(99) $cot(x + 2x + 4x + 8x + ... + n$ પદ)નું મુખ્ય આવર્તમાન ......

(A) $\frac{\pi}{2^n}$ (B) $\frac{\pi}{2^n - 1}$ (C) $\frac{\pi}{2^n + 1}$ (D) 2π

ઉકેલ : $cot(x + 2x + 4x + 8x + ... + n$ પદ)

$a = x$, $r = 2$

આપેલ વિધેય $= cot\left[\frac{x(2^n - 1)}{2 - 1}\right]$

$= cot[x(2^n - 1)]$નું મુખ્ય આવર્તમાન $= \frac{\pi}{2^n - 1}$ **જવાબ : (B)**

(100) જો ΔABCના ત્રણ ખૂણા $3 : 5 : 4$ ના પ્રમાણમાં હોય, તો $a + c\sqrt{2} = ...$

(A) $2a$ (B) $2b$ (C) $\sqrt{2}\,c$ (D) c

ઉકેલ : ΔABCના ત્રણ ખૂણાના માપ $3 : 5 : 4$ના પ્રમાણમાં છે.

$\therefore$ ધારો કે તેમના માપ $3x, 5x, 4x$ છે.

$3x + 5x + 4x = \pi$

$\therefore \ x = \frac{\pi}{12}$

$A = 3x = \frac{\pi}{4}$, $B = 5x = \frac{5\pi}{12}$, $C = 4x = \frac{\pi}{3}$

$b = acosC + ccosA$

$\therefore \ b = acos\frac{\pi}{3} + ccos\frac{\pi}{4}$

$\therefore \ b = \frac{a}{2} + \frac{c}{\sqrt{2}}$

$\therefore \ b = \frac{a + \sqrt{2}c}{2}$

$\therefore \ a + \sqrt{2}\,c = 2b$ **જવાબ : (B)**

(101) કાટકોણ ત્રિકોણ માટે $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{R^2} = ...$

(A) 4 (B) 8 (C) 2 (D) 1

ઉકેલ : ધારો કે ΔABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે.

$\frac{b}{sinB} = 2R$. આથી, $b = 2R$

$\therefore \ a^2 + c^2 = b^2$

$\therefore \ a^2 + c^2 = 4R^2$

$\therefore \ \frac{a^2 + b^2 + c^2}{R^2} = \frac{4R^2 + 4R^2}{R^2} = 8$ **જવાબ : (B)**

(102) $a = \sqrt{3}$, $b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$, $c = \sqrt{2}$ તો $A = ...$

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

ઉકેલ : $cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2 - 3}{\frac{2}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{2}$

$A = \frac{\pi}{3}$ **જવાબ : (C)**

(103) $a^2 + 2a$, $2a + 3$, $a^2 + 3a + 8$ $(a > 0)$ ત્રિકોણની ત્રણ બાજુનાં માપ હોય, તો વાસ્તવિક aનો સંખ્યાગણ ......

(A) $(3, \infty)$ (B) $(4, \infty)$ (C) $(5, \infty)$ (D) $(-\infty, 5)$

ઉકેલ : ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુનાં માપનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ કરતાં વધુ હોય. આથી,

(i) $(a^2 + 2a) + (2a + 3) > a^2 + 3a + 8$

$\Rightarrow a^2 + 4a + 3 > a^2 + 3a + 8 \Rightarrow a > 5$

$\therefore a \in (5, \infty)$ (1)

આ જ રીતે,

(ii) $(2a + 3) + (a^2 + 3a + 8) > a^2 + 2a$

$\Rightarrow 3a + 11 > 0$ જે સત્ય છે જ.

(iii) $a^2 + 2a + a^2 + 3a + 8 > 2a + 3$

$\therefore 2a^2 + 3a + 5 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 40 = -31 < 0$ તથા $a > 0$

$\therefore \forall a \in R$ સત્ય છે.

$\therefore$ ઉકેલગણ $(5, \infty)$ થાય. **જવાબ : (C)**

(104) ΔABC માં $cotA$, $cotB$ $cotC$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે, તો a^2, b^2, c^2 એ ......

(A) સમાંતર શ્રેણીમાં છે. (B) સ્વરિત શ્રેણીમાં છે. (C) સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $cotA$, $cotB$ $cotC$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore cotA + cotC = 2cotB$

$\therefore \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\Delta} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4\Delta} = \frac{2(a^2 + c^2 - b^2)}{4\Delta}$

$\therefore 2b^2 = 2a^2 + 2c^2 - 2b^2$

$\therefore a^2 + c^2 = 2b^2$

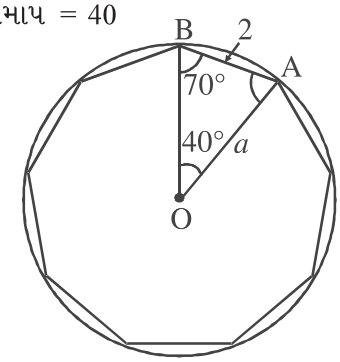
$\therefore a^2, b^2, c^2$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ : (A)**

(105) 9 બાજુવાળા નિયમિત બહુકોણની બાજુની લંબાઈ 2 હોય, તો તેને બહિર્ગત વર્તુળની ત્રિજ્યા ...... છે.

(A) $sec20°$ (B) $cosec20°$ (C) $cot20°$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : 9 બાજુવાળો બહુકોણ હોવાથી, કેન્દ્ર આગળ એક બાજુ દ્વારા બનતા ખૂણાનું અંશમાપ = 40

ΔOAB માં $sine$ સૂત્રની મદદથી,



આકૃતિ 12.13

$\frac{a}{sin70°} = \frac{2}{sin40°}$

$\therefore a = \frac{2sin70°}{sin40°}$

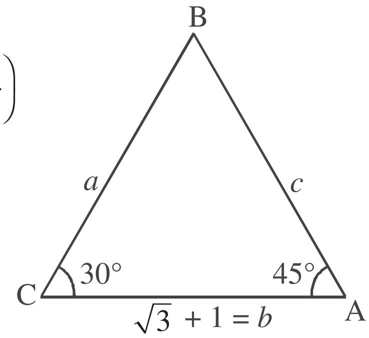
$= \frac{2sin70°}{2sin20° cos20°}$

$= \frac{1}{sin20°} = cosec20°$ $(sin70° = cos20°)$ **જવાબ : (B)**

(106) ત્રિકોણના બે ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{6}$ અને $\frac{\pi}{4}$ હોય તથા અંતર્ગત બાજુનું માપ $(\sqrt{3} + 1)$ હોય, તો તે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ ...... છે.

(A) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{3} + 1$ (C) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

ઉકેલ : $\frac{a}{sin\,A} = \frac{b}{sin\,B} = \frac{c}{sin\,C}$. $A = \frac{\pi}{4}$, $B = \frac{7\pi}{12}$, $C = \frac{\pi}{6}$



આકૃતિ 12.14

$$\therefore \quad \frac{a}{sin\,45°} = \frac{b}{sin\,105°} = \frac{c}{sin\,30°} \qquad \left(sin\,105° = cos\,15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{3}+1}{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)} = 2c$$

$$\therefore \quad \sqrt{2}\,a = 2\sqrt{2} = 2c$$

$$\therefore \quad a = 2,\ c = \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2}ac\,sin\,B$$

$$= \frac{1}{2}(2)(\sqrt{2})sin\,105°$$

$$= \sqrt{2}\,cos\,15°$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

જવાબ : (C)

(107) ΔABC માં $\frac{2cos\,A}{a} + \frac{cos B}{b} + \frac{2cos\,C}{c} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca}$ હોય, તો $A =$ ......

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

ઉકેલ : ΔABC માં $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ લેતાં,

$$\frac{2cos\,A}{a} + \frac{cos B}{b} + \frac{2cos\,C}{c} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca}$$

$$\therefore \quad \frac{2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{a} + \frac{\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)}{b} + \frac{2\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}{c} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac}$$

$$\therefore \quad \frac{b^2+c^2-a^2}{abc} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2abc} + \frac{a^2+b^2-c^2}{abc} = \frac{a^2+b^2}{abc}$$

$$\therefore \quad \frac{2b^2}{abc} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2abc} = \frac{a^2+b^2}{abc}$$

$\therefore \quad \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = a^2 - b^2$

$\therefore \quad a^2 + c^2 - b^2 = 2a^2 - 2b^2$

$\therefore \quad b^2 + c^2 = a^2$

$\therefore \quad A = \dfrac{\pi}{2}$ **જવાબ : (A)**

(108) જો ΔABC માં $a : b : c = 4 : 5 : 6$ તો પરિવૃત્તની ત્રિજ્યા અને અંતઃવૃત્તની ત્રિજ્યાનો ગુણોત્તર ......

(A) 8 : 7 (B) 12 : 7 (C) 24 : 7 (D) 16 : 7

ઉકેલ : ધારો કે $\dfrac{a}{4} = \dfrac{b}{5} = \dfrac{c}{6} = k$

$\therefore \quad a = 4k,\ b = 5k,\ c = 6k$

$s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{15k}{2}$

$s - a = \dfrac{15k}{2} - 4k = \dfrac{7k}{2}$

$s - b = \dfrac{15k}{2} - 5k = \dfrac{5k}{2}$

$s - c = \dfrac{15k}{2} - 6k = \dfrac{3k}{2}$

$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$

$= \left(\dfrac{15k}{2}\right)\left(\dfrac{7k}{2}\right)\left(\dfrac{5k}{2}\right)\left(\dfrac{3k}{2}\right)$

$\Delta = \dfrac{15\sqrt{7}k^2}{4}$

$r = \dfrac{\Delta}{s}$

$\therefore \quad R = \dfrac{abc}{4\Delta}$

$\therefore \quad \dfrac{R}{r} = \dfrac{abc}{4\Delta}\cdot\dfrac{s}{\Delta}$

$= \dfrac{abc \cdot s}{4\Delta^2}$

$= \dfrac{(4k)\,(5k)\,(6k)\left(\dfrac{15k}{2}\right)}{\dfrac{4 \times 225 \times 7 \times k^4}{16}}$

$= \dfrac{16}{7}$ **જવાબ : (D)**

બીજી રીત :

$r = 4R sin\dfrac{A}{2}\ sin\dfrac{B}{2}\ sin\dfrac{C}{2}$

$\therefore \quad \dfrac{r}{R} = 4 sin\dfrac{A}{2}\ sin\dfrac{B}{2}\ sin\dfrac{C}{2}$

$= 4\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)(s-c)(s-a)(s-a)(s-b)}{bc \cdot ca \cdot ab}}$

$= \dfrac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$

$= \dfrac{4\dfrac{105k^3}{8}}{120k^3} = \dfrac{7}{16}$

$\therefore \quad \dfrac{R}{r} = \dfrac{16}{7}$ **જવાબ : (D)**

(109) ત્રિકોણની ત્રણ બાજુનાં માપ 3, 5, 7 છે, તો સૌથી મોટા ખૂણાનું માપ ...... છે.

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) $\dfrac{5\pi}{6}$ (C) $\dfrac{2\pi}{3}$ (D) $\dfrac{3\pi}{4}$

ઉકેલ : $a = 3,\ b = 5,\ c = 7$

$$cos\text{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

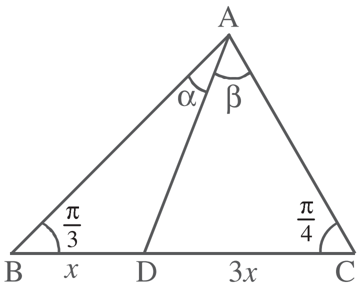
$$= \frac{9 + 25 - 49}{2(3)(5)} = \frac{-15}{30} = \frac{-1}{2}.\ \text{આથી,}\ \text{C} = \frac{2\pi}{3}$$

જવાબ : (C)

(110) ΔABC માં $m\angle\text{B} = \frac{\pi}{3}$, $m\angle\text{C} = \frac{\pi}{4}$, D એ $\overline{\text{BC}}$ નું 1 : 3 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે, તો $\frac{sin\ m\angle\text{BAD}}{sin\ m\angle\text{CAD}}$ = ...

(A) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

ઉકેલ : ΔABD માં $\frac{sin(m\angle\text{BAD})}{sin\text{B}} = \frac{x}{\text{AD}}$ (1)



આકૃતિ 12.15

ΔACD માં $\frac{sin(m\angle\text{CAD})}{sin\text{C}} = \frac{\text{CD}}{\text{AD}} = \frac{3x}{\text{AD}}$ (2)

(1) તથા (2)નો ગુણોત્તર લેતાં,

$$\frac{sin(m\angle\text{BAD})}{sin(m\angle\text{CAD})} \cdot \frac{sin\text{C}}{sin\text{B}} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{sin(m\angle\text{BAD})}{sin(m\angle\text{CAD})} = \frac{1}{3} \cdot \frac{sin\,\text{B}}{sin\text{C}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{sin\frac{\pi}{3}}{sin\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}$$

જવાબ : (A)

(111) જો ΔABC ના ખૂણાના માપ ગુણોત્તર 4 : 1 : 1 તો, સૌથી મોટી બાજુ અને ત્રિકોણની પરિમિતિનો ગુણોત્તર ...... થાય.

(A) $\sqrt{3}$: (2 + $\sqrt{3}$) (B) 1 : 6 (C) 1 : 2 + $\sqrt{3}$ (D) 2 : 3

ઉકેલ : ΔABCમાં ત્રણ ખૂણાનાં માપના ગુણોત્તર 4 : 1 : 1 છે.

$\therefore$ ધારો કે $m\angle\text{A} = 4x,\ m\angle\text{B} = x,\ m\angle\text{C} = x$

$\therefore$ ΔABC માં $m\angle\text{A} + m\angle\text{B} + m\angle\text{C} = \pi$. આથી, $6x = \pi$. આથી, $x = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $m\angle\text{A} = \frac{2\pi}{3},\ m\angle\text{B} = \frac{\pi}{6},\ m\angle\text{C} = \frac{\pi}{6}$

હવે, $\frac{a}{sin\,\text{A}} = \frac{b}{sin\,\text{B}} = \frac{c}{sin\,\text{C}}$

$$\therefore \frac{a}{sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{b}{sin\frac{\pi}{6}} = \frac{c}{sin\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{a}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{b}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{c}{\left(\frac{1}{2}\right)} = k \text{ (ધારો કે)}$$

$\therefore \quad a = \frac{\sqrt{3}k}{2}, b = \frac{k}{2}, c = \frac{k}{2}$

$\therefore \quad a + b + c = \frac{\sqrt{3}k + k + k}{2}$

$$\frac{\text{સૌથી મોટી બાજુ}}{\text{પરિમિતિ}} = \frac{\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})}$$

$\therefore$ ગુણોત્તર $\sqrt{3} : (2 + \sqrt{3})$ થાય. **જવાબ : (A)**

(112) $cot(\theta - \alpha)$, $3cot\theta$, $cot(\theta + \alpha)$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. $\theta \neq \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$ તો $sin\theta \cdot cosec\alpha$ = ...

(A) $\pm\sqrt{2}$ (B) $\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (C) $\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $cot(\theta - \alpha)$, $3cot\theta$, $cot(\theta + \alpha)$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore \quad cot(\theta - \alpha) + cot(\theta + \alpha) = 6cot\theta$

$$\therefore \quad \frac{cos(\theta-\alpha)}{sin(\theta-\alpha)} + \frac{cos(\theta+\alpha)}{sin(\theta+\alpha)} = 6cot\theta$$

$$\therefore \quad \frac{cos(\theta-\alpha)sin(\theta+\alpha) + cos(\theta+\alpha)sin(\theta-\alpha)}{sin(\theta+\alpha)\,sin(\theta-\alpha)} = 6cot\theta$$

$$\therefore \quad \frac{sin(\theta+\alpha+\theta-\alpha)}{sin^2\theta - sin^2\alpha} = 6cot\theta$$

$$\therefore \quad \frac{sin2\theta}{sin^2\theta - sin^2\alpha} = \frac{6cos\theta}{sin\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{2sin\theta cos\theta}{sin^2\theta - sin^2\alpha} = \frac{6cos\theta}{sin\theta}$$

$\therefore \quad sin^2\theta = 3sin^2\theta - 3sin^2\alpha$

$\therefore \quad 2sin^2\theta = 3sin^2\alpha$

$\therefore \quad \frac{sin^2\theta}{sin^2\alpha} = \frac{3}{2}$, આથી $sin^2\theta \; cosec^2\alpha = \frac{3}{2}$

$\therefore \quad sin\theta \; cosec\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **જવાબ : (B)**

(113) P = $tan6° \; tan42°$ અને Q = $cot66° \; cot78°$ હોય, તો ......

(A) P = 2Q (B) P = $\frac{1}{3}$ (C) P = Q (D) 3P = 2Q

ઉકેલ : $\frac{P}{Q} = \frac{tan6° tan42°}{cot66° cot78°}$

$= tan6° \; tan42° \;\; tan66° \; tan78°$

$= tan6°[tan66°] \; [tan(60° - 18°)tan(60° + 18°)]$

$$= \frac{tan6°[tan66°][tan18° \; tan(60°-18°)tan(60°+18°)]}{tan18°}$$

$$= \frac{tan6° tan66° tan54°}{tan18°} \qquad \left(tan\theta \, tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right) = tan3\theta\right)$$

$$= \frac{tan\,6° \, tan\,(60° - 6°) \, tan\,(60° + 6°)}{tan\,18°}$$

$$= \frac{tan\,18°}{tan\,18°} = 1$$

$\therefore$ P = Q **જવાબ : (C)**

(114) ΔABC માં $\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}$ = ...

