પ્રકરણ 3

ત્રિકોણમિતીય વિધેયો

3.1 વિહંગાવલોકન

3.1.1 ત્રિકોણમિતિ શબ્દ બે ગ્રીક શબ્દો 'trigon' અને 'metron' ના સમન્વયથી બનેલો છે અને તેનો અર્થ 'ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ' એવો થાય છે. ખૂણાનું માપ એટલે પ્રારંભિક બાજુનું પરિભ્રમણ થઈ અંતિમ સ્થિતિએ પહોંચતા થયેલ પરિભ્રમણનું માપ. જો પરિભ્રમણની દિશા ઘડિયાળના કાંટાની વિરુદ્ધ દિશા હોય, તો ખૂણાનું માપ ધન કહેવાય અને જો પરિભ્રમણની દિશા એ ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં હોય તો ખૂણાનું માપ ઋણ કહેવાય. ખૂણા માપવા માટે આપણે વ્યાપક રીતે વપરાતા બે એકમો નો ઉપયોગ કરીશું : (i) અંશ માપ અને (ii) રેડિયન માપ.

અંશ માપન પદ્ધતિમાં ખૂણાના માપનનો એકમ અંશ છે. જો પ્રારંભિક બાજુથી અંત્યબાજુ સુધીનું પરિભ્રમણ એક પૂર્ણ પરિભ્રમણના $\left(\frac{1}{360}\right)$મા ભાગનું હોય, તો બનતા ખૂણાનું માપ 1 અંશ માપ કહેવાય તથા 1° એમ લખાય.

$$1^\circ = 60'$$
$$1' = 60''$$

રેડિયન માપનપદ્ધતિમાં ખૂણાના માપનનો એકમ રેડિયન છે. આપેલ વર્તુળમાં ત્રિજ્યા જેટલી જ લંબાઈના ચાપ દ્વારા કેન્દ્ર આગળ બનતા ખૂણાને 1 રેડિયન કહીશું. આમ, r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં l લંબાઈનું ચાપ PQ કેન્દ્ર આગળ θ રેડિયનનો ખૂણો બનાવે તો, $l = r\theta$ થાય.

3.1.2 અંશ માપ અને રેડિયન માપ વચ્ચેનો સંબંધ :

વર્તુળના પરિઘ અને વ્યાસનો ગુણોત્તર હંમેશાં અચળ હોય છે. આ અચળ ગુણોત્તરને π દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે અને વ્યાવહારિક ઉપયોગમાં તેનું આસન્ન મૂલ્ય $\frac{22}{7}$ લેવામાં આવે છે. ખૂણાના અંશ માપ અને રેડિયન માપ વચ્ચેનો સંબંધ નીચે દર્શાવેલ છે :

$$2 \text{ કાટકોણ} = 180^\circ = \pi \text{ રેડિયન}$$

$$1 \text{ રેડિયન} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 16' \text{ (લગભગ)}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ રેડિયન} = 0.01746 \text{ રેડિયન (લગભગ)}$$

3.1.3 ત્રિકોણમિતીય વિધેયો :

આપણે કાટકોણ ત્રિકોણના લઘુકોણોના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનો અભ્યાસ કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓના ગુણોત્તરો તરીકે કર્યો. હવે આપણે રેડિયન માપના કોઈ પણ ખૂણા માટે આ ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોની સંકલ્પના વિસ્તૃત કરીશું અને તેને ત્રિકોણમિતીય વિધેયો કહીશું. ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં ચિહ્નો ભિન્ન ચરણ માટે આગળના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

	I	II	III	IV
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+
tan	+	–	+	–
cosec	+	+	–	–
sec	+	–	–	+
cot	+	–	+	–

3.1.4 ત્રિકોણમિતીય વિધેયોના પ્રદેશ અને વિસ્તાર :

વિધેયો	પ્રદેશ	વિસ્તાર
sine	**R**	[–1, 1]
cosine	**R**	[–1, 1]
tan	$\mathbf{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbf{Z}\}$	**R**
cot	$\mathbf{R} - \{n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$	**R**
sec	$\mathbf{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$
cosec	$\mathbf{R} - \{n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$

3.1.5 90° થી નાના માપના કેટલાક ખૂણા માટે *sine, cosine* અને *tangent* નાં મૂલ્યો :

	0°	15°	18°	30°	36°	45°	60°	90°
sine	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosine	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	1	$\sqrt{3}$	અવ્યાખ્યાયિત

3.1.6 સંબંધિત ખૂણા : $\frac{n\pi}{2} \pm \theta$ માપવાળા ખૂણાઓને સંબંધિત ખૂણાઓ કહે છે અને $\theta \pm n \times 360°$ ને સહઅંત ખૂણાઓ કહે છે. સામાન્ય રીતે સંક્ષિપ્તિકરણ માટે, નીચેના નિયમોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. $\left(\frac{n\pi}{2} \pm \theta\right)$ માટે કોઈ પણ પ્રકારના ત્રિકોણમિતીય વિધેયની કિંમત નીચે પ્રમાણે નિશ્ચિત કરવામાં આવે છે :

(a) જો n યુગ્મ પૂર્ણાંક હોય, તો જે ચરણમાં ખૂણો હોય, તે વિધેયના બૈજિક ચિહ્ન સાથે તે જ વિધેયનું મૂલ્ય.

(b) જો n અયુગ્મ પૂર્ણાંક હોય, તો જે ચરણમાં ખૂણો હોય, તે વિધેયનું બૈજિક ચિહ્ન અને સંગત θ નું સહવિધેય. *sine* અને *cosine, tan* અને *cot*; *sec* અને *cosec* એકબીજાનાં સહવિધેયો છે.

3.1.7 ઋણ ખૂણાનાં વિધેયો : જો θ કોઈ ખૂણો હોય, તો

$\sin(-\theta) = -\sin\theta,\ \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta,\ \cot(-\theta) = -\cot\theta$

$\sec(-\theta) = \sec\theta,\ \mathrm{cosec}(-\theta) = -\mathrm{cosec}\,\theta$

3.1.8 સંયુક્ત ખૂણા સંબંધિત કેટલાંક સૂત્રો :

બે અથવા વધારે ખૂણાઓના સરવાળા કે તફાવતથી બનતા ખૂણાને સંયુક્ત ખૂણા કહે છે. આ સંબંધનાં મૂળભૂત પરિણામોને ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમો કહે છે. તે નીચે પ્રમાણે છે :

(i) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

(ii) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

(iii) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

(iv) $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

(v) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1-\tan A\tan B}$

(vi) $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1+\tan A\tan B}$

(vii) $\cot(A+B) = \dfrac{\cot A\cot B - 1}{\cot A + \cot B}$

(viii) $\cot(A-B) = \dfrac{\cot A\cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

(ix) $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(x) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(xi) $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

(xii) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(xiii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(xiv) $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

(xv) $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

(xvi) $\cos A - \cos B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{B-A}{2}$

