

व्युत्क्रम आव्यूह एवरैरिवक समीकरण

Ex 5.1

प्रश्न 1. x के किस मान के लिए आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

अव्युत्क्रमणीय है।

हल : दिया है कि आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

अव्युत्क्रमणीय है।

तब

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 1(6 - 2) + 2(3 - x) + 3(2 - 2x) = 0$$

$$\Rightarrow 4 + 6 - 2x + 6 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow -8x = -16$$

$$\Rightarrow x = \frac{16}{8}$$

$$\text{अतः } x = 2$$

प्रश्न 2. यदि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

हो, तो $\text{adj} \cdot A$ ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि $A(\text{adj} \cdot A) = |A|I_3 = (\text{adj} \cdot A)A$.

हल : दिया गया आव्यूह,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -11$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 8$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

आव्यूह A के सहखण्डों से बना आव्यूह,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -11 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{अब } \text{adj } A = B^T = \begin{bmatrix} 0 & -11 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{अतः, } \text{adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 1(0 - 0) + 1(9 + 2) + 2(0 - 0)$$

$$|A| = 11$$

$$\text{अब } A(\text{adj.}A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A(\text{adj.}A) = 11 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः } A(\text{adj.}A) = |A| I_3 \quad \dots(i)$$

$$\text{पुनः } (\text{adj.}A)A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$(\text{adj.}A)A = 11 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः } A(\text{adj.}A) = |A| I_3 \quad \dots(ii)$$

(i) व (ii) से,

$$A(\text{adj.}A) = |A| I_3 = (\text{adj.}A)A$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 3. निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रमणीय आव्यूह ज्ञात कीजिए :

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

हल : (i) दिया गया आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

माना $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

तब, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

$$= 1(1 + 3) - 2(-1 + 2) + 5(3 + 2)$$

$$= 4 - 2 + 25$$

$$|A| = 27 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$a_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 17$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

आव्यूह A के सहखण्डों से बना आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 17 & -11 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{अब } \text{adj.} A = B^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 17 & -11 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj.} A = \begin{bmatrix} 4 & 17 & 3 \\ -1 & -11 & 6 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj.} A}{|A|}$$

$$\text{अतः } A^{-1} = \frac{1}{27}$$

(ii) दिया गया आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{माना } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1(16 - 9) - 3(4 - 3) + 3(3 - 4)$$

$$= 7 - 3 - 3$$

$$|A| = 1 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7, \quad a_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad a_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -3$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

आव्यूह A सहखण्डों से बना आव्यूह B

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{अब } \text{adj } A = B^T = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj. } A}{|A|} = \frac{\text{Adj. } A}{1}$$

$$\text{अतः } A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii) दिया गया आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{माना } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0(-12 + 12) - 1(16 - 12) - 1(-12 + 9)$$

$$= 0 - 4 + 3$$

$$|A| = -1 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad a_{12} = - \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3, \quad a_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3, \quad a_{23} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad a_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -4$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -4$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{अब } \text{adj} A = B^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -4 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj} A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 4. यदि आव्यूह

$$A = F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि :

(i) $A^{-1} A = I_3$

(ii) $A^{-1} = F(-\alpha)$

(iii) $A(\text{adj} A) = |A| I = (\text{adj} A) A$

हल :

दिया है आव्यूह

$$A = F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \cos \alpha (\cos \alpha - 0) + \sin \alpha (\sin \alpha - 0) + 0(0 - 0)$$

$$= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

$$|A| = 1 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos \alpha$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\sin \alpha$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin \alpha$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos \alpha$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} -\sin \alpha & 0 \\ \cos \alpha & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = 1$$

आव्यूह A के सहखण्डों से बना आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{अब } \text{adj } A = B^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj.} A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj.} A}{|A|} = \frac{\text{adj.} A}{1}$$

$$\text{अतः } A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

पुनः (i) सिद्ध करना है :

$$A^{-1} A = I_3$$

$$\text{L.H.S. } A^{-1} A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 0 \\ -\cos \alpha \sin \alpha + \cos \alpha \sin \alpha + 0 \\ 0 + 0 + 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin \alpha + \cos \alpha \sin \alpha + 0 & 0 + 0 + 0 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 0 & 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I_3$$

$$= \text{R.H.S.}$$

$$\text{अतः } A^{-1} A = I_3$$

इति सिद्धम्।

(ii) सिद्ध करना है :

$$A^{-1} = F(-\alpha)$$

$$\text{R.H.S. } F(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \because \cos(-\theta) = \cos \theta \\ \sin(-\theta) = -\sin \theta \end{array} \right]$$

$$= A^{-1}$$

$$= \text{L.H.S.}$$

अतः $A^{-1} = F(-\alpha)$

इति सिद्धम्।

(iii) सिद्ध करना है :

$$A(\text{adj.} A) = |A| I = (\text{adj.} A)A$$

$$A(\text{adj.} A) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 0 \\ \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + 0 \\ 0 - 0 + 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha \sin \alpha + \cos \alpha \sin \alpha + 0 & 0 - 0 + 0 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 0 & 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A| I$$

$$[\because |A| = 1]$$

$$\text{अब } (\text{adj } A) A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 0 & -\cos \alpha \sin \alpha + \cos \alpha \sin \alpha + 0 & 0 + 0 + 0 \\ -\cos \alpha \sin \alpha + \cos \alpha \sin \alpha + 0 & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 0 & 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A| I \quad [\because |A| = 1]$$

$$\text{अब } A(\text{adj } A) = |A| I = (\text{adj } A) A$$

प्रश्न 5. यदि

$$A = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

तो सिद्ध कीजिए कि $A^{-1} = A^T$

हल : माना कि

$$X = \begin{vmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति के सापेक्ष प्रसार करने पर

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} \\
&= -8(16 + 56) - (16 - 7) + 4(-32 - 4) \\
&= -8.72 - 9 - 4.36 \\
&= -9(64 + 1 + 16) \\
&= -9 \times 81 \\
&= -9^3
\end{aligned}$$

$$X_{11} = + \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = +72;$$

$$X_{12} = - \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -9; \quad X_{13} = + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = -36$$

$$X_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = -36; \quad X_{22} = + \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +72$$

$$X_{23} = - \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = -63; \quad X_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -9$$

$$X_{32} = - \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = +72 \quad X_{33} = + \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -36$$

$$\begin{aligned}
\text{adj } X &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 72 & -36 & -9 \\ -9 & -36 & 72 \\ -36 & -63 & -36 \end{bmatrix} \quad \dots(i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{-1} &= \frac{\text{adj } B}{|B|} = \frac{1}{9^3} \begin{bmatrix} 72 & -36 & -9 \\ -9 & -36 & 72 \\ -36 & -63 & -36 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{9^2} \begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix} \quad \dots(ii)
\end{aligned}$$

प्रश्नानुसार, $A = \frac{1}{9} X$ से,

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{9} X\right)^{-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} X^{-1} = 9X^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix} \text{ (ii) से } \dots(\text{iii})$$

अब

$$\begin{aligned} A^T &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix} \dots(\text{iv}) \end{aligned}$$

अतः (iii) और (iv) से स्पष्ट है कि

$$A^{-1} = A^T$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 6. यदि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^{-1} = A^3$

हल : दिया गया आव्यूह,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -1 + 2 \end{aligned}$$

$$|A| = 1 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = -1, a_{12} = -2, a_{21} = 1, a_{22} = 1$$

आव्यूह A के सहखण्डों के बना आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

अब $\text{adj.} A = B^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

$$\text{adj.} A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj.} A}{|A|} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

अतः $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots(i)$

अब $A^3 = A \times A \times A$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2 & -1+1 \\ 2-2 & -2+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+0 & 1+0 \\ 0-2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

अतः $A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots(ii)$

समीकरण (i) व (ii) से,

$$A^{-1} = A^3.$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 7. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

तथा

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

हो, तो $(AB)^{-1}$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{तब } |A| = 5(3 - 4) - 0(2 - 2) + 4(4 - 3)$$

$$= -5 - 0 + 4$$

$$|A| = -1 \neq 0.$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3 - 4) = -1$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 2) = 0$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (4 - 3) = 1$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 8) = 8$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (5 - 4) = 1$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(5 - 0) = -5$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (0 - 12) = -12$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(10 - 8) = -2$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (15 - 0) = 15$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & -10 \\ -12 & -2 & 15 \end{bmatrix}$$

