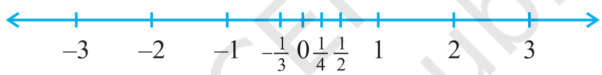
باب 1

عددی نظام (NUMBER SYSTEM)

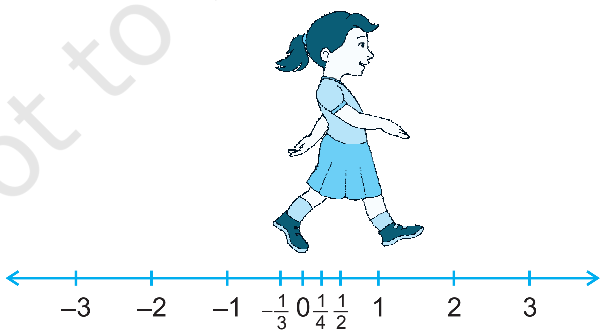
1.1 تعارف: (Introduction)

پچھلی جماعتوں میں آپ سیکھ چکے ہیں کہ عددی خط اور اس پر مختلف قسم کے اعداد کا اظہار کس طرح کرتے ہیں (شکل 1.1 کو دیکھیے)۔



شکل: **1.1** :عددی خط

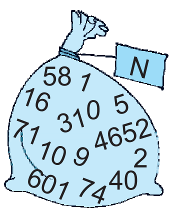
تصور کیجیے کہ آپ صفر سے شروع کرتے ہوئے اس عددی خط کے ساتھ مثبت سمت میں چلتے چلے جاتے ہیں۔ جہاں تک آپ کی آنکھ دیکھ سکتی ہے وہاں تک صرف اعداد، اعداد اور اعداد ہی نظر آتے ہیں۔



شکل: **1.2**

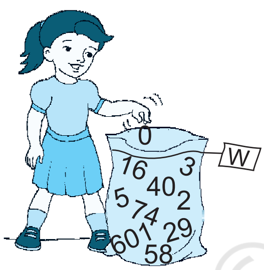
اب فرض کیجیے کہ آپ عددی خط کے ساتھ چلنا شروع کرتے ہیں اور کچھ اعداد اکٹھا کرتے ہیں۔ ان اعداد کو جمع کرنے کے لیے ایک تھیلا تیار رکھیے۔

آپ صرف طبعی اعداد جیسے 1، 2، 3 وغیرہ سے یہ عمل شروع کر سکتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ یہ فہرست ہمیشہ چلتی رہے گی۔ (یہ صحیح کیوں ہے؟) اس طرح سے اب آپ کے تھیلے میں لامحدود فطری اعداد ہیں۔ یاد کیجیے کہ ہم اس مجموعہ کو علامت N سے ظاہر کرتے ہیں۔

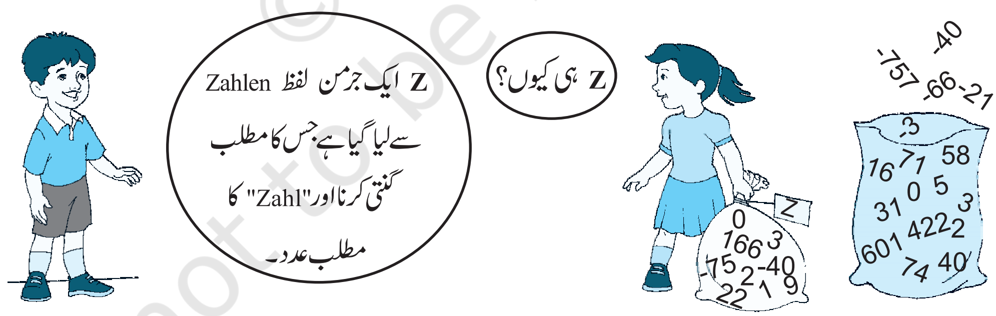


اب آپ واپس آیئے اور صفر کو اٹھایئے اور اس کو تھیلے میں رکھیے۔

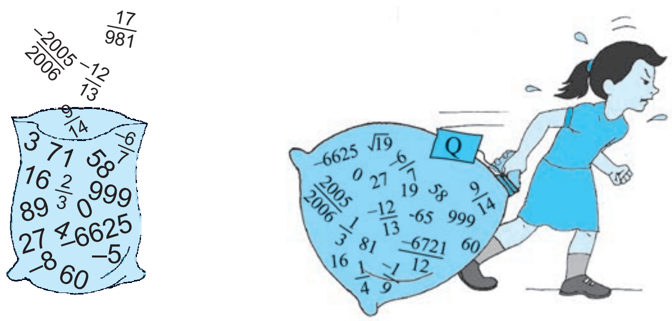
اب آپ کے پاس مکمل اعداد کا مجموعہ ہے جس کو ہم علامت W سے ظاہر کرتے ہیں۔



اب آپ کے سامنے بہت سے منفی صحیح اعداد ہیں۔ تمام صحیح اعداد کو آپ اپنے تھیلے میں رکھیں۔ آپ کا نیا مجموعہ کون سا ہے؟ یاد کیجیے اس مجموعہ کو صحیح اعداد کہتے ہیں اور اس کو علامت Z سے ظاہر کرتے ہیں۔



