદાહરણ કહે છે. પ્રતિઉદાહરણના નામ પરથી જ એવું સૂચન મળે છે કે તે વિધાનનો પ્રતિકાર કરે તેવું ઉદાહરણ છે.

ઉદાહરણ 16 : પ્રતિઉદાહરણ આપી દર્શાવો કે "જો પૂર્ણાંક n અયુગ્મ હોય તો તે અવિભાજ્ય છે" વિધાન અસત્ય છે.

ઉકેલ : આપેલ વિધાન "જો p તો q" પ્રકારનું છે. આપણે બતાવવું છે કે આ અસત્ય છે. આ હેતુ માટે આપણે બતાવવું પડશે p અને $\sim q$. આ બતાવવા માટે આપણે જે અવિભાજ્ય સંખ્યા ન હોય એવા અયુગ્મ પૂર્ણાંક n શોધીશું. એક એવી સંખ્યા 9 છે. આથી $n = 9$ એ પ્રતિઉદાહરણ છે. આમ, આપણે તારણ કાઢ્યું કે આપેલ વિધાન અસત્ય છે.

ઉપર આપણે વિધાન સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસવા માટેની અમુક રીતોની ચર્ચા કરી.

> **નોંધ :** ગણિતમાં કોઇક વિધાનને અસત્ય સાબિત કરવા માટે પ્રતિઉદાહરણનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. જો કે વિધાનની તરફેણમાં ઉદાહરણો રજૂ કરવાથી વિધાનની યથાર્થતા પુરવાર થતી નથી.

સ્વાધ્યાય 14.5

1. નીચેનું વિધાન સત્ય છે તેમ (i) પ્રત્યક્ષ પદ્ધતિ, (ii) અનિષ્ટાપત્તિની રીત અને (iii) સમાનાર્થી પ્રેરણની રીતથી બતાવો :

   p: જો કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^3 + 4x = 0$, તો $x = 0$

2. પ્રતિઉદાહરણની રીતે બતાવો કે નીચેનું વિધાન અસત્ય છે :

   "કોઈપણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b માટે $a^2 = b^2$ સૂચિત કરે છે કે $a = b$"

3. સમાનાર્થી પ્રેરણની રીતથી નીચેનું વિધાન સત્ય છે તેમ સાબિત કરો :

   p : જો x પૂર્ણાંક હોય તથા x^2 યુગ્મ હોય તો x પણ યુગ્મ છે.

4. પ્રતિઉદાહરણની રીતથી બતાવો કે નીચેનાં વિધાન અસત્ય છે :

   (i) p : જો ત્રિકોણના બધા જ ખૂણાનાં માપ સમાન હોય તો તે ગુરુકોણ ત્રિકોણ છે.

   (ii) q : સમીકરણ $x^2 - 1 = 0$ ને 0 અને 2 ની વચ્ચે કોઈ બીજ નથી.

5. નીચેનાં પૈકી કયાં વિધાન સત્ય છે અને કયા અસત્ય છે ? દરેકના જવાબ માટે યોગ્ય કારણ આપો.

   (i) p : વર્તુળની દરેક ત્રિજ્યા એ વર્તુળની જીવા છે.

   (ii) q : વર્તુળનું કેન્દ્ર એ વર્તુળની દરેક જીવાને દુભાગે છે.

   (iii) r : વર્તુળ એ ઉપવલયનું એક ખાસ ઉદાહરણ છે.

   (iv) s : જો x અને y પૂર્ણાંકો હોય તથા $x > y$, તો $-x < -y$.

   (v) t : $\sqrt{11}$ એ સંમેય સંખ્યા છે.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 17 : નીચેના વિધાનમાં "અથવા"નો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે કે નિવારક વિકલ્પ તરીકે થયો છે તે ચકાસો. સંયુક્ત વિધાનનાં ઘટક વિધાનો લખો અને તેમનો ઉપયોગ કરીને ચકાસો કે સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે કે નહિ. તમારા જવાબને સમર્થન આપો.

t : જ્યારે વરસાદ પડે ત્યારે તમે ભીના થાવ છો અથવા તમે નદીમાં છો.

ઉકેલ : આપેલ વિધાનમાં "અથવા"નો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે થયો છે. કારણ કે એવું શક્ય છે કે વરસાદ પડતો હોય ત્યારે તમે નદીમાં હો.

આપેલ વિધાનનાં ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : જ્યારે વરસાદ પડે ત્યારે તમે ભીના થાવ છો.

q : જ્યારે તમે નદીમાં હોય ત્યારે તમે ભીના થાવ છો.

અહીં બંને ઘટક વિધાનો સત્ય છે અને તેથી સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે.

ઉદાહરણ 18 : નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

(i) p : દરેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 > x$.

(ii) q : $x^2 = 2$ હોય તેવી એક સંમેય સંખ્યા x અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

(iii) r : બધાં પક્ષીઓને પાંખો હોય છે.

(iv) s : બધા વિદ્યાર્થીઓ પ્રાથમિક કક્ષાએ ગણિતનો અભ્યાસ કરે છે.

ઉકેલ : (i) વિધાન p નો નિષેધ "તે અસત્ય છે કે p". આનો અર્થ એમ થાય કે પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે $x^2 > x$ શરતનું પાલન થતું નથી. આ નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે :

$\sim p$: $x^2 \le x$ હોય એવી કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા x અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

(ii) વિધાન q નો નિષેધ "એ અસત્ય છે કે q", આમ, વિધાન $\sim q$ આ પ્રમાણે થશે.

$\sim q$: એવી કોઈ સંમેય સંખ્યા x અસ્તિત્વ ન ધરાવે કે જેથી $x^2 = 2$ થાય.

આ વિધાન આ રીતે લખી શકાય.

$\sim q$: પ્રત્યેક સંમેય સંખ્યા x માટે $x^2 \neq 2$

(iii) આપેલ વિધાનનું નિષેધ

$\sim r$: જેને પાંખો ન હોય તેવું પક્ષી અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

(iv) આપેલ વિધાનનું નિષેધ

$\sim s$: જેણે પ્રાથમિક કક્ષાએ ગણિતનો અભ્યાસ ન કર્યો હોય, એવો વિદ્યાર્થી અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

ઉદાહરણ 19 : "આવશ્યક" અને "પર્યાપ્ત" શબ્દનો ઉપયોગ કરીને વિધાન ફરીથી લખો :

"પૂર્ણાંક n અયુગ્મ હોય તો અને તો જ n^2 અયુગ્મ છે." વિધાનની સત્યાર્થતા ચકાસો.

ઉકેલ : પૂર્ણાંક n અયુગ્મ હોય તેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત n^2 અયુગ્મ હોય તે છે. ધારો કે p તથા q નીચે પ્રમાણે વિધાનો છે :

p : પૂર્ણાંક n અયુગ્મ છે.

q : n^2 અયુગ્મ છે.

"p તો અને તો જ q" ની સત્યાર્થતા ચકાસવા માટે આપણે " જો p તો q" અને "જો q તો p" ની સત્યાર્થતા ચકાસવી પડશે.

વિકલ્પ 1 : જો p તો q

જો "p તો q" વિધાન આ પ્રમાણે છે.

'જો પૂર્ણાંક n અયુગ્મ હોય તો n^2 અયુગ્મ છે.' આપણે આ વિધાન સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસવું પડશે. ધારો કે n અયુગ્મ છે. આથી કોઈક પૂર્ણાંક k માટે $n = 2k + 1$

$\therefore \quad n^2 = (2k + 1)^2$

$= 4k^2 + 4k + 1$

$\therefore$ n^2 એ યુગ્મ સંખ્યા કરતા એક વધુ છે. તેથી તે અયુગ્મ છે.

વિકલ્પ 2 : જો q તો p

જો "q તો p" વિધાન આ પ્રમાણે છે.

'જો n પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય તથા n^2 અયુગ્મ હોય તો n અયુગ્મ છે.'