अब $\text{adj } A = B^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & -10 \\ -12 & -2 & 15 \end{bmatrix}^T$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -12 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -10 & 15 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & 8 & -12 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -10 & 15 \end{bmatrix}$$

अतः $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 12 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & -15 \end{bmatrix}$

चूँकि ज्ञात करना है $(AB)^{-1}$

$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -8 & 12 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & -15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0-3 & -8-3+30 & 12+6-45 \\ 1+0-3 & -8-4+30 & 12+8-45 \\ 1+0-4 & -8-3+40 & 12+6-60 \end{bmatrix}$$

अतः $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 19 & -27 \\ -2 & 18 & -25 \\ -3 & 29 & -42 \end{bmatrix}$

प्रश्न 8. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \tan \alpha \\ -\tan \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

हल : दिया गया आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \tan \alpha \\ -\tan \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

तब $|A| = 1 + \tan^2 \alpha \neq 0$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -\tan \alpha \\ \tan \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

अब $\text{adj } A = A^T = \begin{bmatrix} 1 & -\tan \alpha \\ \tan \alpha & 1 \end{bmatrix}^T$

$$A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan \alpha \\ \tan \alpha & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(1 + \tan^2 \alpha)} \begin{bmatrix} 1 & -\tan \alpha \\ \tan \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1 + \tan^2 \alpha)} \begin{bmatrix} 1 & -\tan \alpha \\ \tan \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\tan \alpha \\ \tan \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1 + \tan^2 \alpha)} \begin{bmatrix} 1 - \tan^2 \alpha & -2 \tan \alpha \\ 2 \tan \alpha & 1 - \tan^2 \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} & \frac{-2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\ \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} & \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

अतः $A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए कि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

समीकरण $A^2 - 6A + 17I = 0$ को सन्तुष्ट करता है तथा A^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-9 & -6-12 \\ 6+12 & -9+16 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -5 & -18 \\ 18 & 7 \end{bmatrix}$$

$$-6A = -6 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 18 \\ -18 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\text{तथा } 17I = 17 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\text{अब } A^2 - 6A + 17I = \begin{bmatrix} -5 & -18 \\ 18 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 18 \\ -18 & -24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5-12+17 & -18+18+0 \\ 18-18+0 & 7-24+17 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

अतः दिया गया आव्यूह समीकरण $A^2 - 6A + 17I = 0$ को सन्तुष्ट करता है।

$$\text{अब } A^2 - 6A + 17I = 0$$

$$\Rightarrow A^2 - 6A = -17I$$

$$\Rightarrow A^{-1}(A^2 - 6A) = -17A^{-1}I$$

$$\Rightarrow [A^{-1} \text{ का दोनों पक्षों में वाम गुणन करने पर}]$$

$$\Rightarrow A^{-1}A^2 - 6A^{-1}A = -17A^{-1} [\because A^{-1}I = A^{-1}]$$

$$\Rightarrow A - 6I = -17A^{-1} [\because A^{-1}A = I]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-17}(A - 6I)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-17} \left(\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{-17} \left(\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{-17} \begin{bmatrix} 2-6 & -3-0 \\ 3-0 & 4-6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-17} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{-3}{17} & \frac{2}{17} \end{bmatrix}$$

प्रश्न 10. यदि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 + 4A - 42I = 0$ तत्पश्चात् A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया आव्यूह,

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 64+10 & -40+20 \\ -16+8 & 10+16 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 74 & -20 \\ -8 & 26 \end{bmatrix}$$

$$4A = 4 \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 & 20 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$$

तथा $-42I = -42 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42 & 0 \\ 0 & -42 \end{bmatrix}$

$$\text{अब } A^2 + 4A - 42I$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 74 & -20 \\ -8 & 26 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -32 & 20 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -42 & 0 \\ 0 & -42 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 74-32-42 & -20+20+0 \\ -8+8+0 & 26+16-42 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

अतः दिया गया आव्यूह समीकरण $A^2 + 4A - 42I = 0$ को सन्तुष्ट करता है।

$$\text{अब } A^2 + 4A - 42I = 0$$

$$A^2 + 4A = 42I$$

$$A^{-1}(A^2 + 4A) = 42A^{-1}I$$

(A^{-1} का दोनों पक्षों में गुणा करने पर)।

$$\Rightarrow A^{-1} \cdot A^2 + 4A^{-1} \cdot A = 42A^{-1} \cdot I$$

$$\Rightarrow A + 4I = 42A^{-1}$$

$$(\because A^{-1} \cdot A = I \text{ तथा } A^{-1} \cdot I = A^{-1})$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{42}(A + 4I)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^{-1} &= \frac{1}{42} \left(\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{42} \left(\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{42} \begin{bmatrix} -8+4 & 5+0 \\ 2+0 & 4+4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{अतः } A^{-1} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Ex 5.2

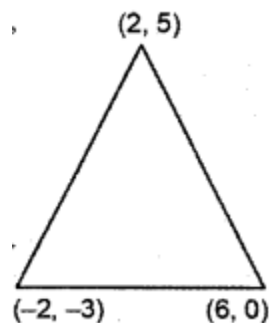
प्रश्न 1. सारणिक की सहायता से त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष निम्न हैं

(i) (2, 5), (-2, -3) तथा (6, 0)

(ii) (3, 8), (2, 7) तथा (5, -1)

(ii) (0, 0), (5, 0) तथा (3, 4)

हल : (i) दिए गए त्रिभुज के शीर्ष (2, 5), (-2, -3) तथा (6, 0) हैं।



त्रिभुज का क्षेत्रफल

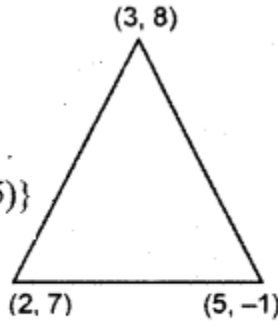
$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \{ 2(-3 - 0) - 5(-2 - 6) + 1(0 + 18) \} \\ &= \frac{1}{2} (-6 + 40 + 18) \\ &= \frac{1}{2} (52)\end{aligned}$$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल = 26 वर्ग इकाई।

(ii) दिए गए त्रिभुज के शीर्ष (3, 8), (2, 7) तथा (5, -1) हैं।

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \{3(7+1) - 8(2-5) + 1(-2-35)\} \\
 &= \frac{1}{2} (24 + 24 - 37) \\
 &= \frac{1}{2} (11)
 \end{aligned}$$

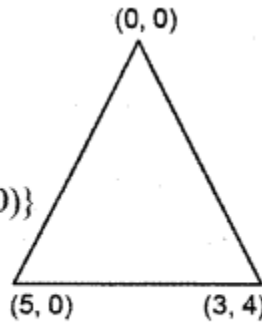


अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{11}{2}$ वर्ग इकाई।

(iii) दिए गए त्रिभुज के शीर्ष (0, 0), (5, 0) तथा (3, 4) हैं।

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \{0(0-4) - 0(5-3) + 1(20-0)\} \\
 &= \frac{1}{2} (0 - 0 + 20) \\
 &= \frac{20}{2}
 \end{aligned}$$



अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल = 10 वर्ग इकाई।

प्रश्न 2. सारणिक का प्रयोग कर शीर्ष (1, 4), (2, 3) तथा (-5, -3) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या दिये गये बिन्दु संरेख हैं ?

हल : दिए गए त्रिभुज के शीर्ष (1, 4), (2, 3) तथा (-5, -3) हैं।

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \{1(3+3) - 4(2+5) + 1(-6+15)\} \\ &= \frac{1}{2} (6 - 28 + 9) \\ &= \frac{1}{2} (-13) \\ &= -\frac{13}{2}\end{aligned}$$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{-13}{2} \text{वर्ग इकाई (ऋण चिह्न छोड़ने पर)।}$$

∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य नहीं है। अतः दिए गए बिन्दु संरेख नहीं हैं।

प्रश्न 3.