کیا عددی خط پر اب بھی کچھ عدد باقی بچے ہیں؟ ہاں! اعداد جیسے $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{4}$ یا $\frac{-2005}{2006}$ وغیرہ۔ اگر آپ ایسے تمام اعداد کو بھی تھیلے میں رکھیں تو اب یہ ناطق اعداد (Rational Numbers) کا مجموعہ ہو جائے گا۔ ناطق اعداد کے مجموعہ کو Q سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ لفظ ناطق، لفظ نسبت (Ratio) سے لیا گیا ہے اور Q لفظ خارج قسمت (Quotient) سے لیا گیا ہے۔



آپ ناطق اعداد کی تعریف کو دہرا سکتے ہیں:

ایک عدد 'r'، ناطق عدد کہلاتا ہے، اگر اس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جا سکے۔ جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ ۔

(ہم کیوں اس بات پر زور دیتے ہیں کہ $q \neq 0$?)

یہ بات نوٹ کیجیے کہ اب تھیلے میں موجود تمام اعداد کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے، جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ ۔ مثال کے طور پر 25- کو ہم $\frac{-25}{1}$ بھی لکھ سکتے ہیں۔ یہاں $p = -25$ اور $q = 1$ ہے۔ اس لیے ناطق اعداد میں فطری اعداد، مکمل اعداد اور صحیح اعداد بھی شامل ہیں۔

آپ یہ بھی جانتے ہیں کہ ناطق اعداد کا $\frac{p}{q}$ کی شکل میں اظہار منفرد نہیں ہے۔ جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ مثال کے طور پر $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{25} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$ اور یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ یہ معادل (Equivalent) ناطق اعداد ہیں۔ حالانکہ جب ہم کہتے ہیں کہ $\frac{p}{q}$ ایک ناطق عدد ہے یا جب ہم $\frac{p}{q}$ کو عددی خط پر ظاہر کرتے ہیں تو ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ $q \neq 0$ اور p اور q میں 1 کے علاوہ کوئی مشترک جز وضربی نہیں ہے (یعنی p اور q co-prime ہیں)۔ اس لیے عددی خط پر $\frac{1}{2}$ کی لامحدود معادل کسور (Fractions) میں سے ہم $\frac{1}{2}$ کو چنتے ہیں جو ان تمام کی نمائندگی کرتا ہے۔

آپ آئیے اب ہم مختلف قسم کے اعداد کی کچھ مثالوں کو حل کرتے ہیں جن کو آپ پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔

مثال 1: کیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟ اپنے جوابات کی وجوہات دیجیے:

(i) ہر مکمل عدد ایک فطری عدد ہے۔

(ii) ہر صحیح عدد ایک ناطق عدد ہے۔

(iii) ہر ناطق عدد ایک صحیح عدد ہے۔

حل: (i) غلط، کیونکہ صفر ایک مکمّل عدد ہے، طبعی عدد نہیں ہے۔

(ii) صحیح، کیونکہ ہر صحیح عدد m کو $\frac{m}{1}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔اس لیے یہ ایک ناطق عدد ہے

(iii) غلط، کیونکہ $\frac{3}{5}$ صحیح عدد نہیں ہے۔

مثال 2: 1 اور 2 کے درمیان پانچ ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

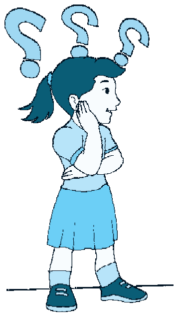
اس سوال کو ہم کم از کم دو طریقوں سے حل کر سکتے ہیں۔

حل 1: یاد کیجیے کہ r اور s کے درمیان ناطق عدد معلوم کرنے کے لیے ہم r اور s کو جمع کر کے 2 سے تقسیم کرتے ہیں یعنی $\frac{r+s}{2}$ ، r اور s کے درمیان ایک ناطق عدد ہے۔اس لیے $\frac{3}{2}$ ، 1 اور 2 کے درمیان ایک عدد ہے۔اس طرح سے آگے بڑھتے ہوئے آپ 1 اور 2 کے درمیان مزید چار ناطق اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ چار اعداد ہیں $\frac{5}{4}$ ، $\frac{11}{8}$ ، $\frac{13}{8}$ اور $\frac{7}{4}$

حل 2: دوسرے طریقے کے مطابق آپ ایک ہی مرحلہ میں تمام پانچ ناطق اعداد معلوم کر سکتے ہیں کیونکہ ہمیں پانچ ہی ناطق اعداد معلوم کرنے ہیں۔ہم 1 اور 2 کو ایک ایسے ناطق عدد کی شکل میں لکھتے ہیں جس کا نسب نما 1 + 5 یعنی $1 = \frac{6}{6}$ اور $2 = \frac{12}{6}$ ۔آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ تمام اعداد $\frac{7}{6}$ ، $\frac{8}{6}$ ، $\frac{9}{6}$ ، $\frac{10}{6}$ اور $\frac{11}{6}$ کے درمیان ناطق اعداد ہیں۔اس طرح سے پانچ اعداد ہیں $\frac{7}{6}$ ، $\frac{4}{3}$ ، $\frac{3}{2}$ ، $\frac{5}{3}$ اور $\frac{11}{6}$ ۔

