P3N5G2

അധ്യായം 10

നേർവരകൾ (STRAIGHT LINES)

❖മനുഷ്യന്റെ ചിന്താശേഷി കുട്ടികൾക്കു ബോധ്യപ്പെടുത്താനുതകുന്ന ഏറ്റവും ശക്തമായ മാർഗമാണ് യുക്തിഭദ്രമായ ഒരു വ്യവസ്ഥ എന്ന നിലയിൽ ജ്യാമിതി – എച്ച്. ഫ്രെയ്ഡൻതൽ ❖

10.1 ആമുഖം

സൂചകസംഖ്യകളെക്കുറിച്ച് (coordinates) മുൻ ക്ലാസുകളിൽ നാം മനസിലാക്കിയിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇത് ജ്യാമിതിയുടെയും ബീജഗണിതത്തിന്റെയും ഒരു സംയോജിത രൂപമാണ്. ബീജഗണിതത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ ജ്യാമിതിയിൽ ചിട്ടയോടുകൂടിയ പഠനം ആദ്യമായി നടത്തിയത് പ്രശസ്ത ഫ്രഞ്ച് തത്വചിന്തകനും ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനുമായ റെനെ ദെക്കാർത്തെയാണ്. ഇതിനെ സംബന്ധിച്ച് 1637–ൽ അദ്ദേഹം 'La G'eom'etry' എന്ന പുസ്തകം പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു. ഈ പുസ്തകത്തിൽ വക്രങ്ങളുടെ സമവാക്യത്തെയും അവയുടെ ജ്യാമിതിയെക്കുറിച്ചും വിശദമായി പ്രതിപാദിക്കുന്നു. ഈ ജ്യാമിതി ‘അനലിറ്റിക്കൽ ജ്യാമിതി’ (Analytical Geometry) എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

റെനെ ദെക്കാർത്തെ
(1596 -1650)

പ്രധാന സൂത്രവാക്യങ്ങൾ

1. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം.

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2. (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ $m : n$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ

   (i) ആന്തരികമായി (Internally) വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദു $\left(\frac{m x_2 + n x_1}{m + n}, \frac{m y_2 + n y_1}{m + n}\right)$

   (ii) ബഹ്യമായി (Externally) വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദു $\left(\frac{m x_2 - n x_1}{m - n}, \frac{m y_2 - n y_1}{m - n}\right)$

   ആയിരിക്കും.

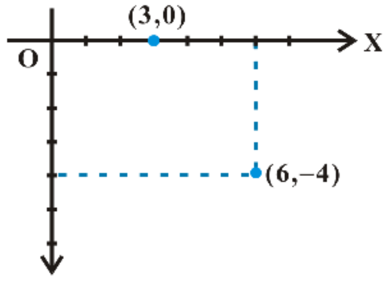
3. (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ആയിരിക്കും.

4. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) എന്നിവ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സൂചക സംഖ്യകളായാൽ ആ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]$$ ആയിരിക്കും.

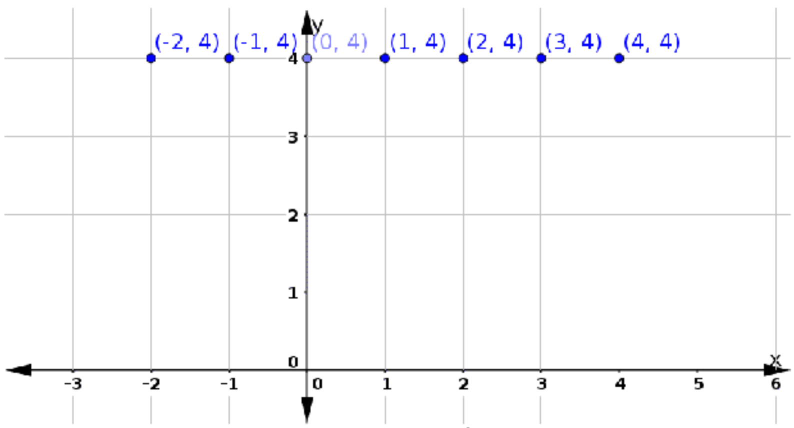
ഒരു തലത്തിലുള്ള ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം കൃത്യമായി പറയുവാനാണ് സൂചകസംഖ്യ കൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത് എന്ന് നമുക്കറിയാം. ഇതിനായി തലത്തിലെ പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ട് വരകളാണ് ആധാരമായി എടുക്കുന്നത്. x അക്ഷം (x - axis) എന്നും y അക്ഷം (y - axis) എന്നും ഈ വരകൾ അറിയപ്പെടുന്നു.

ചിത്രം 10.1 ൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യയാണല്ലോ (6, –4). ഈ ബിന്ദു x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയിൽ നിന്നും 6 യൂണിറ്റും y അക്ഷത്തിന്റെ ന്യൂനദിശയിൽ നിന്നും 4 യൂണിറ്റും അകലെയാണ് എന്നാണ് അർത്ഥമാക്കുന്നത്.



ചിത്രം 10.1

ഇത്തരത്തിൽ കുറെ ബിന്ദുക്കൾ നമുക്ക് XY തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിനോക്കാം.
(0, 4), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (-1, 4), (-2, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഇത്തരത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 10.2

ഈ ബിന്ദുക്കളുടെ പ്രത്യേകതകൾ നിരീക്ഷിക്കാം.

എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും y സൂചകസംഖ്യ 4 ആണ്. ഗ്രാഫിൽ ഇവയുടെ സ്ഥാനം ശ്രദ്ധിക്കുക. എന്താണ് നിരീക്ഷിക്കാൻ കഴിയുന്നത്?

ഇവയുടെ ഇടയിലെല്ലാം ഇതുപോലുള്ള അനേകം ബിന്ദുക്കളുണ്ട്? ഉദാഹരണമായി (1, 4) നും (2, 4) നും ഇടയിൽ തന്നെ അനന്തം ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ട്. ഇവയുടെയെല്ലാം y സൂചകസംഖ്യ 4 തന്നെയായിരിക്കും.

ഈ സംഖ്യകളെയെല്ലാം (y സൂചകസംഖ്യ 4 ആയ) XY തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ ഒരു നേർവര ലഭിക്കും.

അതായത് y സൂചകസംഖ്യ 4 ആയ എല്ലാബിന്ദുക്കളും അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ അത് ഒരു നേർവരയായി മാറുന്നു. ഈ വര x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി അക്ഷത്തിന് 4 യൂണിറ്റ് മുകളിലുമായിരിക്കും.

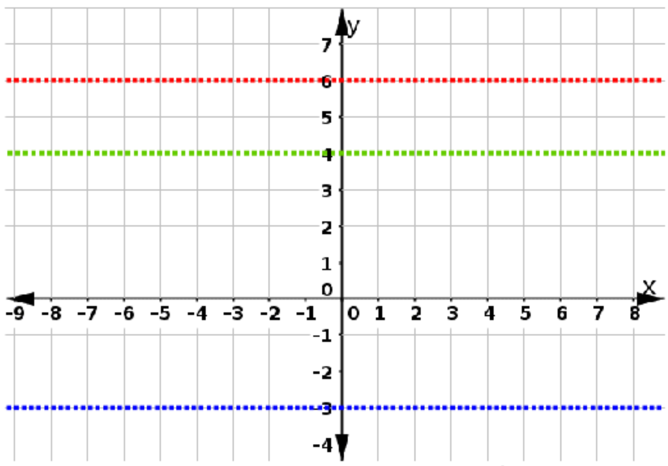
അതായത് ഈ വരയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടേയും y സൂചകസംഖ്യ 4 ആയിരിക്കും. മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ y സൂചകസംഖ്യ 4 ആയ ഏതൊരു ബിന്ദുവും ഈ വരയിലെ ബിന്ദു ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് $y = 4$ എന്നത് ഈ നേർവരയുടെ സമവാക്യമായി പരിഗണിക്കുന്നു.

പൊതുവെ, ഒരു വരയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും അനുസരിക്കേണ്ടതും ആ വരയിൽ അല്ലാത്ത ഒരു ബിന്ദുവും അനുസരിക്കാത്തതുമായ ഒരു നിബന്ധനയാണ് ആ വരയുടെ സമവാക്യം എന്നു പറയാം.

y സൂചകസംഖ്യ 6 ആയ ($y = 6$ എന്ന സമവാക്യമുള്ള) നേർവര സങ്കല്പിക്കാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ?

y സൂചകസംഖ്യ -3 ആയാലോ?

ഇത്തരത്തിലുള്ള എല്ലാ നേർവരകളും x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായിരിക്കില്ലേ?



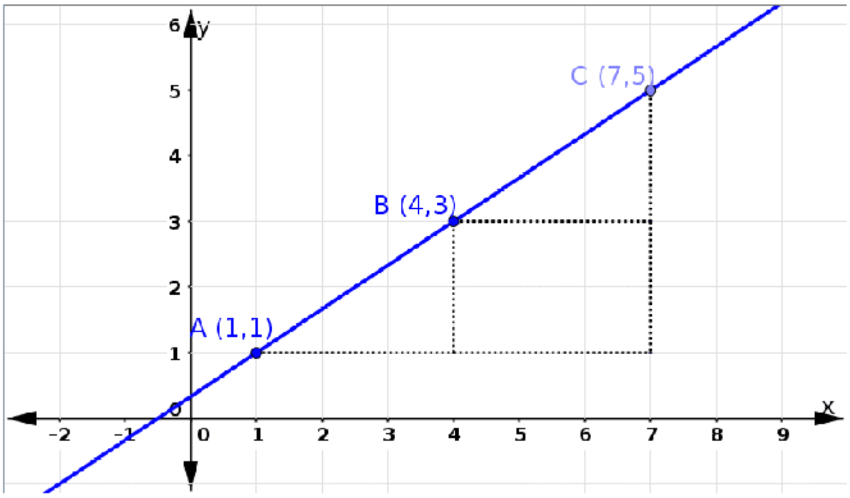
ചിത്രം 10.3

അതായത്, x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ഏതൊരു നേർവരയുടെയും സമവാക്യം $y = k$, (k ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ) ആയിരിക്കും.

ഇനി x സൂചകസംഖ്യ സ്ഥിരസംഖ്യ ആയാലോ?

ഇത്തരം വരകൾ y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായിരിക്കും. എങ്കിൽ y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ഏതൊരു വരയുടെയും സമവാക്യം $x = k$, (k ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ) ആയിരിക്കും.

10.2 വരയുടെ ചരിവ്



ചിത്രം 10.4

ചിത്രത്തിൽ A(1, 1), B(4, 3), (7, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു നേർവര വരച്ചിരിക്കുന്നു.

A എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് 3 യൂണിറ്റ് തിരശ്ചീനമായും 2 യൂണിറ്റ് ലംബമായും സഞ്ചരിച്ചാൽ B യിൽ എത്താമല്ലോ?

B യിൽ നിന്ന് C യിൽ എത്താനും ഇതേപോലെ 3 യൂണിറ്റ് തിരശ്ചീനമായും 2 യൂണിറ്റ് ലംബമായും സഞ്ചരിക്കണം.

A യിൽ നിന്നും C യിലെത്താൻ 6 യൂണിറ്റ് തിരശ്ചീനമായും 4 യൂണിറ്റ് ലംബമായും സഞ്ചരിക്കണം, അതായത് തിരശ്ചീനദൂരം 3 എങ്കിൽ ലംബദൂരം 2.

തിരശ്ചീനദൂരം 6 എങ്കിൽ ലംബദൂരം 4.

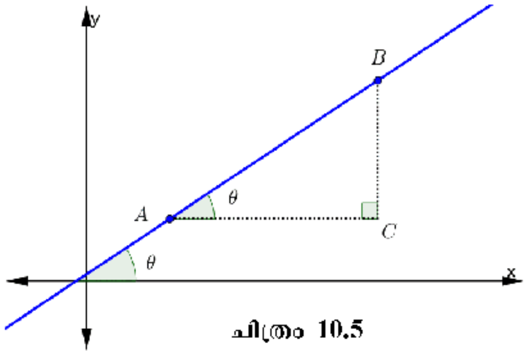
അതായത് $\frac{\text{ലംബദൂരം}}{\text{തിരശ്ചീനദൂരം}} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഇത്തരത്തിൽ ഈ നേർവരയിലെ ഏത് രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ എടുത്താലും $\frac{\text{ലംബദൂരം}}{\text{തിരശ്ചീനദൂരം}}$ ഒരേ അനുപാതത്തിൽ ആയിരിക്കും. ഈ അനുപാതത്തെ വരയുടെ ചരിവ് എന്നു പറയുന്നു.

അതാണ് A(1, 1) എന്ന ബിന്ദു B(4, 3) ആയപ്പോൾ x സൂചകസംഖ്യ 3 വർദ്ധിക്കുകയും y സൂചകസംഖ്യ 2 വർദ്ധിക്കുകയും ചെയ്തു എന്നർത്ഥം.

ഏതൊരു വരയിലും ഈ അനുപാതം സ്ഥിരസംഖ്യയാണ്. അതാണ് ആ വരയുടെ ചരിവ്.

ചിത്രം 10.5 ൽ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന വര നൽകിയിരിക്കുന്നു. ഈ വര x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി θ ഡിഗ്രി കോണുണ്ടാക്കുന്നു എന്ന് കരുതുക.



ചിത്രം 10.5

ഇവിടെ വരയുടെ ചരിവ് = $\frac{BC}{AC}$ ആണ്.