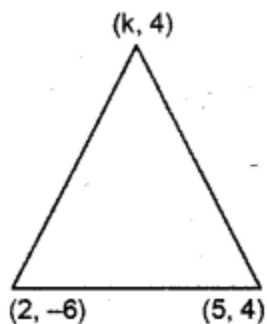
k का मान ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई जबकि शीर्ष (k, 4), (2, -6) तथा (5, 4) हैं।

हल :

∴ दिए गए बिन्दु (k, 4), (2, -6) तथा (5, 4) से निर्मित

त्रिभुज का क्षेत्रफल = 35 वर्ग इकाई

$$\text{तब } \frac{1}{2} \begin{vmatrix} k & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \pm 35$$



$$k(-6-4) - 4(2-5) + 1(8+30) = \pm 70$$

$$-10k + 12 + 38 = \pm 70$$

$$-10k + 50 = \pm 70$$

धन चिह्न लेने पर,

$$\begin{aligned}
-10k + 50 &= 70 \\
-10k &= 70 - 50 \\
-10k &= 20 \\
k &= -2
\end{aligned}$$

ऋण चिह्न लेने पर

$$\begin{aligned}
-10k + 50 &= 70 \\
-10k &= -70 - 50 \\
-10k &= -120 \\
k &= 12
\end{aligned}$$

अतः $k = -2, 12$.

प्रश्न 4. सारणिक का प्रयोग कर k का मान ज्ञात कीजिए, यदि बिन्दु $(k:2-2k)$, $(-k+1, 2k)$ तथा $(-4-k, 6-2k)$ संरेख हों।

हल : ∵ दिए गए बिन्दु $(k, 2 - 2k)$, $(-k + 1, 2k)$ तथा $(-4 - k, 6 - 2k)$ संरेख हैं।

$$\therefore \begin{vmatrix} k & 2-2k & 1 \\ -k+1 & 2k & 1 \\ -4-k & 6-2k & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow k[2k - (6 - 2k)] - (2 - 2k)[(-k + 1) - (-4 - k)] + 1[(-k + 1)(6 - 2k) - (-4 - k)(2k)] = 0$$

$$\Rightarrow k[2k - 6 + 2k] - (2 - 2k)[-k + 1 + 4 + k] + 1[-6k + 2k^2 + 6 - 2k + 8k + 2k^2] = 0$$

$$\Rightarrow k(4k - 6) - (2 - 2k)(5) + 1(4k^2 + 6) = 0$$

$$\Rightarrow 4k^2 - 6k - 10 + 10k + 4k^2 + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 8k^2 + 4k - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2k^2 + k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2k^2 + (2 - 1)k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2k^2 + 2k - k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2k(k + 1) - 1(k + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (k + 1)(2k - 1) = 0$$

$$\text{अतः } k = -1, \frac{1}{2}$$

प्रश्न 5. यदि बिन्दु $(3, -2)$, $(x, 2)$ तथा $(8, 8)$ संरेख हैं, तो x का मान सारणिक का प्रयोग कर ज्ञात कीजिए।

हल :

∵ दिए गए बिन्दु $(3, -2)$, $(x, 2)$ तथा $(8, 8)$ संरेख हैं।

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ x & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3(2 - 8) + 2(x - 8) + 1(8x - 16) = 0$$

$$\Rightarrow -18 + 2x - 16 + 8x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow 10x - 50 = 0$$

$$\Rightarrow 10x = 50$$

$$\Rightarrow x = \frac{50}{10}$$

$$\text{अतः } x = 5$$

प्रश्न 6. सारणिक प्रयोग से दो बिन्दुओं (3, 1) तथा (9, 3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि तीसरा बिन्दु (-2, -4) हो।

हल :

बिन्दुओं (3, 1) तथा (9, 3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x(1 - 3) - y(3 - 9) + 1(9 - 9) = 0$$

$$\Rightarrow -2x + 6y + 0 = 0$$

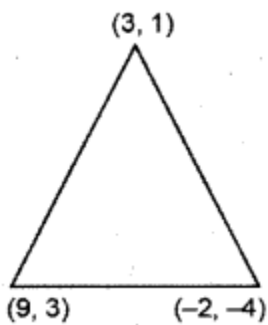
$$\Rightarrow -2(x - 3y) = 0$$

$$\Rightarrow x - 3y = 0$$

अतः बिन्दुओं (3, 1) तथा (9, 3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $x - 3y = 0$ है।

अब, त्रिभुज का क्षेत्रफल जबकि तीनों

बिन्दु (3, 1), (9, 3) तथा (-2, -4) हैं।



$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \{3(3 + 4) - 1(9 + 2) + 1(-36 + 6)\}$$

$$= \frac{1}{2} (21 - 11 - 30)$$

$$= \frac{1}{2}(-20)$$

$$= -10$$

$\Delta = 10$ वर्ग इकाई (ऋण चिह्न छोड़ने पर)

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल = 10 वर्ग इकाई।

प्रश्न 7. क्रैमर नियम से निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए

(i) $2x + 3y = 9, 3x - 2y = 7$

(ii) $2x - 7y - 13 = 0, 5x + 6y - 9 = 0$

हल : (i) दिया गया समीकरण निकाय

$$2x + 3y = 9$$

$$3x - 2y = 7$$

यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -18 - 21 = -39$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 27 = -13$$

$$\therefore \Delta \neq 0, \Delta_1 \neq 0 \text{ तथा } \Delta_2 \neq 0$$

$\therefore$ समीकरण निकाय संगत व स्वतंत्र है तथा इसका हल अद्वितीय है।

अतः क्रैमर नियम से,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-39}{-13} = 3$$

तथा $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-13}{-13} = 1$

अतः समीकरण निकाय का हल $x = 3, y = 1$.

(ii) दिया गया समीकरण निकाय

$$2x - 7y - 13 = 0$$

$$5x + 6y - 9 = 0$$

इन समीकरणों को निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं

$$2x - 7y = 13$$

$$5x + 6y = 9$$

यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 35 = 47$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & -7 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 78 + 63 = 141$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 65 = -47$$

$\therefore \Delta \neq 0, \Delta_1 \neq 0$ तथा $\Delta_2 \neq 0$

$\therefore$ समीकरण निकाय संगत व स्वतंत्र है तथा इसका हल अद्वितीय है।

अतः क्रैमर नियम से,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{141}{47} = 3$$

तथा $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-47}{47} = -1$

अतः समीकरण निकाय का हल $x = 3, y = -1$.

प्रश्न 8. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय असंगत हैं

(i). $3x - y + 2 = 3$

$$2x + y + 3z = 5$$

$$x - 2y - z = 1$$

(ii). $x + 6y + 11 = 0$

$$3x + 20y - 6z + 3 = 0$$

$$6y - 18z + 1 = 0$$

हल :

(i) दिया गया समीकरण निकाय

$$3x - y + 2z = 3$$

$$2x + y + 3z = 5$$

$$x - 2y - z = 1$$

यहाँ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1 + 6) + 1(-2 - 3) + 2(-4 - 1)$$

$$= 15 - 5 - 10$$

$$\Delta = 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1 + 6) + 1(-5 - 3) + 2(-10 - 1)$$

$$= 15 - 8 - 22$$

$$= -15$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-5 - 3) - 3(-2 - 3) + 2(2 - 5)$$

$$= -24 + 15 - 6$$

$$= -15$$

तथा

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1 + 10) + 1(2 - 5) + 3(-4 - 1)$$

$$= 33 - 3 - 15$$

$$= 15$$

$$\therefore \Delta = 0, \Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0 \text{ तथा } \Delta_3 \neq 0$$