ریمارک: نوٹ کیجیے کہ مثال 2 میں آپ سے 1 اور 2 کے درمیان پانچ ناطق اعداد معلوم کرنے کو کہا گیا۔آپ نے یہ حقیقت سمجھ لی ہوگی کہ 1 اور 2 کے درمیان لامحدود ناطق اعداد ہوتے ہیں۔ عام طور پر دیے گیے دو اعداد کے درمیان لامحدود ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

آئیے ایک بار پھر عددی خط پر غور کرتے ہیں۔کیا آپ تمام اعداد چن چکے ہیں؟ ابھی تک نہیں۔ بلکہ حقیقت یہ ہے کہ اب بھی عددی خط پر لامحدود اعداد باقی ہیں۔ جتنے بھی اعداد آپ نے چنے ہیں ان کے درمیان خالی جگہ ہے اور صرف ایک اور دو



نہیں بلکہ لامحدود اور حیرت انگیز بات یہ ہے کہ اس طرح کی دو خالی جگہوں کے درمیان بھی لامحدود اعداد موجود ہیں۔

تو ہمارے سامنے ابھی بھی مندرجہ ذیل سوالات ہیں:

1. عددی خط پر باقی اعداد کیا کہلاتے ہیں؟
2. ہم ان کی شناخت کیسے کریں گے؟ یعنی ہم ان کو ناطق اعداد سے کیسے الگ سمجھیں گے۔

ان سوالوں کے جواب ہم اگلے سیکشن میں پائیں گے۔

مشق 1.1

1. کیا صفر ایک ناطق عدد ہے؟ کیا آپ اس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ ؟
2. 3 اور 4 کے درمیان چھ ناطق اعداد معلوم کیجیے؟
3. $\frac{3}{5}$ اور $\frac{4}{5}$ کے درمیان پانچ ناطق اعداد معلوم کیجیے؟
4. بیان کیجیے کہ مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟ اپنے جوابات کی وجہ بتائیے۔

   (i) ہر طبعی عدد ایک مکمل عدد ہے۔

   (ii) ہر صحیح عدد ایک مکمل عدد ہے

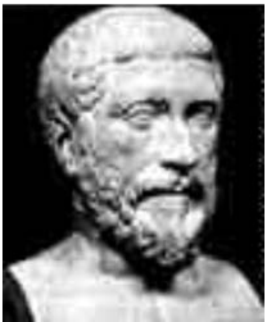
   (iii) ہر ناطق عدد ایک مکمل عدد ہے۔

1.2 غیر ناطق اعداد (Irrational Numbers)

پچھلے سیکشن میں ہم نے دیکھا کہ عددی خط پر ایسے بھی اعداد ہیں جو ناطق نہیں ہیں۔ اس سیکشن میں ہم ان اعداد کی تفتیش کریں گے۔ ابھی تک آپ نے جتنے بھی اعداد دیکھے وہ $\frac{p}{q}$ کی شکل کے تھے جہاں p اور q صحیح اعداد اور $q \neq 0$ ۔ اس لیے آپ یہ پوچھ سکتے ہیں کہ کیا ایسے بھی اعداد ہیں جو اس شکل میں نہیں ہیں؟ یقیناً ایسے اعداد ہیں۔

آئیے اب ہم ان اعداد کی باضابطہ طور پر تعریف بیان کرتے ہیں۔

یونان میں مشہور ریاضی داں پیتھا گورس (Phythagoras) کے پیروکاروں نے سب سے پہلے 400 ق-م- میں ان اعداد کی دریافت کی جو ناطق نہیں تھے۔ ان اعداد کو غیر ناطق اعداد کہا جاتا ہے۔ کیونکہ ان اعداد کو دو صحیح اعداد کی نسبت میں نہیں لکھا جاسکتا۔ Hippasus کے ذرائع دریافت غیر ناطق اعداد سے متعلق کافی عجیب وغریب باتیں منسوب ہیں۔ Hippasus کا خاتمہ یا تو یہ پتہ لگانے کی وجہ سے کہ $\sqrt{2}$ کہ ایک غیر ناطق عدد ہے یا پھر پیتھا گورس کے قبیلے کے باہر کے لوگوں پر یہ راز ظاہر کرنے کی وجہ سے بڑے افسوس ناک انداز میں ہوا۔



پیتھا گورس
(569BC–479BC)
شکل 1.3

ایک عدد غیر ناطق (Irrational) کہلاتا ہے اگر اس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں نہ لکھا جا سکے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

آپ پہلے ہی سے جانتے ہیں کہ ناطق اعداد لامحدود ہیں۔ اب یہ بات بھی مصدقہ ہے کہ غیر ناطق اعداد بھی لامحدود ہیں۔ کچھ مثالیں ہیں:

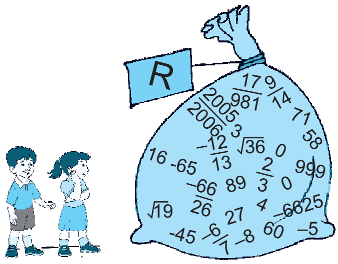
$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110...$$