മട്ടത്രികോണം ACB പരിഗണിച്ചാൽ

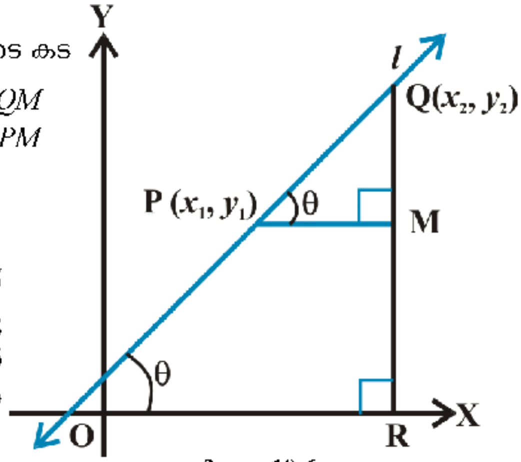
$\frac{BC}{AC} = \tan\theta$ യാണ്. അങ്ങനെയെങ്കിൽ ഒരു വരയുടെ ചരിവ്, ആ വര x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ tan വിലയാണെന്ന് പറയാം. ഇനി വര x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായാൽ $\theta = 0°$ ആകുന്നതുകൊണ്ട് ചരിവ് പൂജ്യമാകുന്നു. അതുപോലെ x അക്ഷത്തിന് ലംബമായാൽ $\theta = 90°$ ആകുകയും $\tan 90°$ നിർവചിച്ചിട്ടില്ലാത്തതുകൊണ്ട് ലംബവരക്ക് ചരിവ് നിർവചിച്ചിട്ടില്ല.

10.2.1 വരയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തന്നാൽ വരയുടെ ചരിവ് കാണുന്ന വിധം

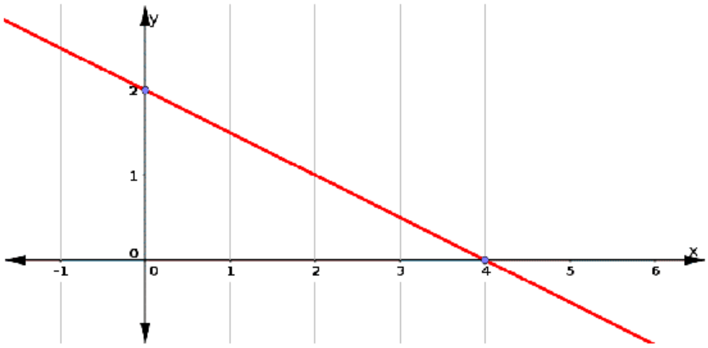
$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന ഒരു നേർവരയുടെ ചരിവ് $\frac{QM}{PM}$

$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ആണ്.

ഇത് $\tan\theta$ യും ആയിരിക്കും. θ എന്നത് ഈ വര x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി അപ്രദക്ഷിണ ദിശയിൽ (Anticlockwise) ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ ആണ്.



ചിത്രം 10.6



ചിത്രം 10.7

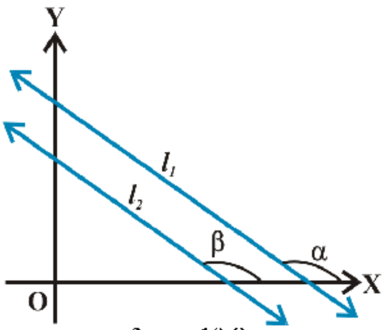
ചിത്രം 10.7 ലെ വര കടന്നുപോകുന്ന രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ (4, 0) (0, 2) എന്നിവയാണ്. x സൂചകസംഖ്യ കുറയുമ്പോൾ y സൂചകസംഖ്യ കൂടുന്നു. ഇത്തരം രേഖകളുടെ ചരിവ് ഒരു ന്യൂനസംഖ്യ ആയിരിക്കും. ചരിവ് = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

ഇവിടെ θ ബൃഹത്കോൺ ആണല്ലോ. അതുകൊണ്ട് tan θ ന്യൂനസംഖ്യ ആയിരിക്കുമെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

10.2.2 ചരിവ് ഉപയോഗിച്ച് സമാന്തര, ലംബ രേഖകൾക്കുള്ള വ്യവസ്ഥകൾ

സമാന്തരവരകളുടെ ചരിവ്

ചിത്രത്തിൽ y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമല്ലാത്തതും എന്നാൽ പരസ്പരം സമാന്തരങ്ങളുമായ രണ്ട് വരകളാണ് l_1, l_2. x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി ഇവ യഥാക്രമം α, β എന്നീ കോണുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു.



ചിത്രം 10.8

l_1, l_2 എന്നിവ സമാന്തരങ്ങളായതിനാൽ α യും β യും തുല്യമായിരിക്കും.

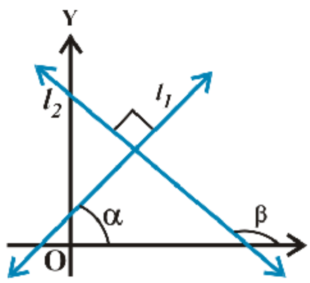
അതായത് tan α = tan β

എന്നു പറഞ്ഞാൽ രണ്ട് വരകളുടെയും ചരിവുകൾ തുല്യമായിരിക്കുമെന്നർത്ഥം.

അതായത്, സമാന്തരവരകൾക്ക് ഒരേ ചരിവ് ആയിരിക്കും.

ലംബവരകളുടെ ചരിവ്

പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ട് വരകളുടെ (ഇവയിലൊന്നും y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാവരുത്) ചരിവിന്റെ പ്രത്യേകതയെക്കുറിച്ച് മനസിലാക്കാം.



ചിത്രം 10.9

ചിത്രത്തിൽ l_1, l_2 എന്നീ വരകൾ പരസ്പരം ലംബങ്ങളാണ്. l_1 ന്റെ ചരിവ് m_1 എന്നും l_2 ന്റെ ചരിവ് m_2 എന്നും സൗകര്യത്തിനായി എടുക്കാം.
അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ $\tan\alpha = m_1$ എന്നും $\tan\beta = m_2$ ലഭിക്കും.
ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് $\beta = 90° + \alpha$

അതായത്; $$\tan\beta = \tan(\alpha + 90°)$$
$$= -\cot\alpha$$
$$= -\frac{1}{\tan\alpha}$$

അതായത്; $$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

അല്ലെങ്കിൽ; $$m_1 \times m_2 = -1$$

അതായത്; പരസ്പരം ലംബമായ (സൂചകാക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരങ്ങളല്ലാത്ത) രണ്ട് വരകളുടെ ചരിവുകളുടെ ഗുണനഫലം -1 ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 1

a. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകളുടെ ചരിവ് കണക്കാക്കുക.
(i) (3, -2), (-1, 4)
(ii) (3, -2), (7, -2)
(iii) (3, -2), (3, 4)

b. x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി 60° കോണളവ് ഉണ്ടാക്കുന്ന വരയുടെ ചരിവ് എത്ര?

പരിഹാരം

a. (i) (3, -2), (-1, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ ചരിവ്
$$m = \frac{4-(-2)}{-1-3} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

(ii) ചരിവ് $m = \dfrac{-2-(-2)}{7-3} = \dfrac{0}{4} = 0$

(iii) ചരിവ് $m = \dfrac{4-(-2)}{3-3} = \dfrac{6}{0}$ ഇത് നിർവചിക്കാൻ സാധ്യമല്ല.

b. വരയുടെ ചരിവ് $m = \tan 60° = \sqrt{3}$

10.2.3 രണ്ട് നേർവരകൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ

പരസ്പരം സംഗമിക്കുന്ന രണ്ടു വരകൾ അവയ്ക്കിടയിൽ നാല് കോണുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നുണ്ട്. ഇവയിൽ ഓരോ ജോടി എതിർകോണുകൾ തുല്യമായിരിക്കും. അതുപോലെ അടുത്തടുത്തുള്ള ഓരോ ജോടി കോണുകളുടെ തുക $180°$ ആയിരിക്കും.

ഇവിടെയും നമുക്ക് l_1 ന്റെ ചെരിവ് m_1 എന്നും l_2 വിന്റേത് m_2 എന്നും എടുക്കാം. അതുപോലെ l_1, l_2 എന്നീ വരകൾ x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി നിർണയിക്കുന്ന കോണുകൾ യഥാക്രമം α_1, α_2 എന്നും കരുതുക. വരകൾക്കിടയിലെ രണ്ട് അനുപൂരക കോണുകളാണ് θ, ϕ

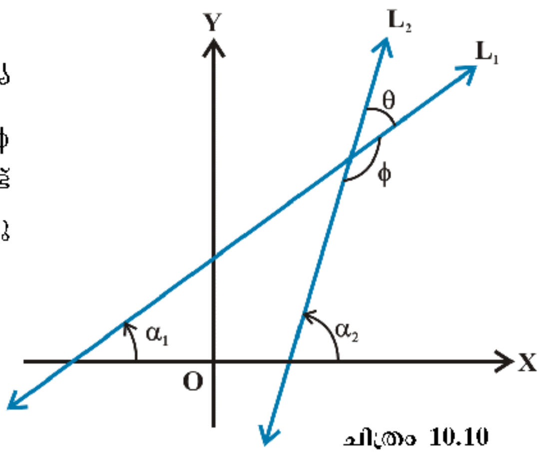
അപ്പോൾ $\tan \alpha_1 = m_1$, $\tan \alpha_2 = m_2$

ചിത്രത്തിൽ $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

$$\tan \theta = \tan (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

അവസ്ഥ : 1

$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ എന്നത് അധിസംഖ്യ ആയാൽ $\tan \theta$ അധിസംഖ്യയും $\tan \phi$ ന്യൂനസംഖ്യയും ആണ്. അതുകൊണ്ട് θ ന്യൂനകോണും ϕ ബൃഹത്കോണുമായിരിക്കും.



ചിത്രം 10.10

അവസ്ഥ : 2

$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ എന്നത് ന്യൂനസംഖ്യ ആയാൽ θ ബൃഹത്കോണും ϕ ന്യൂനകോണും ആകും. അതുകൊണ്ട് $\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|, 1 + m_1 m_2 \neq 0$ ശരിയാകുന്ന θ കണ്ടെത്തുന്നു. അപ്പോൾ ബൃഹത്കോൺ, ϕ എന്നത് $\phi = 180° - \theta$ ആയിരിക്കുകയും ചെയ്യും.

ഉദാഹരണം : 2

രണ്ടു വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് $\frac{\pi}{4}$. അതിലൊന്നിന്റെ ചരിവ് $\frac{1}{2}$ ആയാൽ രണ്ടാമത്തെ വരയുടെ ചരിവ് കാണുക.

പരിഹാരം

വരകളുടെ ചരിവുകൾ യഥാക്രമം m_1, m_2; അവ തമ്മിലുള്ള കോണളവ് θ യും ആയാൽ

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$$

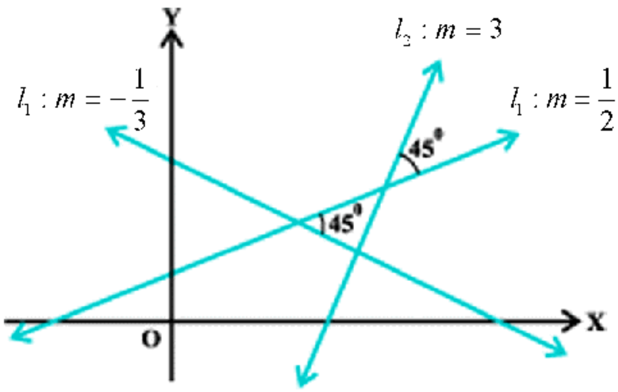
$m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = m$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ എന്നെടുത്താൽ, $\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right|$

അതായത്, $1 = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right|$

$\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m} = 1$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m} = \quad 1$

അതുകൊണ്ട്, $m = 3$ അല്ലെങ്കിൽ $m = -\frac{1}{3}$

രണ്ടാമത്തെ വരയുടെ ചരിവുകൾ 3 അല്ലെങ്കിൽ $-\frac{1}{3}$. ചിത്രം 10.11 എന്തുകൊണ്ട് രണ്ട് ഉത്തരങ്ങൾ എന്നതിനുള്ള വിശദീകരണമാകുന്നു.



ചിത്രം 10.11

ഉദാഹരണം : 3

(-2, 6), (4, 8) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ പോകുന്ന വര, (8, 12), (x, 24) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ പോകുന്ന വരയ്ക്ക് ലംബമായാൽ 'x' ന്റെ വില കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

(-2, 6), (4, 8) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ പോകുന്ന വരയുടെ ചരിവ്

$$m_1 = \frac{8-6}{4-(-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(8, 12), (x, 24) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ പോകുന്ന വരയുടെ ചരിവ്

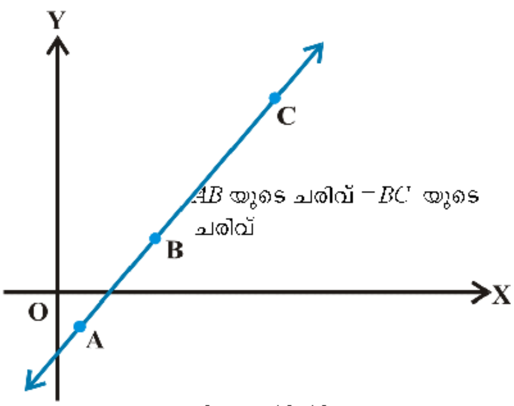
$$m_2 = \frac{24-12}{x-8} = \frac{12}{x-8}$$

രണ്ടു വരകളും പരസ്പരം ലംബമായതിനാൽ $m_1\, m_2 = -1$

$$\frac{1}{3} \times \frac{12}{x-8} = -1 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x = 4$$

10.2.4 ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ നേർവരയിൽ വരുന്നതെപ്പോൾ?

രണ്ട് നേർവരകളുടെ ചരിവ് തുല്യമാണെങ്കിൽ അവ രണ്ടും ഒരേ നേർവരയാകണമെന്ന് നിർബന്ധമില്ല. കാരണം ചരിവ് തുല്യമാണെങ്കിൽ അവ സമാന്തരങ്ങളായ നേർവരകൾ ആയാലും മതി.



ചിത്രം 10.12

മുകളിലെ ചിത്രത്തിലെ നേർവര നോക്കുക. AB എന്ന വരയുടെ ചരിവും, BC എന്ന വരയുടെ ചരിവും തുല്യമാണ്. മാത്രമല്ല B എന്നത് AB യ്ക്കും BC യ്ക്കും പൊതുവായുള്ള ബിന്ദുവാണ്. അതിനാൽ A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ നേർവരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ആകണം. അതായത് AB യുടെ ചരിവ് = BC യുടെ ചരിവ് ആണെങ്കിൽ A, B, C എന്നിവ നേർവരയിലായിരിക്കും. തിരിച്ചും ഈ വസ്തുത ശരിയാണ്. അതായത് A, B, C എന്നിവ നേർവരയിലാണെങ്കിൽ AB യുടെ ചരിവ് = BC യുടെ ചരിവ് ആയിരിക്കണം.