(xvii) $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

(xviii) $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

(xix) $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

(xx) $2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

(xxi) $2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

(xxii) $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

(xxiii) $\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ $\begin{bmatrix} + \text{ ચિહ્ન, } \frac{A}{2} \text{ I અથવા II ચરણમાં હોય.} \\ - \text{ ચિહ્ન, } \frac{A}{2} \text{ III અથવા IV ચરણમાં હોય.} \end{bmatrix}$

(xxiv) $\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ $\begin{bmatrix} + \text{ ચિહ્ન, } \frac{A}{2} \text{ I અથવા IV ચરણમાં હોય.} \\ - \text{ ચિહ્ન, } \frac{A}{2} \text{ II અથવા III ચરણમાં હોય.} \end{bmatrix}$

(xxv) $\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2+\cos A}}$ $\begin{bmatrix} + \text{ ચિહ્ન, } \frac{A}{2} \text{ I અથવા III ચરણમાં હોય.} \\ - \text{ ચિહ્ન, } \frac{A}{2} \text{ II અથવા IV ચરણમાં હોય.} \end{bmatrix}$

18° માટેનાં ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યો :

ધારો કે, $\theta = 18°$. તેથી, $2\theta = 90° - 3\theta$

∴ $\sin 2\theta = \sin(90° - 3\theta) = \cos 3\theta$

∴ $\sin 2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

વળી, $\cos\theta \neq 0.$

આથી, $2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3 = 1 - 4\sin^2\theta$

∴ $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0.$

તેથી, $\sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

અહીં, $\theta = 18°$, $\sin\theta > 0$. તેથી, $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

વળી, $\cos 18° = \sqrt{1-\sin^2 18°} = \sqrt{1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

હવે, આપણે સરળતાથી cos 36° અને *sin* 36° નીચે પ્રમાણે મેળવી શકીએ :

$$\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18° = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{8} = \frac{2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

આમ, $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

પરંતુ, $\sin 36° = \sqrt{1-\cos^2 36°} = \sqrt{1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

3.1.9 ત્રિકોણમિતીય સમીકરણો :

ચલ રાશિઓનાં ત્રિકોણમિતીય વિધેયો ધરાવતાં સમીકરણોને ત્રિકોણમિતીય સમીકરણો કહે છે. જો આવું સમીકરણ જ્યાં વિધેય વ્યાખ્યાયિત હોય તેવા તમામ ખૂણાના કોઈ પણ મૂલ્ય માટે, સત્ય હોય તો આવા સમીકરણને નિત્યસમ કહેવાય. જો સમીકરણનો ઉકેલ $0 \le \theta < 2\pi$ માં હોય તો તેને મુખ્ય ઉકેલ કહેવાય છે. ત્રિકોણમિતીય સમીકરણના તમામ ઉકેલને સમાવતી પૂર્ણાંક n વાળી અભિવ્યક્તિને તેનો વ્યાપક ઉકેલ કહેવાય.

ત્રિકોણમિતીય સમીકરણના વ્યાપક ઉકેલો

(i) જો કોઈ ખૂણા α માટે, $\sin\theta = \sin\alpha$ હોય, તો

$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha,\ n \in \mathbf{Z}$ આપેલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ થશે.

(ii) જો કોઈ ખૂણા α માટે, $\cos\theta = \cos\alpha$ હોય, તો

$\theta = 2n\pi \pm \alpha,\ n \in \mathbf{Z}$, આપેલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ થશે.

(iii) જો $\tan\theta = \tan\alpha$ અથવા $\cot\theta = \cot\alpha$ હોય, તો

$\theta = n\pi + \alpha,\ n \in \mathbf{Z}$, આપેલ બંને સમીકરણોનો વ્યાપક ઉકેલ થશે.

(iv) $\sin^2\theta = \sin^2\alpha$, $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$ અને $\tan^2\theta = \tan^2\alpha$ સમીકરણનું સમાધાન કરતી વ્યાપક કિંમતો હોય, તો $\theta = n\pi \pm \alpha,\ n \in \mathbf{Z}$ છે.

(v) $\sin\theta = \sin\alpha$ અને $\cos\theta = \cos\alpha$ બંને સમીકરણો ઉકેલનું સમાધાન કરતી કિંમતો $\theta = 2n\pi + \alpha$, $n \in \mathbf{Z}$ છે.

(vi) $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ પ્રકારના સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવા, આપણે $a = r\cos\alpha$ અને $b = r\sin\alpha$ લઈશું. તેથી

$r^2 = a^2 + b^2$ અને $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ થાય.

હવે, $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ નું રૂપાંતર $r(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) = c$ થાય.

$\therefore\quad r\cos(\theta-\alpha) = c$

$\therefore \cos(\theta-\alpha) = \frac{c}{r}$ સમીકરણનો ઉકેલ આપે છે.

$A\cos\theta + B\sin\theta$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો અનુક્રમે $\sqrt{A^2+B^2}$ અને $-\sqrt{A^2+B^2}$ થશે.

3.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળા એક વર્તુળાકાર તારને કાપી 48 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના પરિઘ પર ગોઠવ્યો હોય, તો તેણે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાનું અંશમાપ મેળવો.

ઉકેલ : વર્તુળાકાર તારની ત્રિજ્યા 3 સેમી છે. તેથી તેને કાપતાં તારની લંબાઈ = પરિઘનું માપ = $2\pi \times 3 = 6\pi$ સેમી. હવે તેને 48 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના પરિઘ પર મૂકતાં, $s = 6\pi$ સેમી એ ચાપની લંબાઈ થશે અને વર્તુળની ત્રિજ્યા $r = 48$ સેમી છે. આમ ચાપ દ્વારા વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા θ નું રેડિયન માપ,

$$\theta = \frac{\text{ચાપની લંબાઈ}}{\text{વર્તુળની ત્રિજ્યા}} = \frac{6\pi}{48} = \frac{\pi}{8} = 22.5°$$

ઉદાહરણ 2 : જો θ ની કોઈક કિંમત માટે $A = cos^2\theta + sin^4\theta$ હોય તો, સાબિત કરો કે $\frac{3}{4} \le A \le 1$.

ઉકેલ : અહીં, $A = cos^2\theta + sin^4\theta = cos^2\theta + sin^2\theta\, sin^2\theta \le cos^2\theta + sin^2\theta$

$$\therefore A \le 1$$

વળી, $A = cos^2\theta + sin^4\theta$

$$= (1 - sin^2\theta) + sin^4\theta = \left(sin^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \left(sin^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}$$

તેથી, $\frac{3}{4} \le A \le 1$.

બીજી રીત : $cos^2\theta + sin^4\theta = cos^2\theta + sin^2\theta\,(1 - cos^2\theta)$

$$= 1 - sin^2\theta\, cos^2\theta$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\, sin^2 2\theta$$

$sin^2 2\theta$ નો વિસ્તાર [0, 1] છે.

$\frac{1}{4}\, sin^2 2\theta$ નો વિસ્તાર $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ છે.