(A) cos^2A (B) sin^2A (C) 1 − cosA (D) 1 + cosA

ઉકેલ : $\frac{(2s)(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}{4b^2c^2}$

$$= \frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{4b^2c^2} = \frac{4\Delta^2}{b^2c^2} = \frac{4\frac{1}{4}b^2c^2sin^2A}{b^2c^2} = sin^2A$$

જવાબ : (B)

(115) $tan\theta = \frac{1}{7}$, $sin\phi = \frac{1}{\sqrt{10}}$ હોય, તો $\theta + 2\phi$ = ... $\left(\theta, \phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{5\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

ઉકેલ : $tan\theta = \frac{1}{7}$. આથી, $sin\theta = \frac{1}{5\sqrt{2}}$ તથા $cos\theta = \frac{7}{5\sqrt{2}}$

$sin\phi = \frac{1}{\sqrt{10}}$. આથી, $cos\phi = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\therefore$ $sin2\phi = 2sin\phi cos\phi = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $cos2\phi = cos^2\phi - sin^2\phi = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < 2\phi < \pi \Rightarrow 0 < \theta + 2\phi < \frac{3\pi}{2}$

$cos(\theta + 2\phi) = cos\theta\ cos2\phi - sin\theta\ sin2\phi = \frac{28}{25\sqrt{2}} - \frac{3}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

બીજા તથા ત્રીજા ચરણમાં cos ઋણ છે.

$\therefore$ $\theta + 2\phi = \frac{\pi}{4}$ **જવાબ : (D)**

(116) A + B = $\frac{\pi}{3}$ તથા cosA + cosB = 1 હોય, તો નીચેનામાંથી કયું વિધાન સત્ય છે ?

(A) $cos(A-B) = \frac{1}{3}$ (B) $cos(A-B) = -\frac{1}{3}$ (C) $|cosA - cosB| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $|cosA - cosB| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ઉકેલ : A + B = $\frac{\pi}{3}$. આથી $cos(A+B) = cos\frac{\pi}{3}$

cosA + cosB = 1

$\therefore$ $2cos\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = 1$

$\therefore$ $2cos\frac{\pi}{6}cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = 1$ $\left(A + B = \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \quad cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$cos(A - B) = 2cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right) - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

$\therefore$ જવાબ (B) છે.

$$|cosA - cosB| = \left|-2\,sin\left(\frac{A+B}{2}\right)sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\right|$$

$$= \left|-2\,sin\frac{\pi}{6}sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\right|$$

$$= \left|sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\right|$$

$$= \sqrt{1-cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$\therefore$ જવાબ (C) તથા (D) નથી. **જવાબ : (B)**

(117) $\sum n^2 = \lambda \sum n$ હોય, તો $sin^{-1}\left(\frac{9\lambda^2 - 4n^2}{6\lambda + 4n}\right) = ...$

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

ઉકેલ : $\lambda = \frac{\sum n^2}{\sum n} = \frac{\frac{n}{6}(n+1)\,(2n+1)}{\frac{n}{2}(n+1)} = \frac{2n+1}{3}$

$$sin^{-1}\left(\frac{9\lambda^2 - 4n^2}{6\lambda + 4n}\right) = sin^{-1}\left(\frac{(2n+1)^2 - 4n^2}{4n + 2 + 4n}\right)$$

$$= sin^{-1}\left(\frac{4n^2 + 4n + 1 - 4n^2}{8n + 2}\right) = sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

જવાબ : (A)

(118) $4n\alpha = \pi$ હોય, તો $tan\alpha\, tan2\alpha\, tan3\alpha\, ...\, tan(2n - 1)\alpha = ...$ $(n \in N)$

(A) 1 (B) 0 (C) –1 (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $tan(2n - 1)\alpha = tan(2n - 1)\frac{\pi}{4n} = tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n}\right) = cot\frac{\pi}{4n} = cot\alpha$

તે જ પ્રમાણે $tan((2n - 2)\alpha) = cot2\alpha$ અને $tan((2n - 3)\alpha) = cot3\alpha$

આમ, ગુણાકાર કરતાં,

પ્રથમ પદ છેલ્લા પદનો ગુણાકાર 1 તે પછી બીજા પદ અને છેલ્લેથી બીજા પદનો ગુણાકાર આ જ રીતે બધાં પદોના ગુણાકાર 1 મળશે.

છેલ્લે વચ્ચેનું એક પદ રહેશે જે $tan(n\alpha) = tan\frac{\pi}{4} = 1$ થશે.

આથી જવાબ 1 આવશે. **જવાબ : (A)**

(119) જો $sinx + cosy = a$ તથા $cosx + siny = b$ તો $tan\left(\frac{x-y}{2}\right) = ...$

(A) $a + b$ (B) $a - b$ (C) $\frac{a+b}{a-b}$ (D) $\frac{a-b}{a+b}$

ઉકેલ : $sinx + cosy = a$

$\therefore sinx + sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = a$

$\therefore 2sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} - y}{2}\right) cos\left(\frac{x - \frac{\pi}{2} + y}{2}\right) = a$ (1)

$cosx + siny = b$

$\therefore cosx + cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = b$

તથા $2cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} - y}{2}\right) cos\left(\frac{x - \frac{\pi}{2} + y}{2}\right) = b$ (2)

(1) તથા (2)નો ગુણોત્તર લેતાં,

$\therefore tan\left(\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{b}$

$\therefore \frac{tan\frac{\pi}{4} + tan\left(\frac{x-y}{2}\right)}{1 - tan\frac{\pi}{4}\, tan\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{a}{b}$

$\therefore \frac{1 + tan\left(\frac{x-y}{2}\right) + 1 - tan\left(\frac{x-y}{2}\right)}{1 + tan\left(\frac{x-y}{2}\right) - 1 + tan\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{a+b}{a-b}$

$\therefore \frac{2}{2tan\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{a+b}{a-b}$

$\therefore tan\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b}$

જવાબ : **(D)**

(120) $(xtan\alpha + ycot\alpha)(xcot\alpha + ytan\alpha) - 4xy\, cot^2 2\alpha$ એ ...... થી સ્વતંત્ર હોય.

(A) x (B) y (C) α (D) x, y અને α

ઉકેલ : $(xtan\alpha + ycot\alpha)(xcot\alpha + ytan\alpha) - 4xy\, cot^2 2\alpha$

$= x^2 + xytan^2\alpha + xycot^2\alpha + y^2 - 4xycot^2 2\alpha$

$= x^2 + y^2 + xy(tan^2\alpha + cot^2\alpha - 4cot^2 2\alpha)$

$= x^2 + y^2 + xy\left(\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha} - 4\frac{cos^2 2\alpha}{sin^2 2\alpha}\right)$

$= x^2 + y^2 + xy\left(\frac{sin^4\alpha + cos^4\alpha}{sin^2\alpha\, cos^2\alpha} - \frac{4cos^2 2\alpha}{4sin^2\alpha\, cos^2\alpha}\right)$

$= x^2 + y^2 + xy\left(\frac{sin^4\alpha + cos^4\alpha - (cos^2\alpha - sin^2\alpha)^2}{sin^2\alpha\, cos^2\alpha}\right)$

$= x^2 + y^2 + xy\left(\frac{sin^4\alpha + cos^4\alpha - cos^4\alpha + 2sin^2\alpha\, cos^2\alpha - sin^4\alpha}{sin^2\alpha\, cos^2\alpha}\right)$

$= x^2 + y^2 + 2xy$

$= (x + y)^2$ જે α થી સ્વતંત્ર છે.

જવાબ : **(C)**

(121) $3^{sin^6\alpha} + 3^{cos^6\alpha}$ ની ન્યૂનતમ કિંમત ...... છે.

(A) $2 \cdot 3^{\frac{1}{8}}$ (B) $2 \cdot 3^{\frac{7}{8}}$ (C) $3 \cdot 2^{\frac{1}{8}}$ (D) 6

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, સમાંતર મધ્યક ≥ ગુણોત્તર મધ્યક

$$\therefore \quad \frac{3^{sin^6\alpha} + 3^{cos^6\alpha}}{2} \geq \sqrt{3^{sin^6\alpha} \cdot 3^{cos^6\alpha}}$$

$$= \sqrt{3^{sin^6\alpha + cos^6\alpha}} \quad (1)$$

આપણે જાણીએ છીએ કે, $sin^6\alpha + cos^6\alpha = (sin^2\alpha + cos^2\alpha)^3 - 3sin^2\alpha\, cos^2\alpha$

$$= 1 - \frac{3}{4}sin^2 2\alpha \quad (2)$$

(1) તથા (2) પરથી,

$$\therefore \quad 3^{sin^6\alpha} + 3^{cos^6\alpha} \geq 2\sqrt{3^{1-\frac{3}{4}sin^2 2\alpha}}$$

$3^{1-\frac{3}{4}sin^2 2\alpha}$ ની ન્યૂનતમ કિંમત મેળવવા $sin^2 2\alpha$ મહત્તમ થાય.

$\therefore \quad sin^2 2\alpha = 1$ લઈએ, તો

ન્યૂનતમ કિંમત $= 2 \cdot \sqrt{3^{\frac{1}{4}}} = 2 \cdot 3^{\frac{1}{8}}$ છે. **જવાબ : (A)**

[**નોંધ :** $\alpha = \frac{\pi}{4}$ માટે ન્યૂનતમ મળે.]

(122) $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ હોય, તો $tan\alpha\ tan2\alpha + tan2\alpha\, tan4\alpha + tan4\alpha\, tan\alpha = ...$

(A) –7 (B) –4 (C) 0 (D) 4

ઉકેલ : $tan\alpha\ tan2\alpha + tan2\alpha\, tan4\alpha + tan4\alpha\, tan\alpha$

$$= \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} \cdot \frac{sin\,2\alpha}{cos\,2\alpha} + \frac{sin\,2\alpha}{cos\,2\alpha} \cdot \frac{sin\,4\alpha}{cos\,4\alpha} + \frac{sin\,4\alpha}{cos\,4\alpha} \cdot \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$$

$$= \frac{sin\,\alpha \cdot sin\,2\alpha \cdot cos\,4\alpha + sin\,2\alpha\ sin\,4\alpha\ cos\,\alpha + sin\,4\alpha\ sin\,\alpha\, cos\,2\alpha}{cos\,\alpha\ cos\,2\alpha\ cos\,4\alpha}$$

$$= \frac{cos\,\alpha \cdot cos\,2\alpha\ cos\,4\alpha - cos\,(\alpha + 2\alpha + 4\alpha)}{cos\,\alpha\ cos\,2\alpha\ cos\,4\alpha} \quad \text{(વિશિષ્ટ સૂત્રો જુઓ.)}$$

$$= 1 - \frac{cos\,7\alpha}{cos\,\alpha\ cos\,2\alpha\ cos\,4\alpha}$$

$$= 1 - \frac{cos\,2\pi(2\,sin\,\alpha)}{2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha\ cos\,2\alpha\,cos\,4\alpha} \quad (7\alpha = 2\pi)$$

$$= 1 - \frac{(1)\ (2\,sin\,\alpha) \times 2}{2\,sin\,2\alpha\ cos\,2\alpha\ cos\,4\alpha}$$

$$= 1 - \frac{4\,sin\,\alpha \times 2}{2\,sin\,4\alpha \cdot cos\,4\alpha}$$

$$= 1 - \frac{8\,sin\,\alpha}{sin\,8\alpha}$$

$$= 1 - \frac{8\,sin\,\alpha}{sin\,(7\alpha + \alpha)}$$

$$= 1 - \frac{8\,sin\,\alpha}{sin\,(2\pi + \alpha)} \qquad (7\alpha = 2\pi)$$

$$= 1 - \frac{8\,sin\,\alpha}{sin\,\alpha} = -7$$

જવાબ : (A)

(123) $k_1 = tan27\theta - tan\theta$ અને $k_2 = \frac{sin\,\theta}{cos\,3\theta} + \frac{sin\,3\theta}{cos\,9\theta} + \frac{sin\,9\theta}{cos\,27\theta}$ માટે નીચેનામાંથી કયું સત્ય છે ?

(A) $k_1 = 2k_2$ (B) $k_1 = k_2$ (C) $k_1 = k_2 + 2$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $tan3\theta - tan\theta = \frac{sin\,3\theta}{cos\,3\theta} - \frac{sin\,\theta}{cos\,\theta}$

$$= \frac{sin\,3\theta\;cos\,\theta - cos\,3\theta\;sin\,\theta}{cos\,3\theta\;cos\,\theta} = \frac{sin\,2\theta}{cos\,3\theta\;cos\,\theta}$$

$$= \frac{2\,sin\,\theta\;cos\,\theta}{cos\,3\theta\;cos\,\theta}$$

$$= \frac{2\,sin\,\theta}{cos\,3\theta}$$

$\therefore\ tan3\theta - tan\theta = \frac{2\,sin\,\theta}{cos\,3\theta},\ tan9\theta - tan3\theta = \frac{2\,sin\,3\theta}{cos\,9\theta},\ tan27\theta - tan9\theta = \frac{2\,sin\,9\theta}{cos\,27\theta}$

$$tan27\theta - tan\theta = 2\left(\frac{sin\theta}{cos3\theta} + \frac{sin3\theta}{cos9\theta} + \frac{sin9\theta}{cos27\theta}\right)$$

$\therefore\ k_1 = 2k_2$

જવાબ : (A)

(124) $4cos36° + cot\left(7\frac{1}{2}\right)^{\circ} = \sqrt{n_1} + \sqrt{n_2} + \sqrt{n_3} + \sqrt{n_4} + \sqrt{n_5} + \sqrt{n_6}$

$\sum_{i=1}^{6} n_i^2 = ...$

(A) 81 (B) 71 (C) 91 (D) 61

ઉકેલ : $cot7\frac{1}{2}^{\circ} = \frac{1 + cos15^{o}}{sin15^{o}}$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{6} + 4\sqrt{2} + 6 + \sqrt{12} + \sqrt{12} + 2}{4}$$

$$= \frac{4\sqrt{6} + 4\sqrt{2} + 8 + 4\sqrt{3}}{4}$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{6} \qquad (1)$$

$cos36° = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$. આથી, $4cos36^{o} = \sqrt{5} + 1$ (2)

(1) અને (2) નો સરવાળો કરતાં,

$$4cos36^{o} + cot7\frac{1}{2}^{\circ} = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$$

$\therefore\ n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 3,\ n_4 = 4,\ n_5 = 5,\ n_6 = 6$

$\sum_{i=1}^{6} n_i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$

જવાબ : (C)

(125) $0 < A < \frac{\pi}{2}$

$sinA + cosA + tanA + cotA + secA + cosecA = 7$ અને $sinA$ તથા $cosA$ સમીકરણ

$4x^2 - 3x + a = 0$ નાં બે બીજ હોય, તો $25a$ = ... છે. જ્યાં $0 < A < \frac{\pi}{2}$

(A) 21 (B) 24 (C) 28 (D) 30

ઉકેલ : $4x^2 - 3x + a = 0$ નાં બે બીજ $sinA$ અને $cosA$ છે.

$\therefore\ sinA + cosA = \frac{3}{4}$ અને $sinA\,cosA = \frac{a}{4}$

$\therefore\ (sinA + cosA) + (tanA + cotA) + (secA + cosecA) = 7$

$$\therefore\ (sinA + cosA) + \left(\frac{sin\,A}{cos\,A} + \frac{cos\,A}{sin\,A}\right) + \left(\frac{1}{cos\,A} + \frac{1}{sin\,A}\right) = 7$$

$$\therefore\ (sinA + cosA) + \left(\frac{1}{sin\,A\ cos\,A}\right) + \left(\frac{sin\,A + cos\,A}{sin\,A\ cos\,A}\right) = 7$$

$\therefore\ \frac{3}{4} + \frac{4}{a} + \frac{3}{a} = 7$. આથી, $\frac{3a + 28}{4a} = 7$

$\therefore\ 3a + 28 = 28a$. આથી, $25a = 28$ **જવાબ : (C)**

(126) $f(\theta) = (sin\theta + cosec\theta)^2 + (cos\theta + sec\theta)^2$ તો $f(\theta)$ ......થી નાનું ન હોય.

(A) 9 (B) 12 (C) 14 (D) 16

ઉકેલ : $f(\theta) = (sin\theta + cosec\theta)^2 + (cos\theta + sec\theta)^2$

$= sin^2\theta + cos^2\theta + sec^2\theta + cosec^2\theta + 4$

$= sin^2\theta + cos^2\theta + 1 + tan^2\theta + 1 + cot^2\theta + 4$

$= 7 + tan^2\theta + cot^2\theta$

$= 9 + tan^2\theta - 2 + cot^2\theta$

$= (tan\theta - cot\theta)^2 + 9 \geq 9$ **જવાબ : (A)**

નોંધ : $\theta = \frac{\pi}{4}$ માટે મૂલ્ય 9 બને.

(127) $sin\alpha - sin\beta = a$, $cos\alpha + cos\beta = b$ તો $a^2 + b^2$ ......થી વધુ ન હોય.

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3

ઉકેલ : $a^2 + b^2 = (sin\alpha - sin\beta)^2 + (cos\alpha + cos\beta)^2$

$= sin^2\alpha - 2sin\alpha\,sin\beta + sin^2\beta + cos^2\alpha + 2cos\alpha\,cos\beta + cos^2\beta$

$= 2 + 2cos(\alpha + \beta)$

$$= 2\left(2cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) \leq 4$$ **જવાબ : (C)**

નોંધ : $\alpha = \beta = 0$ માટે મૂલ્ય 4 બને.

(128) $A - B = \frac{\pi}{2}$ તથા A, B ધન સંખ્યા હોય, તો $(sinA + sinB)cos\frac{\pi}{4}$ ...... થી મોટા ન હોય.

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

ઉકેલ : $A = \frac{\pi}{2} + B$

હવે, $(sinA + sinB)cos\frac{\pi}{4}$

$= \left(sin\left(\frac{\pi}{2} + B\right) + sinB\right)cos\frac{\pi}{4}$

$= (cosB + sinB)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$cosB + sinB$ ની મહત્તમ કિંમત $\sqrt{2}$ છે.

$\therefore \ (cosB + sinB)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le (\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$

$\therefore$ $(sinA + sinB)cos\frac{\pi}{4}$ તે 1થી મોટા ન હોય. ($A = \frac{3\pi}{4}$, $B = \frac{\pi}{4}$ માટે 1 બને.)**જવાબ : (A)**

(129) ΔABC માં જો $tanA < 0$ તો $tanB\ tanC$ ...... અંતરાલમાં છે.