ഉദാഹരണം : 4

P (h, k), Q (x_1, y_1), R (x_2, y_2) എന്നിവ ഒരു വരയിലെ ബിന്ദുക്കളാണെങ്കിൽ $(h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

P, Q, R എന്നിവ ഒരേ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളായതിനാൽ

PQ വിന്റെ ചരിവ് = QR ന്റെ ചരിവ്

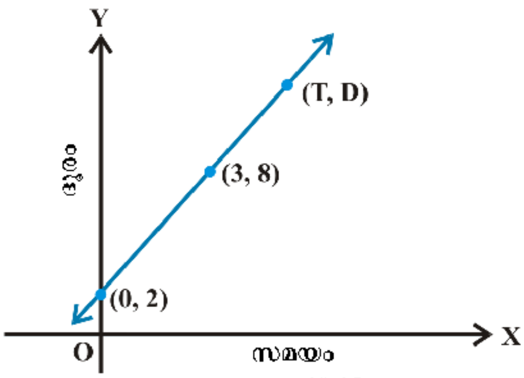
അതായത് $$\frac{y_1 - k}{x_1 - h} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ഇതിൽ നിന്നും, $$\frac{k - y_1}{h - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

അതായത്, $(h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1)$

ഉദാഹരണം : 5

ചിത്രം 10.13 ൽ ഒരു രേഖീയചലനത്തിന്റെ സമയ-ദൂര ഗ്രാഫാണ് തന്നിരിക്കുന്നത്. സമയത്തിന്റെയും (T) ദൂരത്തിന്റെയും (D) രണ്ട് വ്യത്യസ്ത സ്ഥാനങ്ങൾ T = 0 ആയാൽ, D = 2, T = 3 ആയാൽ D = 8 ആകുന്നു. ചരിവിന്റെ ആശയമുപയോഗിച്ച്, ചലന നിയമം കാണുക, അതായത് ദൂരം എങ്ങനെ സമയത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നു എന്ന നിയമം.



ചിത്രം 10.13

പരിഹാരം

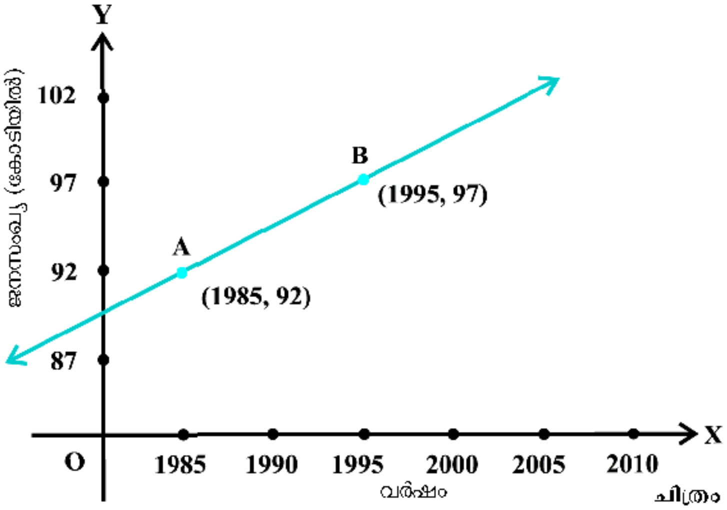
(T, D) എന്നത് വരയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവായാൽ, (0, 2), (3, 8), (T, D) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളാകുന്നു.

$\frac{8-2}{3-0} = \frac{D-8}{T-3}$. അപ്പോൾ 6(T – 3) = 3(D– 8). അതുകൊണ്ട് D = 2(T + 1) ആയിരിക്കും ചലന നിയമം.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 10.1

1. മൂലകൾ (– 4, 5), (0, 7), (5, – 5), (– 4, –2) ആയ ഒരു ചതുർഭുജം കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ വരയ്ക്കുക. കൂടാതെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.
2. ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ പാദം y അക്ഷത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. പാദത്തിന്റെ നീളം $2a$ യും പാദത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു ആധാരബിന്ദു (origin) വുമായാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ കണ്ടെത്തുക.
3. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം ചുവടെ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾക്കനുസരിച്ച് കണക്കാക്കുക.
   (i) PQ, y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകുമ്പോൾ
   (ii) PQ, x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകുമ്പോൾ
4. (7, 6), (3, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിലുള്ള x അക്ഷത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു കണ്ടെത്തുക.
5. A(0, -4), B(8, 0) എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെയും, ആധാരബിന്ദു (origin) വിലൂടെയും കടന്നു പോകുന്ന വരയുടെ ചരിവ് (slope) കണ്ടെത്തുക.
6. (4, 4), (3, 5), (-1, -1) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളാണെന്ന് പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിക്കാതെ തെളിയിക്കുക.
7. y അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി അപ്രദക്ഷിണ ദിശയിൽ $30°$ കോണുണ്ടാകുന്ന ഒരു വരയുടെ ചരിവ് കണ്ടെത്തുക.
8. (x, - 1), (2, 1), (4, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെങ്കിൽ (collinear points) ആയാൽ 'x' ന്റെ വില കണക്കാക്കുക.
9. (-2, 1), (4, 0), (3, 3), (-3, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ മൂലകളാണെന്ന് അകലസൂത്രം (distance formula) ഉപയോഗിക്കാതെ തെളിയിക്കുക.
10. (3, -1), (4, -2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ തമ്മിൽ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന വരയും x അക്ഷവും തമ്മിലുള്ള കോണളവ് കണക്കാക്കുക.
11. രണ്ടു വരകൾ തമ്മിലുള്ള കോണളവിന്റെ ടാൻജന്റ് (tangent) $\frac{1}{3}$ ആണ്. ഇതിൽ ഒരു വരയുടെ ചരിവിന്റെ ഇരട്ടിയാണ് രണ്ടാമത്തെ വരയുടെ ചരിവ് എങ്കിൽ വരകളുടെ ചരിവുകൾ കാണുക.
12. (x_1, y_1), (h, k) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ ചരിവ് m എങ്കിൽ $k - y_1 = m(h - x_1)$ എന്നു തെളിയിക്കുക.
13. $(h, 0)$, (a, b), $(0, k)$ എന്നിവ ഒരേ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളാണെങ്കിൽ $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

14. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ജനസംഖ്യ, വർഷം എന്നിവ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഗ്രാഫ് പരിഗണിക്കുക (ചിത്രം 10.14) AB എന്ന വരയുടെ ചരിവ് കണ്ടെത്തുക, അതു പയോഗിച്ച് 2010 ലെ ജനസംഖ്യ എത്രയായിരിക്കും എന്ന് കണ്ടെത്തുക.



ചിത്രം 10.14

10.3 നേർവരകളുടെ വിവിധതരം സമവാക്യങ്ങൾ

അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരങ്ങളായ വരകളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ അധ്യായത്തിന്റെ തുടക്കത്തിൽ വിശദീകരിച്ചിരിക്കുന്നു. പക്ഷെ എല്ലാ വരകളും x അക്ഷത്തിനോ y അക്ഷത്തിനോ സമാന്തരമായിരിക്കില്ല. അത്തരം വരകളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ ഇനി കണ്ടെത്താം.

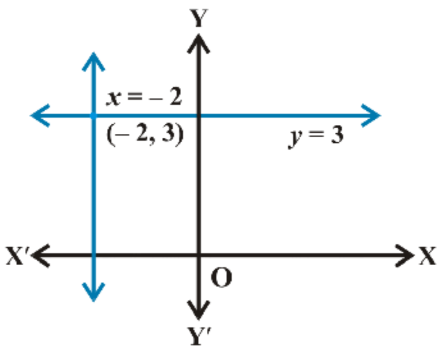
വ്യത്യസ്ത സന്ദർഭങ്ങളിൽ സൗകര്യപ്രദമായി ഉപയോഗപ്പെടുത്താവുന്ന തരത്തിലാണ് വരകളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ നിർമിക്കുന്നത്. ഒരു പ്രത്യേക പ്രശ്നത്തിൽ ലഭ്യമായ അറിവ് ഉപയോഗിച്ച് വരകളുടെ സമവാക്യം നിർണയിക്കാനാവുന്ന തരത്തിൽ വ്യത്യസ്ത സമവാക്യമാതൃകകൾ കണ്ടെത്തുന്നു. ഇവയെല്ലാം പരസ്പരം ബന്ധപ്പെട്ടു കിടക്കുന്നവയാണ്. ഒറ്റപ്പെട്ടു നിൽക്കുന്നവയല്ല.

ഉദാഹരണം : 6

അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരവും (–2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതുമായ വരകളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

ചിത്രം 10.15 പരിഗണിക്കുക. ചിത്രത്തിൽ നിന്നും x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ എല്ലാ വരകളുടെയും സൂചകസംഖ്യ 3 ആയിരിക്കും. ആയതിനാൽ x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരവും



ചിത്രം 10.15

(-2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യം $y = 3$ ആയിരിക്കും.

ഇതുപോലെ y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരവും (-2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യം $x = -2$ ആകുന്നു.

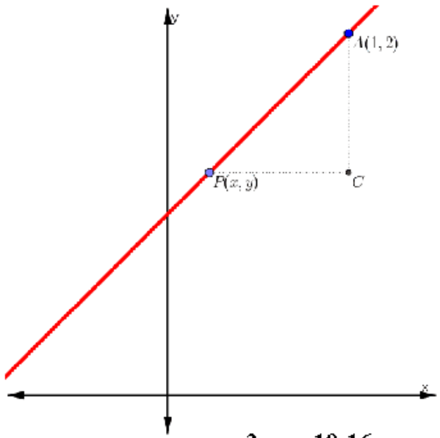
10.3.1. ബിന്ദു – ചരിവ് രൂപം (Point - Slope form)

(1, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന അനന്തം വരകൾ ഉണ്ടാകും. അതുകൊണ്ട് തന്നെ വര കടന്നുപോവുന്ന ഒരു ബിന്ദു മാത്രമേ അറിയൂ എങ്കിൽ അതിൽ നിന്ന് ഏതെങ്കിലും ഒരു പ്രത്യേക വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കാനാവില്ല. മറ്റൊരു അളവ് കൂടി തരേണ്ടതുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി (1, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോവുന്ന, ചരിവ് 1 ആയ വരയുടെ സമവാക്യം പരിഗണിക്കാം.

ചരിവ് 1 ആണെങ്കിൽ $\tan\theta = 1$ ആകും.
അതായത് $\theta = 45°$ ആയിരിക്കും.

ഈ രണ്ട് നിബന്ധനകളും പാലിക്കുന്ന ഒരേ ഒരു നേർവര മാത്രമേ സാധ്യമാകൂ എന്നതിനാൽ ഇതിന്റെ സമവാക്യത്തിലെത്തിച്ചേരാനാവും.

ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നതുപോലെ വരയിലെ $P(x, y)$ എന്ന പൊതുബിന്ദുവും PCA എന്ന മട്ടത്രികോണവും നിർമിക്കുന്നു.

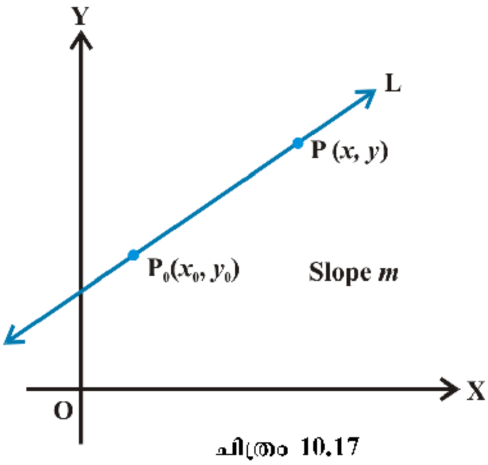


ചിത്രം 10.16

ഇവിടെ; $\tan\theta = \tan 45 = 1 = \dfrac{AC}{PC}$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2-y}{1-x} \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

ഇങ്ങനെ വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്താം.



ചിത്രം 10.17

പൊതുവായി വര കടന്നു പോവുന്ന ബിന്ദു (x_0, y_0) എന്നും ചെരിവ് m എന്നും കരുതുക. ഈ വരയിൽ എവിടെയെങ്കിലുമുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിനെ (x, y) എന്നും എടുക്കാം. എങ്കിൽ ഈ പൊതുബിന്ദു (x, y) പാലിക്കേണ്ട നിബന്ധനയെയാണല്ലോ നാം ഈ നേർവരയുടെ സമവാക്യമായി എടുക്കു

ന്നത്. നേർവര (x_0, y_0), (x, y) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോവുന്നുതുകൊണ്ട്

ചരിവ് $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ ആവണം.

$$\text{അതായത്,} \quad m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

ഇതിനെ $y - y_0 = m(n - x_0)$ എന്ന് എഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 7

(-2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും ചരിവ് –4 ഉം ആയ വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ ചരിവ് $m = -4$. തന്നിരിക്കുന്ന (−2, 3) എന്ന ബിന്ദു (x_0, y_0) ന് പകരം എഴുതാം.

ചരിവും ഒരു ബിന്ദുവും തന്നാൽ വരയുടെ സമവാക്യം $(y - y_0) - m (x - x_0)$ ആണ്.

$$y - 3 = -4(x + 2)$$

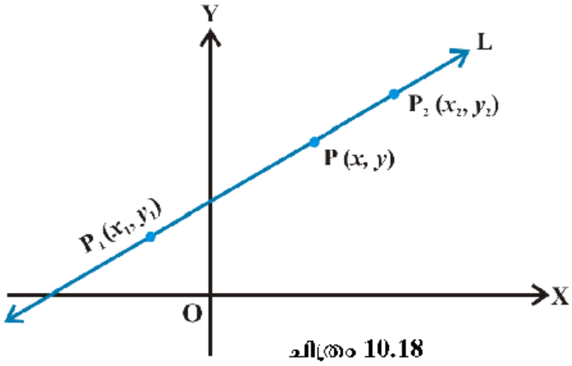
$$\Rightarrow 4x + y + 5 = 0 \text{ എന്ന് ലഭിക്കും.}$$

10.3.3 രണ്ടു ബിന്ദു രൂപം (Two point form)

രണ്ടു വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളിലൂടെ ഒരേ ഒരു നേർവര മാത്രമേ സാധിക്കൂ. അതുകൊണ്ട് തന്നെ ഈ ബിന്ദുക്കൾ ഉപയോഗപ്പെടുത്തി സമവാക്യം നിർമിക്കാവുന്നതാണ്.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെ നേർവര കടന്നുപോവുന്നു എന്ന് കരുതുക. ഇതിൽ നിന്ന് വരയുടെ ചരിവ് കണക്കാക്കാം.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



ചിത്രം 10.18

ഇത് തൊട്ടു മുമ്പ് കണ്ട സമവാക്യത്തിൽ കൊടുത്താൽ

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

അതുകൊണ്ട്; $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - x_1}$ എന്നും പറയാം.