$1 - \frac{1}{4}\, sin^2 2\theta$ નો વિસ્તાર $\left[1 - \frac{1}{4}, 1 - 0\right] = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ છે.

ઉદાહરણ 3 : $\sqrt{3}\ cosec\ 20° - sec\ 20°$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : $\sqrt{3}\ cosec\ 20° - sec\ 20° = \frac{\sqrt{3}}{sin\ 20°} - \frac{1}{cos\ 20°}$

$$= \frac{\sqrt{3} cos\ 20° - sin 20°}{sin\ 20°\ cos\ 20°}$$

$$= 4\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} cos\ 20° - \frac{1}{2} sin\ 20°}{2 sin\ 20°\ cos\ 20°}\right)$$

$$= 4\left(\frac{sin\ 60°\ cos\ 20° - cos\ 60°\ sin\ 20°}{sin\ 40°}\right)$$ **(શા માટે ?)**

$$= 4\left(\frac{sin\ (60° - 20°)}{sin\ 40°}\right) = 4$$ **(શા માટે ?)**

ઉદાહરણ 4 : જો θ બીજા ચરણમાં હોય, તો સાબિત કરો કે

$$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}+\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}=-2\sec\theta$$

ઉકેલ : $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}+\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \frac{1-\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}+\frac{1+\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{\cos^2\theta}} = \frac{2}{|\cos\theta|}$

(પ્રત્યેક વાસ્તવિક α માટે $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$)

અહીં, આપેલ છે કે θ બીજા ચરણમાં છે. તેથી $|\cos\theta| = -\cos\theta$ **(કારણ કે $\cos\theta < 0$).**

તેથી, ડા.બા. $= \frac{2}{-\cos\theta} = -2\sec\theta$

ઉદાહરણ 5 : $\tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81°$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $\tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81°$

$= \tan 9° + \tan 81° - \tan 27° - \tan 63°$

$= \tan 9° + \tan (90° - 9°) - \tan 27° - \tan (90° - 27°)$

$= \tan 9° + \cot 9° - (\tan 27° + \cot 27°)$ **(1)**

હવે, $\tan 9° + \cot 9° = \frac{1}{\sin 9° \cos 9°} = \frac{2}{\sin 18°}$ **(શા માટે ?) (2)**

તે જ રીતે, $\tan 27° + \cot 27° = \frac{1}{\sin 27° \cos 27°} = \frac{2}{\sin 54°} = \frac{2}{\cos 36°}$ **(શા માટે ?) (3)**

(2) અને (3) ને (1) માં મૂકતાં,

$\tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81° = \frac{2}{\sin 18°} - \frac{2}{\cos 36°} = \frac{2\times 4}{\sqrt{5}-1} - \frac{2\times 4}{\sqrt{5}+1} = 4$

અથવા ડા.બા. $= 2\left(\frac{\cos 36 - \sin 18}{\cos 36 \sin 18}\right)$ **(કિંમતોનો ઉપયોગ કર્યા વગર)**

$= \frac{2(\sin 54 - \sin 18)}{\cos 36 \ \sin 18}$

$= \frac{2(2\cos 36 \ \sin 18)}{\cos 36 \ \sin 18}$

$= 4$

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે, $\dfrac{sec\,8\theta - 1}{sec\,4\theta - 1} = \dfrac{tan\,8\theta}{tan\,2\theta}$

ઉકેલ : અહીં, ડા.બા. $= \dfrac{sec\,8\theta - 1}{sec\,4\theta - 1}$

$$= \frac{(1 - cos\,8\theta)\,cos\,4\theta}{cos\,8\theta\,(1 - cos\,4\theta)}$$

$$= \frac{2 sin^2 4\theta\,cos\,4\theta}{cos\,8\theta\,2 sin^2 2\theta}$$ **(શા માટે ?)**

$$= \frac{sin\,4\theta\,(2\,sin\,4\theta\,cos\,4\theta)}{2\,cos\,8\theta\,sin^2 2\theta}$$

$$= \frac{sin\,4\theta\,sin\,8\theta}{2\,cos\,8\theta\,sin^2 2\theta}$$ **(શા માટે ?)**

$$= \frac{2\,sin\,2\theta\,cos\,2\theta\,sin\,8\theta}{2\,cos\,8\theta\,sin^2 2\theta}$$

$$= \frac{tan\,8\theta}{tan\,2\theta}$$ **(શા માટે ?)**

ઉદાહરણ 7 : સમીકરણ $sin\,\theta + sin\,3\theta + sin\,5\theta = 0$ ઉકેલો.

ઉકેલ : $sin\,\theta + sin\,3\theta + sin\,5\theta = 0$ આપેલ સમીકરણ છે.

$\therefore$ $(sin\,\theta + sin\,5\theta) + sin\,3\theta = 0$

$\therefore$ $2\,sin\,3\theta\,cos\,2\theta + sin\,3\theta = 0$ **(શા માટે ?)**

$\therefore$ $sin\,3\theta\,(2\,cos\,2\theta + 1) = 0$

$\therefore$ $sin\,3\theta = 0$ અથવા $cos\,2\theta = -\frac{1}{2}$

જ્યારે $sin\,3\theta = 0$, ત્યારે $3\theta = n\pi$ અથવા $\theta = \dfrac{n\pi}{3}$

જ્યારે $cos\,2\theta = -\frac{1}{2} = cos\,\frac{2\pi}{3}$, ત્યારે $2\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ અથવા $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

આમ, $\theta = (3n + 1)\,\frac{\pi}{3}$ અથવા $\theta = (3n - 1)\,\frac{\pi}{3}$

આ તમામ θ ની કિંમતો $\theta = \frac{n\pi}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. તેથી, માંગેલ ઉકેલ ગણ $\left\{\theta : \theta = \frac{n\pi}{3}, n \in Z\right\}$ થશે.

ઉદાહરણ 8 : $2\,tan^2 x + sec^2 x = 2$, $0 \le x \le 2\pi$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અહીં, $2\,tan^2 x + sec^2 x = 2$

$\therefore$ $tan\,x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ મળે.

હવે, જો $tan\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ લઈએ તો, $x = \frac{\pi}{6}$ અથવા $\frac{7\pi}{6}$ **(શા માટે ?)**

તે જ રીતે, જો $tan\, x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ લઈએ તો, $x = \frac{5\pi}{6}$ અથવા $\frac{11\pi}{6}$ **(શા માટે ?)**

આમ, $0 \le x \le 2\pi$માં આપેલ સમીકરણના શક્ય ઉકેલો,

$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ અને $\frac{11\pi}{6}$

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 9 : $\left(1+cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+cos\frac{7\pi}{8}\right)$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $\left(1+cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+cos\frac{7\pi}{8}\right)$

$$= \left(1+cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+cos\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)\right)\left(1+cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$= \left(1-cos^2\frac{\pi}{8}\right)\left(1-cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$$ **(શા માટે ?)**

$$= sin^2\frac{\pi}{8}\,sin^2\frac{3\pi}{8}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-cos\frac{\pi}{4}\right)\left(1-cos\frac{3\pi}{4}\right)$$ **(શા માટે ?)**

$$= \frac{1}{4}\left(1-cos\frac{\pi}{4}\right)\left(1+cos\frac{\pi}{4}\right)$$ **(શા માટે ?)**

$$= \frac{1}{4}\left(1-cos^2\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

ઉદાહરણ 10 : જો $x\,cos\,\theta = y\,cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) = z\,cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)$ હોય, તો $xy + yz + zx$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : અહીં, આપણે $xy + yz + zx = xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

ધારો કે, $x\,cos\,\theta = y\,cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) = z\,cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right) = k$.