આપણે ચકાસવું પડશે કે આ વિધાન સત્ય છે કે નહિ. આપણે તે સમાનાર્થી પ્રેરણની રીતે ચકાસીશું. આપેલ વિધાનનું સમાનાર્થી પ્રેરણ આ પ્રમાણે છે.

જો n યુગ્મ પૂર્ણાંક હોય તો n^2 યુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

n યુગ્મ હોય તો કોઈ પૂર્ણાંક k માટે $n = 2k$ ધારો.

$n^2 = 4k^2$.

આથી n^2 યુગ્મ છે.

ઉદાહરણ 20 : આપેલ વિધાનમાં આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરતો ઓળખો.

જો તમે 80 કિમી/કલાકથી વધુ ઝડપ સાથે વાહન હંકારશો તો તમને દંડ થશે.

ઉકેલ : ધારો કે વિધાન p અને q નીચે પ્રમાણે દર્શાવેલ છે :

p : તમે 80 કિમી/કલાકથી વધુ ઝડપ સાથે વાહન હંકારો છો.

q : તમને દંડ થશે.

પ્રેરણ "જો p તો q" એવું દર્શાવે છે કે p એ q માટે પર્યાપ્ત છે. એટલે કે દંડ થવા માટે 80 કિમી/કલાકથી વધુ ઝડપ સાથે વાહન હંકારવું પર્યાપ્ત છે. તે જ રીતે "જો p તો q" એવું પણ દર્શાવે છે કે q એ p માટે આવશ્યક છે. એટલે કે જ્યારે તમે 80 કિમી/કલાક થી વધુ ઝડપ સાથે વાહન હંકારશો ત્યારે તમને દંડ થવો જરૂરી છે. આથી આવશ્યક શરત ''દંડ થવો'' એ છે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 14

1. નીચેનાં વિધાનનાં નિષેધ લખો :

   (i) p : પ્રત્યેક ધન વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે સંખ્યા $x - 1$ પણ ધન થશે.

   (ii) q : બધી બિલાડીઓ ચટાપટાવાળી છે.

(iii) r : પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x > 1$ અથવા $x < 1$.

(iv) s : $0 < x < 1$ થાય તેવી એક એવી સંખ્યા x અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

2. નીચેનાં દરેક વિધાનોનાં પ્રતીપ તથા સમાનાર્થી પ્રેરણ દર્શાવો :

(i) p : જો ધનપૂર્ણાંકને 1 અને તે સંખ્યા સિવાય બીજા કોઈ અવયવો ન હોય તો જ તે અવિભાજ્ય હોય.

(ii) q : સૂર્ય પ્રકાશિત દિવસ હોય તો હું દરિયાકિનારે જઈશ.

(iii) r : જો બહાર ગરમી હોય તો તમને તરસ લાગશે.

3. નીચેના દરેક વિધાનને "જો p તો q" સ્વરૂપમાં લખો :

(i) p : સર્વર પર પ્રવેશ કરવા માટે પાસવર્ડ જરૂરી છે.

(ii) q : જ્યારે પણ વરસાદ પડે ત્યારે ટ્રાફિક જામ હોય છે.

(iii) r : જો તમે વેબસાઇટમાં લવાજમ ફી ચૂકવી હોય તો જ પ્રવેશ કરી શકો.

4. નીચેના દરેક વિધાનને "જો p તો અને તો જ q" સ્વરૂપમાં ફરીથી લખો :

(i) p : તમે જ્યારે ટેલિવિઝન નિહાળો ત્યારે તમારું મન મુક્ત હોય છે અને જ્યારે તમારું મન મુક્ત હોય ત્યારે તમે ટેલિવિઝન નિહાળો છો.

(ii) q : તમારે A ગ્રેડ મેળવવા માટે તમારું બધું ગૃહકાર્ય નિયમિત કરવું પડે એ જરૂરી આયોજન છે.

(iii) r: જો ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાઓ સમાન હોય તો તે લંબચોરસ છે.

5. નીચે બે વિધાન આપેલ છે :

p : 25 એ 5 નો ગુણિત છે.

q : 25 એ 8 નો ગુણિત છે.

આ બંને વિધાનોને "અને" તથા "અથવા" વડે જોડીને સંયુક્ત વિધાન લખો. આ બંને પ્રકારનાં સંયુક્ત વિધાનોની સત્યાર્થતા ચકાસો.

6. પ્રશ્નમાં જણાવેલ રીતની મદદથી નીચે આપેલ વિધાનોની સત્યાર્થતા ચકાસો :

(i) p : અસંમેય સંખ્યા અને સંમેય સંખ્યાનો સરવાળો અસંમેય છે.(અનિષ્ટાપત્તિની રીત)

(ii) q : જો કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા n માટે $n > 3$, તો $n^2 > 9$ (અનિષ્ટાપત્તિની રીત)

7. નીચેના વિધાનને એક સમાન અર્થ ધરાવતા પાંચ ભિન્ન પ્રકારે લખો :

p : જો કોઈ ત્રિકોણના બધા ખૂણાઓ સમાન હોય તો તે ગુરુકોણ ત્રિકોણ છે.

સારાંશ

◆ એવું વાક્ય જે કાં તો સત્ય હોય અથવા અસત્ય તે ગાણિતિક રીતે સ્વીકાર્ય વિધાન છે.

◆ સમજાવેલાં પદો :

વિધાન p નું નિષેધ : જો p એ એક વિધાન દર્શાવે તો p ના નિષેધને $\sim p$ વડે દર્શાવાય છે.

– સંયુક્ત વિધાનો અને તેના સંબંધી ઘટક વિધાનો.

બે અથવા વધુ સાદાં વિધાનોને જોડવાથી જે વિધાન મળે છે તે સંયુક્ત વિધાન છે. સાદાં વિધાનોને સંયુક્ત વિધાનનાં ઘટક વિધાનો કહેવામાં આવે છે.

– સંયુક્ત વિધાનમાં ‘‘અને’’ ‘‘અથવા’’ ‘‘અસ્તિત્વ ધરાવે છે’’ તથા ‘‘પ્રત્યેક માટે’’ ની ભૂમિકા

– પ્રેરણ ‘‘જો’’ ‘‘તો જ’’ ‘‘તો અને તો જ’’ ની સમજૂતી.

જો p તો q વાળું વાક્ય ભિન્ન પ્રકારે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે લખી શકાય :

– જો p તો q ($p \Rightarrow q$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.)

– p એ q માટેની પર્યાપ્ત શરત છે.

– q એ p માટેની આવશ્યક શરત છે.

– q તો જ p

– જો $\sim q$ તો $\sim p$

– વિધાન $p \Rightarrow q$ નું સમાનાર્થી પ્રેરણ $\sim q \Rightarrow \sim p$. વિધાન $p \Rightarrow q$ નું પ્રતીપ $q \Rightarrow p$ છે.

$p \Rightarrow q$ અને પ્રતીપને ભેગા કરવાથી p તો અને તો જ q મળે છે.

◆ વિધાનની યથાર્થતા ચકાસવા માટે નીચેની રીતનો ઉપયોગ કરવામાં આવ્યો છે :

(i) પ્રત્યક્ષ પદ્ધતિ

(ii) સમાનાર્થી પ્રેરણની રીત

(iii) અનિષ્ટાપત્તિની રીત

(iv) પ્રતિ ઉદાહરણની રીત

Historical Note

The first treatise on logic was written by *Aristotle* (384 B.C.-322 B.C.). It was a collection of rules for deductive reasoning which would serve as a basis for the study of every branch of knowledge. Later, in the seventeenth century, German mathematician G. W. Leibnitz (1646 – 1716) conceived the idea of using symbols in logic to mechanise the process of deductive reasoning. His idea was realised in the nineteenth century by the English mathematician *George Boole* (1815–1864) and *Augustus De Morgan* (1806–1871) , who founded the modern subject of symbolic logic.