ഉദാഹരണം : 8

(1, –1), (3, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന (1, –1), (3, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നിവക്ക് പകരം എടുക്കാം.

രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തന്നാൽ വരയുടെ സമവാക്യം $y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$.

അതായത് $$y-(-1) = \frac{5-(-1)}{3-1}(x-1)$$

$\Rightarrow$ $-3x + y + 4 = 0$ എന്നതാണ് നിർദ്ദിഷ്ട വരയുടെ സമവാക്യം.

10.3.4. ചരിവ് – ഇട അകല രൂപം (Slope - Intercept form)

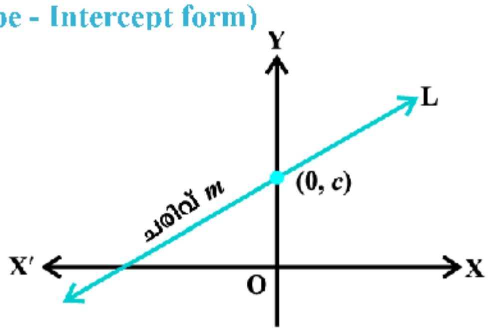
y ഇട അകലം c ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ വര കടന്നുപോവുന്ന ഒരു ബിന്ദു $(0, c)$ ആണ്.

ചരിവ് m ആണെന്ന് കരുതാം. അപ്പോൾ നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ വരയുടെ സമവാക്യം

$y - c = m(x - 0)$ എന്നെഴുതാം.

അതായത് $y - c = mx$

അല്ലെങ്കിൽ $y = mx + c$



ചിത്രം 10.19

ഇനി x ഇട അകലം 'd' ആണ് തന്നിരിക്കുന്നതെങ്കിൽ വര കടന്നുപോകുന്ന ബിന്ദു $(d, 0)$ ആകും.

$$y - 0 = m(x - d)$$

$y = m(x - d)$ എന്നു കിട്ടും.

ഉദാഹരണം : 9

ഒരു വര x അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ θ ആകുകയും, $\tan \theta = \frac{1}{2}$ ആയാൽ

(i) y അക്ഷത്തിലെ ഇട അകലം $\frac{3}{2}$ ആകുമ്പോഴും

(ii) x അക്ഷത്തിലെ ഇട അകലം 4 ആകുമ്പോഴും

വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

(i) ഇവിടെ വരയുടെ ചരിവ് $m = \tan\theta = \frac{1}{2}$

y അക്ഷത്തിലെ ഇട അകലം $c = \frac{3}{2}$ ആകുന്നു. ചരിവ് ഇട അകല രൂപം ഉപയോഗിച്ച് വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്താം.

അതായത്, $y = mx + c$

$$y = \frac{1}{2}x \quad \frac{3}{2}$$

അതായത് നിശ്ചിത സമവാക്യം $2y - x + 3 = 0$

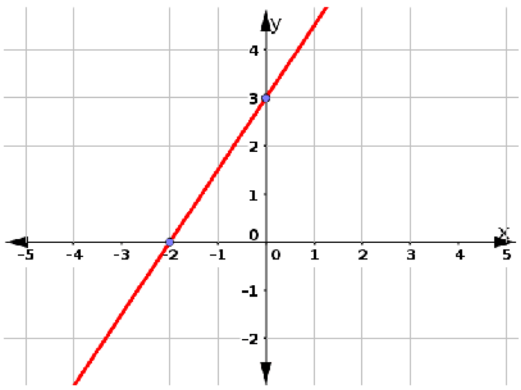
(ii) ഇവിടെ $m = \tan\theta = \frac{1}{2}$, x ഇട അകലം $= d = 4$ ആകുന്നു. എങ്കിൽ ചരിവ് – ഇട അകല രൂപം $y = m(x - d)$ ഉപയോഗിച്ച് വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്താം.

അതായത് സമവാക്യം $y = \frac{1}{2}(x - 4)$

$$\Rightarrow 2y - x + 4 = 0$$

10.3.5 ഇട അകല രൂപം (Intecept form)

ചിത്രത്തിലെ വര x അക്ഷത്തെയും y അക്ഷത്തെയും യഥാക്രമം $(-2, 0)$, $(0, 3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ സംഗമിക്കുന്നു. അപ്പോൾ രണ്ടു ബിന്ദു രൂപമുപയോഗിച്ച് വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്താം. അതായത്,



ചിത്രം 10.20

$$y - 0 = \frac{3 - 0}{0 - (-2)}\left(x - (-2)\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2}\left(x + 2\right)$$

$$\Rightarrow 2y = 3x + 6$$

$$\Rightarrow 3x - 2y + 6 = 0 \text{ -------(1)}$$

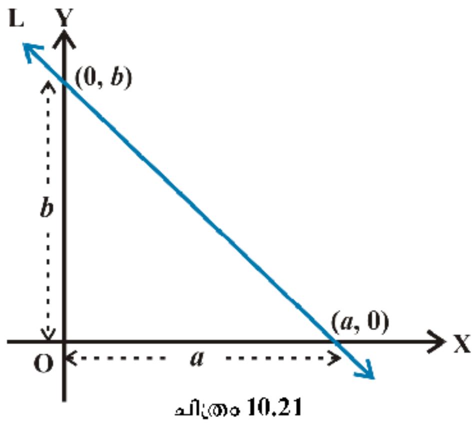
വരയുടെ സമവാക്യം (1) പുനർ ക്രമീകരിച്ചുനോക്കാം.

അതായത്, $3x - 2y = -6 \rightarrow \dfrac{3x - 2y}{-6} = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{3} = 1$

ഇവിടെ x ന്റെ ഛേദം -2, y യുടെ ഛേദം 3 ആണ്. ചിത്രത്തിൽ നിന്നും -2, x ഇട അകലവും 3, y ഇട അയകലവുമാണ്. അപ്പോൾ x, y ഇട അകലങ്ങൾ അറിയാമെങ്കിൽ വരയുടെ സമവാക്യം എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടെത്താം.

ഇനി ഈ ആശയം പൊതുവായി കാണാം.

x ഇട അകലം a യും y ഇടയകലം b യും ആണെങ്കിൽ വര കടന്നുപോവുന്ന ബിന്ദുക്കൾ $(a, 0)$, $(0, b)$ എന്നിവയാണ്.



ചിത്രം 10.21

ഇവിടെ $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

എന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}$$

$$\frac{x - a}{-a} = \frac{y}{b}$$

$$-\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b}$$

അതായത് $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ എന്ന് കിട്ടും.

ഉദാഹരണം : 10

x, y അക്ഷങ്ങളിലെ ഇട അകലം യഥാക്രമം -3, 2 ആയാൽ വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

x അക്ഷത്തിലെ ഇട അകലം $a = -3$,

y അക്ഷത്തിലെ ഇട അകലം $b = 2$

ഇട അകലങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് വരയുടെ സമവാക്യം $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

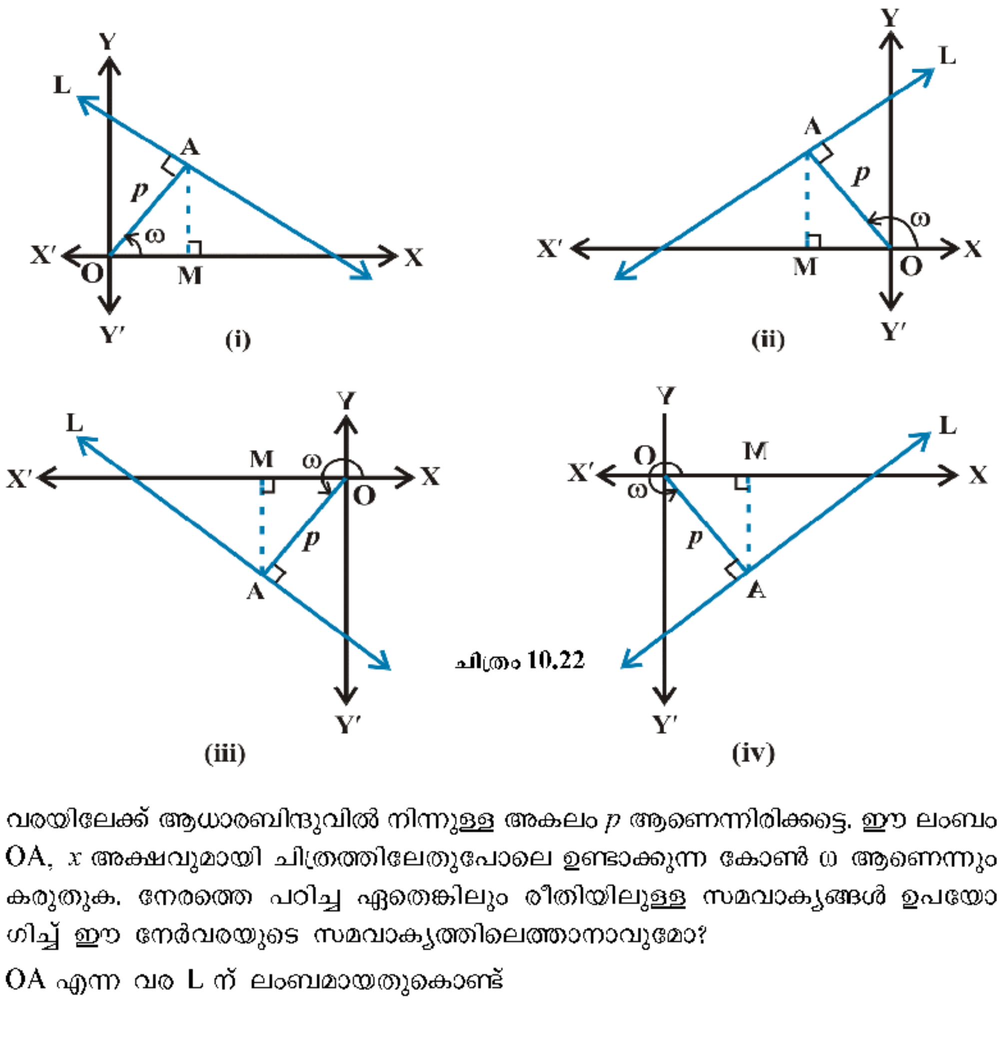
ആയതിനാൽ $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$

അതായത് $2x - 3y + 6 = 0$

10.3.6 ലംബരൂപം (Normal form)

ഒരു വരയിലേക്ക് ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ നീളവും (അകലം) ആ ലംബം x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണും അറിയാമെങ്കിൽ ആ വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്താനാകും.

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങൾ പരിശോധിക്കുക.



ചിത്രം 10.22

വരയിലേക്ക് ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലം p ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഈ ലംബം OA, x അക്ഷവുമായി ചിത്രത്തിലേതുപോലെ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ ω ആണെന്നും കരുതുക. നേരത്തെ പഠിച്ച ഏതെങ്കിലും രീതിയിലുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഈ നേർവരയുടെ സമവാക്യത്തിലെത്താനാവുമോ?

OA എന്ന വര L ന് ലംബമായതുകൊണ്ട്

L ന്റെ ചരിവ് $= \dfrac{-1}{OA \text{ യുടെ ചരിവ്}} = \dfrac{-1}{\tan\omega} = -\dfrac{\cos\omega}{\sin\omega}$

വരയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുകൂടി കിട്ടിയാൽ ഈ വരയുടെ സമവാക്യം കിട്ടും.

A എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കിട്ടുമോ? ഇതിന് OM, AM എന്നീ അകല ങ്ങൾ കിട്ടിയാൽ പോരേ? മട്ടത്രികോണം OMA ശ്രദ്ധിക്കൂ.

ഇതിൽ നിന്നും

$$\cos\omega = \frac{OM}{p} \text{ എന്നും } \sin\omega = \frac{AM}{p} \text{ എന്നും കിട്ടും}$$

അതായത്; $OM = p\cos\omega$, $AM = p\sin\omega$

അതുകൊണ്ട് A യുടെ സൂചകസംഖ്യ $(p\cos\omega, p\sin\omega)$ ആയിരിക്കും.

ഇനി ചരിവും ഈ ബിന്ദുവും ഉപയോഗിച്ച് സമവാക്യം കണ്ടെത്താം.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - p\sin\omega = -\cot\omega\,(x - p\cos\omega)$$

$$y - p\sin\omega = \frac{-\cos\omega}{\sin\omega}(x - p\cos\omega)$$

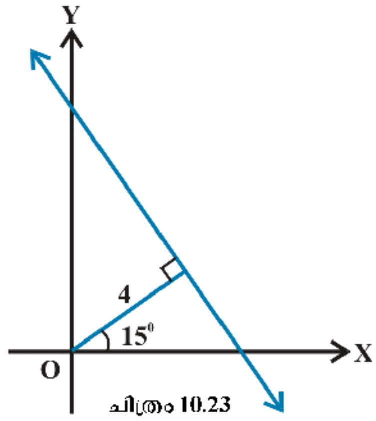
$$(y - p\sin\omega)\sin\omega = -x\cos\omega\,(x - p\cos\omega)$$

അതായത്; $x\cos\omega + y\sin\omega = p\cos^2\omega + p\sin^2\omega$

$$\mathbf{x\cos\omega + y\sin\omega = p}$$

ഉദാഹരണം: 11

ഒരു വരയിലേക്ക് ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ലംബദൂരം 4 യൂണിറ്റും, ലംബം x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവ് 15° യും ആയാൽ വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.