તો, $x = \frac{k}{cos\,\theta}, y = \frac{k}{cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}$ અને $z = \frac{k}{cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)}$

આમ, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{k}\left[cos\,\theta + cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) + cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

$$= \frac{1}{k}\left[cos\,\theta + cos\,\theta\, cos\frac{2\pi}{3} - sin\,\theta\, sin\frac{2\pi}{3}\right.$$

$$\left. + cos\,\theta\, cos\frac{4\pi}{3} - sin\,\theta\, sin\frac{4\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{k}\left[cos\,\theta + cos\,\theta\left(\frac{-1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,sin\,\theta - \frac{1}{2}cos\,\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}sin\,\theta\right]$$ (શા માટે ?)

$$= \frac{1}{k}\times 0 = 0$$

આથી, $xy + yz + zx = 0$

ઉદાહરણ 11 : જો α અને β એ સમીકરણ $a\ tan\theta + b\ sec\theta = c$ નાં બીજ હોય, તો સાબિત કરો કે $tan\ (\alpha+\beta) = \frac{2ac}{a^2-c^2}$

ઉકેલ : અહીં, $a\ tan\ \theta + b\ sec\ \theta = c$ આપેલ છે. તેથી, $a\ sin\ \theta + b = c\ cos\ \theta$ સમીકરણનો ઉપયોગ કરતાં

$$sin\,\theta = \frac{2\,tan\frac{\theta}{2}}{1+tan^2\frac{\theta}{2}} \text{ અને } cos\,\theta = \frac{1-tan^2\frac{\theta}{2}}{1+tan^2\frac{\theta}{2}}$$

આથી, $$\frac{a\left(2\,tan\frac{\theta}{2}\right)}{1+tan^2\frac{\theta}{2}} + b = \frac{c\left(1-tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{1+tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$\therefore$ $$(b+c)\ tan^2\frac{\theta}{2} + 2a\ tan\frac{\theta}{2} + (b-c) = 0$$

આ $tan\frac{\theta}{2}$ માં દ્વિઘાત સમીકરણ છે અને $tan\frac{\alpha}{2}$ અને $tan\frac{\beta}{2}$ તેનાં બીજ છે. (શા માટે ?)

$\therefore\ tan\frac{\alpha}{2} + tan\frac{\beta}{2} = \frac{-2a}{b+c}$ અને $tan\frac{\alpha}{2}\ tan\frac{\beta}{2} = \frac{b-c}{b+c}$ (શા માટે ?)

હવે, નિત્યસમ $tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = \frac{tan\frac{\alpha}{2}+tan\frac{\beta}{2}}{1-tan\frac{\alpha}{2}\,tan\frac{\beta}{2}}$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\frac{-2a}{b+c}}{1-\frac{b-c}{b+c}} = \frac{-2a}{2c} = \frac{-a}{c} \qquad \text{... (1)}$$

ફરીથી,

$$\tan 2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

$$\therefore \qquad \tan(\alpha+\beta) = \frac{2\left(-\frac{a}{c}\right)}{1-\frac{a^2}{c^2}} = \frac{2ac}{a^2-c^2} \qquad \text{[(1) પરથી]}$$

બીજી રીત : $a \tan\theta + b \sec\theta = c$

$\Rightarrow \quad (a\tan\theta - c)^2 = b^2(1+\tan^2\theta)$

$\Rightarrow \quad a^2\tan^2\theta - 2ac\tan\theta + c^2 = b^2 + b^2\tan^2\theta$

$\Rightarrow \quad (a^2 - b^2)\tan^2\theta - 2ac\tan\theta + c^2 - b^2 = 0$

હવે સમીકરણ (1) નાં બીજ $\tan\alpha$ અને $\tan\beta$ હોવાથી,

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{2ac}{a^2-b^2} \quad \text{and} \quad \tan\alpha\tan\beta = \frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}$$

$$\therefore \qquad \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{\frac{2ac}{a^2-b^2}}{1-\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}} = \frac{2ac}{a^2-c^2}$$

ઉદાહરણ 12 : $2\sin^2\beta + 4\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta + \cos 2(\alpha+\beta) = \cos 2\alpha$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : ડા.બા. $= 2\sin^2\beta + 4\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta + \cos 2(\alpha+\beta)$

$= 2\sin^2\beta + 4(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\sin\alpha\sin\beta + (\cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\alpha\sin 2\beta)$

$= 2\sin^2\beta + 4\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - 4\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$+ \cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\alpha\sin 2\beta$

$= 2\sin^2\beta + \sin 2\alpha\sin 2\beta - 4\sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\alpha\sin 2\beta$

$= (1 - cos\ 2\beta) - (2\ sin^2\ \alpha)\ (2\ sin^2\ \beta) + cos\ 2\alpha\ cos\ 2\beta$ (શા માટે ?)

$= (1 - cos\ 2\beta) - (1 - cos\ 2\alpha)\ (1 - cos\ 2\beta) + cos\ 2\alpha\ cos\ 2\beta$

$= cos\ 2\alpha$ (શા માટે ?)

બીજી રીત : ડા. બા. $= 2\ sin^2\ \beta + 4\ cos\ (\alpha + \beta)\ sin\ \alpha\ sin\ \beta + cos\ 2(\alpha + \beta)$

$= 2\ sin^2\ \beta + 2\ cos\ (\alpha + \beta)\ (cos\ (\alpha - \beta) - cos\ (\alpha + \beta)) + 2\ cos^2\ (\alpha + \beta) - 1$

$= 2\ sin^2\ \beta + 2\ (cos^2\ \alpha - sin^2\ \beta) - 2\ cos^2 (\alpha + \beta) + 2\ cos^2 (\alpha + \beta) - 1$

$(\because\ cos\ (\alpha + \beta)\ cos\ (\alpha - \beta) = cos^2\ \alpha - sin^2\ \beta)$

$= 2\ cos^2\ \alpha - 1 = cos\ 2\ \alpha =$ જ. બા.