ریمارک : یاد کیجیے کہ ہم جب بھی علامت $\sqrt{\ }$، کا استعمال کرتے ہیں تو اس سے ہمارا مطلب ہوتا ہے عدد کا مثبت جزرالمربع۔ اس لیے $\sqrt{4} = 2$ جب کہ دونوں 2 اور –2 عدد کے 4 جزر ہیں۔

مذکورہ بالا کچھ ناطق اعداد سے آپ واقف ہیں۔ مثال کے طور پر مندرجہ بالا جزرالمربع اور عدد π آپ پہلے ہی سے واقف ہیں۔

پیتھا گورس کے پیروکاروں نے ثابت کیا کہ $\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے۔ بعد میں تقریباً 425 ق ۔م تھیوڈورس (Theodorus) نے دکھایا کہ $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$، $\sqrt{6}$، $\sqrt{7}$، $\sqrt{10}$، $\sqrt{11}$، $\sqrt{12}$، $\sqrt{13}$، $\sqrt{14}$، $\sqrt{15}$ اور $\sqrt{17}$ بھی غیر ناطق ہیں۔ $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ وغیرہ کی غیر ناطقیت کا ثبوت ہم 10 ویں جماعت میں پڑھیں گے۔ جہاں تک π کا سوال ہے تو اس کے بارے میں جانکاری ہزاروں سال سے تھی لیکن اس کا ثبوت 1700 کے آخر میں Lambert اور

Legendre نے دیا۔ اگلے سبق میں ہم مطالعہ کریں گے کہ ...0.10110111011110 اور π غیر ناطق ہیں۔



آیئے اس سوال کی طرف واپس آتے ہیں جو پچھلے سیکشن کے آخر میں اٹھایا گیا تھا۔ ناطق اعداد کے تھیلے کو یاد کیجیے۔ اگر اب ہم تمام غیر ناطق اعداد کو بھی اس تھیلے میں رکھ دیں تو کیا عددی خط پر اب کچھ عدد باقی رہیں گے؟ اس کا جواب ہے نہیں! اس طرح سے حاصل ناطق اور غیر ناطق اعداد کے مجموعہ کو ہم حقیقی اعداد (Real Number) کہتے ہیں۔ جس کو ہم **R** سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس لیے حقیقی اعداد یا تو ناطق ہوتے ہیں یا غیر ناطق۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ عددی خط پر ہر ایک نقطہ ایک حقیقی عدد کو ظاہر کرتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ ہم عددی خط کو حقیقی عددی خط کہتے ہیں۔

آیئے ہم دیکھتے ہیں کہ کس طرح سے ہم کچھ غیر ناطق اعداد کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔

آر۔ ڈیڈیکائنڈ (1831-1916)

شکل 1.4

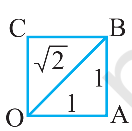
1870 میں دو جرمن ریاضی دانوں کینٹر اور ڈیڈیکائنڈ نے دکھایا کہ ہر حقیقی عدد کے نظیری حقیقی خط پر ایک نقطہ ہوتا ہے۔ اس کے برعکس حقیقی خط پر ہر ایک نقطہ کے نظیری ایک یکتا حقیقی عدد کا وجود ہے۔

جی۔ کینٹر (1845-1918)

شکل 1.5

مثال 3 : $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

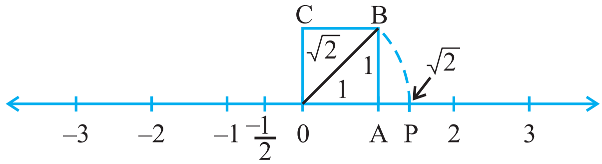
حل : یہ آسانی سے سمجھا جا سکتا ہے کہ یونانیوں نے کس طرح سے $\sqrt{2}$ کی دریافت کی۔ ایک مربع OABC جس کا ہر ضلع اکائی لمبائی کا ہے، پر غور کیجیے۔ (شکل 1.6 دیکھئے) تب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ پیتھا گورس کے مسئلہ کے مطابق



شکل : **1.6**

$OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ہم کس طرح سے $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر ظاہر کریں؟ یہ آسان ہے۔

شکل 1.6 کو عددی خط پر اس طرح رکھیں کہ راس O، صفر پر منطبق ہو۔ (دیکھیے شکل 1.7)



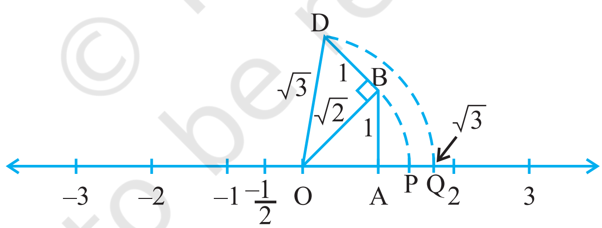
شکل: 1.7

ہم نے ابھی دیکھا کہ $OB = \sqrt{2}$

ایک پرکار کو استعمال کرتے ہوئے O کو خط مرکز مان کر اور OB نصف قطر لے کر ایک قوس بنائیں جو عددی خط کو نقطہ P پر قطع کرے۔ تب P عددی خط پر $\sqrt{2}$ ظاہر کرتا ہے۔