(A) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $tanA < 0 \Rightarrow A > \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ ΔABC માટે, $0 < B + C < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \ tan(B + C) > 0$

$\therefore \ \frac{tanB + tanC}{1 - tanB\,tanC} > 0$

$\therefore \ 0 < tanB\,tanC < 1$ **જવાબ : (B)**

(130) જો $\theta \ne n\pi$, $n \in Z$, તો $\frac{cos^2\theta - 1}{cos^2\theta + cos\theta}$ નો વિસ્તાર ...... છે.

(A) $(0, \infty)$ (B) $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ (C) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ (D) $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

ઉકેલ : ધારો કે $y = \frac{cos^2\theta - 1}{cos^2\theta + cos\theta}$

$\therefore \ ycos^2\theta + ycos\theta = cos^2\theta - 1$

$\therefore \ ycos^2\theta + ycos\theta - cos^2\theta + 1 = 0$

$\therefore \ ycos\theta\,(cos\theta + 1) - (cos\theta - 1)(cos\theta + 1) = 0$

$\therefore \ (cos\theta + 1)(ycos\theta - cos\theta + 1) = 0$

$\therefore \ cos\theta = -1$ શક્ય નથી. $(\theta \ne n\pi, n \in Z)$

$\therefore \ ycos\theta - cos\theta + 1 = 0$

$\therefore \ cos\theta(y - 1) + 1 = 0$

$\therefore \ cos\theta = \frac{1}{1 - y}$

$\theta \neq n\pi \Rightarrow -1 < cos\theta < 1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{1-y} < 1$

$\therefore -1 < \frac{1}{1-y} < 0$ અથવા $0 < \frac{1}{1-y} < 1$

$\therefore -1 + y > 1$ અથવા $1 < 1 - y$

$\therefore y > 2$ અથવા $y < 0$ **જવાબ : (B)**

(131) ΔABC માટે $tan^2\frac{A}{2} + tan^2\frac{B}{2} + tan^2\frac{C}{2}$ ની ન્યૂનતમ કિંમત ...... હોય

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : ΔABC માટે,

$A + B + C = \pi$. આથી, $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore tan\frac{A}{2}\, tan\frac{B}{2} + tan\frac{B}{2}\, tan\frac{C}{2} + tan\frac{A}{2}\, tan\frac{C}{2} = 1$ (1)

હવે, $tan^2\frac{A}{2} + tan^2\frac{B}{2} + tan^2\frac{C}{2} - 1$

$= tan^2\frac{A}{2} + tan^2\frac{B}{2} + tan^2\frac{C}{2} - \left(tan\frac{A}{2}tan\frac{B}{2} + tan\frac{B}{2}\, tan\frac{C}{2} + tan\frac{A}{2}tan\frac{C}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\left(tan\frac{A}{2} - tan\frac{B}{2}\right)^2 + \left(tan\frac{B}{2} - tan\frac{C}{2}\right)^2 + \left(tan\frac{C}{2} - tan\frac{A}{2}\right)^2\right] \geq 0$

હવે, જો $tan\frac{A}{2} = tan\frac{B}{2} = tan\frac{C}{2}$ તો $A = B = C$ થાય અને

$tan^2\frac{A}{2} + tan^2\frac{B}{2} + tan^2\frac{C}{2}$ ની ન્યૂનતમ કિંમત 1 થાય. **જવાબ : (A)**

(132) સમીકરણ $3cos^{-1}x - \pi x - \frac{\pi}{2} = 0$ ને ......

(A) માત્ર એક ઉકેલ હોય . (B) ઉકેલ ન મળે.

(C) એક કરતાં વધુ ઉકેલ મળે. (D) એક અથવા એકથી વધુ ઉકેલ મળે.

ઉકેલ : $3cos^{-1}x = \pi x + \frac{\pi}{2}$

$cos^{-1}x = \frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}$

હવે $cos^{-1}x$ એ $(0, \pi)$માં ઘટતું વિધેય છે તથા $\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}$ એ $(0, \pi)$માં વધતું વિધેય છે.

$\therefore$ બંનેનો છેદગણ $\emptyset$ અથવા અનન્ય બિંદુ મળે.

$x = \frac{1}{2}$ લઈએ.

ડા.બા. $= cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$	જ.બા. $= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ માત્ર એક ઉકેલ $x = \frac{1}{2}$ છે. **જવાબ : (A)**

(133) $sin^{-1}\left(a-\frac{a^2}{3}+\frac{a^3}{9}-...\right) + cos^{-1}(1 + b + b^2 + ...) = \frac{\pi}{2}$, તો

(A) $a = -3, b = 1$ (B) $a = 1, b = -\frac{1}{3}$ (C) $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{2}$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $sin^{-1}\left(a-\frac{a^2}{3}+\frac{a^3}{9}-...\right) + cos^{-1}(1 + b + b^2 + ...) = \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ a - \frac{a^2}{3}+\frac{a^3}{9} - ... = 1 + b + b^2 + ...$

$\therefore\ \frac{a}{1-\left(\frac{-a}{3}\right)} = \frac{1}{1-b}$

$\therefore\ \frac{3a}{3+a} = \frac{1}{1-b}$

(A) $a = -3,\ b = 1$

ડા.બા. $= \frac{3a}{3+a}$ = અવ્યાખ્યાયિત અને જ.બા.$= \frac{1}{1-b} = \frac{1}{0}$ = અવ્યાખ્યાયિત

(A) શક્ય નથી.

(B) $a = 1,\ b = -\frac{1}{3}$

ડા.બા. $= \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$ અને જ.બા. $= \frac{1}{1-b} = \frac{1}{1-\left(\frac{-1}{3}\right)} = \frac{3}{4}$

(B) શક્ય છે.

(C) $a = \frac{1}{6},\ b = \frac{1}{2}$

ડા.બા. $= \frac{3a}{3+a} = \frac{\frac{1}{2}}{3+\frac{1}{6}} = \frac{3}{19}$ અને જ.બા. $= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

(C) શક્ય નથી.

જવાબ : (B)

(134) $x \in [0, 2\pi]$ માટે $2^{1 + |sinx| + |sin2x| + |sin3x| +} = 2$, તો ......

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ (C) $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$ (D) $\frac{3\pi}{2}, n\pi, n \in Z$

ઉકેલ : $2^{1 + |sinx| + |sin2x| + |sin3x| +} = 2^1$

$\therefore\ 1 + |sinx| + |sin2x| + |sin3x| = 1$

$\therefore\ |sinx| + |sin2x| + |sin3x| = 0$

$\therefore\ |sinx| = |sin2x| = |sin3x| = 0$

$\therefore\ x = 0$

જવાબ : (A)

એક કરતાં વધુ સાચા જવાબો :

(135) $\frac{tan3A}{tanA}$ = k, ($k \neq 1$) તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય છે ?

(A) $\frac{cosA}{cos3A} = \frac{k^2 - 1}{2k}$ (B) $\frac{sin3A}{sinA} = \frac{2k}{k-1}$ (C) $k < \frac{1}{3}$ (D) $k > 3$

ઉકેલ : $\frac{tan3A}{tanA} = k$

$\therefore \frac{tan3A - tanA}{tanA} = k - 1$

$\therefore \frac{\frac{sin3A}{cos3A} - \frac{sinA}{cosA}}{\frac{sinA}{cosA}} = k - 1$

$\therefore \frac{sin2A}{sinA\,cos3A} = k - 1$

$\therefore \frac{2sinA\,cosA}{sinA\,cos3A} = k - 1$

$\therefore \frac{cosA}{cos3A} = \frac{k-1}{2}$ (1)

$\therefore$ (A) અસત્ય છે. (કારણ કે $k \neq 1$)

(કારણ કે $\frac{k^2-1}{2k} = \frac{k}{2} - \frac{1}{2k} \neq \frac{k}{2} - \frac{1}{2}$)

હવે, $\frac{tan3A}{tanA} = k$

$\therefore \frac{sin3A}{cos3A} \cdot \frac{cosA}{sinA} = k$

$\therefore \left(\frac{cosA}{cos3A}\right)\left(\frac{sin3A}{sinA}\right) = k$

$\therefore \left(\frac{sin3A}{sinA}\right)\left(\frac{k-1}{2}\right) = k$ ((1) પરથી)

$\therefore \frac{sin3A}{sinA} = \frac{2k}{k-1}$

$\therefore$ (B) સત્ય છે.

હવે, $\frac{3sinA - 4sin^3A}{sinA} = \frac{2k}{k-1}$

$\therefore 3 - 4sin^2A = \frac{2k}{k-1}$

$\therefore 4sin^2A = 3 - \frac{2k}{k-1} = \frac{k-3}{k-1}$

$sinA \neq 0, 1$ ($tanA$, $cotA$ વ્યાખ્યાયિત છે.)

વળી, $0 < sin^2A < 1$

$\therefore 0 < \frac{k-3}{k-1} < 4$

$\therefore \left(\frac{k-3}{k-1}\right) > 0$

$\therefore k < 1$ અથવા $k > 3$ (2)

$\frac{k-3}{k-1} - 4 < 0$

$\therefore \frac{k-3-4k+4}{k-1} < 0$

$\therefore \frac{-3k+1}{k-1} < 0$

$\therefore \frac{3k-1}{k-1} > 0$

$\therefore \frac{k - \frac{1}{3}}{k-1} > 0$

$\therefore k > 1$ અથવા $k < \frac{1}{3}$ (3)

(2) અને (3) પરથી,

$k < \frac{1}{3}$ અથવા $k > 3$

$\therefore$ (C) અને (D) પણ શક્ય બને.

જવાબ : **(B), (C), (D)**

(136) $sin\alpha$ અને $cos\alpha$ નો સમગુણોત્તર મધ્યક $cos\beta$ છે. $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ તો $cos2\beta$ = ...

(A) $-2sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ (B) $-2cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ (C) $2sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ (D) $2cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

ઉકેલ : $sin\alpha$ અને $cos\alpha$ નો સમગુણોત્તર મધ્યક $cos\beta$ છે.

$cos^2\beta = sin\alpha\, cos\alpha$

$\therefore\ 2cos^2\beta = 2sin\alpha\, cos\alpha$

$\therefore\ 1 + cos2\beta = sin2\alpha$

$\therefore\ cos2\beta = sin2\alpha - 1$

$\therefore\ cos2\beta = -(1 - sin2\alpha) = -\left(1 - cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right)$

$\therefore\ cos2\beta = -2sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = -2cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -2cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ **જવાબ : (A), (B)**

(137) $81^{sin^2\theta} + 81^{cos^2\theta} = 30$ હોય, તો θ = ... $\theta \in [0, \pi]$

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

ઉકેલ : $81^{sin^2\theta} + 81^{1 - sin^2\theta} = 30$

$\therefore\ 81^{sin^2\theta} + \frac{81}{81^{sin^2\theta}} = 30$

ધારો કે $81^{sin^2\theta} = x$

$\therefore\ x + \frac{81}{x} = 30$

$\therefore\ x^2 - 30x + 81 = 0$

$\therefore\ x = 27$ અથવા $x = 3$

$\therefore\ 81^{sin^2\theta} = 27$ અથવા $81^{sin^2\theta} = 3$. આથી $3^{4sin^2\theta} = 3^3$ અથવા $3^{4sin^2\theta} = 3$

$\therefore\ sin^2\theta = \frac{3}{4}$ અથવા $sin^2\theta = \frac{1}{4}$

$\therefore\ sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ અથવા $sin\theta = \pm\frac{1}{2}$

પરંતુ $\theta \in [0, \pi]$ હોવાથી $sin\theta \not< 0$

$\therefore\ sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ અને $sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ **જવાબ : (A), (B), (C), (D)**

(138) સમીકરણ $x^3 - \frac{3}{4}x = -\frac{\sqrt{3}}{8}$ નું સમાધાન ...... કરે છે.

(A) $cos\frac{5\pi}{18}$ (B) $cos\frac{7\pi}{18}$ (C) $cos\left(\frac{23\pi}{18}\right)$ (D) $cos\left(\frac{17\pi}{18}\right)$

ઉકેલ : $x^3 - \frac{3}{4}x = -\frac{\sqrt{3}}{8}$

$\therefore\ 4x^3 - 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ધારો કે $x = cos\theta$. આથી, $4cos^3\theta - 3cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ cos3\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\therefore\ 3\theta = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$,

$\therefore\ cos3\theta = cos\frac{5\pi}{6}$ | $\therefore\ \theta = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{5\pi}{18},\ k \in Z$

$k = 0 \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{18}$

$k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \pm \frac{5\pi}{18} \Rightarrow \theta = \frac{17\pi}{18}$ અથવા $\theta = \frac{7\pi}{18}$

$k = 2 \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3} \pm \frac{5\pi}{18} \Rightarrow \theta = \frac{29\pi}{18}$ અથવા $\theta = \frac{19\pi}{18}$

$\therefore\ k > 2$ માટે $\theta \neq \frac{23\pi}{8}$ શક્ય નથી.

$\therefore$ (C) શક્ય નથી. $\left(\because\ \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{5\pi}{18} = \frac{17\pi}{18} \Rightarrow \frac{2k\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\right.$ અથવા $\left.\frac{11\pi}{9}\right)$ **જવાબ : (A), (B), (D)**

(139) નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યા સંમેય છે ?

(A) $sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ (B) $cosec\left(\frac{9\pi}{10}\right) sec\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

(C) $sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)$ (D) $\left(1 + cos\frac{2\pi}{9}\right)\left(1 + cos\frac{4\pi}{9}\right)\left(1 + cos\frac{8\pi}{9}\right)$

ઉકેલ : (A) $sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$

$= sin\frac{\pi}{12}cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[2\,sin\frac{\pi}{12}cos\frac{\pi}{12}\right] = \frac{1}{2}\left[sin\frac{\pi}{6}\right] = \frac{1}{4}$. આથી, (A) શક્ય છે.

(B) $cosec\left(\frac{9\pi}{10}\right) sec\left(\frac{4\pi}{5}\right) = cosec\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right)sec\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$

$= -\ cosec\frac{\pi}{10}\ sec\frac{\pi}{5} = \frac{-1}{sin\frac{\pi}{10}\ cos\frac{\pi}{5}}$

$= \frac{-1}{sin18°\ cos36°} = \frac{1}{-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)} = -4 \in Q$

$\therefore$ (B) શક્ય છે.

(C) $sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - 2sin^2\frac{\pi}{8}\ cos^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{1}{2}\left(2sin\frac{\pi}{8}\ cos\frac{\pi}{8}\right)^2$

$= 1 - \frac{1}{2}\left(sin\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \in Q$

(D) $\left(1 + cos\frac{2\pi}{9}\right)\left(1 + cos\frac{4\pi}{9}\right)\left(1 + cos\frac{8\pi}{9}\right) = \left(2cos^2\frac{\pi}{9}\right)\left(2cos^2\frac{2\pi}{9}\right)\left(2cos^2\frac{4\pi}{9}\right)$

$= 8(cos20°\ cos40°\ cos80°)^2$

$= 8\left[\frac{1}{2sin20°}(2sin20°cos20°)cos40°cos80°\right]^2$

$= 8\left[\left\{\frac{1}{2sin20°}2sin40°cos40°\right\}\frac{cos80°}{2}\right]^2$

$= 8\left[\frac{1}{4\,sin20°}(sin80°\ cos80°)\right]^2$

$= 8\left[\frac{1}{8\,sin20°}(2sin80°\ cos80°)\right]^2$

$= \frac{1}{8}\left[\frac{sin160°}{sin20°}\right]^2 = \frac{1}{8} \in Q$ **જવાબ : (A), (B), (C), (D)**

(140) નીચેનામાંથી કયા અંતરાલ માટે $sin^6x + cos^6x > \frac{5}{8}$ સત્ય છે ?

(A) $\left(\frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$ (B) $\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right)$ (C) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ (D) $\left(\frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\right)$

ઉકેલ : $sin^6x + cos^6x > \frac{5}{8} \Leftrightarrow 1 - 3sin^2x\, cos^2x > \frac{5}{8}$

$\Leftrightarrow 3sin^2xcos^2x < \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}(4sin^2x\, cos^2x) < \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}sin^22x < \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow 2sin^22x < 1$

$\Leftrightarrow 1 - 2sin^22x > 0$

$\Leftrightarrow cos4x > 0$

(A) $-\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{8} \Rightarrow \frac{-\pi}{2} < 4x < \frac{\pi}{2}$ જ્યાં $cos4x$ ધન છે.

(B) $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < 4x < \frac{5\pi}{2}$ પ્રથમ તથા ચોથું ચરણ જ્યાં $cos4x$ ધન છે.

(C) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \pi < 4x < 3\pi$ જ્યાં $cos4x$ ધન અથવા ઋણ છે.

$\therefore$ (C) સ્વીકાર્ય નથી.

(D) $\frac{7\pi}{8} < x < \frac{9\pi}{8} \Rightarrow \frac{7\pi}{2} < 4x < \frac{9\pi}{2}$

જે પ્રથમ તથા ચોથું ચરણ છે, જ્યાં $cos4x$ ધન છે. **જવાબ : (A), (B), (D)**

(141) $f(x) = log\left(log_{\frac{1}{3}}(log_7(sin x + a))\right)$ પ્રત્યેક $x \in R$ માટે અસત્ય હોય, તો $a =$ ......

(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 4

ઉકેલ : $log_{\frac{1}{3}}(log_7(sinx + a)) > 0$ જરૂરી છે.

$\Rightarrow 0 < log_7(sinx + a) < 1$

$\Rightarrow 1 < sinx + a < 7$

$\Rightarrow 1 - a < sinx < 7 - a \quad \forall x \in R$

$\Rightarrow -1 < 1 - a < sinx < 7 - a < 1$ હોય તે શક્ય છે.