ઉદાહરણ 13 : θ ને એવા બે ભાગમાં વિભાજિત કર્યો છે કે જેથી એક ભાગનો સ્પર્શ (tan) એ બીજા ભાગના સ્પર્શ (tan) નો k ગણો થાય અને તેમનો તફાવત ϕ થાય, તો સાબિત કરો કે $sin\ \theta = \frac{k+1}{k-1}\ sin\ \phi$

ઉકેલ : ધારો કે, $\theta = \alpha + \beta$. આથી $tan\ \alpha = k\ tan\ \beta$

અથવા $$\frac{tan\alpha}{tan\beta} = \frac{k}{1}$$

હવે, યોગ-વિયોગ કરતા

$$\frac{tan\alpha + tan\beta}{tan\alpha - tan\beta} = \frac{k+1}{k-1}$$

અથવા $$\frac{sin\alpha\ cos\beta + cos\alpha\ sin\beta}{sin\alpha\ cos\beta - cos\alpha\ sin\beta} = \frac{k+1}{k-1}$$ (શા માટે ?)

તેથી, $$\frac{sin\ (\alpha+\beta)}{sin\ (\alpha-\beta)} = \frac{k+1}{k-1}$$ (શા માટે ?)

હવે $\alpha - \beta = \phi$ અને $\alpha + \beta = \theta$ આપેલ છે.

તેથી, $$\frac{sin\ \theta}{sin\ \phi} = \frac{k+1}{k-1} \quad \text{અથવા} \quad sin\ \theta = \frac{k+1}{k-1}\ sin\ \phi$$

ઉદાહરણ 14 : ઉકેલો : $\sqrt{3}\ cos\ \theta + sin\ \theta = \sqrt{2}$

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણને 2 વડે ભાગતાં,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}cos\theta + \frac{1}{2}sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{અથવા} \quad cos\frac{\pi}{6}cos\theta + sin\frac{\pi}{6}sin\theta = cos\frac{\pi}{4}$$

અથવા $$cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = cos\frac{\pi}{4} \quad \text{અથવા} \quad cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = cos\frac{\pi}{4}$$ (શા માટે ?)

$\therefore$ માંગેલ ઉકેલ, $\theta = 2m\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

તેથી, માંગેલ ઉકેલો, $\theta = 2m\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ અને $2m\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$,

$\therefore\ \theta = 2m\pi + \frac{5\pi}{12}$ અને $\theta = 2m\pi - \frac{\pi}{12}$

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

આપેલ વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલ ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના ક્રમાંક 15 થી 19 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 15 : જો $\tan\theta = \frac{-4}{3}$, તો $\sin\theta =$ ....

(A) $\frac{-4}{5}$ પરંતુ $\frac{4}{5}$ નહિ. (B) $\frac{-4}{5}$ અથવા $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ પરંતુ $-\frac{4}{5}$ નહિ. (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : θ એ બીજા ચરણમાં અથવા ચોથા ચરણમાં છે, કારણ કે $\tan\theta = -\frac{4}{3}$. જો θ બીજા ચરણમાં હોય તે $\sin\theta = \frac{4}{5}$

અને જો θ ચોથા ચરણમાં હોય તો $\sin\theta = -\frac{4}{5}$.

સાચો વિકલ્પ (B) છે.

ઉદાહરણ 16 : જો $\sin\theta$ અને $\cos\theta$ સમીકરણ $ax^2 - bx + c = 0$ નાં બીજ હોય, તો a, b અને c .... નું સમાધાન કરે છે.

(A) $a^2 + b^2 + 2ac = 0$ (B) $a^2 - b^2 + 2ac = 0$

(C) $a^2 + c^2 + 2ab = 0$ (D) $a^2 - b^2 - 2ac = 0$

ઉકેલ : અહીં, $\sin\theta$ અને $\cos\theta$ એ સમીકરણ $ax^2 - bx + c = 0$ નાં બીજ છે.

તેથી, $\sin\theta + \cos\theta = \frac{b}{a}$ અને $\sin\theta\cos\theta = \frac{c}{a}$ **(શા માટે ?)**

હવે $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$ નિત્યસમનો ઉપયોગ કરતાં,

$\frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{2c}{a}$ અથવા $a^2 - b^2 + 2ac = 0$ મળે.

સાચો વિકલ્પ (B) છે.

ઉદાહરણ 17 : $\sin x \cdot \cos x$ નું મહત્તમ મૂલ્ય .... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{1}{2}$, કેમ કે $|\sin 2x| \le 1$.

અથવા $-1 \le \sin 2x \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \sin x \cdot \cos x \le \frac{1}{2}$

સાચો વિકલ્પ (D) છે.

ઉદાહરણ 18 : $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80°$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{-3}{16}$ (B) $\frac{5}{16}$ (C) $\frac{3}{16}$ (D) $\frac{1}{16}$

ઉકેલ : $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 20° \sin (60° - 20°) \sin (60° + 20°)$$ $\left(\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 20° [\sin^2 60° - \sin^2 20°]$$ (શા માટે ?)

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 20° \left[\frac{3}{4} - \sin^2 20°\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4} [3\sin 20° - 4\sin^3 20°]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4} (\sin 60°)$$ (શા માટે ?)

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16}$$

સાચો વિકલ્પ (C) છે.

ઉદાહરણ 19 : $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} \cos \frac{8\pi}{5}$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{1}{16}$ (B) 0 (C) $\frac{-1}{8}$ (D) $\frac{-1}{16}$

ઉકેલ : $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} \cos \frac{8\pi}{5}$

$$= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{5}} 2\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} \cos \frac{8\pi}{5}$$

$$= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{5}} \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} \cos \frac{8\pi}{5}$$ (શા માટે ?)

$$= \frac{1}{4\sin \frac{\pi}{5}} \sin \frac{4\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} \cos \frac{8\pi}{5}$$ (શા માટે ?)

$$= \frac{1}{8\sin \frac{\pi}{5}} \sin \frac{8\pi}{5} \cos \frac{8\pi}{5}$$ (શા માટે ?)

$$= \frac{sin\frac{16\pi}{5}}{16\, sin\frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{sin\left(3\pi + \frac{\pi}{5}\right)}{16\, sin\frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{-sin\frac{\pi}{5}}{16\, sin\frac{\pi}{5}}$$ (શા માટે ?)

$$= -\frac{1}{16}$$

સાચો જવાબ (D) છે.

નીચેના પ્રશ્ન ક્રમાંક 20 નું વિધાન સત્ય બને તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 20 : જો $3\ tan\ (\theta - 15°) = tan\ (\theta + 15°)$, $0° < \theta < 90°$ હોય, તો $\theta =$ ....

ઉકેલ : $3\ tan\ (\theta - 15°) = tan\ (\theta + 15°)$ આપેલ છે.

આ અભિવ્યક્તિને $\frac{tan(\theta + 15°)}{tan(\theta - 15°)} = \frac{3}{1}$ તરીકે લખી શકાય.

યોગ-વિયોગ કરતાં $\frac{tan\,(\theta + 15°) + tan\,(\theta - 15°)}{tan\,(\theta + 15°) - tan\,(\theta - 15°)} = 2$ મળે.

$$\therefore \frac{sin\,(\theta + 15°)\ cos\,(\theta - 15°) + sin\,(\theta - 15°)\ cos\,(\theta + 15°)}{sin\,(\theta + 15°)\ cos\,(\theta - 15°) - sin\,(\theta - 15°)\ cos\,(\theta + 15°)} = 2$$

$$\therefore \frac{\sin 2\theta}{\sin 30°} = 2$$

$$\therefore sin\ 2\theta = 1$$ (શા માટે ?)