مثال 4: $\sqrt{3}$ کو عددی خط پر ظاہر کریں۔

حل : آیئے شکل 1.7 کی طرف واپس آتے ہیں۔



شکل: 1.8

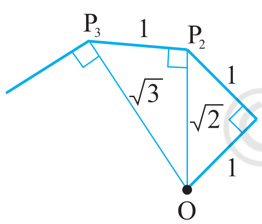
OB پر اکائی لمبائی کا عمود BD کھینچیں (جیسا کہ شکل 1.8 میں دکھایا گیا ہے)۔ پھر پیتھا گورس کے مسئلہ کے مطابق ہم دیکھتے ہیں کہ $OD = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

پرکار کا استعمال کرتے ہوئے O کو مرکز مان کر اور نصف قطر OD لیکر ایک قوس بنائیں جو عددی خط کو نقطہ Q پر قطع کرتا ہے۔ تب نقطہ Q $\sqrt{3}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

اس طرح سے ہم کسی مثبت صحیح عدد n کے لیے $\sqrt{n}$ کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں جب کہ $\sqrt{n-1}$ کو ظاہر کیا جا چکا ہو۔

مشق 1.2

1. بیان کیجئے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط۔ اپنے جواب کی دلیل بھی پیش کیجیے۔
   (i) ہر غیر ناطق عدد ایک حقیقی عدد ہے۔
   (ii) عددی خط پر ہر نقطہ $\sqrt{m}$ کی شکل کا ہے جہاں m ایک فطری عدد ہے۔
   (iii) ہر حقیقی عدد ایک غیر ناطق عدد ہے
2. کیا تمام مثبت صحیح اعداد کے جزر المربع غیر ناطق ہیں؟ اگر نہیں تو ایک ایسے عدد کے جزر المربع کی مثال دیجیے جو ناطق عدد ہے۔
3. دکھایئے کہ $\sqrt{5}$ کو کس طرح سے عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔
4. کلاس میں کیا جانے والا مشغلہ **(جزر المربع کا اسپائرل (Spiral) بنانا)**: کاغذ کی بڑی شیٹ لیجیے اور اس پر مندرجہ ذیل طریقہ سے جزر المربع Spiral بنایئے۔ نقطہ O سے شروع کیجیے اور اکائی لمبائی کا قطعہ OP_1 بنایئے، P_1P_2 کے عمودی قطعہ خط OP_1 بنایئے (شکل 1.9 دیکھیے) اب P_2P_3 کے عمودی ایک قطعہ OP_2 بنایئے۔ پھر OP_3 کے عمودی P_3P_4 بنایئے۔ اس طرح سے جاری رکھتے ہوئے $P_{n-1}P_n$ کے عمودی اکائی لمبائی کا ایک قطعہ خط OP_{n-1} حاصل ہوتا ہے۔ اس طریقہ سے آپ نے نقاط P_2، P_3،....، P_n،....، کی تخلیق کی اور ان کو ایک خوبصورت Sprial سے ملا دیا جو $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{4}$... کو ظاہر کرتے ہیں۔



شکل: 1.9 جزر المربع بنانا

1.3 حقیقی اعداد اور ان کا عشری پھیلاؤ

(Real Numbers and their Decimal Expansion)

اس سیکشن میں ہم ایک مختلف نقطہ نظر سے ناطق اور غیر ناطق اعداد کا مطالعہ کریں گے۔ ہم حقیقی اعداد کے عشری پھیلاؤ پر غور کریں گے اور دیکھیں گے کہ کیا ہم ان کو ناطق اور غیر ناطق اعداد میں فرق معلوم کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔ ہم یہ بھی بیان

کریں گے کہ ان کے عشری پھیلاؤ کو استعمال کرتے ہوئے حقیقی اعداد کو عددی خط پر کیسے ظاہر کیا جا سکتا ہے کیونکہ ناطق اعداد سے ہماری واقفیت زیادہ ہے، اس لیے ان سے شروع کرتے ہیں۔ آیئے تین مثال لیتے ہیں: $\frac{10}{3}$، $\frac{7}{8}$، $\frac{1}{7}$

باقی (Remainders) پر خاص توجہ دیں اور دیکھیں کہ کیا آپ کوئی نمونہ معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 5: $\frac{10}{3}$، $\frac{7}{8}$ اور $\frac{1}{7}$ عشری پھیلاؤ معلوم کریں