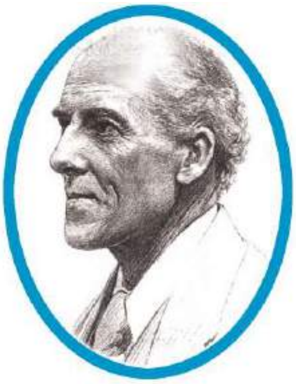
— ❖ —

પ્રકરણ 15

આંકડાશાસ્ત્ર

❖ *"Statistics may be rightly called the science of averages and their estimates." – A. L. BOWLEY and A. L. BODDINGTON* ❖

15.1 પ્રાસ્તાવિક



Karl Pearson
(1857-1936)

આપણે જાણીએ છીએ કે આંકડાશાસ્ત્રનો વ્યવહાર કોઈ વિશેષ હેતુને લઈને એકત્રિત કરેલી માહિતી સાથે છે. આપણે માહિતીનું વિશ્લેષણ અને અર્થઘટન કરીને તેમના વિશે નિર્ણય લઈએ છીએ. આપણે આગળનાં ધોરણોમાં માહિતીને આલેખ અને કોષ્ટક સ્વરૂપમાં દર્શાવવાની રીતોનો અભ્યાસ કર્યો છે. આ નિરુપણ માહિતીનાં મહત્ત્વપૂર્ણ લક્ષણો અથવા વિશેષતાઓને દર્શાવે છે. આપણે આપેલ માહિતીનું પ્રતિનિધિત્વ રજૂ કરતાં મૂલ્યો શોધવાની રીતો વિશે અભ્યાસ કર્યો છે. આ મૂલ્યોને મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં માપ કહે છે. યાદ કરો કે ***મધ્યક*** *(સમાંતર મધ્યક)*, ***મધ્યસ્થ*** *અને* ***બહુલક*** *(mean, median and mode)* એ મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં ત્રણ માપ છે. મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું માપ આપણને એ વાતનો આભાસી ખ્યાલ આપે છે કે માહિતી ક્યાં કેન્દ્રિત થઈ છે. પરંતુ માહિતી પરથી વધુ સચોટ અર્થઘટન કરવા માટે, આપણને એ ખ્યાલ પણ હોવો જોઈએ કે પ્રાપ્તાંકો(માહિતી) કેટલા વિખેરાયેલા છે અથવા તો મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં માપની ચારે તરફ કઈ રીતે એકત્રિત થયેલા છે.

બે બૅટ્સમૅનો દ્વારા છેલ્લી દશ મેચમાં બનાવેલા રન પર વિચાર કરીએ.

બૅટ્સમૅન A : 30, 91, 0, 64, 42, 80, 30, 5, 117, 71

બૅટ્સમૅન B : 53, 46, 48, 50, 53, 53, 58, 60, 57, 52

સ્પષ્ટપણે માહિતીનો મધ્યક અને મધ્યસ્થ દર્શાવેલ છે :

	બૅટ્સમૅન A	બૅટ્સમૅન B
મધ્યક	53	53
મધ્યસ્થ	53	53

યાદ કરો કે આપણે માહિતીનો મધ્યક ($\bar{x}$ વડે દર્શાવીએ છીએ) અવલોકનોના સરવાળાને અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગીને મેળવીએ છીએ. એટલે કે,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

મધ્યસ્થની ગણતરી માટે પ્રાપ્તાંકો પહેલાં ચઢતા કે ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવવામાં આવે છે અને પછી નીચે દર્શાવેલ નિયમનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

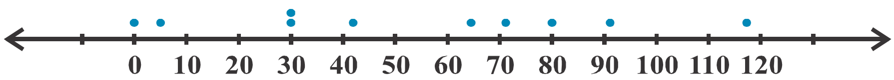
જો આપેલાં અવલોકનોની સંખ્યા અયુગ્મ હોય, તો મધ્યસ્થ એ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ મું અવલોકન છે.

જો અવલોકનોની સંખ્યા યુગ્મ હોય તો મધ્યસ્થ $\left(\frac{n}{2}\right)$ માં અને $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ માં અવલોકનોની સરેરાશ છે.

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે બંને ખેલાડી A અને B દ્વારા બનાવેલા રનનો મધ્યક અને મધ્યસ્થ સરખા છે અને તે 53 છે. શું આપણે કહી શકીએ કે બન્ને ખેલાડીઓનું પ્રદર્શન સમાન છે ? સ્પષ્ટ છે કે નથી જ. કારણ કે A ના રનમાં ચલન 0 (ન્યૂનતમ) થી 117 (મહત્તમ) સુધી છે, જ્યારે B ના રનનો વિસ્તાર 46 થી 60 સુધી છે.

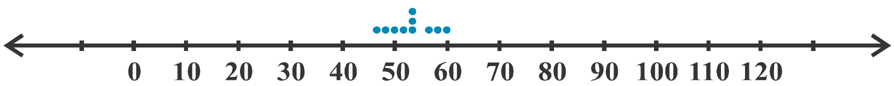
ચાલો, હવે ઉપર્યુક્ત રનની સંખ્યાઓને એક સંખ્યારેખા પર દર્શાવીએ. આપણને નીચે દર્શાવેલ આકૃતિઓ મળે છે :

બૅટ્સમૅન A માટે



આકૃતિ 15.1

બૅટ્સમૅન B માટે



આકૃતિ 15.2

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે બૅટ્સમૅન B ને અનુરૂપ બિંદુઓ એકબીજાની નજીક નજીક છે અને મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં માપ (મધ્યક અને મધ્યસ્થ) ની આસપાસ એકત્રિત થાય છે, જ્યારે બૅટ્સમૅન A ને અનુરૂપ બિંદુઓ ફેલાયેલાં છે અથવા વધુ વિખેરાયેલાં છે.

આમ આપેલ માહિતી વિશે સંપૂર્ણ જાણકારી આપવા માટે મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં માપ એકલાં પર્યાપ્ત નથી. જેનો અભ્યાસ આંકડાશાસ્ત્રના અંતર્ગત કરવો જોઈએ તેવું એક અન્ય પરિબળ પરિવર્તનશીલતા છે.

મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના માપની જેમ જ પરિવર્તનશીલતાના વર્ણન માટે પણ એક સંખ્યા જરૂરી છે. તે સંખ્યાને ***પ્રસારનું માપ*** (*measure of dispersion*) કહે છે. આ પ્રકરણમાં આપણે પ્રસારનાં માપનું મહત્ત્વ અને તેમની વર્ગીકૃત અને અવર્ગીકૃત માહિતી માટે ગણતરીની રીતો વિશે અભ્યાસ કરીશું.

15.2 પ્રસારનાં માપ

સંખ્યાઓમાં પ્રસારનું માપ અવલોકનો અને ત્યાં ઉપયોગમાં લેવાયેલ મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં માપના આધારે કરવામાં આવે છે. પ્રસારનાં માપ નીચે દર્શાવ્યા છે :

(i) *વિસ્તાર* (*Range*) (ii) *ચતુર્થક વિચલન* (*Quartile deviation*) (iii) *સરેરાશ વિચલન* (*Mean deviation*) (iv) *પ્રમાણિત વિચલન* (*Standard deviation*).

આ પ્રકરણમાં આપણે ચતુર્થક વિચલન સિવાયના અન્ય તમામ માપોનો અભ્યાસ કરીશું.

15.3 વિસ્તાર (Range)

યાદ કરો કે બે બૅટ્સમૅન A અને B દ્વારા બનાવેલા રનના ઉદાહરણમાં આપણને પ્રત્યેક શ્રેણીના મહત્તમ અને ન્યૂનતમ રનના આધાર પરથી રનની સંખ્યાઓમાં પરિવર્તનશીલતાનો ખ્યાલ આવે છે. આમાં એકલ સંખ્યા જાણવા માટે આપણે શ્રેણીની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ સંખ્યાઓ વચ્ચેનો તફાવત(અંતર) મેળવીએ છીએ. આ તફાવતને *વિસ્તાર* કહેવામાં આવે છે.

બૅટ્સમૅન A નો વિસ્તાર $= 117 - 0 = 117$ અને બૅટ્સમૅન B નો વિસ્તાર$= 60 - 46 = 14$.