अतः समीकरण निकाय असंगत है तथा इसका हल सम्भव नहीं है।

इति सिद्धम्।

(ii) दिया गया समीकरण निकाय ।

$$x + 6y + 11 = 0$$

$$3x + 20y - 6z + 3 = 0$$

$$6y - 18z + 1 = 0$$

दिए गए समीकरण निका को निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$x + 6y = -11$$

$$3x + 20y - 6z = -3$$

$$6y - 18z = -1$$

$$\begin{aligned} \text{यहाँ } \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 20 & -6 \\ 0 & 6 & -18 \end{vmatrix} \\ &= 1(-360 + 36) - 6(-54 - 0) + 0(18 - 20) \\ &= -324 + 324 \end{aligned}$$

$$\Delta = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -11 & 6 & 0 \\ -3 & 20 & -6 \\ -1 & 6 & -18 \end{vmatrix} \\ &= -11(-360 + 36) - 6(54 - 6) + 0(-18 + 20) \\ &= 3564 - 288 \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = 3276$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & -11 & 0 \\ 3 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -18 \end{vmatrix} \\ &= 1(54 - 6) + 11(-54 - 0) + 0(-3 - 0) \\ &= 48 - 594 \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = -546$$

$$\text{तथा } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -11 \\ 3 & 20 & -3 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-20 + 18) - 6(-3 - 0) - (18 - 0)$$

$$= -2 + 18 - 198$$

$$\Delta_3 = -182$$

$\therefore \Delta = 0, \Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$ तथा $\Delta_3 \neq 0$

अतः समीकरण निकाय असंगत है तथा इसका हल सम्भव नहीं है।

इति सिद्धम्।

प्रश्न 9. क्रमर नियम से निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए

(i) $x + 2y + 4z = 16$

$4x + 3y - 2z = 5$

$3x - 5y + z = 4$

(ii) $2x + y - z = 0$

$x - y + z = 6$

$x + 2z + z = 3$

हल : (i) दिया गया समीकरण निकाय

$x + 2y + 4z = 16$

$4x + 3y - 2z = 5$

$3x - 5y + z = 4$

यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1(3 - 10) - 2(4 + 6) + 4(-20 - 9)$$

$$= -7 - 20 - 116$$

$$\Delta = -143$$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 16(3 - 10) - 2(5 + 8) + 4(-25 - 12)$$

$$= -112 - 26 - 148$$

$$\Delta_1 = -286$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 16 & 4 \\ 4 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(5 + 8) - 16(4 + 6) + 4(16 - 15)$$

$$= 13 - 160 + 4$$

$$\Delta_2 = -143$$

तथा $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix}$

$$= 1(12 + 25) - 2(16 - 15) + 15(-20 - 9)$$

$$= 37 - 2 - 464$$

$$\Delta_3 = -429$$

अतः क्रेमर नियम से,

यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1(3 - 10) - 2(4 + 6) + 4(-20 - 9)$$

$$= -7 - 20 - 116$$

$$\Delta = -143$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-286}{-143} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-143}{-143} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-429}{-143} = 3$$

अतः $x = 2, y = 1, z = 3$.

(ii) दिया गया समीकरण निकाय ।

$$2x + y - z = 0$$

$$x - y + z = 6$$

$$x + 2y + z = 3$$

यहाँ

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(-1-2) - 1(1-1) - 1(2+1) \\ &= -6 - 0 - 3 \\ \Delta &= -9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0(-1-2) - 1(6-3) - 1(12+3) \\ &= 0 - 3 - 15 \\ \Delta_1 &= -18\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(6-3) - 0(1-1) - 1(3-6) \\ &= 6 - 0 + 3 \\ \Delta_2 &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{तथा } \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2(-3-12) - 1(3-6) + 0(2+1) \\ &= -30 + 3 + 0 \\ \Delta_3 &= -27\end{aligned}$$

अतः क्रैमर नियम से,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-18}{-9} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{9}{-9} = -1$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-27}{-9} = 3$$

अतः $x = 2, y = -1, z = 3$

प्रश्न 10. सारणिकों की सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए

(i) $6x + y - 3z = 5$

$x + 3y - 2z = 5$

$2x + y + 4z = 8$

(ii)

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$$

$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

हल : (i) दिया गया समीकरण निकाय

$6x + y - 3z = 5$

$x + 3y - 2z = 5$

$2x + y + 4z = 8$

यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

$$= 6(12 + 2) - 1(4 + 4) - 3(1 - 6)$$
$$= 84 - 8 + 15$$
$$\Delta = 91$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 5(12 + 2) - 1(20 + 16) - 3(5 - 24)$$
$$= 70 - 36 + 57$$

$$\Delta_1 = 91$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 5 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 6(20 + 16) - 5(4 + 4) - 3(8 - 10)$$

$$= 216 - 40 + 6$$

$$\Delta_2 = 182$$

$$\text{तथा } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 6(24 - 5) - 1(8 - 10) + 5(1 - 6)$$

$$= 114 + 2 - 25$$

$$\Delta_3 = 91$$

अतः क्रेमर नियम से,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{91}{91} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{182}{91} = 2$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{91}{91} = 1$$

अतः $x = 1, y = 2, z = 1$.

(ii) दिया गया समीकरण निकाय

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$$

$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

माना $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b$ तथा $\frac{1}{z} = c$, तब

$$2a + 3b + 10c = 4$$

$$4a - 6b + 5c = 1$$

$$6a + 9b - 20c = 2$$

$$\text{यहाँ } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 4 & -6 & 5 \\ 6 & 9 & -20 \end{vmatrix}$$

$$= 2(120 - 45) - 3(-80 - 30) + 10(36 + 36)$$

$$= 150 + 330 + 720$$

$$\Delta = 1200$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 1 & -6 & 5 \\ 2 & 9 & -20 \end{vmatrix}$$

$$= 4(120 - 45) - 3(-20 - 10) + 10(9 + 12)$$

$$= 300 + 90 + 210$$

$$= 600$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & -20 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-20 - 10) - 4(-80 - 30) + 10(8 - 6)$$

$$= -60 + 440 + 20$$

$$= 400$$

$$\text{तथा } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -6 & 1 \\ 6 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-12 - 9) - 3(8 - 6) + 4(36 + 36)$$

$$= -42 - 6 + 288$$

$$\Delta_3 = 240$$

अतः क्रैमर नियम से,

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{600}{1200} = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{400}{1200} = \frac{1}{3}$$

$$c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{240}{1200} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2$$

$$b = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3$$

$$c = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{5} \Rightarrow z = 5$$

अतः $x = 2, y = 3, z = 5$.

प्रश्न 11. आव्यूह सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए

(i) $2x - y = -2$

$3x + 4y = 3$

(ii) $5x + 7y + 2 = 0$

$4x + 6y + 3 = 0$

$x + y - z = 1$

(iii) $3x + y - 2z = 3$

$x - y - z = -1$

(iv) $6x - 12y + 25z = 4$

$4x + 15 - 20z = 3$

$2x + 18y + 15z = 10$

हल : (i) दिया गया समीकरण निकाय

$2x - y = -2$

$3x + 4y = 3$

इसे आव्यूह रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$AX = B$ (i)

जहाँ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

आव्यूह A का सारणिक

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर

$$a_{11} = 4, a_{12} = -3, a_{21} = 1, a_{22} = 2$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

अब $\text{adj.} A = C^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj.} A}{|A|} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

समीकरण (i) से,

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -8+3 \\ 6+6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/11 \\ 12/11 \end{bmatrix}$$

अतः $x = \frac{-5}{11}$ तथा $y = \frac{12}{11}$.

(ii) दिया गया समीकरण निकाय

$$5x + 7y + 2 = 0$$

$$4x + 6y + 3 = 0$$

दिए गए समीकरण निकाय को निम्न प्रकार से भी लिख सकते

$$5x + 7y = -2$$

$$4x + 6y = -3$$

इस समीकरण निकाय को आव्यूह रूप में निम्न प्रकार लिख सकते

$$AX = B$$

जहाँ $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

आव्यूह A का सारणिक

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 28 = 2 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = 6, a_{12} = -4, a_{21} = -7, a_{22} = 5$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

अब $\text{adj } A = C^T = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

समीकरण (i) से,

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -12 + 21 \\ 8 - 15 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ -7/2 \end{bmatrix}$$

अतः $x = \frac{7}{2}$ तथा $y = \frac{-7}{2}$

(iii) दिया गया समीकरण निकाय

$$x + y - z = 1$$

$$3x + y - 2z = 3$$

$$x - y - z = -1$$

इस समीकरण निकाय को आव्यूह रूप में लिखने पर,

$$AX = B \dots (i)$$

जहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

अतः रैखिक समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{यहाँ } |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1(-1-2) - 1(-3+2) - 1(-3-1) \\ &= -3 + 1 + 4 = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1-2) = -3$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-3+2) = 1$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3-1) = -4$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1+1) = 0$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2+1) = -1$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-2+3) = -1$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1-3) = -2$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