ചിത്രം 10.23

പരിഹാരം

ചിത്രം 10.23 പരിഗണക്കുക. ചിത്രത്തിൽ ആധാര ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ലംബദൂരം $p = 4$, കോണളവ് $\omega = 15°$ ആയിരുന്നാൽ,

വരയുടെ $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ എന്ന ലംബരൂപം ഉപയോഗിക്കാം.
ഇവിടെ

$$\cos \omega = \cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin \omega = \sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \text{ (എന്തുകൊണ്ട്?)}$$

$$x \cos 15° + y \sin 15° = 4$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}y = 4$$

$\Rightarrow \left(\sqrt{3}+1\right)x + \left(\sqrt{3}-1\right)y = 8\sqrt{2}$ എന്നാണ് വരയുടെ സമവാക്യം

ഉദാഹരണം : 12

താപനിലയുടെ ഫാരൻഹീറ്റ് F, കേവല താപനില K യും തമ്മിൽ ഒരു രേഖീയ സമവാക്യബന്ധം പാലിക്കുന്നുണ്ട്. കൂടാതെ F = 32 ആകുമ്പോൾ K = 273 ഉം F = 312 ആകുമ്പോൾ K = 373 ഉം ആയാൽ K യെ F ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കുക. കൂടാതെ K = 0 ആകുമ്പോൾ F ന്റെ വില കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

(32, 273), (212, 373) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയിലെ പൊതുവായ ഒരു ബിന്ദുവാണ് L(F, K) എങ്കിൽ വരയുടെ സമവാക്യം;

$$K - 273 = \frac{373 - 273}{212 - 32}(F - 32)$$

ആകുമല്ലോ.

$$K - 273 = \frac{100}{180}(F - 32)$$

$$\Rightarrow K = \frac{5}{9}(F - 32) + 273 \text{ ആയിരിക്കും}$$

അടുത്തതായി K = 0 ആകുമ്പോൾ $\frac{5}{9}(F - 32) + 273 = 0$

$$F - 32 = \frac{-273 \times 9}{5} = -491.4$$

$$F = -459.4$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 10.2

1 മുതൽ 8 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധന അനുസരിച്ചുള്ള വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

1. x അക്ഷത്തിന്റെയും y അക്ഷത്തിന്റെയും സമവാക്യങ്ങൾ എഴുതുക.
2. ചരിവ് $\frac{1}{2}$ വും, (-4, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതുമായ വര.
3. (0, 0) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതും ചരിവ് m ആയിട്ടുള്ള വര.
4. $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും, x അക്ഷവുമായി 75° കോണളവ് ഉണ്ടാക്കുന്നതുമായ വര.
5. ചരിവ് -2 ആധാരബിന്ദുവിന് 3 യൂണിറ്റ് ഇടത്തോട്ട് x അക്ഷവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്നതുമായ വര.
6. x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി 30° കോണളവുള്ളതും y അക്ഷത്തിനെ ആധാരബിന്ദുവിന് മുകളിലായി 2 യൂണിറ്റ് അകലത്തിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നതുമായ വര.
7. (-1, 1), (2, -4) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വര.
8. ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും 5 യൂണിറ്റ് ലംബദൂരത്തിലും, x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി 30° കോണളവ് ഉണ്ടാകുന്നതുമായ വര.
9. ത്രികോണം PQR ന്റെ മൂലകൾ യഥാക്രമം P(2, 1), Q(-2, 3), R(4, 5) എന്നിവയാണ്. R എന്ന മൂലയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന മധ്യമത്തിന്റെ (Median) സമവാക്യമെഴുതുക.
10. (2, 5), (-3, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയ്ക്ക് ലംബവും (-3, 5) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.
11. (1, 0), (2, 3) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ $1 : n$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ ലംബമായി പോകുന്ന വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.
12. (2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ പോകുന്നതും അക്ഷങ്ങളുമായി തുല്യ ഇടയകലം പാലിക്കുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.
13. (2, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ പോകുന്നതും ഇടയകലങ്ങളുടെ തുക (sum of intercepts) 9 ആയ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

14. (0, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ പോകുന്നതും, x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി $\frac{2\pi}{3}$ കോണളവ് ഉണ്ടാക്കുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക. കൂടാതെ മേൽ സൂചിപ്പിച്ച വരയ്ക്ക് സമാന്തരവും ആധാരബിന്ദുവിന് 2 യൂണിറ്റ് താഴെ y അക്ഷവുമായി സംഗമിക്കുന്നതുമായ വരയുടെയും സമവാക്യമെഴുതുക.
15. ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഒരു വരയിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബം വരയെ (-2, 9) എന്ന ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കുന്നുവെങ്കിൽ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.
16. ഒരു ചെമ്പ് കമ്പിയുടെ നീളം L (സെന്റിമീറ്ററിൽ) താപം C (സെൽഷ്യസിൽ) യുടെ ഒരു രേഖീയ ഏകദമാകുന്നു. ഒരു പരീക്ഷണത്തിൽ C = 20 ആകുമ്പോൾ L = 124.942, C = 110 ആകുമ്പോൾ L = 125.334 എന്നു കരുതുക. എങ്കിൽ L നെ C യുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കുക.
17. ഒരു പാൽ വിൽപനക്കാരന് ആഴ്ചതോറും 14 രൂപ നിരക്കിൽ 980 ലിറ്റർ പാലും, 16 രൂപ നിരക്കിൽ 1220 ലിറ്റർ പാലും വിൽക്കാൻ കഴിയുന്നു. പാലിന്റെ വിറ്റവിലയും, ആവശ്യകതയും തമ്മിൽ ഒരു രേഖീയ സമവാക്യബന്ധമാണെങ്കിൽ, അദ്ദേഹത്തിന് 17 രൂപ നിരക്കിൽ എത്ര ലിറ്റർ പാൽ ഒരാഴ്ച വിൽക്കാൻ കഴിയും.
18. P(a, b) എന്നുള്ളത് അക്ഷങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള വരയുടെ മധ്യബിന്ദു ആണ്. വരയുടെ സമവാക്യം $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
19. അക്ഷങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള രേഖാഖണ്ഡത്തെ R(h, k) എന്ന ബിന്ദു 1 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നുവെങ്കിൽ രേഖാഖണ്ഡം ഉൾപ്പെടുന്ന വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.
20. (3, 0), (-2, -2), (8, 2) എന്നീ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെന്ന് വരയുടെ സമവാക്യം എന്ന ആശയമുപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.

10.4 വരയുടെ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുരൂപം (General Equation of a Straight Line)

ഇതുവരെ ചർച്ച ചെയ്ത എല്ലാ വരകളുടെയും സമവാക്യത്തിൽ പൊതുപദങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കൂ.

പരമാവധി 3 പദങ്ങളാണ് ഈ സമവാക്യങ്ങളിലുള്ളത്. x, y ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ എന്നിവയാണ് അവ.

അതുകൊണ്ട് ഒരു നേർവരയുടെ സമവാക്യം പൊതുവായി.

$Ax + By + C = 0$ എന്നെഴുതാം. ഇവിടെ A, B, C എന്നിവ ഒരേ സമയം പൂജ്യമാവാൻ പാടില്ല. ഈ സമവാക്യത്തെ നേർവരയുടെ പൊതുസമവാക്യം എന്നു പറയാം.

10.4.1 $Ax + By + C = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ വിവിധ രൂപങ്ങൾ

a. ചരിവ് – ഇട അകല രൂപം

$A = 0$ ആയാലോ?

$$By + C = 0 \Rightarrow By = -C \Rightarrow y = \frac{-C}{B}$$ ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ

അതായത് x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ വരയായിരിക്കും എന്നർത്ഥം.

ഇതുപോലെ $B = 0$ ആയാൽ അത് y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ വരയായിരിക്കും എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

$C = 0$ ആയാലോ?

ഇതറിയാൻ x നും y ക്കും പൂജ്യം കൊടുത്തു നോക്കൂ. അതായത് ഈ വര $(0, 0)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവും.

$Ax + By + C = 0$ എന്ന പൊതുസമവാക്യത്തെ നേരത്തെ നാം മനസിലാക്കിയ ഏതൊരു രൂപത്തിലേക്കും മാറ്റാനും അതുവഴി വരയുടെ ചരിവ്, ഇട അകലം തുടങ്ങിയ അളവുകൾ കണ്ടുപിടിക്കാനും കഴിയും.

ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ ഇത് വിശദമാക്കാം.

$2x + 3y - 5 = 0$ എന്ന സമവാക്യം എടുക്കാം.

$\Rightarrow 3y = -2x + 5 = 0$ എന്നെഴുതാം.

$$\Rightarrow y = \frac{-2}{3}x + \frac{5}{3}$$

ഇത് $y = mx + c$ എന്ന രൂപത്തിലാണ്

അതായത് $m = \frac{-2}{3}$, $c = \frac{5}{3}$.

b. ഇട അകല രൂപം

ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ ഇടയകല രൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റുന്നത് പരിചയപ്പെടാം.

$2x + 3y = 5$ എന്ന വരയുടെ സമവാക്യം എടുക്കാം.

$$\frac{2x}{5} + \frac{3y}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x}{5}}{2} + \frac{\frac{y}{5}}{3} = 1$$

ഇതിനെ ഇട അകല രൂപവുമായി $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ താരതമ്യം ചെയ്താൽ

x ഇടയകലം $\frac{5}{2}$ എന്നും y ഇട അകലം $\frac{5}{3}$ എന്നും കിട്ടും.

c. ലംബരൂപം

ഇനി വരയുടെ പൊതുസമവാക്യത്തെ ലംബരൂപം $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ ആക്കിമാറ്റുന്നത് ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ പരിചയപ്പെടാം.

$2x + 3y = 5$ എന്ന വരയുടെ സമവാക്യം പരിഗണിക്കാം.

ഇപ്പോൾ $2x + 3y = 5$ എന്നത് ആ രൂപത്തിലാണോ? $\cos \omega$ ആകാൻ 2 നും $\sin \omega$ ആകാൻ 3 നും കഴിയില്ല. (എന്തുകൊണ്ട്?)

$\frac{2x + 3y}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$ എന്നാക്കാം.

$$\Rightarrow \frac{2x + 3y}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{13}} + \frac{3y}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

ഇതിൽ $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 = 1$ ആയതിനാൽ

നമുക്ക് $\frac{2}{\sqrt{13}}$ എന്നതിനെ $\cos \omega$ എന്നും $\frac{3}{\sqrt{13}}$ നെ $\sin \omega$ എന്നും എടുക്കാം.

അതുകൊണ്ട് $p = \frac{5}{\sqrt{13}}$ ആയിരിക്കും

ഇങ്ങനെ വരയുടെ പൊതുസമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് ആവശ്യാനുസരണം മറ്റ് സമവാക്യരൂപങ്ങളിലേക്ക് മാറ്റി ചരിവ് ഇട അകലം, ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലം എന്നിവയൊക്കെ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 13

ഒരു വരയുടെ സമവാക്യം $3x - 4y + 10 = 0$ ആയാൽ വരയുടെ ചരിവ്, x, y അക്ഷങ്ങളിലെ ഇട അകലങ്ങൾ എന്നിവ എഴുതുക.

പരിഹാരം

$3x - 4y + 10 = 0$ ------(1)

എന്ന വരയുടെ സമവാക്യത്തെ $y = \frac{3}{4}x + \frac{10}{4}$ എന്ന രീതിയിൽ മാറ്റം വരുത്താം.

ഇത് $y = mx + c$ എന്ന മാതൃകയിലാണ്. ആയതിനാൽ വരയുടെ ചരിവ് $m = \frac{3}{4}$

സമവാക്യം (1) നെ $3x - 4y = -10$ എന്നും തുടർന്ന് $\frac{x}{\frac{-10}{3}} + \frac{x}{\frac{5}{2}} = 1$ എന്നും രൂപ ഭേദം വരുത്തിയാൽ ഇത് $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ എന്ന മാതൃകയിലായിരിക്കും.

അതിനാൽ x ഇട അകലം $a = -\frac{10}{3}$, y ഇട അകലം $b = \frac{5}{2}$

ഉദാഹരണം : 14

$\sqrt{3}x + y - 8 = 0$ എന്ന വരയുടെ ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ലംബദൂരവും പ്രസ്തുത ലംബം x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവും കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യം $\sqrt{3}x + y - 8 = 0$ -------(1)

സമവാക്യം (1) നെ $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = 2$ എന്ന സംഖ്യകൊണ്ട് ഹരിക്കാം.

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 4$$

എങ്കിൽ, $\cos 30° x + \sin 30° y = 4$ എന്ന ലംബദൂര രൂപത്തിൽ സൂചിപ്പിച്ചാൽ

ലംബദൂരം $p = 4$, $\cos \omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \omega = \frac{1}{2}$ ആകുന്നു.

$\therefore \omega = 30°$ എന്നും ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം : 15

$y - \sqrt{3}x - 5 = 0$ $\sqrt{3}y - x + 6 = 0$ എന്നീ വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$y - \sqrt{3}x - 5 = 0$ എന്ന വരയുടെ ചരിവ്

$$m_1 = \frac{-\left(-\sqrt{3}\right)}{1} = \sqrt{3},$$

$\sqrt{3}y - x + 6 = 0$ എന്ന വരയുടെ ചരിവ് $m_2 = \frac{-(-1)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് θ ആയാൽ

$$\tan 0 = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}}\right|$$

$$= \left|\frac{1-3}{2\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ആയതിനാൽ $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ഇതിൽ നിന്നും θ = 30° എന്നു ലഭിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് 30° അല്ലെങ്കിൽ (180 - 30)° = 150° ആണ്.

ഉദാഹരണം : 16

$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad b_1 \neq 0$
$a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad b_2 \neq 0$

എന്നീ വരകൾ (i) സമന്തരങ്ങളാകുമ്പോൾ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ എന്നും

(ii) പരസ്പരം ലംബമാകുമ്പോൾ $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ എന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന വരകൾ

$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad b_1 \neq 0$ --------(1)
$a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad b_2 \neq 0$ --------(1)

ഇവയുടെ ചരിവുകൾ യഥാക്രമം $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$, $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ ആകുന്നു.