સ્પષ્ટ છે કે A નો વિસ્તાર > B નો વિસ્તાર. તેથી A ના રનની સંખ્યાઓમાં વિચલન અથવા પ્રસાર વધુ છે, પરંતુ B ના રનની સંખ્યાઓ એકબીજાની વધુ નજીક છે.

આમ, એક શ્રેણીનો વિસ્તાર = પ્રાપ્તાંકોનું મહત્તમ મૂલ્ય – પ્રાપ્તાંકોનું ન્યૂનતમ મૂલ્ય

માહિતીનો વિસ્તાર આપણને વિખેરાવ અથવા ચલનીયતાનો સ્થૂળ ખ્યાલ આપે છે, પરંતુ મધ્યવર્તી સ્થિતિનું માપ *માહિતીના પ્રસાર (dispersion)* વિશે કશું જ જણાવતું નથી. આ હેતુ માટે આપણને પરિવર્તનશીલતાનાં બીજાં કેટલાંક માપોની પણ જરૂર પડે છે. સ્પષ્ટ છે કે આ પ્રકારનાં માપ અવલોકનોના મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનથી અંતર (અથવા વિચલન) પર આધારિત હોવા જોઈએ.

મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનથી અવલોકનોના અંતરના આધાર પર શોધવામાં આવેલ પ્રસારનાં મહત્ત્વપૂર્ણ માપ એ સરેરાશ વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલન છે. ચાલો આના ઉપર વિસ્તૃત ચર્ચા કરીએ.

15.4 સરેરાશ વિચલન (Mean Deviation)

યાદ કરો કે અવલોકન x નું અચળ મૂલ્ય 'a' થી અંતર $(x - a)$ એ અવલોકન x નું a થી વિચલન કહેવાય છે. 'x' ની કિંમતોનો મધ્યવર્તી કિંમત 'a' થી *પ્રસાર* શોધવા માટે આપણે 'a' થી વિચલનો શોધીએ છીએ. આ વિચલનોનો મધ્યક એ પ્રસારનું નિરપેક્ષ માપ હોય છે. મધ્યક શોધવા માટે આપણે વિચલનોનો સરવાળો મેળવીએ છીએ, પરંતુ આપણે જાણીએ છીએ કે, મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું માપ એ અવલોકનોના ગણની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતોની મધ્યમાં હોય છે. તેથી કેટલાંક વિચલન ઋણ તથા કેટલાંક ધન હશે. આમ, વિચલનોનો સરવાળો શૂન્ય હોઈ શકે છે. આ ઉપરાંત મધ્યક ($\overline{x}$) થી વિચલનોનો સરવાળો શૂન્ય હોય છે જ. આ સાથે જ

$$\text{વિચલનોનો મધ્યક} = \frac{\text{મધ્યકથી વિચલનોનો સરવાળો}}{\text{અવલોકનોની સંખ્યા}} = \frac{0}{n} = 0$$

આમ, જ્યાં સુધી પ્રસારના માપને લાગેવળગે છે, મધ્યકની સાપેક્ષ વિચલનોનો મધ્યક શોધવાનું કોઈ ઔચિત્ય રહેતું નથી.

યાદ કરો કે પ્રસારનું યોગ્ય માપ શોધવા માટે આપણને પ્રત્યેક મૂલ્યના મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું માપ અથવા કોઇ અચલ સંખ્યા 'a' થી અંતર મેળવવાનું હોય છે. યાદ કરો કે કોઈ બે સંખ્યાઓના તફાવતના માનાંકનું માપ, એ બે સંખ્યાઓ દ્વારા સંખ્યારેખા પર રજુ થતા બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર દર્શાવે છે. આમ, અચળ સંખ્યા 'a' થી પ્રસારનું માપ શોધવા માટે આપણે મધ્યવર્તી માપથી વિચલનોનાં નિરપેક્ષ મૂલ્યોનો મધ્યક લઈ શકીએ. આ મધ્યકને ***સરેરાશ વિચલન*** કહે છે. આમ, મધ્યવર્તી માપ 'a' ને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન એ 'a' થી અવલોકનોનાં વિચલનોના નિરપેક્ષ મૂલ્યોનો મધ્યક છે. 'a' થી સરેરાશ વિચલનને M.D.(a) વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આથી,

$$\text{M.D.}(a) = \frac{\text{'}a\text{' થી વિચલનોનાં નિરપેક્ષ મૂલ્યોનો સરવાળો}}{\text{અવલોકનની સંખ્યા}}$$

ટિપ્પણી : સરેરાશ વિચલન મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના કોઈપણ માપથી શોધી શકાય છે. પરંતુ આંકડાશાસ્ત્રના અભ્યાસમાં સામાન્ય રીતે મધ્યક અને મધ્યસ્થને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલનનો ઉપયોગ થાય છે.

ચાલો, આપણે મધ્યકને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન અને મધ્યસ્થને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલનની ગણતરી કઈ રીતે કરવી તેનો અભ્યાસ કરીએ.

15.4.1 અવર્ગીકૃત માહિતી માટે સરેરાશ વિચલન (Mean deviation for ungrouped data)

ધારો કે n અવલોકનોના પ્રાપ્તાંકો $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ છે. મધ્યક અથવા મધ્યસ્થની સાપેક્ષે સરેરાશ વિચલનની ગણતરી નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે થાય છે :

પગલું 1 : જેની સાપેક્ષે સરેરાશ વિચલન શોધવાનું છે એ મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના માપની ગણતરી કરો. ધારો કે તે 'a' છે.

પગલું 2 : પ્રત્યેક અવલોકન x_i થી a નું વિચલન શોધો, એટલે કે, $x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a, . . . , x_n - a$.

પગલું 3 : વિચલનોનાં નિરપેક્ષ મૂલ્યો શોધો, અર્થાત્ જો ઋણ સંજ્ઞા હોય તો, (–) દૂર કરો એટલે કે,

$$|x_1 - a|, |x_2 - a|, |x_3 - a|, ...,|x_n - a| \text{ મેળવો.}$$

પગલું 4 : વિચલનોનાં નિરપેક્ષ મૂલ્યોનો મધ્યક શોધો. આ મધ્યક એ a ને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન છે. એટલે કે,

$$\text{M.D.}(a) = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - a|}{n}$$

આમ, $\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$, જ્યાં $\bar{x}$ = મધ્યક

અને $\text{M.D.}(\text{M}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \text{M}|$, જ્યાં M = મધ્યસ્થ

નોંધ : આ પ્રકરણમાં જ્યાં સુધી અન્ય સૂચન ન હોય ત્યાં સુધી સંકેત M એ મધ્યસ્થ દર્શાવે છે . ચાલો હવે ઉપર વર્ણવેલ પદો સમજવા માટે નીચે આપેલ ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલ માહિતી માટે મધ્યકને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન શોધો :

6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

ઉકેલ : આપણે પદવાર આગળ વધીએ અને નીચે દર્શાવેલ વિગતો મેળવીએ :

પગલું 1 : આપેલ સંખ્યાઓનો મધ્યક

$$\bar{x} = \frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} = \frac{72}{8} = 9$$

પગલું 2 : ક્રમશઃ અવલોકનોનું મધ્યક $\bar{x}$ થી વિચલન $x_i - \bar{x}$ અર્થાત્

6 – 9, 7 – 9, 10 – 9, 12 – 9, 13 – 9, 4 – 9, 8 – 9, 12 – 9

અથવા –3, –2, 1, 3, 4, –5, –1, 3 છે.

પગલું 3 : વિચલનોનાં માનાંકનાં મૂલ્યો, એટલે કે $|x_i - \bar{x}|$, 3, 2, 1, 3, 4, 5, 1, 3 છે.

પગલું 4 : મધ્યકને સાપેક્ષ માંગેલ સરેરાશ વિચલન

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{8}|x_i - \bar{x}|}{8} = \frac{3+2+1+3+4+5+1+3}{8} = \frac{22}{8} = 2.75$$

> **નોંધ** દરેક વખતે બધાં જ પદોની ગણતરી કરવાને બદલે, આપણે પદોને અવગણીને પદવાર ગણતરી કરી શકીશું.