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4}$ અથવા $\theta = 45°$

નીચેના પ્રશ્ન ક્રમાંક 21નું વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય તે કારણ સહિત જણાવો :

ઉદાહરણ 21 : "અસમતા $2^{\sin\theta} + 2^{\cos\theta} \geq 2^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે સત્ય છે."

ઉકેલ : $2^{\sin\theta}$ અને $2^{\cos\theta}$ એ બે ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે. તેથી તેમનો સમાંતર મધ્યક A.M. તેમના સમગુણોત્તર મધ્યક G.M. થી વધુ કે બરોબર હોય,

તેથી, $$\frac{2^{\sin\theta}+2^{\cos\theta}}{2} \geq \sqrt{2^{\sin\theta}\times 2^{\cos\theta}} = \sqrt{2^{\sin\theta+\cos\theta}}$$

$$\therefore \quad \frac{2^{\sin\theta}+2^{\cos\theta}}{2} \geq 2^{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}} = 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{2^{\sin\theta}+2^{\cos\theta}}{2} \geq 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$$

વળી, $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) \leq 1$ હોવાથી,

$$\frac{2^{\sin\theta}+2^{\cos\theta}}{2} \geq 2^{\frac{-1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow 2^{\sin\theta}+2^{\cos\theta} \geq 2^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$ પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે વિધાન સત્ય છે.

નીચે આપેલા સ્તંભ C_1 નાં વિધાનોને જોડવાથી મળતું વિધાન સત્ય બને તેમ સ્તંભ C_2 નાં વિધાનો સાથે જોડો :

ઉદાહરણ 22 :

	C_1		C_2
(a)	$\frac{1-\cos x}{\sin x}$	(i)	$\cot^2\frac{x}{2}$
(b)	$\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$	(ii)	$\cot\frac{x}{2}$
(c)	$\frac{1+\cos x}{\sin x}$	(iii)	$\lvert\cos x+\sin x\rvert$
(d)	$\sqrt{1+\sin 2x}$	(iv)	$\tan\frac{x}{2}$

ઉકેલ : (a) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \tan\dfrac{x}{2}$

તેથી, (a) એ (iv) સાથે જોડાશે. (a) $\leftrightarrow$ (iv)

(b) $\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x} = \dfrac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \cot^2\dfrac{x}{2}$ તેથી, (b) એ (i) સાથે જોડાશે. (b) $\leftrightarrow$ (i)

(c) $\dfrac{1+\cos x}{\sin x} = \dfrac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \cot\dfrac{x}{2}$

તેથી (c) એ (ii) સાથે જોડાશે. (c) $\leftrightarrow$ (ii)

(d) $\sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}$

$= \sqrt{(\sin x+\cos x)^2}$

$= |(\sin x+\cos x)|$. તેથી, (d) એ (iii) સાથે જોડાશે. (d) $\leftrightarrow$ (iii)

સ્વાધ્યાય 3.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

1. સાબિત કરો કે, $\dfrac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\sec A+1} = \dfrac{1+\sin A}{\cos A}$

2. જો, $\dfrac{2\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha} = y$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$ નું મૂલ્ય પણ y છે.

[**સૂચન :** $\dfrac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\cdot\dfrac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}$ લો.]

3. જો, $m\sin\theta = n\sin(\theta+2\alpha)$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\tan(\theta+\alpha)\cot\alpha = \dfrac{m+n}{m-n}$

[**સૂચન :** $\dfrac{\sin(\theta+2\alpha)}{\sin\theta} = \dfrac{m}{n}$ લો અને યોગ-વિયોગ કરો.]

4. જો $cos(\alpha+\beta) = \frac{4}{5}$ અને $sin(\alpha-\beta) = \frac{5}{13}$ હોય તથા $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4}$, તો $tan 2\alpha$ નું મૂલ્ય શોધો.

[સૂચન : $tan\, 2\alpha = tan(\alpha+\beta+\alpha-\beta)$ લો.]

5. જો $tan\, x = \frac{b}{a}$, તો $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ નું મૂલ્ય શોધો.

6. સાબિત કરો કે, $cos\,\theta\, cos\frac{\theta}{2} - cos\, 3\theta\, cos\frac{9\theta}{2} = cos\frac{7\theta}{2}\, sin\, 4\theta$.

[સૂચન : ડા.બા. $= \frac{1}{2}[2cos\,\theta\, cos\frac{\theta}{2} - 2\, cos3\theta\, cos\frac{9\theta}{2}$ લો.]

7. જો $a\, cos\,\theta + b\, sin\,\theta = m$ અને $a\, sin\,\theta - b\, cos\,\theta = n$, તો $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$ સાબિત કરો.

8. $tan\, 22°30'$ ની કિંમત શોધો.

[સૂચન : ધારો કે, $\theta = 45°$ અને $tan\frac{\theta}{2} = \frac{sin\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\, sin\frac{\theta}{2}\, cos\frac{\theta}{2}}{2\, cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{sin\,\theta}{1+cos\,\theta}$ નો ઉપયોગ કરો.]

9. સાબિત કરો કે, $sin\, 4A = 4sinA\, cos^3A - 4\, cosA\, sin^3A$.

10. જો $tan\,\theta + sin\,\theta = m$ અને $tan\,\theta - sin\,\theta = n$ હોય, તો સાબિત કરો કે $m^2 - n^2 = 4sin\,\theta\, tan\,\theta$

[સૂચન : $m + n = 2tan\,\theta$, $m - n = 2\, sin\,\theta$, અને $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$ નો ઉપયોગ કરો.]

11. જો $tan(A+B) = p$ અને $tan(A-B) = q$ હોય, તો દર્શાવો કે $tan\, 2A = \frac{p+q}{1-pq}$

[સૂચન : $2A = (A+B) + (A-B)$ લો.]

12. જો $cos\,\alpha + cos\,\beta = 0 = sin\,\alpha + sin\,\beta$ હોય, તો સાબિત કરો કે $cos\, 2\alpha + cos\, 2\beta = -2cos(\alpha+\beta)$.

[સૂચન : $(cos\,\alpha + cos\,\beta)^2 - (sin\,\alpha + sin\,\beta)^2 = 0$]

13. જો $\frac{sin(x+y)}{sin(x-y)} = \frac{a+b}{a-b}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{tan\, x}{tan\, y} = \frac{a}{b}$ [સૂચન : યોગ-વિયોગ કરો.].

14. જો $tan\,\theta = \frac{sin\,\alpha - cos\,\alpha}{sin\,\alpha + cos\,\alpha}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $sin\,\alpha + cos\,\alpha = \sqrt{2}\, cos\,\theta$.