अब $\text{adj.}A = C^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T$

$$\text{adj.}A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj.}A}{|A|} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

समीकरण (i) से,

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3+6+1 \\ 1+0+1 \\ -4+6+2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

अतः $x = 2, y = 1, z = 2.$

(iv) दिया गया समीकरण निकाय

$$6x - 12y + 25z = 4$$

$$4x + 15y - 20z = 3$$

$$2x + 18y + 15z = 10$$

इन समीकरण निकाय को आव्यूह रूप से लिखने पर,

$$AX = B \dots (i)$$

$$\text{जहाँ } A = \begin{bmatrix} 6 & -12 & 25 \\ 4 & 15 & -20 \\ 2 & 18 & 15 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

अतः रैखिक समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 6 & -12 & 25 \\ 4 & 15 & -20 \\ 2 & 18 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

यहाँ $|A| = \begin{vmatrix} 6 & -12 & 25 \\ 4 & 15 & -20 \\ 2 & 18 & 15 \end{vmatrix}$

$$= 6(225 + 360) + 12(60 + 40) + 25(72 - 30)$$

$$= 3510 + 1200 + 1050 = 5760 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 15 & -20 \\ 18 & 15 \end{vmatrix} = 225 + 360 = 585$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} 4 & -20 \\ 2 & 15 \end{vmatrix} = - (60 + 40) = -100$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 4 & 15 \\ 2 & 18 \end{vmatrix} = (72 - 30) = 42$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} -12 & 25 \\ 18 & 15 \end{vmatrix} = - (-180 - 450) = 630$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 6 & 25 \\ 2 & 15 \end{vmatrix} = (90 - 50) = 40$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 6 & -12 \\ 2 & 18 \end{vmatrix} = - (108 + 24) = -132$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} -12 & 25 \\ 15 & -20 \end{vmatrix} = (240 - 375) = -135$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 6 & 25 \\ 4 & -20 \end{vmatrix} = - (-120 - 100) = 220$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 6 & -12 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = (90 + 48) = 138$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$C = \begin{bmatrix} 585 & -100 & 42 \\ 630 & 40 & -132 \\ -135 & 220 & 138 \end{bmatrix}$$

अब $\text{adj.} A = C^T = \begin{bmatrix} 585 & -100 & 42 \\ 630 & 40 & -132 \\ -135 & 220 & 138 \end{bmatrix}^T$

$$\text{adj.} A = \begin{bmatrix} 585 & 630 & -135 \\ -100 & 40 & 220 \\ 42 & -132 & 138 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj.} A}{|A|}$

अतः $A^{-1} = \frac{1}{5760} \begin{bmatrix} 585 & 630 & -135 \\ -100 & 40 & 220 \\ 42 & -132 & 138 \end{bmatrix}$

समीकरण (i) से,

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{5760} \begin{bmatrix} 585 & 630 & -135 \\ -100 & 40 & 220 \\ 42 & -132 & 138 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{5760} \begin{bmatrix} 2340 + 1890 - 1350 \\ -400 + 120 + 2200 \\ 168 - 396 + 1380 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{5760} \begin{bmatrix} 2880 \\ 1920 \\ 1152 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

अतः $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{5}$

प्रश्न 12. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

तथा निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x - 2 = 10, 2x + y + 3z = 8, -2y + z = 7$$

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1 + 6) + 2(2 - 0) + (-4 - 0)$$

$$= 7 + 4 + 0$$

$$|A| = 11 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 6) = 7$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 0) = -2$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (-4 - 0) = -4$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(-2 + 0) = 2$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 0) = 1$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 - 0) = 2$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-6 - 0) = -6$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 0) = -3$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 4) = 5$$

A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$C = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -6 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = C^T = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -6 & -3 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \dots(1)$$

अब, दिया गया समीकरण निकाय

$$x - 2y = 10$$

$$2x + y + 3z = 8$$

$$-2y + 2 = 7$$

रैखिक समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$\text{जहाँ } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{तब } X = A^{-1} B$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 70+16-42 \\ -20+8-21 \\ -40+16+36 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 44 \\ -33 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

अतः $x = 4, y = -3, z = 1$

प्रश्न 13. आव्यूहों

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

तथा

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

गुणनफल ज्ञात कीजिए तथा इसकी सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$x - y + z = 4, x - 2y - 2z = 9, 2x + y + 3z = 1$$

हल : माना

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

तब आव्यूहों का गुणनफल

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4+4+8 & 4-8+4 & -4-8+12 \\ -7+1+6 & 7-2+3 & -7-2+9 \\ 5-3-2 & -5+6-1 & 5+6-3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{8}A\right)B = I_3 \quad (\because AB = BI_3)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{8}A\right)B.B^{-1} = I_3B^{-1}$$

[दोनों पक्षों में B^{-1} का दायाँ गुणन करने पर]

$$\Rightarrow \frac{1}{8}A = B^{-1} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{8}A$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad \dots(i)$$

अब दिए गए समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$BX = C$$

$$\Rightarrow X = B^{-1}.C$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -16+36+4 \\ -28+9+3 \\ 20-27-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 24 \\ -16 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

अतः $x = 3, y = -2, z = -1$.

प्रश्न 14. आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिए तथा इसकी सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2y \\ 6z \\ -2x \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

हल : दिया गया आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1 + 3) + 1(2 + 3) + 1(2 - 1)$$

$$= 4 + 5 + 1 = 10 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 3) = 4$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 3) = -5$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2 - 1) = 1$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 - 1) = 2$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 1) = 0$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 1) = -2$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (3 - 1) = 2$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -(-3 - 2) = 5$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 2) = 3$$

A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = B^T = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

अब दिया गया समीकरण निकाय

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2y \\ 6z \\ -2x \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+z \\ 2x+y \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 3z \\ -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 \\ 3z+0 \\ 2-x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x+z &= y+4 & \Rightarrow & x-y+z=4 \\ 2x+y &= 3z & \Rightarrow & 2x+y-3z=0 \\ y+z &= 2-x & \Rightarrow & x+y+z=2 \end{aligned}$$

उपरोक्त समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

अर्थात्

$$AX = B$$

$\Rightarrow$

$$X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 16+0+4 \\ -20+0+10 \\ 4+0+6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

अतः $x = 2, y = -1, z = 1$.

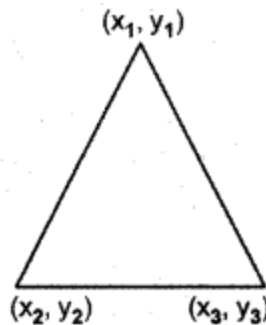
प्रश्न 15. यदि समबाहु त्रिभुज की भुजा $\parallel$ तथा शीर्ष $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ एवं (x_3, y_3) हों, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 2 \\ x_2 & y_2 & 2 \\ x_3 & y_3 & 2 \end{vmatrix}^3 = 3a^4$$

हल : दिया है कि समबाहु त्रिभुज की भुजा a तथा समबाहु त्रिभुज के तीनों शीर्ष $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ तथा (x_3, y_3) हैं।

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 2 \\ x_2 & y_2 & 2 \\ x_3 & y_3 & 2 \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2$$



$$\begin{aligned}
&= \left[2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right]^2 \\
&= [2 \cdot 2\Delta]^2 = [4\Delta]^2 \\
&= \left[4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right]^2
\end{aligned}$$

$$[\because \text{समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल } \frac{\sqrt{3}}{4} a^2]$$

$$\begin{aligned}
&= [\sqrt{3}a^2]^2 \\
&= 3a^4 \\
&= \text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

$$\text{अतः } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 2 \\ x_2 & y_2 & 2 \\ x_3 & y_3 & 2 \end{vmatrix}^2 = 3a^4.$$

इति सिद्धम्।

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2$$

$$|A| = 5 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = 3, a_{12} = -2, a_{21} = 1, a_{22} = 1$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj. } A = B^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj. } A}{|A|}$$

$$\text{अतः } A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

प्रश्न 2. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0(0 - 1) - 1(0 - 1) + (1 - 0).$$

$$= 0 + 1 + 1$$

$$|A| = 2 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 1) = -1$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 1) = 1$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 0) = 1$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 1) = 1$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 1) = -1$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 1) = 1$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 0) = 1$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 1) = 1$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 1) = -1$$