ઉદાહરણ 2 : નીચે આપેલ માહિતી માટે મધ્યકને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન શોધો :

12, 3, 18, 17, 4, 9, 17, 19, 20, 15, 8, 17, 2, 3, 16, 11, 3, 1, 0, 5

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આપણે આપેલ માહિતીનો મધ્યક ($\bar{x}$) શોધીશું.

$$\bar{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{200}{20} = 10$$

ક્રમશઃ અવલોકનોના મધ્યક ($\bar{x}$) થી વિચલનનો માનાંક $|x_i - \bar{x}|$; એટલે કે,

2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5, 2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5

તેથી $$\sum_{i=1}^{20}|x_i - \bar{x}| = 124$$

અને $$\text{M.D.}\ (\bar{x}) = \frac{124}{20} = 6.2$$

ઉદાહરણ 3 : આપેલ માહિતી માટે મધ્યસ્થને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન શોધો :

3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21.

ઉકેલ : અહીં, અવલોકનોની સંખ્યા 11 અયુગ્મ છે. આપેલ સંખ્યાઓને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવતાં,

3, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 18, 19, 21 છે.

હવે મધ્યસ્થ $= \left(\frac{11 + 1}{2}\right)$ મું અથવા 6 ઠ્ઠું અવલોકન $= 9$

મધ્યસ્થ M થી અવલોકનોનાં વિચલનોનાં નિરપેક્ષ મૂલ્યો, એટલે કે, $|x_i - \text{M}|$ એ

6, 6, 5, 4, 2, 0, 1, 3, 9, 10, 12 છે.

તેથી $$\sum_{i=1}^{11}|x_i - \text{M}| = 58$$

અને $$\text{M.D.}\,(\text{M}) = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11}|x_i - \text{M}| = \frac{1}{11} \times 58 = 5.27$$

15.4.2 વર્ગીકૃત માહિતી માટે સરેરાશ વિચલન (Mean deviation for grouped data)

આપણે જાણીએ છીએ કે માહિતીનું બે પ્રકારે વર્ગીકરણ કરવામાં આવે છે :

(a) ***અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ*** *(Discrete frequency distribution)*

(b) ***સતત આવૃત્તિ-વિતરણ*** *(Continuous frequency distribution)*

ચાલો, આ બંને પ્રકારની માહિતી માટે સરેરાશ વિચલન શોધવાની રીતો વિશે ચર્ચા કરીએ.

(a) અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ : ધારો કે આપેલ માહિતીનાં n ભિન્ન અવલોકનો $x_1, x_2, \ldots, x_n$ છે અને તેમની આવૃત્તિઓ અનુક્રમે $f_1, f_2, \ldots, f_n$ છે. આ માહિતીને કોષ્ટક સ્વરૂપે નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે. તેને ***અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ*** કહે છે.

$$x : x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ldots\ldots\ldots x_n$$

$$f : f_1 \quad f_2 \quad f_3 \ldots\ldots\ldots f_n$$

(i) મધ્યકની સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન :

સૌપ્રથમ આપણે આપેલ માહિતીનો મધ્યક $\bar{x}$ શોધીશું

અહીં,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ એ અવલોકનો x_i ના તેમને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ f_i સાથેના ગુણાકારોનો સરવાળો દર્શાવે છે અને $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ એ આવૃત્તિઓનો સરવાળો છે.

પછી, આપણે અવલોકનો x_i ના મધ્યક $\bar{x}$ પરથી વિચલન શોધીએ છીએ અને તેમનાં નિરપેક્ષ મૂલ્ય મેળવીએ છીએ, એટલે કે પ્રત્યેક $i = 1, 2, \ldots, n$ માટે $|x_i - \bar{x}|$ શોધવામાં આવે છે.

તેનાં પછી વિચલનોનાં મધ્યકની સાપેક્ષ અપેક્ષિત સરેરાશ વિચલનની ગણતરી કરવામાં આવે છે.

આમ,

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|$$

(ii) મધ્યસ્થની સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન :

મધ્યસ્થની સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન શોધવા માટે આપેલ અસતત આવૃત્તિ-વિતરણનો મધ્યસ્થ શોધીશું. આના માટે અવલોકનોને ચઢતાં ક્રમમાં ગોઠવીશું. તેના પછી સંચયી આવૃત્તિ મેળવીશું. અહીં, આવૃત્તિઓનો સરવાળો N વડે દર્શાવ્યો છે. જેની સંચયી આવૃત્તિ $\frac{N}{2}$ ને સમાન અથવા એના કરતાં તરત જ વધારે હોય એ અવલોકન હવે નિર્ધારિત કરીશું. અવલોકનોનું આ મૂલ્ય સંખ્યાઓની મધ્યમાં સ્થાયી હોય છે, તેથી આ જરૂરી મધ્યસ્થ છે. મધ્યસ્થ શોધી લીધા પછી, આપણે મધ્યસ્થથી વિચલનોનાં નિરપેક્ષ મૂલ્યોનો મધ્યક શોધીએ છીએ. આ રીતે,

$$\text{M.D.}(M) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M|$$

ઉદાહરણ 4 : નીચે આપેલ માહિતી પરથી મધ્યકને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન શોધો :

x_i	2	5	6	8	10	12
f_i	2	8	10	7	8	5

ઉકેલ : ચાલો, આપેલ માહિતીને કોષ્ટક 15.1 માં વધારાના સ્તંભો ગણતરી કરીને આગળ દર્શાવ્યા પ્રમાણે તૈયાર કરીએ.

કોષ્ટક 15.1

x_i	f_i	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
2	2	4	5.5	11
5	8	40	2.5	20
6	10	60	1.5	15
8	7	56	0.5	3.5
10	8	80	2.5	20
12	5	60	4.5	22.5
	40	300		92

અહીં $N = \sum_{i=1}^{6} f_i = 40$, $\sum_{i=1}^{6} f_i x_i = 300$,

તેથી, $$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} f_i x_i = \frac{1}{40} \times 300 = 7.5$$

$$\sum_{i=1}^{6} f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert = 92$$

અને $$M.D.\ (\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert = \frac{1}{40} \times 92 = 2.3$$

ઉદાહરણ 5 : આપેલ માહિતી માટે મધ્યસ્થને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન શોધો :

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3

ઉકેલ : આપેલ અવલોકનો ચઢતા ક્રમમાં જ છે. આ માહિતીમાં સંચયી આવૃત્તિની એક હાર ઉમેરતાં આપણને (કોષ્ટક 15.2) મળે.

કોષ્ટક 15.2

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
સંચયી આવૃત્તિ	3	7	12	14	18	23	27	30

હવે, $N = 30$ યુગ્મ સંખ્યા છે.

મધ્યસ્થ એ 15 માં અને 16 માં અવલોકનોની સરેરાશ છે. આ બંને અવલોકનો સંચયી આવૃત્તિ 18 ને સંગત છે. તેને અનુરૂપ અવલોકન 13 છે.

માટે, મધ્યસ્થ $$M = \frac{\text{15 મું અવલોકન + 16 મું અવલોકન}}{2} = \frac{13+13}{2} = 13$$

હવે, મધ્યસ્થથી વિચલનોનાં નિરપેક્ષ મૂલ્યો એટલે કે, $\lvert x_i - M\rvert$ કોષ્ટક 15.3 માં દર્શાવ્યાં છે.

કોષ્ટક 15.3

$\lvert x_i - M \rvert$	10	7	4	1	0	2	8	9
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
$f_i \lvert x_i - M \rvert$	30	28	20	2	0	10	32	27

આપણને $\sum_{i=1}^{8} f_i = 30$ અને $\sum_{i=1}^{8} f_i \lvert x_i - M \rvert = 149$ મળે છે.

