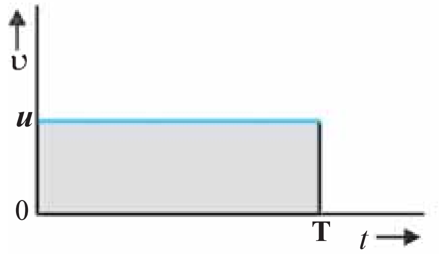
પડે. તેમ છતાં આપણે અચળવેગ u થી ગતિ કરતાં પદાર્થના એક સરળ કિસ્સા માટે તેની સત્યાર્થતા જોઈશું. આ પદાર્થ માટે વેગ-સમય આલેખ આકૃતિ 3.11માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.11 *υ – t વક્ર વડે દોરાયેલ ક્ષેત્રફળ આપેલ સમયગાળામાં પદાર્થના સ્થાનાંતર જેટલું હોય છે.*

અહીં υ – t વક્ર સમયની અક્ષને સમાંતર સુરેખા છે અને t = 0 થી t = T વચ્ચે તેના દ્વારા દોરાતું ક્ષેત્રફળ u ઊંચાઈ અને T પાયાવાળા લંબચોરસનાં ક્ષેત્રફળ જેટલું છે. તેથી, ક્ષેત્રફળ = $u \times T = u$T, જે આ સમયગાળા માટે થતાં સ્થાનાંતર જેટલું છે. આ કિસ્સામાં કાપેલ અંતર ક્ષેત્રફળ જેટલું કેવી રીતે આવે ? વિચારો ! બંને અક્ષ પર રહેલી રાશિનાં પરિમાણો નોંધો જેના પરથી તમે જવાબ સુધી પહોંચી શકશો.

નોંધ : આ પ્રકરણમાં ઘણી જગ્યાએ x – t, υ – t, a – t આલેખો છે. જેમાં કેટલાંક બિંદુઓ તીક્ષ્ણ વળાંક (Sharp Kinks) ઉપર આવેલ છે. જે સૂચવે છે કે બિંદુઓએ આપેલ વિધેયોનું વિકલન થઈ શકે નહિ. પરંતુ કોઈ વાસ્તવિક પરિસ્થિતિમાં, જો આલેખનાં દરેક બિંદુઓએ વિધેયનું વિકલન થઈ શકે, તો તે આલેખ સરળ વક્ર (Smooth) હશે.

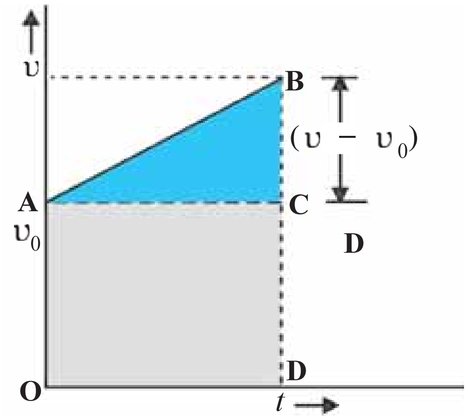
આનો અર્થ એવો થયો કે, કોઈ એક ક્ષણે વેગ અને પ્રવેગનાં મૂલ્યોનો ફેરફાર અચાનક (Abruptly) નહિ થાય પરંતુ આ ફેરફારો હંમેશાં સતત હશે.

3.6 નિયમિત પ્રવેગી ગતિ માટે શુદ્ધ ગતિવિજ્ઞાનનાં સમીકરણો (KINEMATIC EQUATIONS FOR UNIFORMLY ACCELERATED MOTION)

નિયમિત પ્રવેગી ગતિ માટે આપણે કેટલાંક સાદાં સમીકરણો મેળવીશું કે જે સ્થાનાંતર (x), લીધેલ સમય (t), પ્રારંભિક વેગ (υ_0), અંતિમ વેગ (υ) અને પ્રવેગ (a) સાથે જોડાયેલ છે. સમીકરણ 3.6માં અગાઉ આપણે સાબિત કરી ચૂક્યા છીએ કે જે a જેટલા નિયમિત પ્રવેગથી ગતિ કરતાં પદાર્થમાં અંતિમ અને પ્રારંભિક વેગ (υ) અને (υ_0) વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.