A के सहखण्डों में निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

$$\text{अतः } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 3. यदि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया आव्यूह,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

∵ आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है, तब

$$|A| = 0$$

$$1(-6 - 2) + 2(-3 - x) + 3(2 - 2x) = 0$$

$$-8 - 6 - 2x + 6 - 6x = 0$$

$$-8 - 8x = 0$$

$$-8x = 8.$$

$$x = \frac{8}{-8}$$

$$x = -1$$

प्रश्न 4. क्रैमर नियम का प्रयोग कर निम्नलिखित समीकरण निकाय हल कीजिए।

$$(i) \quad 2x - y = 17$$

$$x + 5y = 6$$

$$(ii) \quad 3x + ay = 4$$

$$2x + ay = 2, a \neq 0$$

$$(iii) \quad x + 2 + 3z = 6$$

$$2x + 4y + z = 7$$

$$3x + 2y + 9z = 14$$

हल : (i) दिया गया समीकरण निकाय

$$2x - y = 17$$

$$3x + 5y = 6$$

यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 17 & -1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 85 + 6 = 91$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 51 = -39$$

$$\therefore \Delta \neq 0, \Delta_1 \neq 0 \text{ तथा } \Delta_2 \neq 0$$

$\therefore$ समीकरण निकाय संगत व स्वतंत्र है तथा इसका हल अद्वितीय है।

अतः क्रेमर नियम से,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{91}{13} = 7, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-39}{13} = -3$$

अतः समीकरण निकाय का हल $x = 7, y = -3$

(ii) दिया गया समीकरण निकाय

$$3x + ay = 4$$

$$2a + y = 2, a \neq 0$$

जहाँ, $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & a \\ 2 & a \end{vmatrix} = 3a - 2a = a$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & a \\ 2 & a \end{vmatrix} = 4a - 2a = 2a$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2$$

$$\therefore \Delta \neq 0, \Delta_1 \neq 0 \text{ तथा } \Delta_2 \neq 0$$

$\therefore$ समीकरण निकाय संगत व स्वतंत्र है तथा इसका हल अद्वितीय है।

अतः क्रेमर नियम से,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2a}{a} = 2$$

तथा $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{a}$

अतः समीकरण निकाय का हल $x = 2, y = -\frac{2}{a}$

(iii) दिया गया समीकरण निकाय

$$x + 2 + 2x = 6$$

$$2x + 4y + 2 = 7$$

$$3x + 2y + 9z = 14$$

यहाँ $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

$$= 1(36 - 2) - 2(18 - 3) + 3(4 - 12)$$

$$= 34 - 30 - 24$$

$$= -20$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \\ 14 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= 6(36 - 2) - 2(63 - 14) + 3(14 - 56)$$

$$= 204 - 98 - 126$$

$$= -20$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 14 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= 1(63 - 14) - 6(18 - 3) + 3(28 - 21)$$

$$= 49 - 90 + 21$$

$$= -20$$

तथा $\Delta_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 14 \end{bmatrix}$

$$= 1(56 - 14) - 2(28 - 21) + 6(4 - 12)$$

$$= 42 - 12 - 48$$

$$= -20$$

$\therefore \Delta \neq 0, \Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$ तथा $\Delta_3 \neq 0$

∴ समीकरण निकाय संगत व स्वतंत्र है तथा इसका हल अद्वितीय है।

अतः क्रमर नियम से,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1$$

तथा $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1$

अतः समीकरण निकाय का हल $x = 1, y = 1, z = 1$.

प्रश्न 5. क्रमर नियम का प्रयोग कर सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय असंगत है।

(i) $2x - y = 5$

$4x - 2y = 7$

(ii) $x + y + z = 1,$

$x + 2y + 3z = 2$

$3x + 4y + 5z = 3$

हल : (i) दिया गया समीकरण निकाय

$2x - y = 5$

$4x - 2y = 7$

यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 7 = -3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 20 = -6$$

∴ $\Delta = 0, \Delta_1 \neq 0$ तथा $\Delta_2 \neq 0$

अतः समीकरण निकाय संगत है।

(ii) दिया गया समीकरण निकाय

$$x + y + z = 1$$

$$x + 2y + 3z = 2$$

$$3x + 4y + 3z = 3$$

यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 1(10 - 12) - 1(5 - 9) + 1(4 - 6)$$

$$= -2 + 4 - 2$$

$$= 0$$

, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 1(10 - 12) - 1(10 - 9) + 1(8 - 6)$$

$$= -2 - 1 + 2$$

$$= -1$$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 1(10 - 9) - 1(5 - 9) + 1(3 - 6)$$

$$= 1 + 4 - 3$$

$$= 2$$

तथा $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

$$= 1(6 - 8) - 1(3 - 6) + 1(4 - 6)$$

$$= -2 + 3 - 2$$

$$= -1$$

$\therefore \Delta = 0, \Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$ तथा $\Delta_3 \neq 0$

अतः दिया गया समीकरण निकाय असंगत है।

प्रश्न 6. एक द्वितीय क्रम की आव्यूह A ज्ञात कीजिए :

जहाँ

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

हल :

$$\text{माना } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ तथा } C = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{तब } AB = C$$

$$ABB^{-1} = CB^{-1}$$

[दोनों पक्षों में B^{-1} से गुणा करने पर]

$$AI = CB^{-1} \quad [\because BB^{-1} = I]$$

$$A = CB^{-1} \quad \dots(i)$$

$$[\because AI = A]$$

$$\text{अब } |B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 \neq 0$$

अतः B^{-1} का अस्तित्व है।

B के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$B_{11} = 4, B_{12} = -1, B_{21} = 2, B_{22} = 1$$

B के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj.} B = D^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{-1} = \frac{\text{adj.} B}{|B|} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

अब समीकरण (i) से

$$A = C.B^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 7. यदि

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$A^2 + 4A - 42I = 0$ तथा इसकी सहायता से A^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 64+10 & -40+20 \\ -16+8 & 10+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74 & -20 \\ -8 & 26 \end{bmatrix} \\ 4A &= 4 \cdot \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 & 20 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{तथा } 42I = 42 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & 0 \\ 0 & 42 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 + 4A - 42I$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 74 & -20 \\ -8 & 26 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -32 & 20 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 42 & 0 \\ 0 & 42 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 74-32-42 & -20+20-0 \\ -8+8-0 & 26+16-42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{अतः } A^2 + 4A - 42I = 0$$

$$\Rightarrow A^2 + 4A = 42I$$

दोनों पक्षों में A^{-1} का वाम गुणन करने पर

$$\Rightarrow A^{-1}A^2 + 4A^{-1}A = 42A^{-1}I$$

$$\Rightarrow A + 4I = 42A^{-1}$$

$$[\because A^{-1}A^2 = A, A^{-1}A = I]$$

$$\text{तथा } A^{-1}I = A^{-1}]$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A^{-1} &= \frac{1}{42} [A + 4I] \\
&= \frac{1}{42} \left(\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{42} \left(\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{42} \begin{bmatrix} -8+4 & 5+0 \\ 2+0 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \\
\text{अतः } A^{-1} &= \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

प्रश्न 8. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^{-1} = \frac{1}{19}A$

हल : दिया गया आव्यूह.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{तब } |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\
&= -4 - 15 = -19 \neq 0
\end{aligned}$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

A का सहखण्ड ज्ञात करने पर

$$a_{11} = -2, a_{12} = -5, a_{21} = -3, a_{22} = 2$$

A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = B^T = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj. } A}{|A|} = \frac{1}{-19} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{या } A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{19} A \quad \text{इति सिद्धम्।}$$

प्रश्न 9. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा दिखाइये कि $A^{-1} \cdot A = I_3$

हल : दिया गया आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{तब } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(16 - 9) - 3(4 - 3) + 3(3 - 4)$$

$$= 7 - 3 - 3$$

$$|A| = 1 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (16 - 9) = 7$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (3 - 4) = -1$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(12 - 9) = -3$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (4 - 3) = 1$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 3) = 0$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (9 - 12) = -3$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 3) = 0$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (4 - 3) = 1$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अब $\text{adj.} A = B^T$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj.} A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः } A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