حل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.142857... \\ \hline
7 & 1.0 \\
 & \ \ 7 \\ \hline
 & \ \ 30 \\
 & \ \ 28 \\ \hline
 & \quad 20 \\
 & \quad 14 \\ \hline
 & \quad\ 60 \\
 & \quad\ 56 \\ \hline
 & \qquad 40 \\
 & \qquad 35 \\ \hline
 & \qquad\ 50 \\
 & \qquad\ 49 \\ \hline
 & \qquad\quad 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 0.875 \\ \hline
8 & 7.0 \\
 & 64 \\ \hline
 & \ \ 60 \\
 & \ \ 56 \\ \hline
 & \quad 40 \\
 & \quad 40 \\ \hline
 & \quad\ \ 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 3.333... \\ \hline
3 & 10 \\
 & \ 9 \\ \hline
 & \ 10 \\
 & \ \ 9 \\ \hline
 & \ 10 \\
 & \ \ \ 9 \\ \hline
 & \ \ 10 \\
 & \ \ \ \ 9 \\ \hline
 & \ \ \ \ 1
\end{array}
$$

باقی: 3، 2، 6، 4، 5، 1، 3، 2، 6، 4، 5، 1

قاسم: 7

باقی: 6، 4، 0

قاسم: 8

باقی: 1، 1، 1، 1، 1...

قاسم: 3

آپ کیا نوٹ کرتے ہیں؟ آپ کم سے کم تین باتیں نوٹ کرتے ہیں:

(i) باقی یا تو صفر ہو جاتا ہے یا ایک خاص مرحلہ کے بعد اپنے آپ کو دہرانے لگتا ہے۔

(ii) باقیوں میں آنے والے اعداد قاسم سے کم ہیں۔

($\frac{10}{3}$ میں ایک عدد اپنے آپ کو دہراتا ہے اور قاسم 3 ہے اور $\frac{1}{7}$ میں باقیوں کے ایسے چھ اندراجات 326451 ہیں اور قاسم 7 ہے۔)

(iii) اگر باقی اپنے آپ کو دہراتے ہیں تب ہمیں خارج قسمت کے ہندسوں میں ایک تکراری بلاک حاصل ہوتا ہے۔

($\frac{10}{3}$ کے لیے خارج قسمت میں 3 کی تکرار ہوتی ہے اور $\frac{1}{7}$ کے لیے ہمیں خارج قسمت میں 142857 کا تکراری بلاک ملتا ہے)۔

حالانکہ یہ پیٹرن مذکورہ بالا کچھ مثالوں کو استعمال کرنے سے حاصل ہوا ہے لیکن یہ تمام ناطق اعداد جو $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ کی شکل میں ہوں، اس کے لیے درست ہے۔ p کو q سے تقسیم کرنے میں دو خاص باتیں ہوتی ہیں- یا تو باقی صفر ہو جاتا ہے یا کبھی صفر نہیں ہوتا اور ہمیں باقیوں کی تکرار ملتی ہے۔ اس لیے آیئے ہر ایک حالت کو الگ الگ دیکھتے ہیں۔

حالت (i): باقی جب صفر ہو جاتا ہے

$\frac{7}{8}$ کی مثال میں ہم پاتے ہیں کچھ اقدام کے بعد باقی صفر ہو جاتا ہے اور $\frac{7}{8}$ کا عشری پھیلاؤ 0.875= ہے۔ دوسری مثالوں کا عشری پھیلاؤ ہے۔

$\frac{639}{250} = 2.556$ ، $\frac{1}{2} = 0.5,$ ان تمام حالات میں محدود اقدام کے بعد عشری پھیلاؤ ختم ہو جاتا ہے۔ اس قسم کے عشری پھیلاؤ کو ہم مختتم کہتے ہیں۔

حالت (ii): جب باقی کبھی صفر نہیں ہوتا

$\frac{10}{3}$ اور $\frac{1}{7}$ کی مثالوں میں ہم نوٹ کرتے ہیں کہ ایک خاص مرحلہ کے بعد باقی اپنے آپ کو دہرانے لگتا ہے۔ ان سے عشری پھیلاؤ غیر مختتم ہو جاتا ہے۔ دوسرے لفظوں میں خارج قسمت میں ہمارے پاس ہندسوں کا ایک تکراری بلاک آ جاتا ہے۔ ہم اس پھیلاؤ کو غیر مختتم تکراری کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر

$\frac{10}{3} = 3.3333$ اور $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857...$ عام طریقہ سے $\frac{10}{3}$ کے خارج قسمت میں 3 کی

تکرار کو ہم 3.3 لکھتے ہیں۔ اسی طرح سے $\frac{1}{7}$ کے خارج قسمت میں ہندسوں 142897 کی تکرار ہوتی ہے اس لیے ہم $\frac{1}{7}$ کو اس طرح لکھتے ہیں $0.\overline{142857}$ جہاں اوپر کھینچا گیا قطعہ خط (بار) ہندسوں کے بلاک کی تکرار کو ظاہر کرتا ہے۔ مزید 3.57272 کو ہم $3.5\overline{72}$ بھی لکھ سکتے ہیں۔ اس طرح سے یہ تمام مثالیں ہم کو ایک غیر مختتم تکراری عشری پھیلاؤ دیتی ہیں۔

اس طرح سے ہم دیکھتے ہیں کہ ناطق اعداد کا عشری پھیلاؤ دو قسم کا ہوتا ہے یا تو مختتم یا غیر مختتم تکراری۔

اب فرض کیجیے یا دوسرے لفظوں میں عددی خط پر آپ کے چلنے سے آپ کا واسطہ ایسے اعداد جیسے 3.142678 سے پڑتا ہے جس کا عشری پھیلاؤ مختتم ہے یا عدد جیسے 1.272727 یعنی $1.\overline{72}$ جس کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم تکراری ہے۔ کیا آپ یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ یہ ناطق عدد ہے؟ اس کا جواب ہے ہاں!