1. വരകൾ സമാന്തരമായാൽ ചരിവുകൾ തുല്യമാകുന്നു.

   അതായത് $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ ആയിരിക്കും

2. വരകൾ പരസ്പരം ലംബമായാൽ $m_1.m_2 = -1$

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right).\left(\frac{a_2}{b_2}\right) = -1$$

അതായത് $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ ആയിരിക്കും

ഉദാഹരണം : 17

(1, -2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതും $x-2y+3=0$ എന്ന വരയ്ക്ക് ലംബവുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

പരിഹാരം

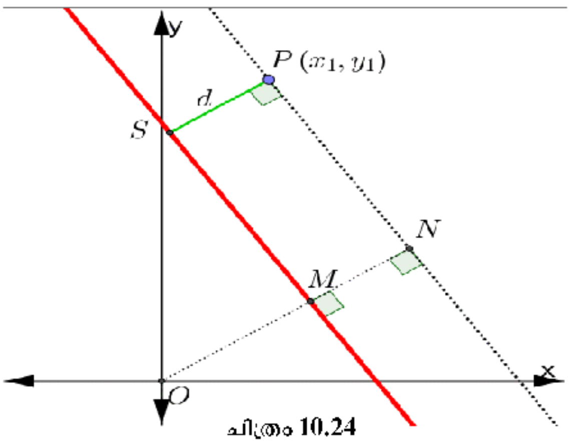
തന്നിരിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം $x-2y+3=0$ --------(1). ഇതിന്റെ ചരിവ് $\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ ആയിരിക്കും. ഇതിന് ലംബമായ ഏതൊരു വരയുടെയും ചരിവ് $\frac{-2}{1} = -2$ ആയിരിക്കും. (ലംബരേഖകളുടെ ചരിവുകളുടെ ഗുണനഫലം -1 ആയതുകൊണ്ട്) ചരിവ് 'm' ഉള്ളതും (x_0, y_0) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യം $y - y_0 = m(x - x_0)$ ആണ്. ആയതിനാൽ $(1, -2)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ പോകുന്നതും ചരിവ് -2 ഉള്ളതുമായ വരയുടെ സമവാക്യം

$y-(-2) = -2(x-1)$ അഥവാ

$y = -2x$ ആയിരിക്കും

10.5 ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ഒരു വരയിലേക്കുള്ള അകലം

രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണാൻ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇതുപോലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ആ ബിന്ദു ഉൾപ്പെടാത്ത ഒരു വരയിലേക്കുള്ള ദൂരം കാണുന്നതിന് എന്തെങ്കിലും എളുപ്പവഴി കണ്ടെത്താനാവുമോ? ഈ പ്രശ്നത്തെ പൊതുവായി സമീപിക്കാം. $P(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദുവും $ax + by + c = 0$ എന്ന വരയും തമ്മിലുള്ള അകലം d എന്നു കരുതാം. $ax + by = -c(-c > 0)$. എന്ന വരയിലേക്ക് ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ദൂരം $\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ആണെന്നറിയാം.



ചിത്രം 10.24

അതായത് ചിത്രത്തിൽ $OM = -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. ഇനി P$(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ $ax + by = c$ എന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായ വര ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. $ax + by = c$ എന്ന വരയുടെ ചരിവ് $-\frac{a}{b}$ ആണ്.

(x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന ഈ വരയുടെ സമവാക്യം

$y - y_1 = -\frac{a}{b}\ (x - x_1)$ ആണ്.

ഇത് ക്രമപ്പെടുത്തി എഴുതിയാൽ $ax + by = ax_1 + by_1$ എന്ന് കിട്ടും. ($ax_1 + by_1 > 0$ ആവുന്ന വിധത്തിൽ എടുക്കാം)

ഇനി ഈ വരയിലേക്ക് ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലം $ON = \frac{ax_1 + by_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

ആയിരിക്കും.

അതായത്, ചിത്രത്തിൽ $ON = \frac{ax_1 + by_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ആയിരിക്കും.

OM − ON = MN = PS = d ആണ്.

$$\Rightarrow\ d = \text{ON} - \text{OM}$$

$$= \frac{ax_1 + by_1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

d എന്നത് ദൂരമായതുകൊണ്ട് കേവലവിലയാണ് എടുക്കേണ്ടത്.

അതായത് (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $ax + by + c = 0$ എന്ന വരയിലേക്കുള്ള

ദൂരം $d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

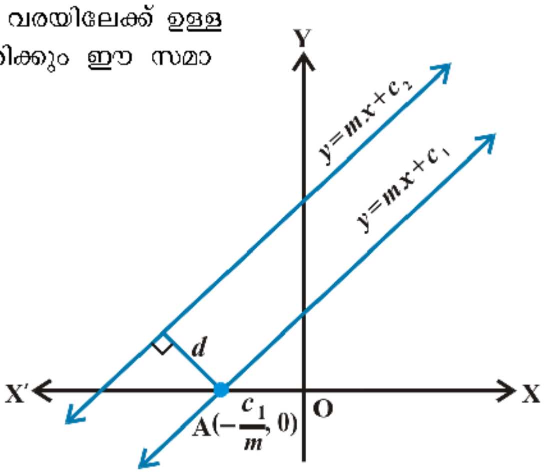
10.5.1 രണ്ട് സമാന്തരവരകൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം

$ax + by + c_1 = 0$, $ax + by + c_2 = 0$ എന്നിവ രണ്ട് സമാന്തര വരകളാണ്. $ax + by + c_1 = 0$ എന്ന വരയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു $P(x_1, y_1)$ എടുക്കുക. P യിൽ നിന്നും $ax + by + c_2 = 0$ എന്ന വരയിലേക്ക് ഉള്ള ദൂരം കണ്ടെത്താം. ഇതുതന്നെയായിരിക്കും ഈ സമാന്തര വരകൾക്കിടക്കുള്ള അകലവും.

അതുകൊണ്ട്

$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-c_1 + c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$



ചിത്രം 10.25

ഉദാഹരണം : 18

$3x - 4y - 26 = 0$ എന്ന വരയിൽ നിന്നും (3, –5) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$Ax + By + C = 0$ എന്ന വരയിൽ നിന്നും (x_1, y_1) ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം,

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$ ആണ്.

ഇവിടെ A = 3, B = – 4, C = – 26, (3, –5) എന്ന ബിന്ദു (x_1, y_1) ന് പകരം എടുക്കാം.

$$\therefore d = \frac{|3.3 + (\ \ 4)(\ \ 5)\ \ \ 26|}{\sqrt{3^2 + (\ \ 4)^2}} = \frac{3}{5}$$

ഉദാഹരണം : 19

$3x - 4y + 7 = 0$, $3x - 4y + 5 = 0$ എന്നീ സമാന്തര വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ A = 3, B = –4, $C_1 = 7$, $C_2 = 5$ ആകുന്നു

വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $d = \frac{|\ 7-5|}{\sqrt{3^2+(\ 4)^2}} = \frac{2}{5}$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 10.3

1. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളെ ചരിവ് - ഇട അകല രൂപത്തിലാക്കുക. (Slope intercept form). കൂടാതെ വരയുടെ ചരിവ്, അക്ഷങ്ങളിലെ ഇടയകലം എന്നിവ കണ്ടെത്തുക.

   (i) $x + 7y = 0$ (ii) $6x + 3y - 5 = 0$ (iii) $y = 0$.

2. ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളെ ഇട അകല (intercept form) രൂപത്തിൽ എഴുതുക. കൂടാതെ വരയുടെ ഇടയകലങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക.

   (i) $3x + 2y - 12 = 0$ (ii) $4x - 3y = 6$ (iii) $3y + 2 = 0$

3. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളെ ലംബരൂപത്തിൽ എഴുതുക. കൂടാതെ ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും വരയിലേക്കുള്ള ലംബദൂരവും, ഈ ലംബം x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവും കണ്ടെത്തുക.

   (i) $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ (ii) $y - 2 = 0$ (iii) $x - y = 4$.

4. $(-1, 1)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വര $12(x + 6) = 5(y - 2)$ യിലേക്കുള്ള അകലം കാണുക.

5. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ എന്ന വരയിൽ നിന്നും 4 യൂണിറ്റ് അകലെ x അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടെത്തുക.

6. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമാന്തര വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണുക.

   (i) $15x + 8y - 34 = 0$, $15x + 8y + 31 = 0$

   (ii) $l\,(x + y) + p = 0$, $l\,(x + y) - r = 0$.

7. $(-2, 3)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതും, $3x - 4y + 2 = 0$ എന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരവുമായ വരയുടെ സമവാക്യം എഴുതുക.

8. x ഇട അകലം 3 യൂണിറ്റും, $x - 7y + 5 = 0$ എന്ന വരയ്ക്ക് ലംബവുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

9. $\sqrt{3}x + y = 1$, $x + \sqrt{3}y = 1$ എന്നീ വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് കണ്ടെത്തുക.

10. $(h, 3), (4, 1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വര, $7x - 9y - 19 = 0$ എന്ന വരയ്ക്ക് ലംബമായാൽ h ന്റെ വില കണ്ടെത്തുക.

11. (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ പോകുന്നതും, $Ax + By + C = 0$ എന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരവുമായ വരയുടെ സമവാക്യം $A (x - x_1) - B (y - y_1) = 0$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

12. $(2, 3)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ പോകുന്ന രണ്ടു വരകൾ തമ്മിലുള്ള കോണളവ് $60°$ ആണ്. ഇതിൽ ഒരു വരയുടെ ചരിവ് 2 ആയാൽ രണ്ടാമത്തെ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

13. $(3, 4)$, $(\ 1, 2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമ ഭാജിയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

14. $3x\quad 4y\quad 16 = 0$ എന്ന വരയും $(\ 1, 3)$ ൽ നിന്നും ഈ വരയിലേക്കുള്ള ലംബവും തമ്മിലുള്ള സംഗമബിന്ദു കാണുക.

15. $y = mx + c$ എന്ന വരയും ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഈ വരയിലേക്ക് വര യ്ക്കുന്ന ലംബവും $(-1, 2)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കുന്നുവെങ്കിൽ m, c എന്നിവയുടെ വില കണ്ടെത്തുക.

16. $x\cos\theta - y\sin\theta = k\cos 2\theta$, $x \sec\theta + y \operatorname{cosec}\theta = k$ എന്നീ വരകളിലേക്ക് ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും വരയ്ക്കുന്ന ലംബദൂരങ്ങൾ യഥാക്രമം p, q എന്നി വയാണെങ്കിൽ $p^2 + 4q^2 = k^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

17. A $(2, 3)$, B $(4,\ \ 1)$, C $(1, 2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ മൂലകളായ ത്രികോണം ABC യിൽ A യിൽ നിന്ന് BC യിലേക്കുള്ള ഉന്നതിയുടെ നീളവും (altitude) ഉന്നതി യുടെ സമവാക്യവും കാണുക.

18. ഒരു വരയുടെ x, y ഇട അകലങ്ങൾ യഥാക്രമം a, b യും ഈ വരയിലേക്ക് മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ലംബദൂരം 'p' യും ആയാൽ $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

10.6. രണ്ട് വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന ഒരു കൂട്ടം വരകളുടെ സമവാക്യം

$x + y = 4$, $x - y = 2$ എന്നീ രണ്ട് സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കാനായി നാം ചെയ്യുന്ന ഒരു വഴി ഈ രണ്ട് സമവാക്യങ്ങളും തമ്മിൽ കൂട്ടുകയും കുറക്കു കയും ചെയ്യുകയാണല്ലൊ.

രണ്ട് സമവാക്യങ്ങളും തമ്മിൽ കൂട്ടിയാൽ

$x + y - 4 + (x - y - 2) = 0$ എന്ന് കിട്ടും

അതായത് $2x - 6 = 0$, $x = 3$

ഇവ തമ്മിൽ കുറച്ചാൽ

$x + y - 4 - (x - y - 2) = 0$

$2y - 2 = 0$

$y = 1$

$x = 3$, $y = 1$ എന്ന ഈ പരിഹാരത്തെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് നിരീക്ഷിക്കൂ.

$x = 3$, $y = 1$ എന്ന പരിഹാരം ഗ്രാഫിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് നോക്കൂ. $x = 3$ എന്നതും $y = 1$ എന്നതും പരിഗണിച്ച $x + y = 4$, $x - y = 2$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന വരകളാണ്.

ഇനി ആദ്യസമവാക്യത്തിന്റെ കൂടെ രണ്ടാം സമവാക്യത്തെ 3 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചത് കൂട്ടിനോക്കാം.

$$x + y - 4 + 3(x - y - 2) = 0$$

അതായത് $4x - 2y - 10 = 0$

അഥവാ $2x - y - 5 = 0$

ഈ വരയും ആദ്യ രണ്ട് വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവായ (3, 1) ലൂടെ കടന്നുപോവുന്നുണ്ട്.

ഈ ആശയം ഇനി പൊതുവായി കാണാം.

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ രണ്ട് വരകൾ (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കുന്നു എന്നു കരുതുക.

അതായത്,

k ഏതെങ്കിലും ഒരു രേഖീയസംഖ്യയാണെങ്കിൽ മേൽ വിശദീകരിച്ച ഉദാഹരണ പ്രകാരം.

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0$$
$$a_2x_1 + b_2y_1 + c_1 = 0$$

$a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$

അതായത് $0 + k(0) = 0$

അതായത്, ഈ സമവാക്യം (x_1, y_1) ലൂടെ കടന്നു പോവുന്ന നേർവരയാണ്.

k യുടെ എല്ലാ രേഖീയസംഖ്യാവിലയ്ക്കും അങ്ങനെയൊരു വര ലഭിക്കും.

അതായത് ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിപറയാം. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ എന്നീ

രണ്ട് നേർവരകൾ സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി കടന്നുപോവുന്ന അനന്ത എണ്ണം നേർവരകളുണ്ട്. ഇവയെല്ലാം $a_1x + b_1y + c_1 + k\ (a_2x + b_2y + c_2) = 0$ എന്ന സമവാക്യം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 20

- $x = 0, y = 0$ എന്ന നേർവരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന ഒരു കൂട്ടം വരകളുടെ സമവാക്യം എഴുതുക.