पुनः सिद्ध करना है कि

$$A^{-1}A = I_3$$

$$\text{L.H.S.} = A^{-1}A$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-3-3 & 21-12-9 & 21-9-12 \\ -1+1+0 & -3+4+0 & -3+3+0 \\ -1+0+1 & -3+0+3 & -3+0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 = \text{R.H.S.}$$

अतः

$$A^{-1}A = I_3.$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 10. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 - 4A - 5I = 0$ तत्पश्चात् इसकी सहायता से A^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया आव्यूह,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A.A$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2 \\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2 \\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः } A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$4A = 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

तथा $5I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 - 4A - 5I = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-4-5 & 8-8-0 & 8-8-0 \\ 8-8-0 & 9-4-5 & 8-8-0 \\ 8-8-0 & 8-8-0 & 9-4-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

अतः $A^2 - 4A - 5I = 0$

$$\Rightarrow A^2 - 4A = 5I$$

$$\Rightarrow A^{-1}A^2 - 4A^{-1}A = 5A^{-1}I$$

$$\Rightarrow A - 4I = 5A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}[A - 4I]$$

$$= \frac{1}{5} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{5} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1-4 & 2-0 & 2-0 \\ 2-0 & 1-4 & 2-0 \\ 2-0 & 2-0 & 1-4 \end{bmatrix}$$

अतः $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

प्रश्न 11. आव्यूह सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

(i) $5x - 7y = 2$
 $7x - 5y = 3$

(ii) $3x + y + z = 3$
 $2x - y - z = 2$
 $-x - y + z = 1$

(iii) $x + 2y - 2z + 5 = 0$
 $-x + 3y + 4 = 0$
 $-2y + z - 4 = 0$

हल : (i) दिया गया समीकरण निकाय

$5x - 7y = 2$
 $7x - 5y = 3$

इसे आव्यूह रूप में लिखने पर

$AX = B \dots (i)$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

आव्यूह A का सारणिक

, $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -25 + 49 = 24 \neq 0$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर

$a_{11} = -5, a_{12} = -7, a_{21} = 7, a_{22} = 5$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$B = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$

$$\text{adj } A = B^T = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

समीकरण (i) से,

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} -10 + 21 \\ -14 + 15 \end{bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/24 \\ 1/24 \end{bmatrix}$$

अतः $x = \frac{11}{24}$ तथा $y = \frac{1}{24}$.

(ii) दिया गया समीकरण निकाय

$$3x + y + z = 3$$

$$2x - y - z = 2$$

$$-x - y + z = 1$$

इस समीकरण निकाय को आव्यूह रूप में लिखने पर

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

आव्यूह A का सारणिक

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(-1-1) - 1(2-1) + 1(-2-1) \\ &= -6 - 1 - 3 = -10 \neq 0 \end{aligned}$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1 - 1) = -2$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2 - 1) = -3$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 1) = -2$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (3 + 1) = 4$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 + 1) = 2$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1 + 1) = 0$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 2) = 5$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

अब $\text{adj } A = B^T$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

समीकरण (i) से,

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{bmatrix} -6-4+0 \\ -3+8+5 \\ -9+4-5 \end{bmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

अतः $x = 1, y = -1, z = 1$

(iii) दिया गया समीकरण निकाय ।

$$x + 2y - 2z + 5 = 0$$

$$-x + 3y + 4 = 0$$

$$-2y + z - 4 = 0$$

समीकरण निकाय को निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं,

$$x + 2y - 2z = -5$$

$$-x + 3y = -4$$

$$-2y + z = 4$$

इसी समीकरण निकाय को आव्यूह रूप में लिखने पर ।

$$AX = B \dots (i)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

आव्यूह A का सारिणक

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(3 - 0) - 2(-1 - 0) - 2(2 - 0) \\ &= 3 + 2 - 4 = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (3 - 0) = 3$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 - 0) = 1$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (2 - 0) = 2$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 4) = 2$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 0) = 1$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 - 0) = 2$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 6) = 6$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (3 + 2) = 5$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj.} A = B^T$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj.} A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

समीकरण (i) से,

$$X = A^{-1} B$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -15 - 8 + 24 \\ -5 - 4 + 8 \\ -10 - 8 + 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

अतः $x = 1, y = -1, z = 2$.

प्रश्न 12. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि शीर्ष निम्नलिखित हों :

(i) $A(-3, 5), B(3, -6), C(7, 2)$

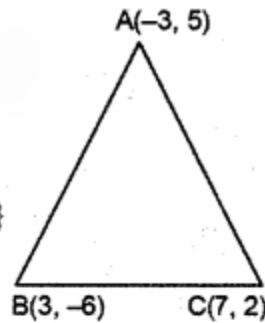
(ii) $A(2, 7), B(2, 2), C(10, 8)$

हल : (i) त्रिभुज ABC के शीर्ष

$A = (-3, 5), B = (3, -6), C = (7, 2)$

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल Δ

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \{-3(-6-2) - 5(3-7) + 1(6+42)\} \\
 &= \frac{1}{2} (24 + 20 + 48) \\
 &= \frac{1}{2} (92) = 46 \text{ वर्ग इकाई}
 \end{aligned}$$

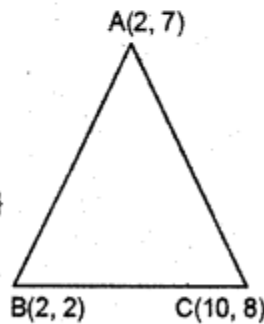


ΔABC का क्षेत्रफल = 46 वर्ग इकाई।

अतः त्रिभुज ABC के शीर्ष $A = (2, 7)$, $B = (2, 2)$, $C = (10, 8)$

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल Δ

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 10 & 8 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \{2(2-8) - 7(2-10) + 1(16-20)\} \\
 &= \frac{1}{2} (-12 + 56 - 4) \\
 &= \frac{1}{2} (40) = 20 \text{ वर्ग इकाई}
 \end{aligned}$$



अतः त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = 20 वर्ग इकाई।

प्रश्न 13. यदि बिन्दु $(2, -3)$, $(\lambda, -2)$ तथा $(0, 5)$ संरेख हो, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए बिन्दु $(2, -3)$, $(\lambda, -2)$ तथा $(0, 5)$ संरेख हैं, तब

$$\begin{aligned}
 &\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ \lambda & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
 &\Rightarrow 2(-2-5) + 3(\lambda-0) + 1(5\lambda-0) = 0 \\
 &\Rightarrow -14 + 3\lambda + 5\lambda = 0 \\
 &\Rightarrow 8\lambda = 14 \\
 &\lambda = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}
 \end{aligned}$$

प्रश्न 14. आव्यूह A ज्ञात कीजिए जबकि :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

हल : माना $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

तब दी गई आव्यूह समीकरण $BAC = I \quad \dots(i)$

आव्यूह B का सारणिक

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$$

पुनः आव्यूह C का सारणिक

$$|C| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1 \neq 0$$

अतः B^{-1} तथा C^{-1} का अस्तित्व है।

B के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$b_{11} = 3, b_{12} = -2, b_{21} = -2, b_{22} = 1$$

B के सहखण्डों से बना आव्यूह

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj.} B = D^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{-1} = \frac{\text{adj.} B}{|B|} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

इस प्रकार C के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$C_{11} = 5, C_{12} = -3, C_{21} = -7, C_{22} = 4$$

C के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$E = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj.}C = E^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore C^{-1} = \frac{\text{adj.}C}{|C|} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

अब समीकरण (i) से,

$$BAC = I$$

$$\Rightarrow B^{-1}(BAC)C^{-1} = B^{-1}IC^{-1}$$

$$\Rightarrow (B^{-1}B)A(CC^{-1}) = B^{-1}C^{-1}$$

$$\Rightarrow IAI = B^{-1}C^{-1}$$

$$\Rightarrow (IA)I = B^{-1}C^{-1}$$

$$\Rightarrow AI = B^{-1}C^{-1}$$

$$\Rightarrow A = B^{-1}C^{-1}$$

$$\Rightarrow A = B^{-1}C^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15+6 & -21-8 \\ -10-3 & 14+4 \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः} \quad A = \begin{bmatrix} 21 & -29 \\ -13 & 18 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 15. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। तत्पश्चात् इसकी सहायता से निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$x + y + z = 2, x + 2y - 3z = 13, 2x - y + 3z = -7.$$