[સૂચન : $tan\,\theta = tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ મેળવો. તે પરથી, $\theta = \alpha - \frac{\pi}{4}$]

15. જો $sin\,\theta + cos\,\theta = 1$ હોય, તો θ નું વ્યાપક મૂલ્ય મેળવો.

16. સમીકરણ $tan\,\theta = -1$ અને $cos\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ નું સમાધાન કરતી θ ની વ્યાપક કિંમત મેળવો.

17. જો $cot\,\theta + tan\,\theta = 2\,cosec\,\theta$ હોય, તો θ ની વ્યાપક કિંમત મેળવો.

18. જો $2sin^2\theta = 3cos\,\theta$, જ્યાં $0 \le \theta \le 2\pi$ હોય, તો θ ની કિંમત મેળવો.

19. જો $sec\,x\,cos\,5x + 1 = 0$, જ્યાં $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ હોય, તો x ની કિંમત મેળવો.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

20. જો $sin(\theta + \alpha) = a$ અને $sin(\theta + \beta) = b$ હોય, તો

સાબિત કરો કે $cos\,2(\alpha - \beta) - 4ab\,cos(\alpha - \beta) = 1 - 2a^2 - 2b^2$

[**સૂચન :** $cos(\alpha - \beta) = cos((\theta + \alpha) - (\theta + \beta))$ લઈ ગણતરી કરો.]

21. જો $cos(\theta + \phi) = m\,cos(\theta - \phi)$ હોય, તો સાબિત કરો કે $tan\,\theta = \frac{1-m}{1+m}\,cot\,\phi$.

[**સૂચન :** $\frac{cos(\theta+\phi)}{cos(\theta-\phi)} = \frac{m}{1}$ લો અને યોગ-વિયોગ કરો.]

22. $3\left[sin^4\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + sin^4(3\pi + \alpha)\right] - 2\left[sin^6\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + sin^6(5\pi - \alpha)\right]$ નું મૂલ્ય મેળવો.

23. જો α અને β એ સમીકરણ $a\,cos\,2\theta + b\,sin\,2\theta = c$ નાં બીજ હોય, તો સાબિત કરો કે,

$tan\,\alpha + tan\,\beta = \frac{2b}{a+c}$. [**સૂચન :** $cos\,2\theta = \frac{1-tan^2\theta}{1+tan^2\theta}$ અને $sin\,2\theta = \frac{2tan\,\theta}{1+tan^2\theta}$ સૂત્રોનો ઉપયોગ કરો.]

24. જો $x = sec\,\phi - tan\,\phi$ અને $y = cosec\,\phi + cot\,\phi$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $xy + x - y + 1 = 0$.

[**સૂચન :** $xy + 1$ મેળવો અને દર્શાવો કે $x - y = -(xy + 1)$]

25. જો $cos\,\theta = \frac{8}{17}$ અને θ પ્રથમ ચરણમાં હોય, તો

$cos(30° + \theta) + cos(45° - \theta) + cos(120° - \theta)$ નું મૂલ્ય મેળવો.

26. $cos^4\frac{\pi}{8} + cos^4\frac{3\pi}{8} + cos^4\frac{5\pi}{8} + cos^4\frac{7\pi}{8}$ નું મૂલ્ય મેળવો.

[**સૂચન :** આપેલ વિસ્તરણનું નીચે પ્રમાણે સાદું રૂપ આપો.

$$2\left(cos^4\frac{\pi}{8} + cos^4\frac{3\pi}{8}\right) = 2\left[\left(cos^2\frac{\pi}{8} + cos^2\frac{3\pi}{8}\right)^2 - 2cos^2\frac{\pi}{8}cos^2\frac{3\pi}{8}\right].$$

27. $5cos^2\theta + 7sin^2\theta - 6 = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ મેળવો.

28. $sin\,x - 3sin\,2x + sin\,3x = cos\,x - 3cos\,2x + cos\,3x$ નો વ્યાપક ઉકેલ મેળવો.

29. $(\sqrt{3} - 1)\,cos\,\theta + (\sqrt{3} + 1)\,sin\,\theta = 2$ નો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

[**સૂચન :** $\sqrt{3} - 1 = r\,sin\,\alpha$, $\sqrt{3} + 1 = r\,cos\,\alpha$ લો. તેથી $tan\,\alpha = tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12}$]

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલ ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના ક્રમાંક 30 થી 59 વાળા વિધાનોના જવાબ આપો :

30. જો $sin\ \theta + cosec\ \theta = 2$ હોય, તો $sin^2\theta + cosec^2\theta =$ ....

(A) 1 (B) 4 (C) 2 (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

31. જો $f(x) = cos^2 x + sec^2 x$ હોય, તો ....

(A) $f(x) < 1$ (B) $f(x) = 1$ (C) $2 < f(x) < 1$ (D) $f(x) \geq 2$

[**સૂચન :** A.M $\geq$ G.M.]

32. જો $tan\ \theta = \frac{1}{2}$ અને $tan\ \phi = \frac{1}{3}$ હોય, તો $\theta + \phi$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) π (C) 0 (D) $\frac{\pi}{4}$

33. નીચેના પૈકી કયું વિધાન અસત્ય છે ? (કોઈક $\theta \in R$ માટે)

(A) $sin\ \theta = -\frac{1}{5}$ (B) $cos\ \theta = 1$ (C) $sec\ \theta = \frac{1}{2}$ (D) $tan\ \theta = 20$

34. $tan\ 1° \ tan\ 2° \ tan\ 3°$ .... $tan\ 89°$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) વ્યાખ્યાયિત નથી.

35. $\frac{1 - tan^2 15°}{1 + tan^2 15°}$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 1 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 2

36. $cos\ 1° \ cos\ 2° \ cos\ 3°$ .... $cos\ 179°$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) 0 (C) 1 (D) -1

37. જો $tan\ \theta = 3$ અને θ ત્રીજા ચરણમાં હોય, તો $sin\ \theta$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (B) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ (C) $\frac{-3}{\sqrt{10}}$ (D) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

38. $tan\ 75° - cot\ 75°$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $2+\sqrt{3}$ (C) $2-\sqrt{3}$ (D) 1

39. નીચેનાં પૈકી .... વિધાન સત્ય છે.

(A) $sin 1° > sin\ 1$ (B) $sin\ 1° < sin\ 1$ (C) $sin\ 1° = sin\ 1$ (D) $sin\ 1° = \frac{\pi}{180}\ sin\ 1$

[**સૂચન :** 1 રેડિયન $= \frac{180°}{\pi} = 57°\ 30'$ આશરે]

40. જો $\tan\alpha = \frac{m}{m+1}$ અને $\tan\beta = \frac{1}{2m+1}$ હોય, તો $\alpha + \beta =$ .... છે.

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

41. $3\cos x + 4\sin x + 8$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય .... છે.