$\Rightarrow a < 2$ અને $a > 6$. આથી, a નું મૂલ્ય શક્ય નથી. **જવાબ : (A), (B), (C), (D)**

(142) $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ માટે $x = \sum_{n=0}^{\infty} cos^{2n}\phi$, $y = \sum_{n=0}^{\infty} sin^{2n}\phi$, $z = \sum_{n=0}^{\infty} cos^{2n}\phi\ sin^{2n}\phi$, હોય તો નીચેનામાંથી કયો સંબંધ વ્યાખ્યાયિત થાય ? [IIT 1992]

(A) $xyz = xz + y$ (B) $xyz = xy + z$ (C) $xyz = x + y + z$ (D) $xyz = yz + x$

ઉકેલ : $x = \sum_{n=0}^{\infty} cos^{2n}\phi = 1 + cos^2\phi + cos^4\phi + ... = \frac{1}{1-cos^2\phi} = \frac{1}{sin^2\phi}$

$y = \sum_{n=0}^{\infty} sin^{2n}\phi = 1 + sin^2\phi + sin^4\phi + ... = \frac{1}{1-sin^2\phi} = \frac{1}{cos^2\phi}$

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} cos^{2n}\phi \ \ sin^{2n}\phi = 1 + sin^2\phi \ cos^2\phi + ... = \frac{1}{1 - sin^2\phi cos^2\phi}$$

હવે, $sin^2\phi = \frac{1}{x}$, $cos^2\phi = \frac{1}{y}$

$$\therefore \quad z = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}} \Rightarrow z = \frac{xy}{xy - 1}$$

$$\Rightarrow xyz - z = xy$$

$$\Rightarrow xyz = xy + z \qquad (1)$$

ઉકેલ (B) શક્ય છે.

$$x + y = \frac{1}{sin^2\phi} + \frac{1}{cos^2\phi} = \frac{1}{sin^2\phi cos^2\phi}$$

$$\therefore \quad x + y = xy \qquad (2)$$

અને (1) + (2) પરથી,

$$x + y + xy + z = xy + xyz$$

$$\therefore \quad x + y + z = xyz$$

જવાબ : **(B), (C)**

(143) $f_n(\theta) = \left(tan\frac{\theta}{2}\right)(1 + sec\theta)(1 + sec2\theta)(1 + sec4\theta) ... (1 + sec2^n\theta)$ [IIT : 1999]

(A) $f_2\left(\frac{\pi}{16}\right) = 1$ (B) $f_3\left(\frac{\pi}{32}\right) = 1$ (C) $f_4\left(\frac{\pi}{64}\right) = 1$ (D) $f_5\left(\frac{\pi}{128}\right) = 1$

ઉકેલ : $f_n(\theta) = \left(tan\frac{\theta}{2}\right)(1 + sec\theta)(1 + sec2\theta) ... (1 + sec2^n\theta)$

$$= \frac{sin\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta}{2}}\left[\left(\frac{1 + cos\theta}{cos\theta}\right)\left(\frac{1 + cos2\theta}{cos2\theta}\right)...\left(\frac{1 + cos2^n\theta}{cos2^n\theta}\right)\right]$$

$$= \frac{sin\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta}{2}}\left[\frac{2cos^2\frac{\theta}{2}}{cos\theta}\cdot\frac{2cos^2\theta}{cos2\theta}...\frac{2cos2^{n-1}\theta}{cos2^n\theta}\right]$$

$$= \left(\frac{2sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}}{cos\theta}\right)\cdot\frac{2cos^2\theta}{cos2\theta}...\frac{2cos2^{n-1}\theta}{cos2^n\theta}$$

$$= \left(\frac{tan\theta\cdot 2cos^2\theta}{cos2\theta}\right)...\frac{2cos2^{n-1}\theta}{cos2^n\theta}$$

$$= tan2\theta \ ... \ \frac{2\cos 2^{n-1}\theta}{\cos 2^n\theta} = tan2^n\theta$$

(A) $f_2\left(\frac{\pi}{16}\right) = tan\frac{4\pi}{16} = 1$ (B) $f_3\left(\frac{\pi}{32}\right) = tan\frac{8\pi}{32} = 1$

(C) $f_4\left(\frac{\pi}{64}\right) = tan\frac{16\pi}{64} = 1$ (D) $f_5\left(\frac{\pi}{128}\right) = tan\frac{\pi}{4} = 1$ જવાબ : **(A), (B), (C), (D)**

(144) $4sin^4x + cos^4x = 1$ તો $x = ..., n \in Z$

(A) $n\pi$ (B) $n\pi \pm sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{5}}$ (C) $\frac{2n\pi}{3}$ (D) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

ઉકેલ : $4sin^4x + cos^4x = 1$

$\therefore 4sin^4x = 1 - cos^4x$

$\therefore 4sin^4x = (1 - cos^2x)(1 + cos^2x)$

$\therefore 4sin^4x = sin^2x(2 - sin^2x)$

$\therefore sin^2x(5sin^2x - 2) = 0$

$\therefore sinx = 0$ અથવા $sinx = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\therefore x = n\pi, n \in Z$ અથવા $x = n\pi \pm sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{5}}$

જવાબ : **(A), (B)**

(145) $sin^3\theta + sin\theta\, cos\theta + cos^3\theta = 1$ તો $\theta = ..., (n \in Z)$

(A) $2n\pi$ (B) $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (C) $2n\pi - \frac{\pi}{2}$ (D) $n\pi$

ઉકેલ : $sin^3\theta + cos^3\theta + sin\theta\, cos\theta - 1 = 0$

$\therefore (sin\theta + cos\theta)(sin^2\theta - sin\theta\, cos\theta + cos^2\theta) - (1 - sin\theta\, cos\theta) = 0$

$\therefore (sin\theta + cos\theta)(1 - sin\theta\, cos\theta) - (1 - sin\theta\, cos\theta) = 0$

$\therefore (1 - sin\theta\, cos\theta)(sin\theta + cos\theta - 1) = 0$

સૌપ્રથમ ધારો કે $sin\theta\, cos\theta = 1$

$\therefore 2sin\theta\, cos\theta = 2$

$\therefore sin2\theta = 2$ શક્ય નથી.

$\therefore sin\theta + cos\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow sin\theta + cos\theta = 1$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}} cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n \in Z$

$\therefore \theta = 2n\pi, n \in Z$ અથવા $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in Z$ જવાબ : **(A), (B)**

(146) $sinx + cosx = \sqrt{y + \frac{1}{y}}$ હોય, તો $x = ..., y = ...$ $x \in [0, \pi]$;

(A) $y = 0$ (B) $y = 1$ (C) $x = \frac{3\pi}{4}$ (D) $x = \frac{\pi}{4}$

ઉકેલ : $sinx + cosx = \sqrt{y + \frac{1}{y}}$ આપેલ છે. $x \in [0, \pi]$

$\therefore y + \frac{1}{y} = (\sqrt{y})^2 - 2 + \frac{1}{(\sqrt{y})^2} + 2 = \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 + 2 \geq 2$

$\therefore \sqrt{y + \frac{1}{y}} \geq \sqrt{2}$

$\therefore sinx + cosx \geq \sqrt{2}$. પરંતુ $sinx + cosx \leq \sqrt{2}$

$\therefore sinx + cosx = \sqrt{2}$

(A) $y = 0$ શક્ય નથી.

(B) $y = 1$ લેતાં, $sinx + cosx = \sqrt{2}$ મળે છે. આથી, (B) શક્ય છે.

(C) $x = \frac{3\pi}{4}$ લેતાં, $sin\frac{3\pi}{4} + cos\frac{3\pi}{4} = 0 \neq \sqrt{2}$

$\therefore$ (C) શક્ય નથી.

(D) $x = \frac{\pi}{4}$ લેતાં, $sin\frac{\pi}{4} + cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ થાય છે. **જવાબ : (B), (D)**

(147) $sin\theta + \sqrt{3}cos\theta = 6x - x^2 - 11$, $0 \le \theta \le 4\pi$, $x \in R$, x તથા θ ની કેટલી કિંમતો માટે શક્ય છે ?

(A) કોઈપણ x, θ માટે શક્ય નથી.
(B) x ની એક કિંમત માટે, θ ની બે કિંમતો માટે
(C) x ની બે કિંમતો માટે, θ ની બે કિંમતો માટે
(D) (x, θ) ની બે ક્રમયુક્ત જોડ માટે

ઉકેલ : $f(\theta) = sin\theta + \sqrt{3}cos\theta$ લેતાં, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$

$r^2 = a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow r = 2$. આથી વિસ્તાર $[-2, 2]$ છે.

$\therefore -2 \le 6x - x^2 - 11 \le 2$

$\therefore x^2 - 6x + 9 \le 0$ અને $x^2 - 6x + 13 \ge 0$

$\therefore x^2 - 6x + 13 \ge 0$ અને $(x - 3)^2 \le 0$

$\therefore x^2 - 6x + 9 + 4 \ge 0$ અને $x = 3$

$\therefore (x - 3)^2 + 4 \ge 0$ અને $x = 3$

$\therefore x = 3$

$\therefore sin\theta + \sqrt{3}cos\theta = -2$

$\therefore \frac{1}{2}sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}cos\theta = -1$

$\therefore sin\theta sin\frac{\pi}{6} + cos\theta cos\frac{\pi}{6} = -1$

$\therefore cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -1$

$\therefore \theta - \frac{\pi}{6} = \pi$ અથવા 3π

આથી $x = 3$, $\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}$ $(0 \le \theta \le 4\pi)$

જવાબ : (B), (D)

(148) $sin^2x - 2sinx - 1 = 0$ ને $x \in [0, n\pi]$ માટે ચાર ભિન્ન ઉકેલ મળે છે તો $n = ...$

(A) 5 (B) 3 (C) 4 (D) 6

ઉકેલ : $sin^2x - 2sinx - 1 = 0$

$\therefore sin^2x - 2sinx + 1 = 2$

$\therefore (sinx - 1)^2 = 2$

$\therefore sinx - 1 = \pm\sqrt{2}$

$\therefore sinx = 1 \pm\sqrt{2}$

$sinx = 1 + \sqrt{2}$ શક્ય નથી.

$\therefore sinx = 1 - \sqrt{2} < 0$

$[0, 2\pi]$માં બે ઉકેલ તથા $[2\pi, 4\pi]$માં બે ઉકેલ મળે.

આમ, $[0, 4\pi]$માં ચાર ઉકેલ મળે.

$\therefore n = 4$

હવે, $[0, 5\pi]$માં પણ ચાર ઉકેલ મળે. $n = 5$ પણ શક્ય છે. **જવાબ : (C), (A)**

(149) $x + y = \frac{\pi}{4}$ અને $tanx + tany = 1$, $(n \in Z)$ હોય, તો ...... સત્ય બને.

(A) $sinx = 0,\ \forall x$ (B) $x = n\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = -n\pi,\ n \in Z$

(C) $x = n\pi \Rightarrow y = n\pi + \frac{\pi}{4},\ \forall n \in Z$ (D) $x = n\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = n\pi - \frac{\pi}{4}$

ઉકેલ : $tanx + tany = 1$

$\therefore \frac{sinx}{cosx} + \frac{siny}{cosy} = 1$

$\therefore sin(x + y) = cosx\ cosy$

$\therefore 2sin(x + y) = 2cosx\ cosy$

$\therefore 2sin(x + y) = cos(x + y) + cos(x - y)$

$\therefore 2sin\frac{\pi}{4} = cos\frac{\pi}{4} + cos(x - y)$

$\therefore \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = cos(x - y)$

$\therefore cos(x - y) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore x - y = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4},\ n \in Z$ (1)

હવે, $x + y = \frac{\pi}{4}$ આપેલ છે. (2)

(1) અને (2)નો સરવાળો કરતાં,

$2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

$\therefore 2x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ અથવા $2x = 2n\pi,\ \forall n \in Z$

$\therefore x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ અથવા $x = n\pi,\ n \in Z$

(i) જો $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ તો $tany = 0$

કારણ કે $tanx = 1$. આથી $y = -n\pi,\ \forall n \in Z$

(ii) જો $x = n\pi$ તો $tany = 1$

$\therefore y = n\pi + \frac{\pi}{4},\ n \in Z$ **જવાબ : (B), (C)**

(150) $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ હોય તો સમીકરણ $\frac{\sqrt{3}-1}{sinx} + \frac{\sqrt{3}+1}{cosx} = 4\sqrt{2}$ નું સમાધાન x ની કઈ કિંમતો માટે શક્ય બને ?

(A) $\frac{\pi}{12}$ (B) $\frac{5\pi}{12}$ (C) $\frac{7\pi}{24}$ (D) $\frac{11\pi}{36}$

ઉકેલ : $\frac{\sqrt{3}-1}{sinx} + \frac{\sqrt{3}+1}{cosx} = 4\sqrt{2}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}-1}{(2\sqrt{2})\,sinx} + \frac{(\sqrt{3}+1)}{cosx\,(2\sqrt{2})} = 2$

$\therefore \frac{sin\frac{\pi}{12}}{sinx} + \frac{cos\frac{\pi}{12}}{cosx} = 2$

$\therefore cosx\ sin\frac{\pi}{12} + sinx\ cos\frac{\pi}{12} = 2sinx\ cosx$

$\therefore sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = sin2x$

(**નોંધ** : અહીંથી પ્રત્યક્ષ રીતે આપેલ x નાં મૂલ્યો મૂકી ચકાસી શકાય)

$\therefore x + \frac{\pi}{12} = 2x \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}$ $\left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

હવે, $sin\theta = sin(\pi - \theta)$

$\therefore 2x = \pi - x - \frac{\pi}{12}$

$\therefore 3x = \frac{11\pi}{12}$

$\therefore x = \frac{11\pi}{36}$ **જવાબ : (A), (D)**

(151) જો $\frac{tanx}{1} = \frac{tany}{2} = \frac{tanz}{3}$ $(\neq 0)$ અને $x + y + z = \pi$ હોય, તો ......

(A) $tanx + tany + tanz$ ની મહત્તમ કિંમત 6 છે. (B) $tanx + tany + tanz$ ની ન્યૂનતમ કિંમત -6 છે.

(C) $tanx = \pm 1$, $tany = \pm 2$, $tanz = \pm 3$ (D) $\forall x, y, z \in R$, $tanx + tany + tanz = 0$

ઉકેલ : $\frac{tanx}{1} = \frac{tany}{2} = \frac{tanz}{3} = k \Rightarrow tanx = k,\ tany = 2k,\ tanz = 3k$

હવે, $x + y + z = \pi$

$\therefore\ tanx + tany + tanz = tanx\ tany\ tanz$

$\therefore\ k + 2k + 3k = (k)(2k)(3k)$

$\therefore\ 6k = 6k^3$

$\therefore\ 6k^3 - 6k = 0$

$\therefore\ 6k(k^2 - 1) = 0$

$\therefore\ k = 0$ અથવા $k = \pm 1$. પરંતુ $k \neq 0$.

$\therefore\ tanx + tany + tanz \neq 0$

$\therefore\ k = \pm 1$

$\therefore\ tanx = \pm 1,\ tany = \pm 2,\ tanz = \pm 3$

$\therefore\ tanx + tany + tanz$ મહત્તમ કિંમત $= 6$

$\therefore\ tanx + tany + tanz$ ન્યૂનતમ કિંમત $= -6$ **જવાબ : (A), (B), (C)**

(152) $cos\alpha = \frac{3}{5}$, $cos\beta = \frac{5}{13}$, $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$

(A) $cos(\alpha + \beta) = \frac{33}{65}$ (B) $sin(\alpha + \beta) = \frac{56}{65}$ (C) $sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{1}{65}$ (D) $cos(\alpha - \beta) = \frac{63}{65}$

ઉકેલ : $cos\alpha = \frac{3}{5}$ હોવાથી $sin\alpha = \frac{4}{5}$, $cos\beta = \frac{5}{13}$ હોવાથી $sin\beta = \frac{12}{13}$

$\therefore\ cos(\alpha + \beta) = cos\alpha\, cos\beta - sin\alpha\, sin\beta = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = -\frac{33}{65}$

$\therefore$ (A) સત્ય નથી.

$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha\, cos\beta + cos\alpha\, sin\beta = \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{56}{65}$

$\therefore$ (B) સત્ય છે.

$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha\, cos\beta + sin\alpha\, sin\beta = \frac{63}{65}$

$\therefore$ (D) સત્ય છે.

$sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha - \beta)}{2} = \frac{1 - \frac{63}{65}}{2} = \frac{1}{65}$

$\therefore$ (C) સત્ય છે. **જવાબ : (B), (C), (D)**

(153) $sin^6x + cos^6x = a^2$ ને વાસ્તવિક ઉકેલ હોય, તો $a \in$ ......

(A) $[-1, 1]$ (B) $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ (C) $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (D) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

ઉકેલ : $sin^6x + cos^6x = a^2$

$\therefore\ 1 - 3sin^2x\ cos^2x = a^2$

$\therefore \quad sin^2x \ cos^2x = \dfrac{1-a^2}{3}$

$\therefore \quad \dfrac{4sin^2x \ cos^2x}{4} = \dfrac{1-a^2}{3}$

$\therefore \quad sin^2 2x = \dfrac{4(1-a^2)}{3}$. હવે $0 \le sin^2 2x \le 1$

$\therefore \quad 0 \le \dfrac{4(1-a^2)}{3} \le 1$. આથી, $0 \le 4 - 4a^2 \le 3$

$\therefore \quad -4 \le -4a^2 \le -1$. આથી, $4 \ge 4a^2 \ge 1$

$\therefore \quad \frac{1}{4} \le a^2 \le 1$. આથી, $|a| \le 1$ તથા $|a| \ge \frac{1}{2}$

$\therefore \quad a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ અથવા $a \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ **જવાબ : (B), (D)**

(154) $sin\theta + sin\phi = a$ અને $cos\theta + cos\phi = b$ $(b \ne 0)$ હોય, તો ......

(A) $cos\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ (B) $cos\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$

(C) $tan\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$ (D) $cos(\theta - \phi) = \dfrac{a^2+b^2-2}{2}$

ઉકેલ : $sin\theta + sin\phi = a$ અને $cos\theta + cos\phi = b$ છે.

$\therefore \quad 2sin\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)cos\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right) = a$ અને $2cos\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)cos\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right) = b$

$4sin^2\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)cos^2\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right) + 4cos^2\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)cos^2\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right) = a^2 + b^2$

$\therefore \quad 4cos^2\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right) = a^2 + b^2$

$\therefore \quad cos\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore$ (A) સત્ય છે.

હવે $cos(\theta - \phi) = 2cos^2\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right) - 1 = \frac{2}{4}(a^2 + b^2) - 1 = \dfrac{a^2+b^2-2}{2}$

$\therefore$ (D) સત્ય છે.