പരിഹാരം

$x + ky = 0$ എന്നായിരിക്കുമല്ലോ ആ സമവാക്യം. ഇത് ആധാരബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന നേർവരകളുടെ സമവാക്യമാണ്.

ഉദാഹരണം : 21

- $x - 7y + 5 = 0, 3x + y - 7 = 0$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$x - 7y + 5 = 0, 3x + y - 7 = 0$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന ഏതൊരു വരയേയും $x - 7y + 5 + k\ (3x + y - 7) = 0$ എന്നെഴുതാം. ഈ വര y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകണമെങ്കിൽ y യുടെ ഗുണകം പൂജ്യമാകണം.

അതായത്;

$(1 + 3k)x + (k - 7)y + 5 - 7k = 0$ എന്നെഴുതാം.

$k - 7 = 0 \Rightarrow k = 7$

k ക്ക് 7 എന്ന വില നൽകിയാൽ $22x - 44 = 0$

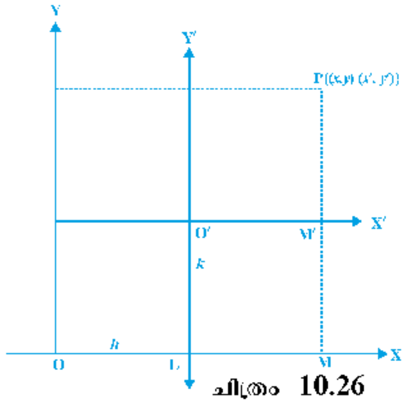
അതായത് $x - 2 = 0$ എന്ന് കിട്ടും

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 10.4

1. $3x + 4y - 7, x - y + 2 = 0$ എന്നീ സമവാക്യങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്നതും ചരിവ് 5 ഉം ആയ വരയുടെ സമവാക്യം കാണുക.
2. $x + 2y - 3 = 0,\ 4x - y + 7 = 0$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ പോവുന്നതും $5x + 4y - 20 = 0$ എന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരവുമായ വരയുടെ സമവാക്യം കാണുക.
3. $2x + 3y - 4 = 0, x - 5y = 7$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്നതും x ഇടയകലം -4 ഉം ആയ വരയുടെ സമവാക്യം കാണുക.
4. $5x - 3y = 1, 2x + 3y - 23 = 0$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന, $5x - 3y - 1 = 0$ എന്ന വരയ്ക്ക് ലംബമായ വരയുടെ സമവാക്യം കാണുക.

10.7 ആധാരബിന്ദുവിന്റെ മാറ്റം (Shifting of origin)

സംഖ്യാരേഖയിൽ ആദ്യം അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത് ആധാരസംഖ്യയായ 0 ആണ്. ഈ ബിന്ദു രേഖയിൽ എവിടെ വേണമെങ്കിലും നമുക്ക് അടയാളപ്പെടുത്താം. ഇതുപോലെ ഒരു തലത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളെ സംഖ്യാപരമായി സൂചിപ്പിക്കാൻ ആ തലത്തിൽ പരസ്പരം ലംബമായ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് നേർവരകളെ അക്ഷങ്ങളായി നാം പരിഗണിക്കുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്. ഈ വരകളുടെ സംഗമബിന്ദു ആണ് ആധാരബിന്ദു. ഈ അടിസ്ഥാന അക്ഷങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള അകലം ഉപയോഗിച്ചാണല്ലൊ നാം ബിന്ദുക്കൾക്ക് സൂചകസംഖ്യകൾ നൽകുന്നത്.



ചിത്രം 10.26

ചിത്രത്തിൽ x, y അക്ഷങ്ങൾ പ്രകാരം A യുടെ സൂചകസംഖ്യ (x, y) ആണ്.

ഇനി x, y അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായി പുതിയ രണ്ട് അക്ഷങ്ങൾ x', y' എന്നിവ വരക്കുന്നു. ഇവയുടെ സംഗമബിന്ദുവാണ് O′. അതായത്

പുതിയ അക്ഷങ്ങൾ പ്രകാരം O′ ആയിരിക്കും ആധാരബിന്ദു.

A(x, y) എന്നത് A യുടെ x, y അക്ഷങ്ങൾ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയ സൂചകസംഖ്യകളാണ്. ഇതിന് x', y' അക്ഷങ്ങൾ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തി പറയുമ്പോൾ മാറ്റം വരും.

O′ ന്റെ പുതിയ സൂചകസംഖ്യ (0, 0) ആയിരിക്കും. ഇത് പഴയ x, y അക്ഷങ്ങളെ ആധാരമായി പറയുമ്പോൾ (h, k) ആയിരുന്നു എന്ന് കരുതാം. അതായത് xy തലത്തിലെ (h, k) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് ആധാരബിന്ദു മാറ്റുമ്പോൾ A(x, y) എന്ന സൂചകസംഖ്യക്ക് എന്ത് സംഭവിക്കുന്നു. ഇത് (x', y') ആയി മാറുന്നു എന്ന് കരുതുക.

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും

$x = x' + h, y = y' + k$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം : 22

(1, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് ആധാരബിന്ദു മാറ്റിയാൽ (3, −4) ന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾക്ക് എന്ത് മാറ്റം വരും?

പരിഹാരം

ഇവിടെ (1, 2) വിലേക്കാണ് ആധാരബിന്ദു മാറുന്നത്

$\therefore h = 1, k = 2$

$x = 3, y = -4$ ആണ് എന്നും അറിയാം

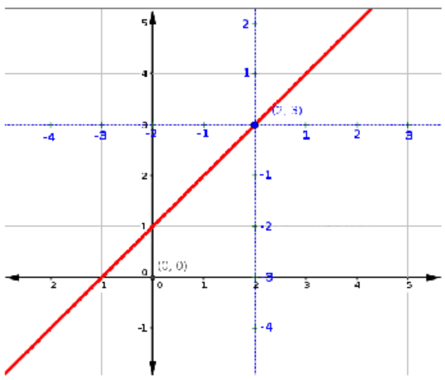
അതുകൊണ്ട് $x' = x - 1 \Rightarrow x' = 3 - 1 = 2$

$y' = y - 2 \Rightarrow y' = -4 - (2) = -6$

(3, −4) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ മാറിയ സൂചകസംഖ്യകൾ (2, −6)

ഉദാഹരണം : 23

ചിത്രത്തിൽ നേർവരയുടെ സമവാക്യം $x - y + 1 = 0$ ആണ്. (2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് ആധാരബിന്ദു മാറ്റിയാൽ ഈ വരയുടെ സമവാക്യം എന്താകും?



ചിത്രം 10.27

(x, y) എന്ന ബിന്ദുമാറി (x', y') എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് മാറുമല്ലൊ. ഈ മാറ്റം ഈ നേർവരയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കൾക്കും സംഭവിക്കും.

$h = 2, k = 3$

$x = x' + 2, y = y' + 3$

അതായത് $x - y + 1 = 0$ എന്ന നേർവര

$x' + 2 - (y' + 3) + 1 = 0$ എന്നായി മാറും

അതായത് $x' - y' = 0$ എന്നാകും

ഈ സമവാക്യത്തെ വേണമെങ്കിൽ

$x - y = 0$ എന്നായും പറയാം.

ഇവിടെ സ്ഥിരസംഖ്യ ഇല്ല എന്ന് പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കണം. കാരണം ആധാര ബിന്ദുവിലൂടെയാണ് കടന്നു പോവുന്നത്.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 10.5

1. ആധാരബിന്ദു(−3, −2)ലേക്ക് മാറുമ്പോൾ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോ ബിന്ദുവിന്റെയും മാറിയ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.

   i. (1, 1)　ii. (0, 1)　iii. (5, 0)　iv. (−1, −2)　v. (3, −5)

2. ആധാരബിന്ദു (1, 1) ലേക്ക് മാറുമ്പോൾ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോ സമവാക്യത്തിന്റെയും പുതിയ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

   (i) $x^2 + xy - 3y^2 - y + 2 = 0$

   (ii) $xy - y^2 - x + y = 0$

   (iii) $xy - x - y + 1 = 0$

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 24

1. $2x + y - 3 = 0$, $5x + ky - 3 = 0$, $3x - y - 2 = 0$ എന്നീ വരകൾ ഒരു പൊതു ബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്ന് പോകുന്നുവെങ്കിൽ k യുടെ വിലകാണുക.

പരിഹാരം

$2x + y - 3 = 0$ -------------- (1)

$5x + ky - 3 = 0$ ------------- (2)

$3x - y - 2 = 0$ --------------- (3)

(1), (3) എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കണ്ടാൽ $x = 1, y = 1$ എന്ന് ലഭിക്കും.

(1, 1) എന്ന ബിന്ദു (2) -ാം സമവാക്യത്തിൽ കൊടുത്താൽ

$5 + k - 3 = 0$.

$\therefore k = -2$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 25

x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി 135° കോണുണ്ടാക്കുന്ന ഒരു വരയിലെ P(4, 1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഈ വര $4x \quad y - 0$ എന്ന വരയുമായുള്ള സംഗമബിന്ദു വരെയുള്ള അകലം കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ 135°കോൺ നിർണയിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിച്ച ശേഷം രണ്ട് വരകളുടെയും പൊതുവായ ബിന്ദു കണ്ടുപിടിച്ചാൽ ദൂരം കണക്കാക്കുന്നത് എളുപ്പമാകും.

വരയുടെ സമവാക്യം

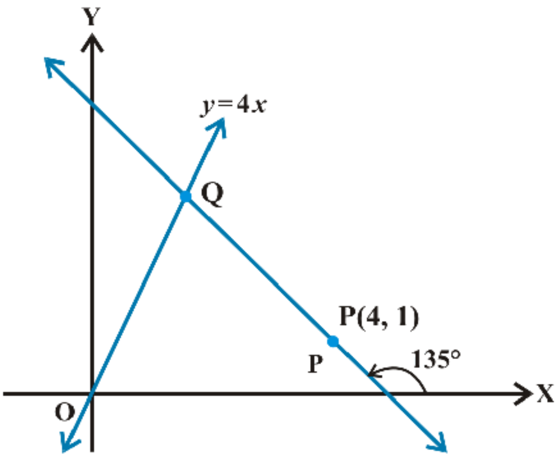
$y - 1 = \tan(135°)(x - 4)$

$y - 1 = -(x - 4)$

$x + y = 5$ --------(1)

$4x - y = 0$ --------(2)

(1), (2) എന്നിവയുടെ പരിഹാരം കണ്ടാൽ $x = 1, y = 4$ എന്ന് ലഭിക്കും. അതുകൊണ്ട് P (4, 1), Q (1, 4) എന്നിവ തമ്മിലുള്ള അകലം $3\sqrt{2}$ യൂണിറ്റ്



ചിത്രം 10.28

ഉദാഹരണം : 26

(1, 2) എന്ന ബിന്ദുവിന് $x - 3y + 4 = 0$ എന്ന വര ആധാരമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന പ്രതിബിംബം കാണുക.

പരിഹാരം

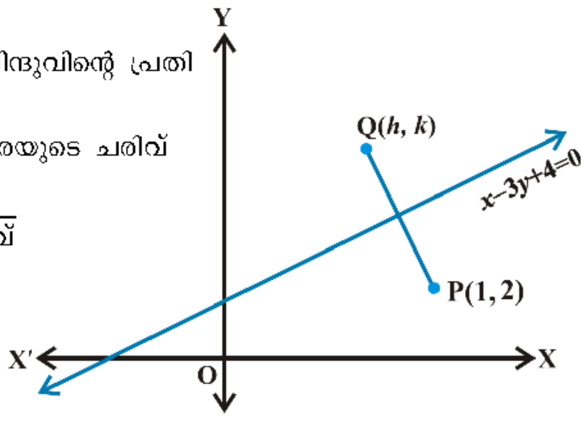
$x - 3y + 4 = 0$ ----------- (1)

Q (*h*, *k*) ആണ് P (1, 2) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ പ്രതിബിംബം എന്ന് വിചാരിക്കുക.

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും PQ എന്ന വരയുടെ ചരിവ്

$$\frac{-1}{x - 3y + 0 \text{ എന്ന വരയുടെ ചരിവ്}}$$

അതായത്, $\frac{k-2}{h-1} = \frac{-1}{\frac{1}{3}}$



ചിത്രം 10.29

$3h + k = 5$ ---------------(2)

PQ വിന്റെ മധ്യബിന്ദു $\left(\frac{h+1}{2}, \frac{k+2}{2}\right)$ സമവാക്യം (1) ലെ ബിന്ദുവാണ്.

അതുകൊണ്ട്, $\frac{h+1}{2} - 3\left(\frac{k+2}{2}\right) + 4 = 0$

$$h - 3k = -3 \text{ ---------------(3)}$$

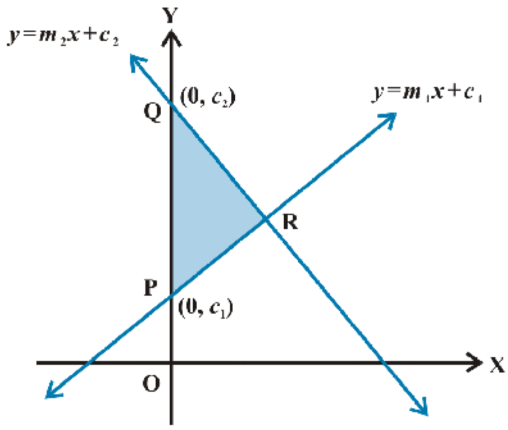
(2), (3) ഇവയ്ക്ക് പരിഹാരം കണ്ടാൽ $h = \frac{6}{5},\ k = \frac{7}{5}$.