$$\upsilon = \upsilon_0 + at \qquad (3.6)$$

આ સંબંધ આકૃતિ 3.12માં આલેખીય રીતે દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.12 *નિયમિત પ્રવેગી ગતિ કરતાં પદાર્થ માટે υ – t વક્ર નીચે ઘેરાયેલ ક્ષેત્રફળ*

વક્ર વડે ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ :

0 અને t ક્ષણો વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ = ત્રિકોણ ABCનું ક્ષેત્રફળ + લંબચોરસ OACDનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{2}(\upsilon - \upsilon_0)t + \upsilon_0 t$$

આગળના પરિચ્છેદમાં સમજાવ્યું તે મુજબ, υ – t વક્ર નીચે ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ સ્થાનાંતર સૂચવે છે. માટે પદાર્થનું સ્થાનાંતર x :

$$x = \frac{1}{2}(\upsilon - \upsilon_0)\, t + \upsilon_0 t \qquad (3.7)$$

પરંતુ, $\upsilon - \upsilon_0 = at$

તેથી, $x = \frac{1}{2}at^2 + \upsilon_0 t$ અથવા

$$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3.8)$$

સમીકરણ (3.7) નીચે મુજબ પણ લખી શકાય :

$$x = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2} t = \bar{\upsilon} t \qquad (3.9a)$$

જ્યાં

$$\bar{\upsilon} = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2} \text{ (માત્ર નિયમિત પ્રવેગ માટે)} \qquad (3.9b)$$

સમીકરણ (3.9a) અને (3.9b) સૂચવે છે કે પદાર્થનું સ્થાનાંતર x, સરેરાશ વેગના સંદર્ભે થાય છે, જે પ્રારંભિક અને અંતિમ વેગોના અંકગાણિતિક સરેરાશ જેટલું હોય છે.

સમીકરણ (3.6) પરથી, $t = (\upsilon - \upsilon_0)/a$ સમીકરણ (3.9a)માં મૂકતાં,

$$x = \bar{\upsilon} t = \left(\frac{\upsilon + \upsilon_0}{2}\right)\left(\frac{\upsilon - \upsilon_0}{a}\right) = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a}$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2ax \qquad (3.10)$$

સમીકરણ (3.6)માંથી tનું મૂલ્ય સમીકરણ (3.8)માં મૂકીને પણ ઉપર્યુક્ત સમીકરણ પણ મેળવી શકાય છે. આમ, આપણે ત્રણ અગત્યનાં સમીકરણો મેળવ્યાં.

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

$$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2ax \qquad (3.11a)$$

પાંચ રાશિઓ υ_0, υ, a, t અને xને સાંકળતાં આ સમીકરણો સુરેખ રેખા પર નિયમિત પ્રવેગ સાથે થતી ગતિ માટેના શુદ્ધ ગતિ વિજ્ઞાનનાં સમીકરણો છે.

સમીકરણ (3.11a)માં સમીકરણોનો સમૂહ $t = 0$ સમયે કણનું સ્થાન $x = 0$ છે તેમ ધારીને મેળવેલ છે. જો આપણે $t = 0$ સમયે સ્થાનનો યામ અશૂન્ય એટલે કે x_0 લઈએ, તો સમીકરણ (3.11a) વધુ વ્યાપક સ્વરૂપમાં (xને બદલે $x - x_0$ મૂકતાં) મળશે.

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3.11b)$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (3.11c)$$

ઉદાહરણ 3.3 કલનશાસ્ત્રની રીતનો ઉપયોગ કરીને નિયમિત પ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણો મેળવો.

ઉકેલ વ્યાખ્યા પરથી,

$$a = \frac{d\upsilon}{dt}$$

$$d\upsilon = a\,dt$$

બંને બાજુ સંકલન લેતાં,

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = \int_0^t a\,dt$$

$$= a\int_0^t dt \qquad (a \text{ અચળ છે.})$$

$$\upsilon - \upsilon_0 = at$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

હવે, $\upsilon = \frac{dx}{dt}$

$$dx = \upsilon\,dt$$

બંને બાજુ સંકલન લેતાં,

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \upsilon\,dt$$

$$= \int_0^t (\upsilon_0 + at)\,dt$$

$$x - x_0 = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

આપણે લખી શકીએ,

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{dx}$$

અથવા $\upsilon\,d\upsilon = a\,dx$

બંને બાજુ સંકલન લેતાં,

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \upsilon\,d\upsilon = \int_{x_0}^{x} a\,dx$$

$$\frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2} = a(x - x_0)$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(x - x_0)$$

આ રીતનો ફાયદો તે છે કે તેનો ઉપયોગ અનિયમિત પ્રવેગી ગતિ માટે પણ કરી શકાય.