હવે $tan^2\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right) = \dfrac{1-cos(\theta-\phi)}{1+cos(\theta-\phi)} = \dfrac{1-\left(\dfrac{a^2+b^2-2}{2}\right)}{1+\left(\dfrac{a^2+b^2-2}{2}\right)} = \dfrac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}$

$\Rightarrow \quad tan\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

$\therefore$ (C) સત્ય છે. **જવાબ : (A), (C), (D)**

(155) $\dfrac{3 + cot 76^\circ cot 16^\circ}{cot 76^\circ + cot 16^\circ}$ = ...

(A) $tan 16^\circ$ (B) $cot 76^\circ$ (C) $tan 46^\circ$ (D) $cot 44^\circ$

ઉકેલ : $\dfrac{3 + cot 76^\circ\, cot 16^\circ}{cot 76^\circ + cot 16^\circ} = \dfrac{3 + \frac{cos 76^\circ}{sin 76^\circ}\frac{cos 16^\circ}{sin 16^\circ}}{\frac{cos 76^\circ}{sin 76^\circ} + \frac{cos 16^\circ}{sin 16^\circ}}$

$$= \frac{3 sin 76^\circ\, sin 16^\circ + cos 76^\circ\, cos 16^\circ}{sin(76^\circ + 16^\circ)}$$

$$= \frac{2 sin 76^\circ sin 16^\circ + (cos 76^\circ\, cos 16^\circ + sin 76^\circ\, sin 16^\circ)}{sin 92^\circ}$$

$$= \frac{2 sin 76^\circ\, sin 16^\circ + cos(76^\circ - 16^\circ)}{sin 92^\circ}$$

$$= \frac{-cos 92^\circ + cos 60^\circ + cos 60^\circ}{sin 92^\circ}$$

$$= \frac{1 - cos 92^\circ}{sin 92^\circ} = \frac{2 sin^2 46^\circ}{2 sin 46^\circ\, cos 46^\circ} = tan 46^\circ = cot 44^\circ$$

જવાબ : **(C), (D)**

(156) $tan\theta = \dfrac{sin\alpha - cos\alpha}{sin\alpha + cos\alpha}$ હોય, તો ......

(A) $sin\alpha - cos\alpha = \pm\sqrt{2}\, sin\theta$ (B) $sin\alpha + cos\alpha = \pm\sqrt{2}\, cos\theta$

(C) $cos 2\theta = sin 2\alpha$ (D) $sin 2\theta + cos 2\alpha = 0$

ઉકેલ : (i) $tan\theta = \dfrac{sin\,\alpha - cos\,\alpha}{sin\,\alpha + cos\,\alpha} = \dfrac{tan\alpha - 1}{tan\alpha + 1}$

$\therefore\ tan\theta = tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore\ \theta = k\pi + \alpha - \frac{\pi}{4},\ k \in Z$ (1)

$\therefore\ 2\theta = 2k\pi + 2\alpha - \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ sin 2\theta = sin\left(2k\pi + 2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ sin 2\theta = sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ sin 2\theta = -cos 2\alpha.$ આથી, (D) સત્ય છે.

(ii) $cos 2\theta = cos\left(2k\pi + 2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ cos 2\theta = cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)$

$\therefore\ cos 2\theta = sin 2\alpha$

$\therefore$ (C) સત્ય છે.

હવે, $sin\alpha - cos\alpha = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} sin\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} cos\alpha\right) = \sqrt{2} sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, sin(\theta - k\pi)$ ((1) પરથી)

$= \pm\sqrt{2}\, sin\theta$

$\therefore$ (A) સત્ય છે.

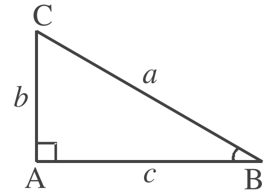
હવે, $sin\alpha + cos\alpha = \sqrt{2} cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, cos(\theta - k\pi) = \pm\sqrt{2}\, cos\theta$

$\therefore$ (B) સત્ય છે. જવાબ : **(A), (B), (C), (D)**

(157) જો ΔABC માં $m\angle A = 90$, c, $sin B$, $cos B$ સંમેય સંખ્યા હોય, તો ......

(A) a સંમેય છે. (B) a અસંમેય છે. (C) b સંમેય છે. (D) b અસંમેય છે.

ઉકેલ : ΔABC માં $cos B = \frac{c}{a}$



આકૃતિ 12.16

$\therefore \ a = \frac{c}{cos B}$

હવે, c અને $cos B$ સંમેય આપેલ છે.

$\therefore$ a સંમેય છે.

$sin B = \frac{b}{a}$

$\therefore \ a = \frac{b}{sin B} \Rightarrow b = a sin B$

a અને $sin B$ સંમેય છે.

$\therefore$ b સંમેય છે. **જવાબ : (A), (C)**

(158) $cosx + secx = -2$ તો ધન પૂર્ણાંક n માટે $cos^n x + sec^n x =$ ......

(A) 2, $\forall n \in Z$ (B) -2, $\forall n \in Z$ (C) -2, n અયુગ્મ (D) 2, n યુગ્મ

ઉકેલ : $cosx + secx = -2$

$\therefore \ cosx + \frac{1}{cosx} = -2$

$\therefore \ cos^2 x + 2cosx + 1 = 0$

$\therefore \ (cosx + 1)^2 = 0$

$\therefore \ cosx = -1$ અને $secx = (-1)$

$cos^n x + sec^n x = (-1)^n + (-1)^n$

જો n યુગ્મ તો $cos^n x + sec^n x = 2$ તથા n અયુગ્મ તો $cos^n x + sec^n x = -2$ **જવાબ : (C), (D)**

(159) $\left(\frac{sin\theta}{sin\phi}\right)^2 = \frac{tan\theta}{tan\phi} = 3$ હોય, તો ......

(A) $tan\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $tan\phi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $tan\theta = \sqrt{3}$ (D) $tan\theta = -\sqrt{3}$

ઉકેલ : $\left(\frac{sin\theta}{sin\phi}\right)^2 = \frac{tan\theta}{tan\phi}$

$\therefore \ \left(\frac{sin\theta}{sin\phi}\right)^2 = \frac{sin\theta}{cos\theta} \cdot \frac{cos\phi}{sin\phi}$

$\therefore \ \frac{sin\theta}{sin\phi} = \frac{cos\phi}{cos\theta}$. આથી $sin\theta\, cos\theta = sin\phi\, cos\phi$

$\therefore \ sin2\theta = sin2\phi$

$\therefore \ \frac{2tan\theta}{1 + tan^2\theta} = \frac{2tan\phi}{1 + tan^2\phi}$

$\therefore \ \frac{6tan\phi}{1 + 9tan^2\phi} = \frac{2tan\phi}{1 + tan^2\phi}$ $(tan\theta = 3tan\phi)$

$\therefore \ 3(1 + tan^2\phi) = 1 + 9tan^2\phi$ $(tan\phi \neq 0)$

$\therefore$ $6tan^2\phi = 2$. આથી $tan^2\phi = \frac{1}{3}$

$\therefore$ $tan\phi = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ તથા $tan\theta = \pm\sqrt{3}$ **જવાબ : (A), (B), (C), (D)**

(160) $x = acos^3\theta\, sin^2\theta$ અને $y = a\, sin^3\theta\, cos^2\theta$ માટે $\dfrac{(x^2 + y^2)^p}{(xy)^q}$ ($p, q \in$ N) θ થી સ્વતંત્ર હોય, તો ......

(A) $p = 4$ (B) $p = 5$ (C) $q = 4$ (D) $q = 5$

ઉકેલ : $x = acos^3\theta\, sin^2\theta$ અને $y = a\, sin^3\theta\, cos^2\theta$ આપેલ છે.

$\therefore$ $(x^2 + y^2) = a^2cos^6\theta\, sin^4\theta + a^2sin^6\theta\, cos^4\theta = a^2cos^4\theta\, sin^4\theta$

$\therefore$ $\dfrac{(x^2 + y^2)^p}{(xy)^q} = \dfrac{(a^2\, cos^4\theta\, sin^4\theta)^p}{(a^2\, cos^5\theta \cdot sin^5\theta)^q}$ એ θ થી સ્વતંત્ર છે.

$\therefore$ cos નો ઘાતાંક $= 0$ અને sin નો ઘાતાંક $= 0$

$\therefore$ $4p - 5q = 0$

$\therefore$ $p = 5$ અને $q = 4$ લઈએ, તો $4p - 5q = 0$ થાય. **જવાબ : (B), (C)**

(161) $0 \le x \le 2\pi$ માટે $2^{cosec^2x}\sqrt{\frac{1}{2}y^2 - y + 1} \le \sqrt{2}$ નું ......

(A) y ની માત્ર એક જ કિંમત સમાધાન કરે છે. (B) x ની બે કિંમતો સમાધાન કરે છે.

(C) $cosx = 0$ માટે સમાધાન થાય. (D) $sinx = 0$ માટે સમાધાન થાય.

ઉકેલ : $2^{cosec^2x}\sqrt{\dfrac{y^2 - 2y + 2}{2}} \le \sqrt{2}$

$\therefore$ $2^{cosec^2x}\sqrt{y^2 - 2y + 1 + 1} \le 2$

$\therefore$ $2^{cosec^2x}\sqrt{(y-1)^2 + 1} \le 2$ (1)

હવે, $2^{cosec^2x} \ge 2$ તથા $\sqrt{(y-1)^2 + 1} \ge 1$ હોવાથી, (2)

$2^{cosec^2x}\sqrt{(y-1)^2 + 1} \ge 2$ મળે. (3)

$\therefore$ $2^{cosec^2x}\sqrt{(y-1)^2 + 1} = 2$ ((1) અને (3) પરથી)

હવે, (2) પરથી સ્પષ્ટ છે.

$cosec^2x = 1$ અને $\sqrt{(y-1)^2 + 1} = 1$

$\therefore$ $sin^2x = 1$ અને $(y - 1)^2 + 1 = 1$

$\therefore$ $cosx = 0$ તથા $y = 1$

$\therefore$ y ની માત્ર એક જ કિંમત સમાધાન કરે છે.

તથા $cosx = 0$ માટે સમીકરણનું સમાધાન થાય.

$\therefore$ (A) અને (C) ઉકેલ છે.

હવે, $cos x = 0$, $0 \le x \le 2\pi$. આથી, $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$\therefore$ x ની બે કિંમતો સમાધાન કરે છે.

આથી (B) પણ ઉકેલ છે. **જવાબ : (A), (B), (C)**

(162) $S_n = cot^{-1}(3) + cot^{-1}(7) + cot^{-1}(13) + cot^{-1}(21) + ... + n$ પદ સુધી હોય, તો ......

(A) $S_{10} = tan^{-1}\frac{5}{6}$ (B) $S_6 = sin^{-1}\frac{3}{5}$

(C) અનંત પદ સુધી $S = \frac{\pi}{4}$ (D) $S_{20} = cot^{-1}\left(\frac{11}{10}\right)$

ઉકેલ : $S_n = cot^{-1}3 + cot^{-1}7 + cot^{-1}13 + ... + n$ પદ સુધી

$= tan^{-1}\frac{1}{3} + tan^{-1}\frac{1}{7} + tan^{-1}\frac{1}{13} + ... + n$ પદ સુધી

$= tan^{-1}\frac{1}{1+1\cdot2} + tan^{-1}\frac{1}{1+2\cdot3} + tan^{-1}\frac{1}{1+3\cdot4} + ... + n$ પદ સુધી

$$= tan^{-1}\left(\frac{2-1}{1+1\cdot2}\right) + tan^{-1}\left(\frac{3-2}{1+2\cdot3}\right) + tan^{-1}\left(\frac{4-3}{1+3\cdot4}\right) + ... + tan^{-1}\left(\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}\right)$$

$= tan^{-1}2 - tan^{-1}1 + tan^{-1}3 - tan^{-1}2 + ... + tan^{-1}n - tan^{-1}(n-1) + tan^{-1}(n+1) - tan^{-1}n$

$S_n = tan^{-1}(n+1) - \frac{\pi}{4}$ (1)

હવે (1) માં $n = 10$ લેતાં,

$$S_{10} = tan^{-1}11 - tan^{-1}1 = tan^{-1}\left(\frac{11-1}{1+11}\right) = tan^{-1}\frac{5}{6}$$

$\therefore$ (A) સત્ય છે.

(1)માં $n \to \infty$ લેતાં,

$$S_{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$\therefore$ (C) સત્ય છે.

(1)માં $n = 6$ લેતાં,

$$S_6 = tan^{-1}7 - tan^{-1}1$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{7-1}{1+7}\right) = tan^{-1}\frac{3}{4} = sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$\therefore$ (B) સત્ય છે.

(1)માં $n = 20$ લેતાં,

$$S_{20} = tan^{-1}21 - tan^{-1}1$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{21-1}{1+21}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{10}{11}\right) = cot^{-1}\left(\frac{11}{10}\right)$$

$\therefore$ (D) સત્ય છે. **જવાબ : (A), (B), (C), (D)**

(163) $2tan^{-1}(-2)$ = ...

(A) $-cos^{-1}\left(\frac{-3}{5}\right)$ (B) $-\pi + cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (C) $-\frac{\pi}{2} + tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right)$ (D) $-\pi + cot^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right)$

ઉકેલ : $2tan^{-1}(-2) = tan^{-1}(-2) + tan^{-1}(-2)$

$= -[tan^{-1}2 + tan^{-1}2]$

$= -\left[\pi + tan^{-1}\left(\frac{2+2}{1-4}\right)\right]$

$= -\left[\pi + tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)\right]$

$= -\pi + tan^{-1}\frac{4}{3}$ (1)

$= -\pi + cos^{-1}\frac{3}{5} = -\left(\pi - cos^{-1}\frac{3}{5}\right) = -cos^{-1}\frac{3}{5}$

∴ (A) તથા (B) સત્ય છે.

હવે (1) પરથી

$-\pi + tan^{-1}\frac{4}{3} = -\pi + cot^{-1}\frac{3}{4} = -\pi + \frac{\pi}{2} - tan^{-1}\frac{3}{4} = -\frac{\pi}{2} + tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right)$

∴ (C) સત્ય છે. **જવાબ : (A), (B), (C)**

(164) નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યા ધન છે ?

(A) $cos(tan^{-1}(tan4))$ (B) $sin(cot^{-1}(cot4))$ (C) $tan(cos^{-1}(cos5))$ (D) $cot(sin^{-1}(sin4))$

ઉકેલ : $tan4 = tan(4 - \pi)$

∴ $cos(tan^{-1}(tan4)) = cos(tan^{-1}(tan(4 - \pi))) = cos(4 - \pi) > 0, \quad 0 < 4 - \pi < \frac{\pi}{2}$

∴ (A)માં આપેલ સંખ્યા ધન છે.

હવે, $sin(cot^{-1}(cot4)) = sin(cot^{-1}(cot(4 - \pi))) = sin(4 - \pi) > 0$

∴ (B)માં આપેલ સંખ્યા ધન છે.

હવે, $cos5 = cos(2\pi - 5)$

∴ $tan(cos^{-1}(cos5)) = tan(cos^{-1}(cos(2\pi - 5) = tan(2\pi - 5) > 0 \quad \left(0 < 2\pi - 5 < \frac{\pi}{2}\right)$

હવે, $cot(sin^{-1}(sin4)) = cot(sin^{-1}(-sin(4 - \pi)))$

$= -cot(4 - \pi)$ ઋણ છે, $0 < 4 - \pi < \frac{\pi}{2}$ **જવાબ : (A), (B), (C)**

(165) $z = sec^{-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + sec^{-1}\left(y + \frac{1}{y}\right)$, તો z ની શક્ય કિંમતો ...... છે. જ્યાં $xy < 0$

(A) $\frac{8\pi}{10}$ (B) $\frac{7\pi}{10}$ (C) $\frac{9\pi}{10}$ (D) $\frac{21\pi}{20}$

ઉકેલ : $xy < 0$

∴ $x + \frac{1}{x} \geq 2,\ y + \frac{1}{y} \leq -2$ અથવા $x + \frac{1}{x} \leq -2$ અને $y + \frac{1}{y} \geq 2$

$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow sec^{-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

$y + \frac{1}{y} \le -2 \Rightarrow sec^{-1}\left(y + \frac{1}{y}\right) \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$

$\therefore \quad z \in \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$

$\frac{4\pi}{5} < \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{10} < \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} < \frac{9\pi}{10}, \frac{9\pi}{10} < \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6} < \frac{21\pi}{20} < \frac{7\pi}{6}$ **જવાબ : (C), (D)**

(166) ΔABC માં $c\, sin$A $< a < c$ હોય, તો ...... (b_1, b_2 એ b ની બે શક્યતાઓ છે.)

(A) $b_1 + b_2 = 2c\, cos$A (B) $b_1 + b_2 = c\, cos$A (C) $b_1\, b_2 = c^2 - a^2$ (D) $b_1\, b_2 = c^2 + a^2$

ઉકેલ : $cos\text{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\therefore \quad 2bccos\text{A} = b^2 + c^2 - a^2$

$\therefore \quad b^2 - 2bccos\text{A} + (c^2 - a^2) = 0$ એ b માં દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

તેનાં બે બીજ b_1 અને b_2 છે. $b_1 + b_2 = 2ccos\text{A}$, $b_1b_2 = c^2 - a^2$ **જવાબ : (A), (C)**

(167) ΔABC માટે $2a^2 + 4b^2 + c^2 = 4ab + 2ca$ હોય, તો ......

(A) ΔABC સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ છે. (B) ΔABC ગુરુકોણ ત્રિકોણ છે.