તેથી $$M.D.(M) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{8} f_i \lvert x_i - M \rvert$$

$$= \frac{1}{30} \times 149 = 4.97$$

(b) સતત આવૃત્તિ-વિતરણ : સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં માહિતીનું, વચ્ચે અંતર ન હોય એવા વર્ગોમાં વર્ગીકરણ કરવામાં આવે છે. એવા પ્રકારની શ્રેણી અને તેમની આવૃત્તિ ક્રમાનુસાર લખવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે 100 વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા પ્રાપ્ત કરેલા ગુણોને સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

મેળવેલા ગુણ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	12	18	27	20	17	6

(i) મધ્યકને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન : એક સતત આવૃત્તિ-વિતરણના મધ્યકની ગણતરી કરતાં સમયે આપણે એ ધારી લીધું હતું કે, પ્રત્યેક વર્ગની આવૃત્તિ વર્ગની મધ્યકિંમત પર કેન્દ્રિત હોય છે. અહીં આપણે દરેક વર્ગની મધ્યકિંમત લખીએ છીએ અને અસતત આવૃત્તિ વિતરણની માફક સરેરાશ વિચલન શોધીએ છીએ. ચાલો નીચે આપેલ ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 6 : આપેલ માહિતી માટે મધ્યકને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન શોધો :

મેળવેલા ગુણ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	3	8	14	8	3	2

ઉકેલ : આપેલ માહિતી પરથી કોષ્ટક 15.4 તૈયાર કરીશું :

કોષ્ટક 15.4

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા f_i	મધ્યકિંમત x_i	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
10-20	2	15	30	30	60
20-30	3	25	75	20	60
30-40	8	35	280	10	80
40-50	14	45	630	0	0
50-60	8	55	440	10	80
60-70	3	65	195	20	60
70-80	2	75	150	30	60
	40		1800		400

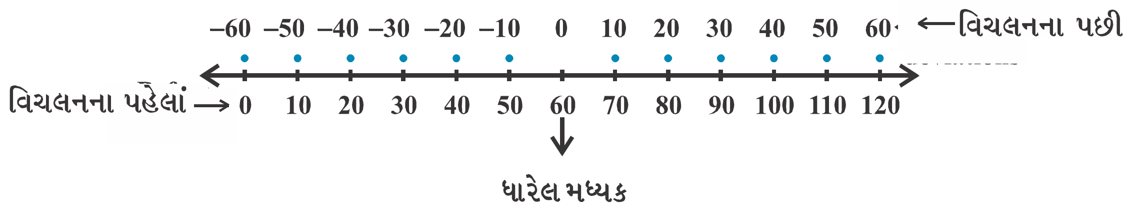
અહીં, $$N = \sum_{i=1}^{7} f_i = 40, \quad \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 1800$$

તેથી, $$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{1800}{40} = 45, \quad \sum_{i=1}^{7} f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = 400$$

અને $$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = \frac{1}{40} \times 400 = 10$$

મધ્યકની સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન શોધવાની ટૂંકી રીત :

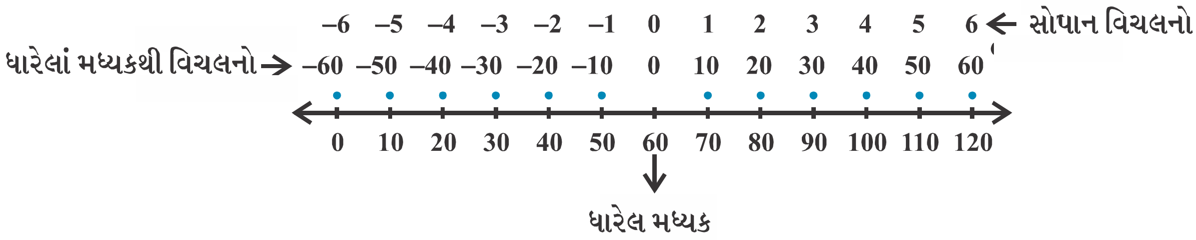
આપણે સોપાન *વિચલન રીત* (*step-deviation method*) નો ઉપયોગ કરીને $\bar{x}$ શોધવાની ગણતરીની કઠિનતા દૂર કરી શકીએ. યાદ કરો કે, આ રીતમાં આપણે માહિતીની મધ્યે અથવા તેની તદ્દન નજીક કોઈ અવલોકનને મધ્યક તરીકે કલ્પી લઈએ છીએ. પછી અવલોકનો (અથવા જુદા જુદા વર્ગની મધ્યકિંમતો) નું આ ધારેલ મધ્યકથી વિચલન મેળવીએ છીએ. આ વિચલન સંખ્યારેખા પર ઊગમબિંદુને શૂન્યથી પ્રતિસ્થાપિત કરીને ધારેલાં મધ્યક સુધી લઈ જવું એ જ છે આકૃતિ 15.3 માં આ દર્શાવ્યું છે.



આકૃતિ 15.3

જો બધાં વિચલનોનો કોઈ સામાન્ય અવયવ હોય તો વિચલનોને સરળ બનાવવા માટે આપણે તેમને આ સામાન્ય અવયવ વડે ભાગીએ છીએ. આ નવાં વિચલનોને *સોપાન-વિચલન* (*step-deviation*) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. સોપાન વિચલન લેવાની

પ્રક્રિયા એ સંખ્યારેખા પર માપ-પદ્ધતિ બદલવાની ક્રિયા છે. તે આકૃતિ 15.4 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 15.4

વિચલનો અને સોપાન-વિચલનો અવલોકનોનાં કદ નાના કરે છે, તેથી ગુણાકાર જેવી ગણતરીઓ સરળ થઈ જાય છે. ધારો કે નવો ચલ $d_i = \frac{x_i - a}{h}$ વડે દર્શાવ્યો છે. અહીં, 'a' ધારેલ મધ્યક છે અને h એ સામાન્ય અવયવ છે. ત્યાર બાદ સોપાન વિચલન રીતે મધ્યક $\overline{x}$ નીચે આપેલાં સૂત્ર દ્વારા શોધી શકાય છે :

$$\overline{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \, d_i}{N} \cdot h$$

ચાલો ઉદાહરણ 6 ની માહિતી લઈએ અને સોપાન-વિચલન રીતનો ઉપયોગ કરીએ. આપણે ધારેલ મધ્યક $a = 45$ અને $h = 10$ લઈએ અને નીચે આપેલ કોષ્ટક 15.5 તૈયાર કરીએ :

કોષ્ટક 15.5

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા f_i	મધ્યબિંદુઓ x_i	$d_i = \frac{x_i - 45}{10}$	$f_i d_i$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert$
10-20	2	15	– 3	– 6	30	60
20-30	3	25	– 2	– 6	20	60
30-40	8	35	– 1	– 8	10	80
40-50	14	$45 = a$	0	0	0	0
50-60	8	55	1	8	10	80
60-70	3	65	2	6	20	60
70-80	2	75	3	6	30	60
	40			0		400

તેથી
$$\overline{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i \, d_i}{N} \times h$$

$$= 45 + \frac{0}{40} \times 10 = 45$$

અને
$$\text{M.D. } (\overline{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{7} f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert = \frac{400}{40} = 10$$

ટિપ્પણી: સોપાનવિચલન રીતનો ઉપયોગ $\bar{x}$ મેળવવા માટે કરવામાં આવે છે. બાકીની પ્રક્રિયા એ જ પ્રમાણે છે.