ہم اس کو ثابت نہیں کریں گے لیکن اس کی وضاحت کچھ مثالوں سے کریں گے۔ مختتم حالتیں آسان ہیں۔

مثال 6: دکھایئے کہ 3.142678 ایک ناطق عدد ہے۔ دوسرے لفظوں میں 3.142678 کا اظہار $\frac{p}{q}$ کی شکل میں کیجیے جب کہ p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$

حل: ہمارے پاس ہے $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ اس لئے یہ ایک ناطق عدد ہے۔ عدد اب ایسی حالت پر غور کرتے ہیں جب عشری پھیلاؤ غیر مختتم تکراری ہو۔

مثال 7: دکھایئے کہ $0.3333... = 0.\overline{3}$ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں کیا اور $q \neq 0$۔

حل: کیونکہ ہم نہیں جانتے کہ $0.\overline{3}$ کیا ہے۔ آیئے اس کو 'x' مانتے ہیں۔

یعنی $x = 0.3333...$

یہی وہ مرحلہ ہے جہاں ہمیں ٹرک (Trick) استعمال کرنی ہے۔ غور کیجیے۔

$$10x = 10 \times (0.333...) = 3.333...$$

اب $3.3333... = 3 + x$ ، کیونکہ $x = 0.3333...$

اس لیے $10\,x = 3 + x$

x کے لیے حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$9x = 3$ یعنی $x = \frac{1}{3}$

مثال 8: دکھایئے کہ $1.272727... = 1.\overline{27}$ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

حل: مان لیجیے $x = 1.272727...$ کیونکہ دو ہندسوں کی تکرار ہو رہی ہے اس لیے ہم x کو 100 سے ضرب کرتے ہیں تاکہ ہمیں حاصل ہو۔

$$100x = 127.2727...$$

تو $100x = 126 + 1.272727... = 126 + x$

اس لیے $100x - x = 126, \qquad 99x = 126$

یعنی $x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$

اس کے معکوس سے آپ جانچ کرسکتے ہیں کہ $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$

مثال 9: دکھایئے کہ $0.2353535... = 0.2\overline{35}$ کا اظہار $\frac{p}{q}$ کی شکل میں کیا جاسکتا ہے جہاں P اور Q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

حل: مان لیجیے $x = 0.2\overline{35}$ یہاں ہم نوٹ کرتے ہیں کہ 2 کی تکرار نہیں ہوتی بلکہ 35 کی تکرار ہوتی ہے چونکہ 2 ہندسوں کی تکرار ہورہی ہے، اس لیے x کو 100 سے ضرب کرتے ہیں تاکہ ہمیں حاصل ہو۔

$$100x = 23.53535...$$

تو $100x = 23.3 + 0.23535... = 23.3 + x$

اس لیے $99x = 23.3$

یعنی $99x = \frac{233}{10}$ اس لئے جس سے حاصل ہوتا ہے $\frac{233}{990}$

آپ اس کے معکوس کی جانچ کر سکتے ہیں کہ $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$

اس طرح سے ہر وہ عدد جس کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور تکراری ہوتا ہے۔ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ جہاں p اور q $(q \neq 0)$ صحیح اعداد ہیں، اس لیے اب ان نتائج کو مختصراً مندرجہ ذیل شکل میں لکھیں۔

ایک ناطق عدد کا عشری پھیلاؤ یا تو مختتم ہوتا ہے یا غیر مختتم یا پھر ایک عدد جس کا عشری پھیلاؤ مختتم اور غیر مختتم ہوتا ہے، وہ ناطق ہوتا ہے۔

اس طرح سے اب ہم ناطق عدد کے عشری پھیلاؤ کو جانتے ہیں۔ غیر ناطق اعداد کے عشری پھیلاؤ کے بارے میں کیا خیال ہے؟ مذکورہ بالا خصوصیت سے ہم نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ ان کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر تکراری ہے۔

اس لیے غیر ناطق اعداد کی خصوصیت ایسی ہی ہے جیسی اوپر ناطق اعداد کے لئے بیان کی گئی ہے۔ ایک غیر ناطق عدد کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر تکراری ہے یا دوسرے لفظوں میں ایک عدد جس کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر تکراری ہو غیر ناطق ہے۔

یاد کیجیے پچھلے سیکشن میں $s = 0.10110111011110....$

نوٹ کیجیے کہ یہ نہ تو مختتم ہے اور نہ ہی تکراری۔ اس لیے مندرجہ بالا خصوصیت کے مطابق یہ ایک غیر ناطق عدد ہے۔ مزید یہ کہ s جیسے لاتعداد غیر ناطق اعداد آپ معلوم کر سکتے ہیں۔

مشہور غیر ناطق عدد $\sqrt{2}$ اور π کے بارے میں آپ کیا کہتے ہیں؟ یہاں ان کے ایک خاص مقام تک عشری پھیلاؤ دیے گئے ہیں۔