(A) 5 (B) 9 (C) 7 (D) 3

42. $\tan 3A - \tan 2A - \tan A$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\tan 3A \tan 2A \tan A$ (B) $-\tan 3A \tan 2A \tan A$

(C) $\tan A \tan 2A - \tan 2A \tan 3A - \tan 3A \tan A$ (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

43. $\sin(45° + \theta) - \cos(45° - \theta)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $2\cos\theta$ (B) $2\sin\theta$ (C) 1 (D) 0

44. $\cot\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) વ્યાખ્યાયિત નથી.

45. $\cos 2\theta \cos 2\phi + \sin^2(\theta - \phi) - \sin^2(\theta + \phi) =$ ....

(A) $\sin 2(\theta + \phi)$ (B) $\cos 2(\theta + \phi)$ (C) $\sin 2(\theta - \phi)$ (D) $\cos 2(\theta - \phi)$

[**સૂચન :** $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A + B)\sin(A - B)$નો ઉપયોગ કરો.]

46. $\cos 12° + \cos 84° + \cos 156° + \cos 132°$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{8}$

47. જો $\tan A = \frac{1}{2}$ અને $\tan B = \frac{1}{3}$ હોય, તો $\tan(2A + B) =$ ....

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

48. $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10}$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) 1

$\left[\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right.$ અને $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ નો ઉપયોગ કરો.$\left.\right]$

49. $\sin 50° - \sin 70° + \sin 10°$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

50. જો $sin\ \theta + cos\ \theta = 1$ હોય, તો $sin\ 2\theta =$ ....

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) -1

51. જો $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ હોય, તો $(1 + tan\ \alpha)(1 + tan\ \beta) =$ ....

(A) 1 (B) 2 (C) -2 (D) વ્યાખ્યાયિત નથી

52. જો $sin\ \theta = \frac{-4}{5}$ અને θ ત્રીજા ચરણમાં હોય, તો $cos\frac{\theta}{2}$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ (C) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

53. $[0, 2\pi]$માં સમીકરણ $tan\ x + \sec x = 2\ cos\ x$ ના ઉકેલોની સંખ્યા .... છે.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

54. $sin\frac{\pi}{18} + sin\frac{\pi}{9} + sin\frac{2\pi}{9} + sin\frac{5\pi}{18}$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $sin\frac{7\pi}{18} + sin\frac{4\pi}{9}$ (B) 1 (C) $cos\frac{\pi}{6} + cos\frac{3\pi}{7}$ (D) $cos\frac{\pi}{9} + sin\frac{\pi}{9}$

55. જો $3\ tan\ A + 4 = 0$ અને A બીજા ચરણમાં હોય, તો $2\ cot A - 5\ cos\ A + \sin A$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{-53}{10}$ (B) $\frac{23}{10}$ (C) $\frac{37}{10}$ (D) $\frac{7}{10}$

56. $cos^2\ 48° - sin^2\ 12°$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{\sqrt{5}+1}{8}$ (B) $\frac{\sqrt{5}-1}{8}$ (C) $\frac{\sqrt{5}+1}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}}$

[**સૂચન :** $cos^2 A - sin^2 B = cos\ (A + B)\ cos\ (A - B)$ સૂત્ર વાપરો.]

57. જો $tan\ \alpha = \frac{1}{7}$ અને $tan\ \beta = \frac{1}{3}$ હોય, તો $cos\ 2\alpha =$ ....

(A) $sin\ 2\beta$ (B) $sin\ 4\beta$ (C) $sin\ 3\beta$ (D) $cos\ 2\beta$

58. જો $tan\ \theta = \frac{a}{b}$ હોય, તો $b\ cos\ 2\theta + a\ sin\ 2\theta =$ ....

(A) a (B) b (C) $\frac{a}{b}$ (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

59. જો $x \in R - \{0\}$ માટે $\cos \theta = x + \frac{1}{x}$ હોય, તો

(A) θ લઘુકોણ છે. (B) θ કાટકોણ છે.

(C) θ ગુરુકોણ છે. (D) θ ની કોઈ કિંમત શક્ય નથી.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 60 થી 67 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

60. $\frac{\sin 50°}{\sin 130°}$ નું મૂલ્ય .... છે.

61. જો $k = \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{18}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{18}\right)$ હોય, તો k નું સંખ્યાત્મક મૂલ્ય .... છે.

62. જો $\tan A = \frac{1-\cos B}{\sin B}$ હોય, તો $\tan 2A =$ ....

63. જો $\sin x + \cos x = a$ હોય, તો

(i) $\sin^6 x + \cos^6 x =$ ....

(ii) $|\sin x - \cos x| =$ ....

64. જો કાટકોણ ΔABC માં $m\angle C = 90°$ હોય, તો જેનાં બીજ $\tan A$ અને $\tan B$ હોય તે સમીકરણ .... થાય.

[**સૂચન :** $A + B = 90° \Rightarrow \tan A \tan B = 1$ અને $\tan A + \tan B = \frac{2}{\sin 2A}$]

65. $3(\sin x - \cos x)^4 + 6(\sin x + \cos x)^2 + 4(\sin^6 x + \cos^6 x) =$ ....

66. જો $x > 0$, તો $f(x) = -3\cos\sqrt{3+x+x^2}$ નું મૂલ્ય .... અંતરાલમાં હોય.

67. x-અક્ષથી $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ આલેખના કોઈ બિંદુનું મહત્તમ અંતર .... એકમ છે.

પ્રશ્ન ક્રમાંક 68 થી 75 માં આપેલાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે કારણ સહિત જણાવો.

68. જો $\tan A = \frac{1-\cos B}{\sin B}$, તો $\tan 2A = \tan B$.

69. $\sin A + \sin 2A + \sin 3A = 3$ કોઈક વાસ્તવિક A માટે સત્ય છે.

70. $\sin 10°$ એ $\cos 10°$ થી મોટી સંખ્યા છે.

71. $\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{16\pi}{15} = \frac{1}{16}$

72. સમીકરણ $sin^4 \theta - 2sin^2 \theta - 1$ નું સમાધાન કરતું θ નું એક મૂલ્ય 0 અને 2π ની વચ્ચે મળે છે.

73. જો $cosec\, x = 1 + cot\, x$ હોય, તો $x = 2n\pi$ અથવા $2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in Z$.

74. જો $tan\, \theta + tan\, 2\theta + \sqrt{3}\, tan\, \theta\, tan\, 2\theta = \sqrt{3}$ હોય, તો $\theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$.

75. જો $tan\, (\pi\, cos\, \theta) = cot\, (\pi\, sin\, \theta)$, તો $cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

76. નીચે આપેલા સ્તંભ C_1 નાં વિધાનોને સત્ય બને તેમ સ્તંભ C_2 સાથે જોડો :

(a) $sin\, (x + y)\, sin\, (x - y)$	(i) $cos^2 x - sin^2 y$
(b) $cos\, (x + y)\, cos\, (x - y)$	(ii) $\frac{1 - tan\theta}{1 + tan\theta}$
(c) $cot\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$	(iii) $\frac{1 + tan\theta}{1 - tan\theta}$
(d) $tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$	(iv) $sin^2 x - sin^2 y$