(ii) મધ્યસ્થને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન :

આપણે સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે મધ્યસ્થને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન શોધીશું. જે રીત આપણે મધ્યકને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન મેળવવા માટે ઉપયોગમાં લીધી હતી એવી જ રીતે આ કાર્ય સંપન્ન કરીશું. કેવળ તફાવત એટલો જ છે કે અહીં જ્યારે વિચલનો લઈએ છીએ ત્યારે મધ્યકને બદલે મધ્યસ્થનો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

ચાલો સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે મધ્યસ્થ શોધવાની પ્રક્રિયાને યાદ કરીએ. સૌપ્રથમ સંખ્યાઓને ચઢતાં ક્રમમાં ગોઠવીએ છીએ. પછી સતત આવૃત્તિ-વિતરણનો મધ્યસ્થ શોધવા માટે પહેલાં જેમાં મધ્યસ્થ સ્થિત હોય છે એ વર્ગ નક્કી કરીએ છીએ. (આ વર્ગને મધ્યસ્થ વર્ગ કહે છે) પછી નીચે દર્શાવેલાં સૂત્રનો ઉપયોગ કરીએ છીએ :

$$\text{મધ્યસ્થ} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \cdot h$$

અહીં, મધ્યસ્થ વર્ગ એ એવો વર્ગ છે કે જેની સંચયી આવૃત્તિ $\frac{N}{2}$ ને બરાબર અથવા તેનાથી તરત જ વધારે હોય. N એ આવૃત્તિઓનો સરવાળો, l, f, h અને C એ અનુક્રમે મધ્યસ્થ વર્ગની અધ:સીમા, આવૃત્તિ, વર્ગલંબાઈ, મધ્યસ્થ વર્ગની તરત આગળના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ છે. મધ્યસ્થ શોધ્યા પછી આપણે મધ્યસ્થથી પ્રત્યેક વર્ગની મધ્યકિંમત સાથેનાં વિચલનોનાં નિરપેક્ષ મૂલ્ય મેળવીએ છીએ. એટલે કે પ્રત્યેક x_i માટે $|x_i - M|$ પ્રાપ્ત કરીએ છીએ.

પછી $$\text{M.D. (M)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M|$$

આ પ્રક્રિયાને નીચે આપેલાં ઉદાહરણથી સ્પષ્ટ કરેલ છે :

ઉદાહરણ 7 : નીચે આપેલ માહિતી માટે મધ્યસ્થને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન શોધો :

વર્ગ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
આવૃત્તિ	6	7	15	16	4	2

ઉકેલ : આપેલ માહિતી માટે નીચે દર્શાવેલ કોષ્ટક 15.6 તૈયાર કરો :

કોષ્ટક 15.6

વર્ગ	આવૃત્તિ f_i	સંચયી આવૃત્તિ $(c.f.)$	મધ્યકિંમત x_i	$\lvert x_i - \text{મધ્યસ્થ}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \text{મધ્યસ્થ}\rvert$
0-10	6	6	5	23	138
10-20	7	13	15	13	91
20-30	15	28	25	3	45
30-40	16	44	35	7	112
40-50	4	48	45	17	68
50-60	2	50	55	27	54
	50				508

અહીં, N = 50 છે. તેથી $\frac{N}{2}$ મું એટલે કે 25મું અવલોકન એ વર્ગ 20-30 માં આવશે. તેથી, 20–30 એ મધ્યસ્થ વર્ગ છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\text{મધ્યસ્થ} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \cdot h$$

અહીં $l = 20$, C = 13, $f = 15$, $h = 10$ અને N = 50 છે.

માટે, $\text{મધ્યસ્થ} = 20 + \frac{25-13}{15} \times 10 = 20 + 8 = 28$

આમ, મધ્યસ્થને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન,

$$\text{M.D. (M)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} f_i |x_i - M| = \frac{1}{50} \times 508 = 10.16$$

સ્વાધ્યાય 15.1

પ્રશ્ન 1 અને 2 માં આપેલ માહિતી માટે મધ્યકને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન શોધો :

1. 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17

2. 38, 70, 48, 40, 42, 55, 63, 46, 54, 44

પ્રશ્ન 3 અને 4 માં આપેલ માહિતી માટે મધ્યસ્થને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન શોધો :

3. 13, 17, 16, 14, 11, 13, 10, 16, 11, 18, 12, 17

4. 36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49

પ્રશ્ન 5 અને 6 માં આપેલ માહિતી માટે મધ્યકને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન શોધો :

5.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	7	4	6	3	5

6.

x_i	10	30	50	70	90
f_i	4	24	28	16	8

પ્રશ્ન 7 અને 8 માં આપેલ માહિતી માટે મધ્યસ્થને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન શોધો :

7.

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

8.

x_i	15	21	27	30	35
f_i	3	5	6	7	8

પ્રશ્ન 9 અને 10 માં આપેલ માહિતી માટે મધ્યકને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન શોધો :

9.

એક દિવસની આવક	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	4	8	9	10	7	5	4	3

10.

ઊંચાઈ સેમીમાં	95-105	105-115	115-125	125-135	135-145	145-155
કુમારોની સંખ્યા	9	13	26	30	12	10

11. આપેલ માહિતી માટે મધ્યસ્થને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન શોધો :

ગુણ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
કુમારીઓની સંખ્યા	6	8	14	16	4	2

12. 100 વ્યક્તિઓનું વય વિતરણ નીચે આપેલ છે. મધ્યસ્થ વયની સાપેક્ષે સરેરાશ વિચલનની ગણતરી કરો.

વય(વર્ષમાં)	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
સંખ્યા	5	6	12	14	26	12	16	9

[**સૂચન :** પ્રત્યેક વર્ગની અધ:સીમામાંથી 0.5 ઘટાડીને તેની ઊર્ધ્વસીમામાં 0.5 ઉમેરો અને આપેલ માહિતીને સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં ફેરવો.]

15.4.3 સરેરાશ વિચલનની મર્યાદાઓ :

જે શ્રેણીમાં ચલનની કક્ષા ખૂબ જ ઊંચી હોય, તેમાં મધ્યસ્થ એ મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું ઉપયોગી માપ નથી હોતું. આમ, આ પરિસ્થિતિમાં મધ્યસ્થને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન ઉપર સંપૂર્ણ વિશ્વાસ કરી શકાય નહિ.

મધ્યકથી વિચલનોનો સરવાળો (ઋણ સંજ્ઞાને અવગણીને) એ મધ્યસ્થથી વિચલનોનાં સરવાળા કરતાં વધારે હોય છે. માટે, મધ્યકને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલન અધિક વૈજ્ઞાનિક નથી. આમ, ઘણી પરિસ્થિતિઓમાં સરેરાશ વિચલન સંતોષકારક પરિણામ નથી આપતું. સાથે જ સરેરાશ વિચલનને વિચલનોનાં નિરપેક્ષ મૂલ્યોને આધારે મેળવવામાં આવે છે અને તેથી તે વધુ બૈજિક ગણતરીઓ માટે યોગ્ય નથી હતું. આ સૂચવે છે કે આપણને પ્રસારના અન્ય માપની આવશ્યકતા છે. પ્રમાણિત વિચલન એ પ્રસારનું એવું જ એક માપ છે.

15.5 વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન

યાદ કરો કે જ્યારે આપણે મધ્યક અથવા મધ્યસ્થને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલનની ગણતરી કરતા હતા ત્યારે આપણે વિચલનોના નિરપેક્ષ મૂલ્યો લીધા હતા. આ કરવા પાછળનું કારણ સરેરાશ વિચલનને સાર્થક બનાવવા માટેનું હતું, નહિ તો વિચલનોનો સરવાળો શૂન્ય થઈ જાત(ધન અને ઋણ સંજ્ઞાઓવાળા વિચલનોનો સરવાળો શૂન્ય થાય).

વિચલનોની સંજ્ઞાને કારણે ઊભી થયેલી આ સમસ્યાને વિચલનોનો વર્ગ લઈને પણ દૂર કરી શકાય છે. સ્પષ્ટ છે કે વિચલનોના વર્ગ હંમેશાં અનૃણ હોય છે.

ધારો કે $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ એ n અવલોકનો છે તથા તેમનો મધ્યક $\bar{x}$ છે.

$$(x_1-\bar{x})^2 + (x_2 -\bar{x})^2 + ...+ (x_n-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

જો આ સરવાળો શૂન્ય હોય તો પ્રત્યેક $(x_i - \bar{x})$ પણ શૂન્ય જ થશે. આનો અર્થ એ થયો કે કોઈ પણ માત્રામાં પ્રસાર નથી કારણ કે બધાં જ અવલોકનો $\bar{x}$ ની બરાબર થાય છે.