હવે, આપણે આ સમીકરણોનો ઉપયોગ કેટલાક અગત્યના કિસ્સા માટે કરીશું.

ઉદાહરણ 3.4 એક બહુમાળી મકાનના ટોચ પરથી એક દડાને (Ball) શીરોલંબ ઊર્ધ્વદિશામાં 20 m s^{-1}ની ઝડપથી ફેંકવામાં આવે છે. દડો જે બિંદુએથી ફેંકવામાં આવે છે તેની જમીન (Ground)થી ઊંચાઈ 25 m છે. (a) દડો કેટલી ઊંચાઈએ પહોંચશે ? (b) દડો જમીનને અથડાય તે પહેલાં કેટલો સમય લાગશે ? $g = 10$ m s^{-2} લો.

ઉકેલ (a) આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ y-અક્ષને શિરોલંબ ઊર્ધ્વદિશામાં એવી રીતે લઈએ કે તેનું ઊગમબિંદુ જમીન પર હોય.

હવે $\upsilon_0 = 20$ m s^{-1}

$a = -g = -10$ m s^{-2}

$\upsilon = 0$ m s^{-1}

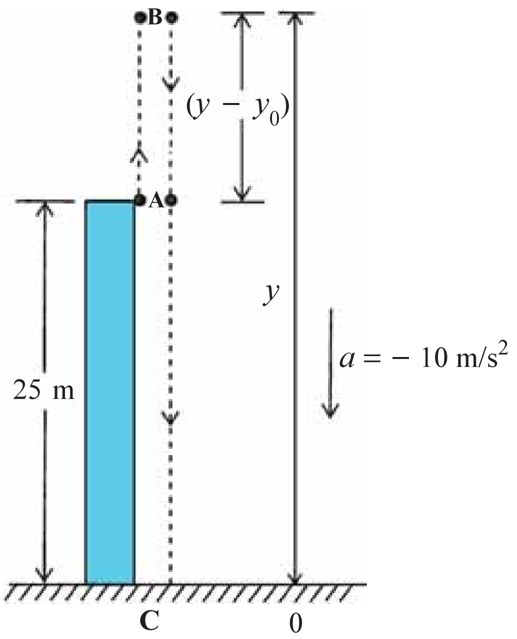
દડાને જે બિંદુએથી ફેંક્યો છે ત્યાંથી તે y ઊંચાઈ સુધી જાય છે તો

$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(y - y_0)$ સમીકરણનો ઉપયોગ કરતાં.

$$0 = (20)^2 + 2(-10)(y - y_0)$$

સાદું રૂપ આપતાં, $(y - y_0) = 20$ m

(b) આ પ્રશ્નનો ઉકેલ બે રીતે મેળવી શકાય. **ઉપયોગમાં લીધેલ રીતની સાવચેતીપૂર્વક નોંધ કરો.**



આકૃતિ 3.13

પ્રથમ રીત : આ પ્રથમ રીતમાં ગતિમાર્ગને બે ભાગમાં વિભાજિત કરીએ. ઊર્ધ્વદિશામાં ગતિ (A થી B) અને અધોદિશામાં ગતિ (B થી C) અને તેમને અનુરૂપ સમય t_1 અને t_2ની ગણતરી કરીએ.

B પાસે વેગ શૂન્ય છે. માટે

$\upsilon = \upsilon_0 + at$ પરથી,

$0 = 20 - 10t_1$ અથવા $t_1 = 2$ s

આ દડાને B સુધી જવા માટે લાગતો સમય છે. હવે B અથવા મહત્તમ ઊંચાઈવાળા બિંદુએથી ગુરુત્વપ્રવેગની અસર હેઠળ દડો મુક્તપતન પામે છે. અહીં દડો ઋણ y-દિશામાં ગતિ કરે છે. આપણે સમીકરણ

$y = y_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$ નો ઉપયોગ કરીશું.