അതുകൊണ്ട് (1, 2) എന്നതിന്റെ പ്രതിബിംബം $\left(\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

ഉദാഹരണം : 27

$x = 0,\quad y = m_1 x + c_1, y = m_2 x + c_2$ എന്നീ വരകൾ നിർണയിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{(c_1 - c_2)^2}{2|m_1 - m_2|}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം



ചിത്രം 10.30

$y = m_1 x + c_1$ ----------------(1)

$y = m_2 x + c_2$ ---------------- (2)

$x = 0$ ----------------(3)

(1), (3) ഇവയുടെ സംഗമബിന്ദു $(0, c_1)$

(2), (3) ഇവയുടെ സംഗമബിന്ദു $(0, c_2)$

(1), (3) ഇവയുടെ സംഗമബിന്ദു

$$\left(\frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1 c_2 - m_2 c_1}{m_1 - m_2}\right)$$

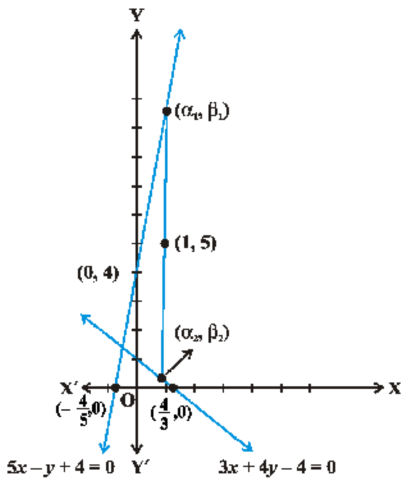
അതുകൊണ്ട്, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2}\left|0 + 0 + \frac{(c_2 - c_1)}{(m_1 - m_2)}(c_2 - c_1)\right| = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2|m_1 - m_2|}$$

ഉദാഹരണം : 28

$5x - y + 4 = 0$, $3x + 4y - 4 = 0$ എന്നീ വരകളിൽ അഗ്രബിന്ദുക്കളുള്ള ഒരു രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണ് (1, 5). ഈ രേഖാഖണ്ഡം നിർണയിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം



ചിത്രം 10.31

$5x - y + 4 = 0$ --------------(1)

$3x + 4y - 4 = 0$ -------------(2)

രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ (α_1, β_1), (α_2, β_2) ആണെന്നിരിക്കട്ടെ

എങ്കിൽ

$$5\alpha_1 - \beta_1 + 4 = 0$$

$$3\alpha_2 + 4\beta_2 - 4 = 0$$

$\beta_1 = 5\alpha_1 + 4$ എന്നും

$\beta_2 = \dfrac{4 - 3\alpha_2}{4}$ എന്നു ലഭിക്കും

(α_1, β_1), (α_2, β_2) ഇവയുടെ മധ്യബിന്ദുവാണ് (1, 5)

അതുകൊണ്ട്

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 1, \quad \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = 5$$

$$\alpha_1 \; \alpha_2 = 2, \; \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = 5$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \text{ -----------------(3)}$$

$$\frac{(5\alpha_1 + 4) + \left(\frac{4 - 3\alpha_2}{4}\right)}{2} = 5$$

$$20\alpha_1 - 3\alpha_2 = 20 \text{ -----------------(4)}$$

(3), (4) ഇവയ്ക്ക് പരിഹാരം കണ്ടാൽ $\alpha_1 = \frac{26}{23}$, $\alpha_2 = \frac{20}{23}$ ഇവ ഉപയോഗിച്ച്

$\beta_1 = \frac{222}{23}$ എന്ന് ലഭിക്കും.

(1, 5), (α_1, β_1) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി പോകുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം.

$$y - 5 = \frac{\left(\frac{222}{23} - 5\right)}{\left(\frac{26}{23} - 1\right)}(x - 1)$$

$$107x - 3y - 92 = 0$$

ഉദാഹരണം : 29

$3x - 2y = 5$, $3x + 2y = 5$ എന്നീ വരകളിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന മറ്റൊരു ബിന്ദുവിന്റെ പാത ഒരു വരയായിരിക്കും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$3x - 2y = 5 \text{ ----------(1)}$$
$$3x + 2y = 5 \text{ ----------(2)}$$

(h, k) എന്ന ബിന്ദു (1), (2) ഇവയിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിലാണ്.

അതുകൊണ്ട് $\left|\frac{3h - 2k - 5}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}\right| = \left|\frac{3h + 2k - 5}{\sqrt{3^2 + 2^2}}\right|$

$$3h - 2k - 5 = \pm (3h + 2k - 5)$$

$$3h - 2k - 5 = 3h + 2k - 5 \text{ ആയാൽ,}$$

$$k = 0$$

$$3h - 2k - 5 = -3h - 2k + 5 \text{ ആയാൽ,}$$

$$h = \frac{5}{3}$$

$y = 0$ എന്ന വരയും $x = \frac{5}{3}$ എന്ന വരയും ലഭിക്കുന്നു.

ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിച്ച് നോക്കൂ.

കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. $(k \;\; 3)\, x \quad (4 \quad k^2)\, y + k^2 - 7k + 6 = 0$ എന്ന വരയിൽ k യുടെ വില ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾക്കനുസൃതമായി കാണുക.
   a. x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകുമ്പോൾ
   b. y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകുമ്പോൾ
   c. ആധാരബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുമ്പോൾ
2. $x \cos \theta + y \sin \theta = p$ എന്ന വര $\sqrt{3}\, x + y + 2 = 0$ എന്ന വരയുടെ ലംബദൂര രൂപത്തിൽ മാറ്റി p, θ എന്നിവ കാണുക.
3. ഒരു വരയുടെ x, y അക്ഷങ്ങളുടെ ഇടയകലങ്ങളുടെ തുകയും ഗുണനഫലവും യഥാക്രമം $1, -6$ എന്നിവ ആയാൽ വരയുടെ സമവാക്യം എഴുതുക.
4. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ എന്ന വരയിലേക്ക് 4 യൂണിറ്റ് അകലം വരുന്ന y അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ കാണുക.
5. $(\cos\theta, \sin \theta)$, $(\cos \phi, \sin \phi)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ലംബദൂരം കാണുക.
6. y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായതും $x \quad 7y + 5 = 0$, $3x + y = 0$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമ ബിന്ദുവിലൂടെയും പോകുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.
7. $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ എന്ന വരയ്ക്ക് ലംബമായതും y അക്ഷവുമായി ഈ വര സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.
8. $y \quad x - 0,\ x + y - 0,\ x \quad k - 0$ എന്നീ വരകൾ രൂപീകരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

9. $3x + y - 2 - 0,\ px + 2y - 3 - 0,\ 2x - y - 3 - 0$ എന്നീ മൂന്ന് വരകൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുകയാണെങ്കിൽ p യുടെ വില കാണുക.

10. $y - m_1x + c_1,\ y = m_2x + c_2,\ y = m_3x + c_3$ എന്നീ മൂന്ന് വരകൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കുകയാണെങ്കിൽ $m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

11. (3, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതും $x - 2y = 3$ എന്ന വരയുമായി $45°$ കോണളവുള്ളതുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

12. $4x + 7y - 3 = 0,\ 2x - 3y + 1 = 0$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ പോകുന്നതും തുല്യ ഇട അകലമുള്ളതുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

13. $y = mx + c$ എന്ന വരയുമായി θ കോണളവ് ഉണ്ടാക്കുന്നതും, മൂലബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യം $\dfrac{y}{x} = \pm\dfrac{m + \tan\theta}{1 + m\tan\theta}$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

14. (1, 1), (5, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയെ, $x + y = 4$ എന്ന വര ഭാഗിക്കുന്ന അംശബന്ധം കാണുക.

15. (1, 2) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $4x + 7y + 5 = 0$ എന്ന വരയിലേക്കുള്ള അകലം $2x - y - 0$ എന്ന വരയിലൂടെ കാണുക.

16. (1, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ ഏതുദിശയിൽ വരയ്ക്കുന്ന വരയാണ് $x + y = 4$ എന്ന വരയുമായുള്ള സംഗമബിന്ദു ആ ബിന്ദുവുമായി 3 യൂണിറ്റ് അകലം പാലിക്കുന്നത്.

17. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ (1, 3), (– 4, 1) ആയാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെയും ലംബത്തിന്റെയും സമവാക്യങ്ങൾ എഴുതുക.

18. $x + 3y = 7$ എന്ന രേഖയെ ആസ്പദമാക്കി (3, 8) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ പ്രതിബിംബം കാണുക. ($x + 3y = 7$ എന്ന വര ഒരു കണ്ണാടിയായി സങ്കൽപ്പിക്കുക)

19. $y = 3x + 1,\ 2y = x + 3$ എന്നീ വരകൾ $y = mx + 4$ എന്ന വരയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന ചരിവുകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ m ന്റെ വില കാണുക.

20. P (x, y) എന്ന ചലിക്കുന്ന ബിന്ദു $x + y - 5 = 0,\ 3x - 2y + 7 = 0$ എന്നീ വരകളിലേക്കുള്ള ലംബദൂരങ്ങളുടെ തുക എപ്പോഴും 10 ആകുന്നുവെങ്കിൽ P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപാത ഒരു നേർവരയിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

21. $9x + 6y - 7 = 0,\ 3x + 2y + 6 = 0$ എന്നീ സമാന്തരവരകളിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിലുള്ള വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

22. (1, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുവരുന്ന പ്രകാശ കിരണം x അക്ഷത്തിലെ A എന്ന ബിന്ദുവിൽ വച്ച് പ്രതിഫലിക്കുന്നു. പ്രതിഫലന കിരണം (5, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോവുകയാണെങ്കിൽ A എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചക സംഖ്യകളെഴുതുക.

23. $\left(\sqrt{a^2-b^2}, 0\right)$, $\left(-\sqrt{a^2-b^2}, 0\right)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ എന്ന വരയിലേക്കുള്ള ലംബദൂരങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം b^2 എന്ന് തെളിയിക്കുക.

24. $2x - 3y + 4 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$ എന്നിവ രണ്ട് നേർപാതകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളാണ്. ഈ പാതകൾ ചേരുന്നിടത്ത് നിൽക്കുന്ന ഒരു വ്യക്തി, $6x - 7y + 8 = 0$ എന്ന മറ്റൊരു പാതയിലേക്ക് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ സമയം കൊണ്ട് എത്താൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അദ്ദേഹത്തിന്റെ സഞ്ചാരപാതയുടെ സമവാക്യം കാണുക.

സംഗ്രഹം

- (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്ന് പോകുന്ന വരയുടെ ചരിവ് $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, $x_1 \neq x_2$.
- ഒരു വര x അക്ഷത്തിന്റെ പോസ്റ്റീവ് ദിശയുമായി α കോണളവ് ഉണ്ടാക്കുന്നുവെങ്കിൽ വരയുടെ ചരിവ് $m = \tan\alpha$, $\alpha \neq 90°$.
- തിരശ്ചീനവരകളുടെ (x അക്ഷവും, x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരവും) ചരിവ് പൂജ്യം. ലംബവരകളുടെ (y അക്ഷവും, y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരവും) ചരിവ് നിർവചിച്ചിട്ടില്ല.
- L_1, L_2 എന്നീ വരകളുടെ ചരിവുകൾ m_1, m_2 വും അവ തമ്മിലുള്ള ന്യൂന കോണളവ് θ യും ആയാൽ $\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|, 1 + m_1 m_2 \neq 0$.
- രണ്ട് വരകൾ സമാന്തരമായിരിക്കാം എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം അവയുടെ ചരിവിന്റെ അളവുകൾ തുല്യമായിരിക്കും.
- രണ്ട് വരകൾ ലംബമായാൽ അവയുടെ ചരിവിന്റെ അളവുകളുടെ ഗുണനഫലം -1 ആയിരിക്കും.

- A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു രേഖയിലായിരിക്കും എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം AB യുടെ ചരിവ്, BC യുടെ ചരിവിന് തുല്യമായിരിക്കും.
- x അക്ഷത്തിൽ നിന്നും a യൂണിറ്റ് അകലെയുള്ള തിരശ്ചീന വരയുടെ സമവാക്യം $y = a$ അല്ലെങ്കിൽ $y = -a$ ആയിരിക്കും.
- y അക്ഷത്തിൽ നിന്നും b യൂണിറ്റ് അകലത്തിലുള്ള x അക്ഷത്തിന് ലംബമായ വരയുടെ സമവാക്യം $x = b$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -b$ ആയിരിക്കും.
- (x, y) എന്ന ബിന്ദു (x_o, y_o) എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി പോകുന്നതും ചരിവിന്റെ അളവ് m ആയ വരയിൽ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം വരയുടെ സമവാക്യം $y - y_o = m\,(x - x_o)$ ആയിരിക്കാം.
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി പോകുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം

  $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$ ആയിരിക്കാം.
- ചരിവ് m, y ഇട അകലം c യും ആയ ഒരു വരയിലുള്ള ബിന്ദുവാണ് (x, y) എങ്കിൽ എങ്കിൽ മാത്രം $y = mx + c$
- ചരിവ് m, x ഇട അകലം d യും ആയാൽ വരയുടെ സമവാക്യം $y = m\,(x - d)$.
- x, y ഇടയകലങ്ങൾ a, b എന്നിവയായാൽ വരയുടെ സമവാക്യം

  $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$
- ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും വരയിലേക്കുള്ള ലംബദൂരം p യും ലംബം x അക്ഷവുമായി നിർണയിക്കുന്ന അപ്രദക്ഷിണ കോണളവ് ω യും ആയാൽ സമവാക്യം $x\cos\omega + y\sin\omega = p$.
- $Ax + By + C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ എന്നതാണ് വരയുടെ പൊതുസമവാക്യം.
- (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $Ax + By + C = 0$ എന്ന വരയിലേക്കുള്ള കുറഞ്ഞദൂരം $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

- സമാന്തര വരകളായ $Ax + By + C_1 = 0$, $Ax + By + C_2 = 0$, തമ്മിലുള്ള അകലം $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ആയിരിക്കും.

- $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ എന്നീ നേർവരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു കൂട്ടം നേർവരകളുടെ സമവാക്യം $a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ ആണ്. ഇവിടെ k ഒരു രേഖീയസംഖ്യയാണ്.

- xy തലത്തിലെ (h, k) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് ആധാര ബിന്ദുമാറിയാൽ $A(x, y)$ എന്ന ബിന്ദു പുതിയ ആധാര ബിന്ദു അനുസരിച്ച് $(x - h, y - k)$ ആകും. അതായത് $x = x' + h$ $y = y' + k$