જો $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ નાની સંખ્યા હોય તો એ નિર્દેશ કરે છે કે અવલોકનો $x_1, x_2, x_3,...,x_n$ એ મધ્યક $\bar{x}$ ની નજીક છે અને તેથી અવલોકનોનો મધ્યક $\bar{x}$ ની સાપેક્ષ પ્રસાર નિમ્ન કક્ષાનો છે. આનાથી વિપરીત જો આ સરવાળો મોટો હોય, તો અવલોકનોનો પ્રસાર મધ્યક $\bar{x}$ થી ઉચ્ચ કક્ષાનો છે. આમ, શું આપણે કહી શકીએ કે સરવાળો $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ એ તમામ અવલોકનોના મધ્યક $\bar{x}$ ને સાપેક્ષ પ્રસાર અથવા ફેલાવાનાં માપનું એક સંતોષકારક પ્રતિક છે ?

ચાલો આના માટે આપણે છ અવલોકનો 5, 15, 25, 35, 45, 55 નો એક સમૂહ A લઈએ. આ અવલોકનોનો મધ્યક 30 છે. આ ગણમાં $\bar{x}$ થી વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો નીચે દર્શાવેલ છે :

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2 = (5-30)^2 + (15-30)^2 + (25-30)^2 + (35-30)^2 + (45-30)^2 + (55-30)^2$$

$$= 625 + 225 + 25 + 25 + 225 + 625 = 1750$$

એક બીજો સમૂહ B લઈએ. તેનાં 31 અવલોકનો નીચે આપેલ છે :

15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.

આ અવલોકનોનો મધ્યક $\bar{y} = 30$ છે.

બંને સમૂહ A તથા B નો મધ્યક 30 છે.

હવે, સમૂહ B નાં અવલોકનોના મધ્યક $\bar{y}$ થી વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો નીચે આપેલ છે :

$$\sum_{i=1}^{31}(y_i-\bar{y})^2 = (15-30)^2 + (16-30)^2 + (17-30)^2 + ... + (44-30)^2 + (45-30)^2$$

$$= (-15)^2 + (-14)^2 + ... + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 14^2 + 15^2$$

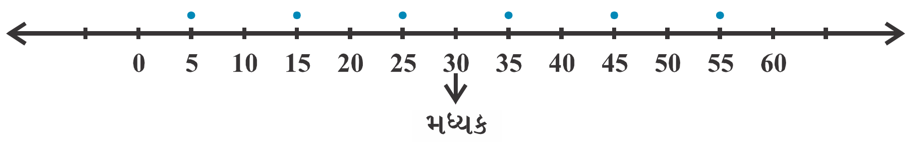
$$= 2\,[15^2 + 14^2 + ... + 1^2]$$

$$= 2 \times \frac{15 \times (15+1)\,(30+1)}{6} = 5 \times 16 \times 31 = 2480$$

(કારણ કે પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના વર્ગોનો સરવાળો $= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$. અહીં, $n = 15$)

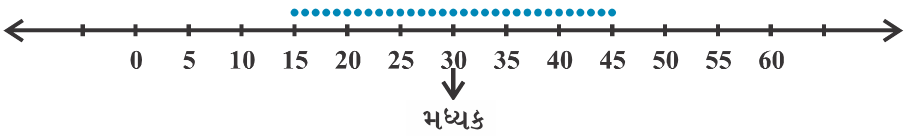
જો $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ જ મધ્યકને સાપેક્ષ પ્રસાર માપ હોય, તો આપણે એ કહેવા માટે પ્રેરિત થઈશું કે 31 અવલોકનો ધરાવતાં ગણ B નો 6 અવલોકનોવાળા ગણ A ની તુલનાએ મધ્યકની સાપેક્ષ પ્રસાર વધારે છે. ભલે ને A માં 6 અવલોકનોના મધ્યક $\bar{x}$ ને સાપેક્ષ પ્રસાર(વિચલનોનો વિસ્તાર –25 થી 25) ગણ B ની સરખામણીએ (જ્યાં, વિચલનોનો વિસ્તાર –15 થી 15) વધારે છે. આ હકીકત નીચે આપેલ આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ થાય છે :

ગણ A માટે આકૃતિ 15.5 છે.



આકૃતિ 15.5

ગણ B માટે આકૃતિ 15.6 છે.



આકૃતિ 15.6

આમ, આપણે કહી શકીએ કે મધ્યકથી વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો, એ પ્રસારનું ઉપયોગી માપ નથી. આ મુશ્કેલીને દૂર કરવા માટે આપણે વિચલનોના વર્ગોનો મધ્યક લઈએ, એટલે કે આપણે $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ લઈએ. ગણ A માટે આપણને મળે છે.

મધ્યક $= \frac{1}{6} \times 1750 = 291.67$ અને ગણ B માટે મધ્યક $\frac{1}{31} \times 2480 = 80$.

આ દર્શાવે છે કે ગણ A માં પ્રસાર ગણ B ની સરખામણીએ વધારે છે. તે બંને ગણોના અપેક્ષાનુસાર પરિણામ અને ભૌમિતિક નિરૂપણ સાથે સુસંગત છે.

આમ, આપણે $\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$ સૂત્રને પ્રસારનાં યોગ્ય માપ તરીકે લઈ શકીએ. આ સંખ્યા એટલે કે મધ્યકથી વિચલનોના વર્ગોના મધ્યકને *વિચરણ* (*variance*) કહે છે અને તેને σ^2 (સિગ્માનો વર્ગ એમ વંચાય છે) વડે દર્શાવાય છે.

આમ, n અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ નું વિચરણ

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \text{ છે.}$$

15.5.1 પ્રમાણિત વિચલન (Standard Deviation)

વિચરણ (*variance*)ની ગણતરીમાં આપણે જોયું કે સ્વતંત્ર અવલોકનો x_i તથા તેમના મધ્યક $\bar{x}$ ના ચલનમાં $(x_i-\bar{x})$ ના વર્ગોનો સમાવેશ થાય છે. આ કારણે વિચરણના ધન વર્ગમૂળને અવલોકનોના મધ્યકને સાપેક્ષ ચલનના પ્રમાણિત માપના સ્વરૂપે દર્શાવવામાં આવે છે અને તેને *પ્રમાણિત વિચલન (standard deviation)* કહે છે. પ્રમાણિત વિચલનને સામાન્ય રીતે σ વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને નીચે પ્રમાણે સૂત્ર સ્વરૂપે લખાય છે :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \quad \text{... (1)}$$

ચાલો, અવર્ગીકૃત માહિતીનાં ચલન અને પ્રમાણિત વિચલન શોધવાની ગણતરી દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ:

ઉદાહરણ 8 : નીચે આપેલ માહિતી માટે વિચરણ શોધો.

6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24

ઉકેલ : આપેલ માહિતી પરથી આપણે નીચેનું કોષ્ટક 15.7 તૈયાર કરીએ. મધ્યકની ગણતરી સોપાન-વિચલન પદ્ધતિ અનુસાર કરી છે અને 14 ને મધ્યક તરીકે ધારી લીધો છે. અવલોકનોની સંખ્યા $n = 10$ છે.

કોષ્ટક 15.7

x_i	$d_i = \frac{x_i - 14}{2}$	મધ્યકથી વિચલનો $(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$
6	–4	–9	81
8	–3	–7	49
10	–2	–5	25
12	–1	–3	9
14 = a	0	–1	1
16	1	1	1
18	2	3	9
20	3	5	25
22	4	7	49
24	5	9	81
	5		330

તેથી, મધ્યક $\overline{x}$ = ધારેલો મધ્યક + $\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \times h = 14 + \frac{5}{10} \times 2 = 15$

અને વિચરણ $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{10} \times 330 = 33$

આમ, પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = \sqrt{33} = 5.74$

15.5.2 અસતત આવૃત્તિ-વિતરણનું પ્રમાણિત વિચલન

આપેલ અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$x: \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots, x_n$

$f: \quad f_1, \quad f_2, \quad f_3, \ldots, f_n$

આ સંજોગોમાં પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2}$ જ્યાં, $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ ... (2)

ચાલો, નીચે આપેલ ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 9 : નીચે આપેલ માહિતી માટે વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો :

x_i	4	8	11	17	20	24	32
f_i	3	5	9	5	4	3	1