(C) B $= cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)$ (D) A $= cos^{-1}\frac{1}{4}$

ઉકેલ : $2a^2 + 4b^2 + c^2 - 4ab - 2ca = 0$

$\therefore \quad a^2 - 4ab + 4b^2 + a^2 - 2ac + c^2 = 0$

$\therefore \quad (a - 2b)^2 + (a - c)^2 = 0$

$\therefore \quad a = 2b$ અને $a = c$

હવે, $a = c \Rightarrow \Delta$ABC સમદ્વિભુજ છે. (1)

$a = 2b$ તથા લેતાં, $cos\text{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{4b^2 + 4b^2 - b^2}{8b^2} = \frac{7}{8} > 0$

$\therefore$ B $= cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)$. આથી, B લઘુકોણ છે. (2)

અને $cos\text{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{4}$ મળે. આથી, A $= cos^{-1}\frac{1}{4}$. આથી, A, C લઘુકોણ છે. (3)

$\therefore$ (A), (C), (D) ઉકેલ છે. **જવાબ : (A), (C), (D)**

(168) ΔABC માં $2a^2b^2 + 2b^2c^2 = a^4 + b^4 + c^4$ હોય, તો B = ...

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

ઉકેલ : $(a^2 - b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 + 2a^2c^2$

$\therefore \quad (a^2 - b^2 + c^2)^2 = 2a^2c^2$ $\quad (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 = 0)$

$\therefore \quad \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = cos\text{B}$

$\therefore$ B $= \frac{\pi}{4}$ અથવા $\frac{3\pi}{4}$ **જવાબ : (A), (B)**

(169) જો કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, તો તેમના લઘુકોણ ખૂણાનાં *cosine* મૂલ્યો ...... હોય.

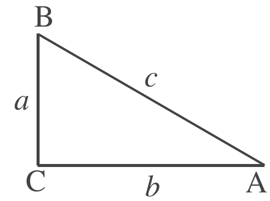
(A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (C) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ (D) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$

ઉકેલ : a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore\ b^2 = ac$ તથા $c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore\ c^2 = a^2 + ac$

$\therefore\ \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right) - 1 = 0$. આથી, $\frac{a}{c} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$



આકૃતિ 12.17

$\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ કારણ કે $a > 0,\ c > 0$

$cos\text{B} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ તથા $cos\text{A} = sin\text{B} = \sqrt{1 - cos^2\text{B}} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ **જવાબ : (A), (C)**

(170) ΔABC ની બાજુઓનાં માપ સમાંતર શ્રેણીમાં છે, જ્યાં $a < min\ \{b, c\}$ તો cosA માટે નીચેનામાંથી કઈ કિંમત હોઈ શકે ?

(A) $\frac{4c-3b}{2b}$ (B) $\frac{4c-3b}{2c}$ (C) $\frac{3c-4b}{2}$ (D) $\frac{4b-3c}{2b}$

ઉકેલ : ΔABC ની ત્રણ બાજુનાં માપ a, b, c છે.

હવે, $a < min\ \{b, c\}$

$\therefore$ (i) a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય અથવા (ii) a, c, b સમાંતર શ્રેણીમાં હોય.

(i) જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો

$a + c = 2b$

$$cos\text{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - (2b - c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - 4b^2 + 4bc - c^2}{2bc} = \frac{4bc - 3b^2}{2bc} = \frac{4c - 3b}{2c}$$

(ii) જો a, c, b સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો,

$a + b = 2c$

$$cos\text{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - (2c - b)^2}{2bc}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - 4c^2 + 4bc - b^2}{2bc} = \frac{4bc - 3c^2}{2bc} = \frac{4b - 3c}{2b}$$

જવાબ : (B), (D)

(171) ΔABC ની ત્રણ બાજુ a, b, c માટે $2b = a + c$ હોય, તો ......

(A) $\frac{b}{c} > \frac{2}{3}$ (B) $\frac{b}{c} < \frac{3}{2}$ (C) $\frac{b}{c} > \frac{1}{3}$ (D) $\frac{b}{c} < 2$

ઉકેલ : $a + c = 2b$ આપેલ છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, ΔABC માટે $a + b > c$ હોય.

$\therefore \ 2b - c + b > c$ $(a = 2b - c)$

$\therefore \ 3b > 2c$

$\therefore \ \frac{b}{c} > \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$ (1)

હવે, $b + c > a$

$\therefore \ b + c > 2b - c$ $(a = 2b - c)$

$\therefore \ 2c > b$

$\therefore \ \frac{b}{c} < 2$ (2)

જો $a + c > b$ હોય, તો $2b > b$ સત્ય જ છે. **જવાબ : (A), (C), (D)**

(172) $(5 + 4cos\theta)(2cos\theta + 1) = 0$ નો $\theta \in [0, 2\pi]$ માં ઉકેલ ...... હોઈ શકે.

(A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{4\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{3}$

ઉકેલ : $(5 + 4cos\theta)(2cos\theta + 1) = 0$

$\therefore \ cos\theta = -\frac{5}{4}$ અથવા $cos\theta = -\frac{1}{2}$

$cos\theta = -\frac{5}{4} < -1$ શક્ય નથી. આથી $cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\therefore \ \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ તથા $\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ **જવાબ : (A), (B)**

(173) $\frac{tan\,A}{1 - cot\,A} + \frac{cot\,A}{1 - tan\,A} = ...$ [JEE : 2013]

(A) $sinA\,cosA + 1$ (B) $secA\,cosecA + 1$ (C) $tanA + cotA$ (D) $secA + cosecA$

ઉકેલ : $\frac{tan\,A}{1 - cot\,A} + \frac{cot\,A}{1 - tan\,A}$

$$= \frac{\frac{sin\,A}{cos\,A}}{1 - \frac{cos\,A}{sin\,A}} + \frac{\frac{cos\,A}{sin\,A}}{1 - \frac{sin\,A}{cos\,A}}$$

$$= \frac{sin^2 A}{(sin\,A - cos\,A)cos\,A} + \frac{cos^2 A}{(cos\,A - sin\,A)\,sin\,A}$$

$$= \frac{sin^2 A}{(sin\,A - cos\,A)cos\,A} - \frac{cos^2 A}{(sin\,A - cos\,A)\,sin\,A}$$

$$= \frac{sin^3 A - cos^3 A}{(sin\,A - cos\,A)\,sin\,A\,cos\,A}$$

$$= \frac{(\sin A - \cos A)(\sin^2 A + \sin A \cos A + \cos^2 A)}{(\sin A - \cos A)\sin A \cos A}$$

$$= \frac{1 + \sin A \cos A}{\sin A \cos A} = 1 + \sec A \operatorname{cosec} A$$

જવાબ : **(B)**

(174) $\cot\left[\sum_{n=1}^{23} \cot^{-1}\left[1 + \sum_{k=1}^{n} 2k\right]\right] = ...$ [JEE Adv. : 2013]

(A) $\frac{23}{25}$ (B) $\frac{25}{23}$ (C) $\frac{23}{24}$ (D) $\frac{24}{23}$

ઉકેલ : $\cot\left[\sum_{n=1}^{23} \cot^{-1}\left[1 + \sum_{k=1}^{n} 2k\right]\right]$

$$= \cot\left[\sum_{n=1}^{23} \cot^{-1}(1 + n^2 + n)\right] \qquad \left(\sum n = \frac{n}{2}(n+1)\right)$$

$$= \cot\left[\sum_{n=1}^{23} \tan^{-1}\left(\frac{1}{1 + n(1+n)}\right)\right] = \cot\left[\sum_{n=1}^{23} \tan^{-1}\left(\frac{(1+n) - n}{1 + n(1+n)}\right)\right]$$

$$= \cot\left[\sum_{n=1}^{23} \left(\tan^{-1}(1+n) - \tan^{-1}n\right)\right]$$

$$= \cot\left[(\tan^{-1}2 - \tan^{-1}1) + (\tan^{-1}3 - \tan^{-1}2) + ... + (\tan^{-1}24 - \tan^{-1}23)\right]$$

$$= \cot[\tan^{-1}24 - \tan^{-1}1]$$

$$= \cot\left[\tan^{-1}\left(\frac{24 - 1}{1 + 24}\right)\right]$$

$$= \cot\left(\tan^{-1}\frac{23}{25}\right) = \frac{25}{23}$$

જવાબ : **(B)**

(175) $f_k(x) = \frac{1}{k}(\sin^k x + \cos^k x)$, $x \in R$, $k \geq 1$ હોય, તો $f_4(x) - f_6(x) = ...$ [JEE : 2014]

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{3}$

ઉકેલ : $f_4(x) - f_6(x)$

$$= \frac{1}{4}(\sin^4 x + \cos^4 x) - \frac{1}{6}(\cos^6 x + \sin^6 x)$$

$$= \frac{1}{4}[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x] - \frac{1}{6}[(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x]$$

$$= \frac{1}{4}[1 - 2\sin^2 x \cos^2 x] - \frac{1}{6}[1 - 3\sin^2 x \cos^2 x]$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin^2 x \cos^2 x - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

જવાબ : **(B)**

(176) સમીકરણ $f(x) = sin(x^2) + cos(x^2), x \in \left[-\sqrt{13}, \sqrt{13}\right]$ માં મહત્તમ બને તે માટે x ના મૂલ્યોની સંખ્યા ...... હોય

[JEE Adv. : 2014]

(A) 8 (B) 2 (C) 4 (D) 0

ઉકેલ : $f(x) = sin(x^2) + cos(x^2)$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} sin(x^2) + \frac{1}{\sqrt{2}} cos(x^2)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[sin(x^2)\ sin\frac{\pi}{4} + cos(x^2) cos\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[cos\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

મહતમ કિંમત માટે $cos\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$x^2 = \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \pm\frac{3\sqrt{\pi}}{2}$ $(x \in [-\sqrt{13}, \sqrt{13}])$

ઉકેલની સંખ્યા = 4

જવાબ : (C)

(177) $tan^{-1}\left(\frac{1}{2x+1}\right) + tan^{-1}\left(\frac{1}{4x+1}\right) = tan^{-1}\frac{2}{x^2}$ ના ધન વાસ્તવિક ઉકેલોની સંખ્યા ...... છે.

[JEE Adv. : 2014]

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : $tan^{-1}\left(\frac{1}{2x+1}\right) + tan^{-1}\left(\frac{1}{4x+1}\right) = tan^{-1}\frac{2}{x^2}$

$$\therefore \quad tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{4x+1}}{1 - \left(\frac{1}{2x+1}\right)\left(\frac{1}{4x+1}\right)}\right) = tan^{-1}\frac{2}{x^2} \qquad \left(x > 0, \frac{1}{2x+1} < 1, \frac{1}{4x+1} < 1\right)$$

$$\therefore \quad tan^{-1}\left(\frac{4x+1+2x+1}{(2x+1)(4x+1)-1}\right) = tan^{-1}\frac{2}{x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{6x+2}{8x^2+6x} = \frac{2}{x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{3x+1}{4x^2+3x} = \frac{2}{x^2}$$

$\therefore \quad 3x^3 + x^2 = 8x^2 + 6x$

$\therefore \quad 3x^3 - 7x^2 - 6x = 0$

$\therefore \quad x(3x^2 - 7x - 6) = 0$

$x > 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 7x - 6 = 0$

$\therefore \quad x = 3$ અથવા $x = -\frac{2}{3}$. પરંતુ $x > 0$

$\therefore \quad x = 3$

$\therefore$ માત્ર એક ધન ઉકેલ છે.

જવાબ : (A)

કારક અને નિષ્કર્ષ પ્રકારના પ્રશ્નો

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં ચાર વિકલ્પો અને બે વિધાનો આપેલાં હોય છે. વિધાન I નિષ્કર્ષ તથા વિધાન II કારક કહેવાય છે. વિકલ્પો (A), (B), (C) તથા (D) નીચે મુજબ હોય છે. (દા.નં. 178 થી 198)

(A) વિધાન I અને વિધાન II બંને સત્ય છે. વિધાન II એ વિધાન I ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

(B) વિધાન I અને વિધાન II બંને સત્ય છે. વિધાન II એ વિધાન I ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

(C) વિધાન I સત્ય અને વિધાન II અસત્ય છે.

(D) વિધાન I અસત્ય છે અને વિધાન II સત્ય છે.

(178) **વિધાન I :** $cos1 < cos7$

વિધાન II : $1 < 7$

ઉકેલ : $cos7 = cos(2\pi - 7)$

$2\pi - 7 < 1$ કારણ કે $\pi < 4$

$\therefore$ $cos(7 - 2\pi) = cos(2\pi - 7) > cos1$ (cos પ્રથમ ચરણમાં ઘટતું વિધેય છે.)

$\therefore$ $cos7 > cos1$

$\therefore$ વિધાન I સત્ય છે.

વિધાન II, $1 < 7$ સત્ય છે.

આમ, વિધાન I અને II બંને સત્ય છે, પરંતુ વિધાન II એ વિધાન I ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી. **જવાબ : (B)**

(179) **વિધાન I :** $27^{cos2x} \cdot 81^{sin2x}$ ની ન્યૂનતમ કિંમત $\frac{1}{243}$ છે.

વિધાન II : $acos\theta + bsin\theta$ ની ન્યૂનતમ કિંમત $-\sqrt{a^2 + b^2}$ છે.

ઉકેલ : વિધાન I : $27^{cos2x} \cdot 81^{sin2x}$

વિધાન II : $f(\theta) = acos\theta + bsin\theta$ ની ન્યૂનતમ કિંમત $-\sqrt{a^2 + b^2}$ છે જે સત્ય છે.

$= 3^{3\cos2x} \cdot 3^{4sin2x} = 3^{3cos2x + 4sin2x}$

વિધાન I મુજબ $3cos2x + 4sin2x$ ની ન્યૂનતમ કિંમત $= -\sqrt{a^2 + b^2} = -\sqrt{9 + 16} = -5$

$\therefore$ $3^{3cos2x + 4sin2x}$ ની ન્યૂનતમ કિંમત $= 3^{-5} = \frac{1}{243}$ છે.

$\therefore$ વિધાન I સત્ય છે.

આમ, વિધાન I અને II બંને સત્ય છે. વિધાન II એ વિધાન I ની સાચી સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

(180) **વિધાન I :** $tan5°$ અસંમેય સંખ્યા છે.

વિધાન II : $tan15°$ અસંમેય સંખ્યા છે.

ઉકેલ : $tan15° = 2 - \sqrt{3}$ અસંમેય છે. વિધાન II સત્ય છે.

$$tan15° = \frac{3tan5° - tan^3 5°}{1 - 3tan^2 5°}$$

જો $tan5°$ સંમેય સંખ્યા હોય, તો $tan15°$ પણ સંમેય થાય, તે સત્ય નથી.

$\therefore$ $tan5°$ અસંમેય સંખ્યા થાય.

$\therefore$ વિધાન II એ વિધાન I ની સાચી સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ : (A)**

(181) **વિધાન I :** $sin3 < sin1 < sin2$

વિધાન II : $sinx$ પ્રથમ અને બીજા ચરણમાં ધન છે.

ઉકેલ : વિધાન II $sinx$ પ્રથમ અને બીજા ચરણમાં ધન છે સત્ય છે.

વિધાન I : $sin3 = sin(\pi - 3)$

$sin2 = sin(\pi - 2)$

$0 < \pi - 3 < 1 < \pi - 2 < \frac{\pi}{2}$ કારણ કે $3 < \pi < 4$

પ્રથમ ચરણમાં sin વધતું વિધેય છે.

$\therefore \; sin(\pi - 3) < sin1 < sin(\pi - 2)$

$\therefore \; sin3 < sin1 < sin2$

વિધાન I સત્ય છે.

વિધાન I સત્ય થવા માટે sin પ્રથમ અને બીજા ચરણમાં ધન જ હોય એટલું જ પર્યાપ્ત નથી.

$\therefore$ વિધાન II એ વિધાન I માટેની સાચી સમજ પૂરી પાડતું નથી. **જવાબ : (B)**

(182) **વિધાન I :** $sin\frac{\pi}{18}$ એ સમીકરણ $8x^3 - 6x + 1 = 0$ નું એક બીજ છે.

વિધાન II : $\theta \in R$ માટે $sin3\theta = 3sin\theta - 4sin^3\theta$

ઉકેલ : વિધાન II : $\theta \in R$ માટે $sin3\theta = 3sin\theta - 4sin^3\theta$ સત્ય છે.

વિધાન I : $8x^3 - 6x + 1 = 0$

$\therefore \; 3x - 4x^3 = \frac{1}{2}$

$\therefore \; 3sin\theta - 4sin^3\theta = \frac{1}{2}$ $\qquad$ ($x = sin\theta$ લેતાં)

$\therefore \; sin3\theta = \frac{1}{2} = sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ એક ઉકેલ $\theta = \frac{\pi}{18}$

$\therefore \; sin\frac{\pi}{18}$ એ આપેલ સમીકરણનું બીજ છે.

વિધાન II એ વિધાન I ની સાચી સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ : (A)**

(183) **વિધાન I :** $\sum_{i=1}^{n} sin^2\theta_i = 0$ હોય, તો $cos\theta_1 + cos\theta_2 + ... + cos\theta_n = n - 4$ થાય, તેવા

$(\theta_1, \theta_2, \theta_3, ..., \theta_n)$ ની ભિન્ન n-ટુપલની સંખ્યા $\frac{n(n-1)}{2}$ છે.

વિધાન II : $\sum_{i=1}^{n} sin^2\theta_i = 0 \Rightarrow cos\theta_1, cos\theta_2, ..., cos\theta_n = \pm 1$

ઉકેલ : વિધાન II : $\sum_{i=1}^{n} sin^2\theta_i = 0$

$\therefore \; sin^2\theta_1 + sin^2\theta_2 + ... + sin^2\theta_n = 0$

$\therefore \; sin\theta_1 = sin\theta_2 = ... = sin\theta_n = 0$

$\therefore \; cos^2\theta_1 = cos^2\theta_2 = ... = cos^2\theta_n = 1$

$\therefore$ $cos\theta_1 = cos\theta_2 = ... = cos\theta_n = \pm 1$

$\therefore$ વિધાન II સત્ય છે.

હવે, વિધાન I : $\sum_{i=1}^{n} sin^2\theta_i = 0$

$\therefore$ $cos\theta_1 = cos\theta_2 = ... = cos\theta_n = \pm 1$ થાય.

હવે $cos\theta_1 + cos\theta_2 + ... + cos\theta_n = n - 4$ થવા માટે, કોઈપણ $(n - 2)$ $cos\theta_i$ ની કિંમતો 1 બાકીના બેની -1 થવી જોઈએ.