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

तब $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

$$= 1(6 - 3) - 1(3 + 6) + 1(-1 - 4)$$

$$= 3 - 9 - 5$$

अतः $|A| = -11 \neq 0$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (6 - 3) = 3$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3 + 6) = -9$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1 - 4) = -5$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 + 1) = -4$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (3 - 2) = 1$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 2) = 3$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (-3 - 2) = -5$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-3 - 1) = 4$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2 - 1) = 1$$

A के सहखण्डों के निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -5 \\ -4 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = B^T$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -9 & -5 \\ -4 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः } A^{-1} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

अब दिया गया समीकरण निकाय

$$x + y + z = 2$$

$$x + 2y - 3z = 13$$

$$2x - y + 3z = -7$$

रैखिक समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 6 - 52 + 35 \\ -18 + 13 - 28 \\ -10 + 39 - 7 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -11 \\ -33 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

अतः $x = 1, y = 3, z = -2$.

प्रश्न 16. यदि

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \frac{1+bc}{a} \end{bmatrix}$$

हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा दिखाइये कि $aA^{-1} = (a^2 + bc + 1)I - aA$.

हल : दिया गया आव्यूह,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \frac{1+bc}{a} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{तब } |A| &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & \frac{1+bc}{a} \end{vmatrix} \\ &= 1 + bc - bc = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = \frac{1+bc}{a}, a_{12} = -c, a_{21} = -b, a_{22} = a$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1+bc}{a} & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = B^T = \begin{bmatrix} \frac{1+bc}{a} & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1+bc}{a} & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} \frac{1+bc}{a} & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1+bc}{a} & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \dots(i)$$

अब सिद्ध करना है कि

$$aA^{-1} = (a^2 + bc + 1)I - aA$$

$$\text{R.H.S.} = (a^2 + bc + 1)I - aA$$

$$= (a^2 + bc + 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} a & b \\ c & \frac{1+bc}{a} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc + 1 & 0 \\ 0 & a^2 + bc + 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ac & 1 + bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc + 1 - a^2 & 0 - ab \\ 0 - ac & a^2 + bc + 1 - 1 - bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} bc + 1 & -ab \\ -ac & a^2 \end{bmatrix}$$

$$= a \begin{bmatrix} \frac{1+bc}{a} & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = aA^{-1} = \text{L.H.S.}$$

अतः $aA^{-1} = (a^2 + bc + 1)I - aA$. इति सिद्धम्।

प्रश्न 17. सारणिक की सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए—

$$x + y + z = 1$$

$$ax + by + cz = k$$

$$a^2x + b^2y + c^2z = k^2$$

हल: दिया गया समीकरण निकाय

$$x + y + z = 1$$

$$ax + by + cz = k$$

$$a^2x + b^2y + c^2z = k^2$$

$$\text{यहाँ } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$[C_1 \rightarrow C_1 - C_2$ तथा $C_2 \rightarrow C_2 - C_3$ की संक्रिया से]

$$\begin{aligned}
 &= (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix} \\
 &= (a-b)(b-c)(b+c-a-b) \\
 &= (a-b)(b-c)(c-a) \\
 \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & b & c \\ k^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k-b & b-c & c \\ k^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$[C_1 \rightarrow C_1 - C_2$ तथा $C_2 \rightarrow C_2 - C_3$ की संक्रिया से]

$$\begin{aligned}
 &= (k-b)(b-c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ k+b & b+c & c^2 \end{vmatrix} \\
 &= (k-b)(b-c)(b+c-k-b) \\
 &= (k-b)(b-c)(c-k) \\
 \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & k & c \\ a^2 & k^2 & c^2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-k & k-c & c \\ a^2-k^2 & k^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$[C_1 \rightarrow C_1 - C_2$ तथा $C_2 \rightarrow C_2 - C_3$ की संक्रिया]

$$\begin{aligned}
 &= (a-k)(k-c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+k & k+c & c^2 \end{vmatrix} \\
 &= (a-k)(k-c)(k+c-a-k) \\
 &= (a-k)(k-c)(c-a)
 \end{aligned}$$

$$\text{तथा } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & k \\ a^2 & b^2 & k^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-k & k \\ a^2-b^2 & b^2-k^2 & k^2 \end{vmatrix}$$

$[C_1 \rightarrow C_1 - C_2 \text{ तथा } C_2 \rightarrow C_2 - C_3 \text{ की संक्रिया से}]$

$$= (a-b)(b-k) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ a+b & b+k & k^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-k)(b+k-a-b)$$

$$\Delta_3 = (a-b)(b-k)(k-a)$$

अतः क्रमर नियम से,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(k-b)(b-c)(c-k)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(k-b)(c-k)}{(a-b)(c-a)}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{(a-k)(k-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(a-k)(k-c)}{(a-b)(b-c)}$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{(a-b)(b-k)(k-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(b-k)(k-a)}{(b-c)(c-a)}$$

$$\text{अतः } x = \frac{(c-k)(k-b)}{(c-a)(a-b)}, \quad y = \frac{(k-c)(a-k)}{(b-c)(a-b)}$$

$$\text{तथा } z = \frac{(b-k)(k-a)}{(b-c)(c-a)}$$

प्रश्न 18. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। तत्पश्चात् इसकी सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$x + 2y - 3z = -4, \quad 2x + 3y + 2z = 2, \quad 3x - 3y - 4z = 11$$

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-12 + 6) - 2(-8 - 6) - 3(-6 - 9) \\ = -6 + 28 + 45 = 67 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = (-12 + 6) = -6$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -(-8 - 6) = 14$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = (-6 - 9) = -15$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -(-8 - 9) = 17$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-4 + 9) = 5$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -(-3 - 6) = 9$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (4 + 9) = 13$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2 + 6) = -8$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (3 - 4) = -1$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} -6 & 14 & -15 \\ 17 & 5 & 9 \\ 13 & -8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj.}A = B^T$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 14 & -15 \\ 17 & 5 & 9 \\ 13 & -8 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -6 & 17 & 13 \\ 14 & 5 & -8 \\ -15 & 9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj.}A}{|A|} = \frac{1}{67} \begin{bmatrix} -6 & 17 & 13 \\ 14 & 5 & -8 \\ -15 & 9 & -1 \end{bmatrix}$$

अब दिया गया समीकरण निकाय

$$x + 2y - 3z = -4$$

$$2x + 3y + 2z = 2$$

$$3x - 3y - 4z = 11$$

रैखिक समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{67} \begin{bmatrix} -6 & 17 & 13 \\ 14 & 5 & -8 \\ -15 & 9 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{67} \begin{bmatrix} 24 + 34 + 143 \\ -56 + 10 - 88 \\ 60 + 18 - 11 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{67} \begin{bmatrix} 201 \\ -134 \\ 67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

अतः $x = 3, y = -2, z = 1$.

प्रश्न 19. यदि

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

हो, तो X ज्ञात कीजिए।

हल : माना

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{तब } AX = B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B \quad \dots(i)$$

आव्यूह A का सारणिक

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 12 = 10 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

$$\therefore a_{11} = -2, a_{12} = -3, a_{21} = 4, a_{22} = 1$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = C^T = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

समीकरण (i) से

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}B \\ &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 32+28 & 12+8 \\ 48+7 & 18+2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 60 & 20 \\ 55 & 20 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 60/10 & 20/10 \\ 55/10 & 20/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11/2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

प्रश्न 20. निम्नलिखित समीकरण निकाय के अनन्त हल हो, तो a तथा b का मान ज्ञात कीजिए-

$$2x + y + az = 4$$

$$bx - 2y + z = -2$$

$$5x + 5y + z = -2$$

हल : दिया गया समीकरण निकाय

$$2x + y + az = 4$$

$$bx - 2y + z = -2$$

$$5x + 5y + z = -2$$

$\therefore$ समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं, तब $\Delta = 0, \Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0$ तथा $\Delta_3 = 0$ होगा।