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096...$$

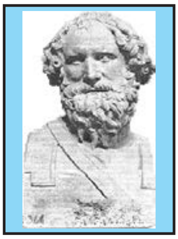
$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950...$$

نوٹ کیجیے کہ ہم اکثر π کی تقریباً قدر $\frac{22}{7}$ لیتے ہیں لیکن $\pi \neq \frac{22}{7}$

طویل عرصہ سے ریاضی دانوں نے غیر ناطق اعداد کے عشری پھیلاؤ کو زیادہ سے زیادہ ہندسوں میں معلوم کرنے کی مختلف قسم کی تکنیک نکالی ہیں۔ مثال کے طور پر $\sqrt{2}$ کے عشری پھیلاؤ میں آنے والے ہندسوں کو آپ تقسیم سے معلوم کرنے کا

طریقہ پڑھ چکے ہیں۔ دلچسپ بات یہ ہے کہ ویدک عرصہ (800-500 ق م) کے سلبا سوتر اس (Sulbasutras) (وتر کے

یونانی ارکمیڈیز وہ پہلا شخص تھا جس نے π کے عشری پھیلاؤ کے ہندسے معلوم کیے۔ اس نے دکھایا کہ $3.140845 < \pi < 3.142857$ آریہ بھٹ (550-476 عیسوی) عظیم ہندستانی ریاضی داں اور ماہر فلکیات نے اعشاریہ کے 4 ہندسوں تک π کی صحیح قیمت (3.1416) معلوم کی تیز رفتار کمپیوٹر اور ایڈوانس algorithms کی مدد سے π کی تقریباً اعشاریہ کے ٹری لین ہندسوں تک قیمت معلوم کی جا چکی ہے۔


آرکمیڈیز (287 ق م-212 ق م)
شکل: 1.10

قواعد) کے مطابق آپ $\sqrt{2}$ کی تقریبی قدر مندرجہ ذیل طریقہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

نوٹ کیجیے کہ اعشاریہ کے پہلے 5 ہندسوں تک اس کی قیمت وہی ہے جو اوپر دی گئی ہے۔ π کے عشری پھیلاؤ میں ہندسوں کی تلاش کی تاریخ بہت دلچسپ ہے۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ غیر ناطق اعداد کیسے حاصل کیے جاتے ہیں۔

مثال 10: $\frac{1}{7}$ اور $\frac{2}{7}$ کے درمیان غیر ناطق عدد معلوم کیجیے۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ اس لیے آپ آسانی سے حل کر سکتے ہیں کہ $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ ، $\frac{1}{7}$ اور $\frac{2}{7}$ کے درمیان ایک غیر ناطق عدد معلوم کرنے کے لیے ہم ایک ایسا عدد معلوم کریں گے جو نہ مختتم ہو اور نہ تکراری ہو اور ان کے درمیان بھی ہو۔ یقیناً آپ ایسے لامحدود اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔ ایسے ایک عدد کی مثال ہے ...0.150150015000150000

مشق 1.3

1. مندرجہ ذیل کو عشری شکل میں لکھیے اور بتائیے کہ یہ کس قسم کا عشری پھیلاؤ ہے۔

(i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

(iv) $\frac{3}{11}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. آپ جانتے ہیں کہ $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ کیا آپ طویل تقسیم کیے بغیر اندازہ لگا سکتے ہیں کہ $\frac{2}{7}$، $\frac{3}{7}$، $\frac{4}{7}$، $\frac{5}{7}$ اور $\frac{6}{7}$ کے عشری پھیلاؤ کیا ہیں؟ اگر کر سکتے ہیں تو کیسے؟

(اشارہ: $\frac{1}{7}$ کی قیمت نکالتے وقت باقیوں پر غور کیجیے۔)

3. مندرجہ ذیل کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھیے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

(i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. ...0.99999 کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھیے۔ کیا آپ اپنے جواب سے متحیر ہیں۔ اپنے استاد اور کلاس کے ساتھیوں سے بحث کیجیے کہ جواب کا کوئی مطلب ہے۔

5. $\frac{1}{17}$ کے عشری پھیلاؤ میں ہندسہ کے تکراری بلاک میں ہندسوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد کیا ہو سکتی ہے؟ تقسیم کر کے اپنے جواب کی جانچ کیجیے۔

6. $\frac{p}{q}$ شکل والے ناطق اعداد جیسی بہت سی مثالوں کو دیکھیے جن میں p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ہو۔ جس میں کے علاوہ کوئی بھی مشترک جز وضربی نہ ہو اور ان کا عشری اظہار مختتم ہو۔ کیا آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ q کون سی خصوصیت پیش کرتا ہے؟

7. تین ایسے اعداد لکھیے جن کا عشری اظہار غیر مختتم اور غیر تکراری ہو۔

8. $\frac{5}{7}$ اور $\frac{9}{11}$ کے درمیان تین مختلف غیر ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

9. مندرجہ ذیل اعداد کی ناطق اور غیر ناطق میں درجہ بندی کیجیے۔