આમ, કુલ n સંખ્યામાંથી કોઈપણ બે સંખ્યા -1 હોય તેવી પસંદગી ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ રીતે થાય.

$\therefore$ વિધાન I સત્ય છે. વિધાન II સત્ય છે. **જવાબ : (A)**

(184) **વિધાન I :** $tan3.5 < tan8$

વિધાન II : tan પ્રત્યેક ચરણમાં વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : વિધાન II : tan પ્રત્યેક ચરણમાં વધતું વિધેય છે સત્ય છે.

વિધાન I : P(3.5) ત્રીજા ચરણમાં છે, જ્યાં tan ધન છે. $\left(\pi < 3.5 < \frac{3\pi}{2}\right)$

$\frac{5\pi}{2} < 8 < 3\pi$

$\therefore$ P(8) બીજા ચરણમાં છે.

$\therefore$ $tan8 < 0$

$\therefore$ $tan3.5 > tan8$

$\therefore$ વિધાન II સત્ય છે, વિધાન I અસત્ય છે. **જવાબ : (D)**

(185) **વિધાન I :** $sin^{-1}x + cos^{-1}x + tan^{-1}x$ નો વિસ્તાર $(0, \pi)$ છે.

વિધાન II : $sin^{-1}x + cos^{-1}x + tan^{-1}x = \frac{\pi}{2} + tan^{-1}x, \forall x \in [-1, 1]$

ઉકેલ : વિધાન II : $\forall x \in [-1, 1]$, $sin^{-1}x + cos^{-1}x + tan^{-1}x = \frac{\pi}{2} + tan^{-1}x$ સત્ય છે જ.

વિધાન I : $sin^{-1}x + cos^{-1}x + tan^{-1}x$ માટે $-1 \le x \le 1$ જરૂરી છે.

$\therefore$ $sin^{-1}x + cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ તથા $-\frac{\pi}{4} \le tan^{-1}x \le \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $\frac{\pi}{4} \le sin^{-1}x + cos^{-1}x + tan^{-1}x \le \frac{3\pi}{4}$

$\therefore$ વિસ્તાર $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ મળે.

$\therefore$ વિધાન I અસત્ય છે. વિધાન II સત્ય છે. **જવાબ : (D)**

(186) **વિધાન I :** $cos^{-1}x + cos^{-1}2x + \pi = 0$ ના ઉકેલની સંખ્યા 0 છે.

વિધાન II : $cot^{-1}x$ નો વિસ્તાર $(0, \pi)$ અને $cos^{-1}x$ નો વિસ્તાર $[0, \pi]$ છે.

ઉકેલ : વિધાન II : $cot^{-1}x$ નો વિસ્તાર $(0, \pi)$ અને $cos^{-1}x$ નો વિસ્તાર $[0, \pi]$ છે. આ વિધાન સત્ય છે.

વિધાન I : હવે, વિધાન II પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$cos^{-1}x + cos^{-1}2x = -\pi$ શક્ય નથી.

$\therefore$ આ સમીકરણના ઉકેલની સંખ્યા શૂન્ય (0) છે.

આથી વિધાન I સત્ય છે. તેની સાચી સમજ વિધાન II પરથી મળે છે. **જવાબ : (A)**

(187) **વિધાન I :** $sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) > tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)$

વિધાન II : $sin^{-1}x > tan^{-1}y$ જ્યાં $x > y,\ \forall x, y \in (0, 1)$

ઉકેલ : વિધાન II : $sin^{-1}x = tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > tan^{-1}x > tan^{-1}y$

$\therefore$ વિધાન II સત્ય છે.

વિધાન I : $e < \pi$. આથી, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} < \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\therefore$ $sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{e}} > tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, જ્યાં $0 < \frac{1}{\sqrt{\pi}} < \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$ છે.

$\therefore$ વિધાન II એ વિધાન I ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ : (A)**

(188) **વિધાન I :** $cosec^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > sec^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

વિધાન II : $cosec^{-1}x < sec^{-1}x$, જ્યાં $1 \le x < \sqrt{2}$

ઉકેલ : વિધાન II : $1 \le x < \sqrt{2}$ આપેલ છે.

$$cosec^{-1}x < sec^{-1}x \iff cosec^{-1}x < \frac{\pi}{2} - cosec^{-1}x$$

$$\iff 2cosec^{-1}x < \frac{\pi}{2}$$

$$\iff cosec^{-1}x < \frac{\pi}{4}$$

$$\iff 1 \le x < \sqrt{2}$$

$\therefore$ વિધાન II સત્ય છે.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}} \in (1, \sqrt{2})$ છે.

$\therefore$ $cosec^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < sec^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ થવું જોઈએ.

$\therefore$ વિધાન I અસત્ય છે.

વિધાન II સત્ય છે, વિધાન I અસત્ય છે. **જવાબ : (D)**

(189) $f(x) = sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ માટે,

વિધાન I : $f'(2) = -\frac{2}{5}$

વિધાન II : $sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \pi - 2tan^{-1}x,\ \forall x > 1$

ઉકેલ : વિધાન II : $sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ માં, $x = tan\theta$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ લેતાં, $\theta = tan^{-1}x$ મળે.

$\theta = tan^{-1}x$, $x = tan\theta$, $x > 1$ લેતાં $tan\theta > 1$

$\therefore \quad \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad \frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$

$\therefore \quad -\frac{\pi}{2} < 2\theta - \pi < 0$

$sin(2\theta - \pi) = -sin2\theta$

$\therefore \quad sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = sin^{-1}\left(\frac{2tan\theta}{1+tan^2\theta}\right) = sin^{-1}(sin2\theta) = -\ sin^{-1}(-sin2\theta) = sin^{-1}(-sin(2\theta - \pi))$

$= \pi - 2\theta = \pi - 2tan^{-1}x$

આથી વિધાન II સત્ય છે.

વિધાન I : $f(x) = sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

$x = 2 \Rightarrow x > 1$

$\therefore \quad f(x) = \pi - 2tan^{-1}x$

$f'(x) = \frac{-2}{1+x^2}$

$f'(2) = -\frac{2}{5}$

વિધાન I પણ સત્ય છે.

વિધાન I અને વિધાન II બંને સત્ય છે. વિધાન II એ વિધાન Iની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ : (A)**

(190) **વિધાન I :** $cos^{-1}(cos(30)) = 30 - 9\pi$

વિધાન II : $30 - 9\pi \in [0, \pi]$

ઉકેલ : વિધાન II : $0 < 30 - 9\pi < \pi$ કારણ કે $3 < \pi < \frac{10}{3}$

$\therefore$ વિધાન II સત્ય છે.

વિધાન I : હવે $cos(30 - 9\pi) = -cos30$

$\therefore \quad cos^{-1}(cos30) = cos^{-1}(-cos(30 - 9\pi))$

$= \pi - cos^{-1}(cos(30 - 9\pi))$

$= \pi - 30 + 9\pi$

$= 10\pi - 30$

$\therefore$ વિધાન II સત્ય છે, વિધાન I અસત્ય છે. **જવાબ : (D)**

(191) **વિધાન I :** $cos\frac{\pi}{7}\,cos\frac{2\pi}{7}\,cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$

વિધાન II : $\prod_{i=0}^{n-1} cos2^i\theta = -\frac{1}{2^n}$ જ્યાં $\theta = \frac{\pi}{2^n - 1}$

ઉકેલ : $cos\theta\, cos2\theta\, cos2^2\theta \ldots cos2^{n-1}\theta = \frac{sin(2^n\theta)}{2^n sin\theta}$

$$= \frac{sin\left(2^n \cdot \frac{\pi}{2^n - 1}\right)}{2^n sin\left(\frac{\pi}{2^n - 1}\right)} = \frac{sin\left(\pi + \frac{\pi}{2^n - 1}\right)}{2^n sin\left(\frac{\pi}{2^n - 1}\right)} = -\frac{1}{2^n}$$

∴ વિધાન II સત્ય છે.

હવે વિધાન II માં $n = 3$ લેતાં,

$cos\theta cos2\theta cos2^2\theta = cos\theta cos2\theta\, cos4\theta = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$ થાય. જ્યાં $\theta = \frac{\pi}{2^3-1} = \frac{\pi}{7}$

∴ $cos\frac{\pi}{7}cos\frac{2\pi}{7}cos\frac{4\pi}{7} = \frac{-1}{8}$

∴ વિધાન I સત્ય છે.

વિધાન I સત્ય થાય તે માટેની સમજ વિધાન II માં છે. **જવાબ : (A)**

(192) **વિધાન I :** એવા કોઈ ભિન્ન વાસ્તવિક x, y ન મળે કે જેથી $sec^2\theta = \frac{4xy}{(x+y)^2}$ થાય. જ્યાં $\theta \in R$

વિધાન II : $\forall\theta,\ sec^2\theta \geq 1$

ઉકેલ : વિધાન II : $\forall\theta,\ sec^2\theta \geq 1$ સત્ય છે.

વિધાન I : હવે, ધારો કે $sec^2\theta = \frac{4xy}{(x+y)^2}$

વળી, $sec^2\theta \geq 1 \Leftrightarrow \frac{4xy}{(x+y)^2} \geq 1$

$\Leftrightarrow 4xy \geq x^2 + 2xy + y^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow x - y = 0$

$\Leftrightarrow x = y \neq 0$

∴ જો $(x = y) \neq 0$ હોય, તો $sec^2\theta = \frac{4xy}{(x+y)^2}$ શક્ય છે. આથી ભિન્ન x, y મળતા નથી.

∴ વિધાન I સત્ય છે.

તેની સમજ વિધાન II માં છે. **જવાબ : (A)**

(193) **વિધાન I :** $f(x) = \frac{1}{6sinx - 8cosx + 5}$ ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમત વ્યાખ્યાયિત નથી.

વિધાન II : વિધેય $f(x)$ અસીમિત છે.

ઉકેલ : વિધાન I : $f(x) = \frac{1}{6sinx - 8cosx + 5}$

∴ $g(x) = 6sinx - 8cosx$

$g(x) = 6sinx - 8cosx$ નો વિસ્તાર $\left[-\sqrt{36+64}, \sqrt{36+64}\right] = [-10, 10]$

$-10 \leq 6sinx - 8cosx \leq 10$

$-5 \leq 6sinx - 8cosx + 5 \leq 15$

∴ $-5 \leq \frac{1}{f(x)} \leq 15$

∴ $f(x) \leq -\frac{1}{5}$ અથવા $f(x) \geq \frac{1}{15}$

$\therefore$ $f(x)$ નો વિસ્તાર $R - \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{15}\right)$ છે.

$\therefore$ f અસીમિત વિધેય છે.

$\therefore$ વિધાન II સત્ય છે.

જો f અસીમિત વિધેય હોય, તો તેની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમત ન મળે.

$\therefore$ વિધાન I સત્ય છે. જેનું કારણ વિધાન II છે. **જવાબ : (A)**

(194) **વિધાન I :** $tan\alpha + 2tan2\alpha + 4tan4\alpha + 8tan8\alpha + 16cot16\alpha = cot\alpha$

વિધાન II : $cot\alpha - tan\alpha = 2cot2\alpha$

ઉકેલ : વિધાન II : $cot\alpha - tan\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha} - \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{sin\alpha\, cos\alpha} = \frac{cos2\alpha}{\frac{1}{2}\cdot sin2\alpha} = 2cot2\alpha$

વિધાન I :

ડા.બા. $= tan\alpha + 2tan2\alpha + 4tan4\alpha + 8tan8\alpha + 16cot16\alpha$

$= tan\alpha + 2tan2\alpha + 4tan4\alpha + 8tan8\alpha + 8(cot8\alpha - tan8\alpha)$

((1) પરથી $2cot16\alpha = cot8\alpha - tan8\alpha$)

$= tan\alpha + 2tan2\alpha + 4tan4\alpha + 8cot8\alpha$

$= tan\alpha + 2tan2\alpha + 4tan4\alpha + 4(cot4\alpha - tan4\alpha)$

$= tan\alpha + 2tan2\alpha + 4cot4\alpha$

$= tan\alpha + 2tan2\alpha + 2(cot2\alpha - tan2\alpha)$

$= tan\alpha + 2cot2\alpha$

$= tan\alpha + (cot\alpha - tan\alpha)$

$= cot\alpha$

$\therefore$ વિધાન I સત્ય છે, જેની સમજ વિધાન II પરથી મળે છે. **જવાબ : (A)**

(195) **વિધાન I :** જો $\square ABCD$ ચક્રીય હોય, તો $sinA + sinB + sinC + sinD = 0$

વિધાન II : $\square ABCD$ ચક્રીય હોય, તો $cosA + cosB + cosC + cosD = 0$

ઉકેલ : $\square ABCD$ ચક્રીય છે.

$A + C = \pi$ તથા $B + D = \pi$

$A = \pi - C$	$B = \pi - D$
$cosA = cos(\pi - C)$	$cosB = cos(\pi - D)$
$\therefore$ $cosA = -cosC$	$cosB = -cosD$
$\therefore$ $cosA + cosC = 0$	$\Rightarrow cosB + cosD = 0$

$\therefore$ $cosA + cosB + cosC + cosD = 0$

$\therefore$ વિધાન II સત્ય છે.

વળી, $sinA = sin(\pi - C)$	$sinB = sin(\pi - D)$
$\therefore$ $sinA = sinC$	$sinB = sinD$

$\therefore$ $sinA - sinC = 0$ તથા $sinB - sinD = 0$

$\therefore$ $sinA + sinB - sinC - sinD = 0$

વિધાન I અસત્ય છે. **જવાબ : (D)**

(196) એક સમબાજુ ત્રિકોણની અંતર્ગત વર્તુળ છે. વર્તુળની અંતર્ગત ચોરસ છે. જ્યાં સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુનું માપ a છે.

વિધાન I : ચોરસનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{a^2}{6}$ ચો એકમ

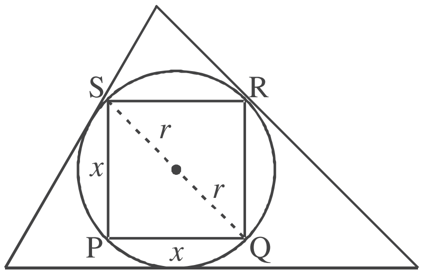
વિધાન II : વર્તુળની ત્રિજ્યા અને ચોરસની બાજુની લંબાઈ સમાન છે.

ઉકેલ : વિધાન II : ધારો કે ચોરસની બાજુની લંબાઈ x એકમ છે.

$x^2 + x^2 = 4r^2$

$\therefore$ $2x^2 = 4r^2$. આથી, $x = \sqrt{2}\,r$

$\therefore$ વિધાન II અસત્ય છે.



આકૃતિ 12.18

વિધાન I : $r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3a}{2}}$ (ΔABC સમબાજુ છે.)

$= \frac{a}{2\sqrt{3}}$

$\therefore$ $x^2 = \frac{2a^2}{12}$. આથી, $x^2 = \frac{a^2}{6}$

$\therefore$ ચોરસનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{a^2}{6}$ છે.

વિધાન I સત્ય છે. **જવાબ : (C)**

(197) એક કાટકોણ ત્રિકોણમાં અંતર્ગત વર્તુળ આવેલ છે, જ્યાં B કાટખૂણો છે.

વિધાન I : વર્તુળનો વ્યાસ AB + BC − AC છે.

વિધાન II : વર્તુળની ત્રિજ્યા $= \frac{\text{ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ}}{\text{ત્રિકોણની અર્ધપરિમિતિ}}$

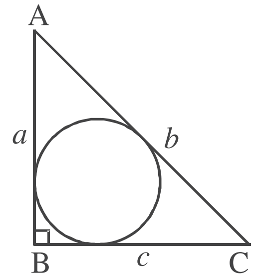
ઉકેલ : વિધાન II : વર્તુળની ત્રિજ્યા $= \frac{\text{ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ}}{\text{ત્રિકોણની અર્ધપરિમિતિ}}$

$\therefore$ $r = \frac{\Delta}{s}$ સત્ય છે.

આથી વિધાન II સત્ય છે.

ΔABC કાટકોણ છે.

આથી $\Delta = \frac{1}{2}ac$



આકૃતિ 12.19

$\therefore$ $r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\frac{1}{2}ac}{s} = \frac{ac}{a+b+c}$ $(2s = a + b + c)$

$\therefore$ $r = \frac{ac(a+c-b)}{(a+b+c)(a+c-b)}$

$= \frac{ac(a+c-b)}{(a+c)^2 - b^2} = \frac{ac(a+c-b)}{a^2 + 2ac + c^2 - b^2} = \frac{a+c-b}{2}$ $(a^2 + c^2 = b^2)$

$\therefore$ વ્યાસ $= a + c - b =$ BC + AB − AC થાય.

$\therefore$ વિધાન II એ વિધાન I ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ : (A)**

(198) **વિધાન I :** $tan^{-1}x + tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \forall x \in R$

વિધાન II : $tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in R$

ઉકેલ : વિધાન II : $\forall x \in R, tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ સત્ય છે.

