इण्टरमीडिएट परीक्षा, 2014

गणित—द्वितीय प्रश्न-पत्र

समय : 3 घण्टे 15 मिनट] 335 (GF) [पूर्णांक : 50

1. निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** खण्डों का हल कीजिए—

(क) $\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\cot x}$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 1

(ख) सरल रेखा $(\sqrt{3})x - y + 5 = 0$ का x-अक्ष से बने कोण को ज्ञात कीजिए। 1

(ग) सदिशों $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ के **बीच** का कोण ज्ञात कीजिए। 1

(घ) यदि $f(x) = x^2 + 1$, तो $f(f(x))$ का **मान** ज्ञात कीजिए। 1

(ङ) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूलबिन्दु से जाता है तथा x-अक्ष पर 4 इकाई का अन्त:खण्ड एवं y-अक्ष पर 2 इकाई का अन्त:खण्ड काटता है। 1

2. (क) एक फलन निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin x}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

क्या फलन $x = 0$ पर सतत है? 2

(ख) वक्र $y = 2x^2 - 4x + 1$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ खींची गई स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है। 2

(ग) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

(घ) यदि मूलबिन्दु से उस रेखा पर जो अक्षों से अन्त:खण्ड a_1 तथा b_1 काटती है, डाले गए लम्ब की लम्बाई p_1 है तो सिद्ध कीजिए कि 2

$$p_1 = \frac{a_1 b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}.$$

(ङ) दिखाइए कि समीकरण

$\frac{1}{x+y-a} + \frac{1}{x-y+a} + \frac{1}{y-x+a} = 0$ एक परवलय को निरूपित करता है। 2

3. (क) $\tan^{-1} x$ का अवकल गुणांक $\sin^{-1} x$ के सापेक्ष $x = \frac{1}{2}$ पर ज्ञात कीजिए। 2

(ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{\tan x}{y + \sin y}$ को हल कीजिए। 2

(ग) समतलों $\vec{r}.(\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + 7 = 0$ तथा $\vec{r}.(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 5 = 0$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 2

(घ) वक्र $10x^2 + 7y^2 = 70$ की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए तथा नाभिलम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 2

(ङ) उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी आसन्न भुजाएँ $3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ हैं। 2

4. (क) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

(ख) दर्शाइए कि बिन्दुएँ (a, b, c), (b, c, a) तथा (c, a, b) एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं। 3

(ग) सिद्ध कीजिए कि वृत्त $2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 2 = 0$ तथा $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ एक-दूसरे को स्पर्श करते हैं। 3

(घ) सिद्ध कीजिए कि समीकरण $9x^2 - 16y^2 - 36x + 96y - 252 = 0$ एक अतिपरवलय को प्रदर्शित करता है। इसका केन्द्र तथा उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

5. (क) सिद्ध कीजिए कि $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ का उच्चिष्ठ मान $e^{1/e}$ है। 3

(ख) आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या का हल निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत कीजिए—

$$x + y \leq 24$$
$$2x + y \leq 32$$
$$x, y \geq 0$$

$Z = 150x + 250y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। 3

(ग) अवकल समीकरण $(1 + x^2)dy + 2xy\,dx = \cot x\,dx$ को हल कीजिए। 3

(घ) सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{4}$. 3

6. (क) यदि वक्र $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा OX और OY अक्षों को क्रमश: P और Q पर काटे तो सिद्ध कीजिए कि $OP + OQ = a$, जहाँ O मूलबिन्दु है। 4

(ख) सरल रेखा $x = \frac{a}{2}$ द्वारा विभाजित वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के दो भागों में से छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4

7. (क) यदि समकोणीय अतिपरवलय $xy = c^2$ के बिन्दु t_1 पर खींचा गया अभिलम्ब अतिपरवलय से पुन: बिन्दु t_2 पर मिलता है, तो सिद्ध कीजिए $t_1^3 t_2 = -1$.

(ख) यदि सरल रेखा $x\cos\theta + y\sin\theta = 4$ x-अक्ष को बिन्दु A तथा y-अक्ष को बिन्दु B पर काटती है तो त्रिभुज OAB के केन्द्रक का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जहाँ O मूलबिन्दु है। 4

8. (क) बिन्दु $(3, -1, 1)$ तथा समतलों $\vec{r}.(2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) = 5$ तथा $\vec{r}.(\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}) = 1$ की प्रतिच्छेदन रेखा से जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। 4

(ख) माध्य मान प्रमेय सत्यापित कीजिए यदि अन्तराल $[a, b]$ में $f(x) = \frac{1}{4x - 1}$, जहाँ $a = 1$ तथा $b = 4$ हैं। 4