વિધાન I : આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$tan^{-1}\frac{1}{x} = \begin{cases} cot^{-1}x; & x > 0 \\ -\pi + cot^{-1}x; & x < 0 \end{cases}$$

હવે $x < 0$ લેતાં, $tan^{-1}\frac{1}{x} + tan^{-1}x$

$= tan^{-1}x - \pi + cot^{-1}x$

$= (tan^{-1}x + cot^{-1}x) - \pi$

$= -\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ વિધાન I અસત્ય છે. આથી વિધાન II સત્ય છે, વિધાન I અસત્ય છે. **જવાબ : (D)**

જોડકાં જોડો પ્રકારના પ્રશ્નો

(199) I અને II ને જોડો : [JEE Adv. : 2013]

I	II
(P) $\left[\frac{1}{y^2}\left(\frac{cos(tan^{-1}y) + ysin(tan^{-1}y)}{cot(sin^{-1}y) + tan(sin^{-1}y)}\right)^2 + y^4\right]^{\frac{1}{2}}$	(1) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$
(Q) $cosx + cosy + cosz = 0$ $sinx + siny + sinz = 0$ તો $cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ ની શક્ય કિંમત	(2) $\sqrt{2}$
(R) $cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)cos2x + sinx \cdot sin2x \ secx$ $= cosx \ sin2x \ secx + cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)cos2x$ તો $secx$ ની શક્ય કિંમતો	(3) $\frac{1}{2}$
(S) $cot\left(sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right) = sin\left(tan^{-1}\left(x\sqrt{6}\right)\right), x \neq 0$	(4) 1

Codes :

	P	Q	R	S
(A)	(4)	(3)	(1)	(2)
(B)	(4)	(3)	(2)	(1)
(C)	(3)	(4)	(2)	(1)
(D)	(3)	(4)	(1)	(2)

ઉકેલ : (P) $\left[\frac{1}{y^2}\left(\frac{cos(tan^{-1}y) + ysin(tan^{-1}y)}{cot(sin^{-1}y) + tan(sin^{-1}y)}\right)^2 + y^4\right]^{\frac{1}{2}}$

$$= \left[\frac{1}{y^2}\left\{\frac{cos\left(cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right) + ysin\left(sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)}{cot\left(cot^{-1}\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\right) + tan\left(tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)}\right\}^2 + y^4\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{y^2}\left\{\frac{\frac{1+y^2}{\sqrt{1+y^2}}}{\frac{1-y^2+y^2}{y\sqrt{1-y^2}}}\right\}^2 + y^4\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{y^2}\left\{\sqrt{1+y^2}\cdot y\sqrt{1-y^2}\right\}^2 + y^4\right]^{\frac{1}{2}} = \left[1 - y^4 + y^4\right]^{\frac{1}{2}} = 1 \qquad (P) \rightarrow (4)$$

(Q) $cosx + cosy + cosz = 0$ અને $sinx + siny + sinz = 0$

$\therefore$ $cosx + cosy = -cosz$ અને $sinx + siny = -sinz$

$(cosx + cosy)^2 + (sinx + siny)^2 = 1$

$\therefore$ $2 + 2cosx\,cosy + 2sinx\,siny = 1$

$\therefore$ $2 + 2cos(x - y) = 1$

$\therefore$ $cos(x - y) = -\frac{1}{2}$

$$cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1 + cos(x-y)}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ $cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}$

અહીં વિકલ્પ (3) માં $\frac{1}{2}$ આપેલ છે. $\qquad$ (Q) $\rightarrow$ (3)

(R) $cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)cos2x + sinx\,sin2x\;secx = cosx\,sin2x\;secx + cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)cos2x$

$\therefore$ $cos2x\left[cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right] = sin2x\,secx(cosx - sinx)$

$\therefore$ $2sin\frac{\pi}{4}\,sinx\,cos2x = 2sinx(cosx - sinx)$

$\therefore$ $2sinx\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(cos^2x - sin^2x) - (cosx - sinx)\right] = 0$

$\therefore$ $2sinx(cosx - sinx)\left[\frac{cosx + sinx}{\sqrt{2}} - 1\right] = 0$

$\therefore \quad 2sinx(cosx - sinx)(cosx + sinx - \sqrt{2}) = 0$

$\therefore \quad sinx = 0$ અથવા $tanx = 1$ અથવા $cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 = cos0$

$\therefore \quad cosx = \pm 1$ અથવા $secx = \pm\sqrt{2}$ અથવા $x = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \quad secx = \pm 1$ અથવા $\sqrt{2}$ (R) $\rightarrow$ (2)

(S) $cot\left(sin^{-1}\sqrt{1 - x^2}\right) = sin\left(tan^{-1}x\sqrt{6}\right)$

$\therefore \quad cot\left(cot^{-1}\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = sin\left(sin^{-1}\frac{x\sqrt{6}}{\sqrt{1 + 6x^2}}\right)$

$\therefore \quad \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{x\sqrt{6}}{\sqrt{1 + 6x^2}}$

$\therefore \quad 1 + 6x^2 = 6(1 - x^2)$

$\therefore \quad 12x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$ (S) $\rightarrow$ (1)

આમ, (P) $\rightarrow$ (4), (Q) $\rightarrow$ (3), (R) $\rightarrow$ (2), (S) $\rightarrow$ (1)

નોંધ : ખરેખર Q ની ગણતરી સરળ છે. તે પહેલાં કરતાં (Q) $\rightarrow$ (3) મળે. આથી જવાબ (A) કે (B) જ હોઈ શકે. હવે સરળ (S) ગણતાં (S) $\rightarrow$ (1) મળે. આથી જવાબ (B) છે. **જવાબ : (B)**

(200) સમીકરણ $sin^{-1}ax + cos^{-1}y + cos^{-1}(bxy) = \frac{\pi}{2}$ નું સમાધાન કરતી ક્રમયુક્ત જોડ (x, y)

	I		**II**
(A)	$a = 1, b = 0$	(P)	(x, y) વર્તુળ $x^2 + y^2 = 1$ પર છે.
(B)	$a = 1, b = 1$	(Q)	(x, y) એ $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0$ પર છે.
(C)	$a = 1, b = 2$	(R)	$y = x$ રેખા પર છે.
(D)	$a = 2, b = 2$	(S)	$(4x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0$ પર છે.

(A) (A) $\rightarrow$ (P) (B) $\rightarrow$ (Q) (C) $\rightarrow$ (S) (D) $\rightarrow$ (R)

(B) (A) $\rightarrow$ (Q) (B) $\rightarrow$ (P) (C) $\rightarrow$ (S) (D) $\rightarrow$ (R)

(C) (A) $\rightarrow$ (P) (B) $\rightarrow$ (Q) (C) $\rightarrow$ (P) (D) $\rightarrow$ (S)

(D) (A) $\rightarrow$ (Q) (B) $\rightarrow$ (P) (C) $\rightarrow$ (R) (D) $\rightarrow$ (S)

ઉકેલ : $cos^{-1}y + cos^{-1}(bxy) = \frac{\pi}{2} - sin^{-1}(ax)$

$\therefore \quad cos^{-1}y + cos^{-1}(bxy) = cos^{-1}(ax)$

ધારો કે $cos^{-1}y = \alpha$, $cos^{-1}(bxy) = \beta$, $cos^{-1}(ax) = \gamma$, $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi$

$\therefore \quad \alpha + \beta = \gamma$

$\therefore \quad cos(\alpha + \beta) = cos\gamma$

$\therefore \quad cos\alpha\, cos\beta - sin\alpha\, sin\beta = cos\gamma$

$\therefore \quad y(bxy) - \sqrt{1 - y^2}\sqrt{1 - b^2x^2y^2} = ax$

$\therefore \quad \sqrt{(1 - y^2)}\sqrt{1 - b^2x^2y^2} = ax - bxy^2$

$\therefore\ (1 - y^2)(1 - b^2x^2y^2) = (ax - bxy^2)^2$

$\therefore\ 1 - b^2x^2y^2 - y^2 + b^2x^2y^4 = a^2x^2 - 2bax^2y^2 + b^2x^2y^4$

$\therefore\ a^2x^2 + y^2 + b^2x^2y^2 - 2abx^2y^2 - 1 = 0$

$\therefore\ a^2x^2 + y^2 + (b^2 - 2ab)x^2y^2 - 1 = 0$

(A) $a = 1,\ b = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ આથી (A) $\rightarrow$ (P)

(B) $a = 1,\ b = 1$

$\Rightarrow\ x^2 + y^2 - x^2y^2 - 1 = 0$ આથી (B) $\rightarrow$ (Q)

$\Rightarrow\ (y^2 - 1)(x^2 - 1) = 0$

(C) $a = 1,\ b = 2$

$\Rightarrow\ x^2 + y^2 = 1$ આથી (C) $\rightarrow$ (P)

(D) $a = 2,\ b = 2$

$4x^2 + y^2 - 4x^2y^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow\ (4x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0$ આથી (D) $\rightarrow$ (S)

(A) $\rightarrow$ (P), (B) $\rightarrow$ (Q), (C) $\rightarrow$ (P), (D) $\rightarrow$ (S)

માત્ર (A) $\rightarrow$ (P), (C) $\rightarrow$ (P) પરથી જવાબ મળી જાય. **જવાબ : (C)**

(201) એક રેખા પરનાં ત્રણ બિંદુ A, B, C થી એક ફૂગ્ગાનું અવલોકન કરવામાં આવે છે. B આગળના બિંદુથી ઉત્સેધકોણનું માપ A આગળના બિંદુથી ઉત્સેધકોણના માપ કરતાં બમણું છે. C આગળના ઉત્સેધકોણનું માપ, A આગળના બિંદુના ઉત્સેધકોણના માપ કરતા ત્રણ ગણું છે.

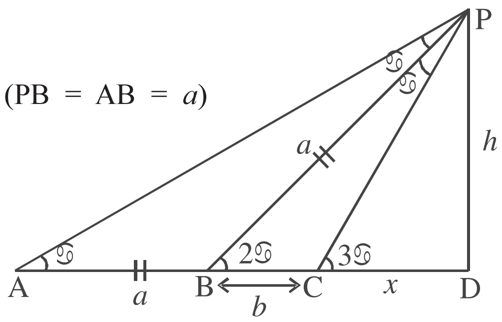
જો A અને B વચ્ચેનું અંતર a, B અને C વચ્ચેનું અંતર b હોય, તો ફૂગ્ગાની ઊંચાઈ ...... છે.

(A) $\frac{a}{2b}\sqrt{(a+b)(3b+a)}$ (B) $\frac{a}{2b}\sqrt{(a-b)(3b-a)}$

(C) $\frac{2a}{b}\sqrt{(a+b)(3b-a)}$ (D) $\frac{a}{2b}\sqrt{(a+b)(3b-a)}$

ઉકેલ : ΔPBC માં *sin* સૂત્ર પરથી,

(1) (PB = AB = a)



આકૃતિ 12.20

$$\frac{a}{sin(180 - 3\alpha)} = \frac{b}{sin\alpha} = \frac{PC}{sin2\alpha}$$

$$\therefore\ \frac{a}{3sin\alpha - 4sin^3\alpha} = \frac{b}{sin\alpha} = \frac{PC}{2sin\alpha\, cos\alpha}$$

$$\therefore\ \frac{a}{3 - 4sin^2\alpha} = \frac{b}{1} = \frac{PC}{2cos\alpha}$$

$$\therefore\ 3 - 4sin^2\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\therefore\ 4sin^2\alpha = 3 - \frac{a}{b} = \frac{3b - a}{b}$$

$$\therefore\ sin^2\alpha = \frac{3b - a}{4b},\quad cos^2\alpha = \frac{b + a}{4b}$$

ΔPCD માં $sin3\alpha = \frac{h}{PC}$

$\therefore\ h = PC sin3\alpha$

$= a sin 2\alpha$ ((1) પરથી $PC sin 3\alpha = a sin 2\alpha$)

$= a(2 sin\alpha \, cos\alpha)$

$= a(2)\sqrt{\frac{3b-a}{4b}}\sqrt{\frac{b+a}{4b}}$

$h = \frac{a}{2b}\sqrt{(a+b)(3b-a)}$ **જવાબ : (D)**

(202) એક શિરોલંબ ટાવરનું જમીન પરનું બિંદુ Q છે. A અને B જમીન પરનાં બે ભિન્ન બિંદુઓ છે. જેમની વચ્ચેનું અંતર d મીટર છે. આ ટાવરની ટોચના A અને B ના આગળના ઉત્સેધકોણ અનુક્રમે α અને β છે. $\overline{AB}$ એ Q આગળ γ માપનો ખૂણો બનાવે છે, તો ટાવરની ઊંચાઈ ......

(A) $\frac{d}{\sqrt{cot^2\alpha + cot^2\beta - 2cot\alpha \, cot\beta \, cos\gamma}}$ (B) $\frac{d}{\sqrt{cot^2\alpha + cot^2\beta + 2cot\alpha \, cot\beta \, cos\gamma}}$

(C) $d\sqrt{cot^2\alpha + cot^2\beta - 2cot\alpha \, cot\beta \, cos\gamma}$ (D) આમાંથી એકપણ નહિ.

ઉકેલ : ΔAPQ માં $tan\alpha = \frac{h}{AQ}$

$\therefore AQ = \frac{h}{tan\alpha}$ (1)

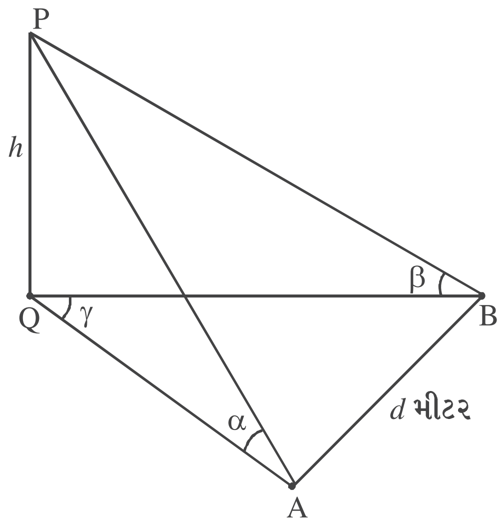
ΔBPQ માં $tan\beta = \frac{h}{BQ}$

$\therefore BQ = \frac{h}{tan\beta}$ (2)

ΔABQ માં, $cos\gamma = \frac{AQ^2 + BQ^2 - AB^2}{2AQ \cdot BQ}$

$cos\gamma = \frac{h^2 cot^2\alpha + h^2 cot^2\beta - d^2}{2h^2 cot\alpha \, cot\beta}$

$\therefore 2h^2 cot\alpha \, cot\beta \, cos\gamma = h^2 cot^2\alpha + h^2 cot^2\beta - d^2$



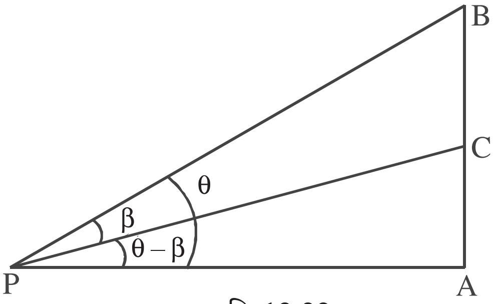
આકૃતિ 12.21

$\therefore h = \frac{d}{\sqrt{cot^2\alpha + cot^2\beta - 2cot\alpha \, cot\beta \, cos\gamma}}$ **જવાબ : (A)**

(203) જમીનને શિરોલંબ ટાવર $\overline{AB}$ છે તથા બિંદુ A અને P જમીન પરનાં બિંદુઓ છે. $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ C છે. $\overline{CB}$ એ P આગળ β માપનો ખૂણો બનાવે છે. $AP = nAB$ હોય, તો $tan\beta$ = ...

(A) $\frac{n}{2n+1}$ (B) $\frac{n^2}{2n+1}$ (C) $\frac{n}{2n^2+1}$ (D) $\frac{n^2}{2n^2+1}$

ઉકેલ : ΔPAB માં $tan\theta = \frac{AB}{AP} = \frac{1}{n}$ (1)



આકૃતિ 12.22

હવે, ΔPAC માં $tan(\theta - \beta) = \frac{tan\theta - tan\beta}{1 + tan\theta\, tan\beta}$

$\therefore \frac{AC}{AP} = \frac{tan\theta - tan\beta}{1 + tan\theta\, tan\beta}$

$\therefore \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AP}\right) = \frac{\frac{1}{n} - tan\beta}{1 + \frac{1}{n}tan\beta}$ ((1) પરથી)

$\therefore \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1 - n\,tan\beta}{n + tan\beta}$

$\therefore n + tan\beta = 2n - 2n^2tan\beta$

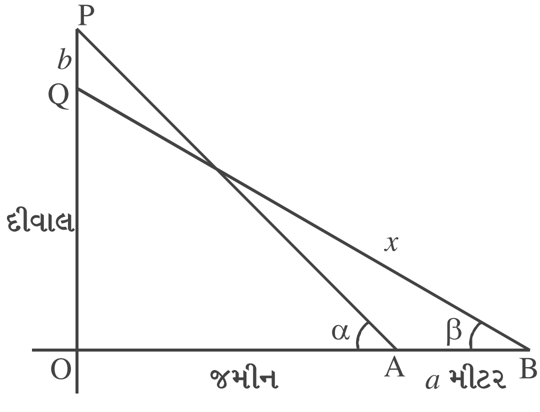
$\therefore (2n^2 + 1)tan\beta = n$

$\therefore tan\beta = \frac{n}{2n^2 + 1}$ **જવાબ : (C)**

(204) એક સીડી દીવાલ પર ટેકવેલી છે. તેના નીચેના છેડાનું જમીન સાથેના ખૂણાનું માપ β છે. હવે જ્યારે સીડીનો નીચેનો છેડો દીવાલ તરફ a મીટર ખસે, ત્યારે સીડીનો ઉપરનો છેડો દીવાલ ઉપર b મીટર ખસે છે. તે વખતે તેનો નીચેનો છેડો જમીન સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે છે, તો $\frac{a}{b}$ = ...

(A) $tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ (B) $tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ (C) $tan\alpha + tan\beta$ (D) $1 + tan\alpha\, tan\beta$

ઉકેલ : ધારો કે સીડીની લંબાઈ x મીટર છે.



આકૃતિ 12.23

હવે કાટકોણ ત્રિકોણ OBQ માં $cos\beta = \frac{OB}{BQ}$

$\therefore cos\beta = \frac{OB}{x}$

$\therefore OB = xcos\beta,\ sin\beta = \frac{OQ}{BQ} = \frac{OQ}{x}$

$\therefore OQ = xsin\beta$

કાટકોણ ΔOPA માટે $cos\alpha = \frac{OA}{PA}$ | $sin\alpha = \frac{OP}{AP} = \frac{OP}{x}$

$\therefore OA = xcos\alpha$ | $\therefore OP = xsin\alpha$

$a = OB - OA = x(cos\beta - cos\alpha)$

$b = OP - OQ = x(sin\alpha - sin\beta)$

$$\frac{a}{b} = \frac{cos\beta - cos\alpha}{sin\alpha - sin\beta} = \frac{2sin\frac{\beta+\alpha}{2}sin\left(\frac{-\beta+\alpha}{2}\right)}{2cos\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$\therefore \frac{a}{b} = tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ **જવાબ : (B)**

• • •