જ્યાં, $y_0 = 45$ m, $y = 0$, $\upsilon_0 = 0$, $a = -g = -10$ m s^{-2}

$0 = 45 + \frac{1}{2}(-10)t_2^2$ સાદું રૂપ આપતાં, $t_2 = 3$ s

તેથી, દડો જમીનને અથડાય તે ક્ષણ પહેલાં દડાએ લીધેલ કુલ સમય $t_1 + t_2 = 2$ s + 3 s = 5 s

બીજી રીત : પસંદ કરેલ ઊગમબિંદુની સાપેક્ષે દડાની પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થિતિના યામોનો ઉપયોગ, નીચે આપેલ સમીકરણમાં મૂકી, દડાએ લીધેલ કુલ સમય પણ ગણી શકાય છે.

$$y = y_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

હવે, $y_0 = 25$ m, $y = 0$ m,
$\upsilon_0 = 20$ m s^{-2}, $a = -10$ m s^{-2}, t = ?

$$0 = 25 + 20\,t + (1/2)\,(-10)t^2$$

અથવા $5t^2 - 20t - 25 = 0$

આ દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવતાં,

$t = 5$ s

નોંધો કે બીજી રીત વધુ શ્રેષ્ઠ છે. જ્યાં સુધી અચળ પ્રવેગ હેઠળ ગતિ થતી હોય ત્યાં સુધી ગતિમાર્ગની ચિંતા આપણે કરવી જોઈએ નહિ. ◀

▶ **ઉદાહરણ 3.5 મુક્તપતન (Free Fall)** મુક્તપતન પામતા પદાર્થની ગતિની ચર્ચા કરો. હવાનો અવરોધ અવગણો.

ઉકેલ જો પૃથ્વીની સપાટીથી થોડી ઊંચાઈ પરથી કોઈ પદાર્થને મુક્ત કરવામાં આવે, તો ગુરુત્વબળને કારણે તે નીચે તરફ પ્રવેગી ગતિ કરશે. ગુરુત્વને કારણે ઉદ્‌ભવતો પ્રવેગનાં માનને g વડે દર્શાવાય છે. જો હવાનો અવરોધ અવગણવામાં આવે, તો પદાર્થ **મુક્તપતન** કરે છે તેમ કહેવાય. પદાર્થ જે ઊંચાઈએથી પતન પામે છે તે ઊંચાઈ પૃથ્વીની ત્રિજ્યા કરતાં નાની હોય ત્યારે g ને 9.8 m s^{-2} જેટલો અચળ લઈ શકાય. આમ, મુક્તપતન એ અચળ પ્રવેગી ગતિનો કિસ્સો છે.

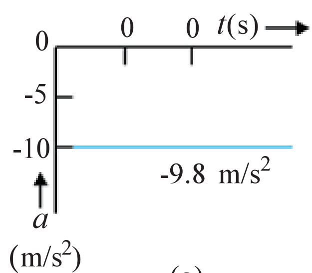
આવી ગતિને આપણે y-અક્ષની દિશામાં ધારીએ. વધુ સ્પષ્ટ રીતે $-y$ દિશામાં. કારણ કે આપણે ઊર્ધ્વદિશાની ગતિને ધન પસંદ કરેલ છે. જોકે ગુરુત્વીય પ્રવેગ હંમેશાં અધોદિશામાં હોવાથી તે ઋણ દિશામાં છે આમ,

$$a = -g = -9.8 \text{ m s}^{-2}$$

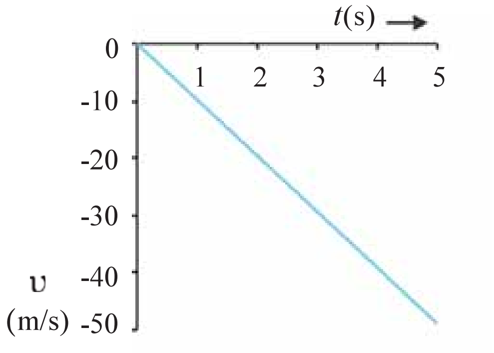
આમ, પદાર્થને $y = 0$ પાસેથી સ્થિર સ્થિતિમાંથી મુક્ત કરવામાં આવે છે. તેથી $\upsilon_0 = 0$ અને આવી ગતિનાં સમીકરણો નીચે મુજબ મળે :

$$\upsilon = 0 - g\,t = -9.8\,t \quad \text{m s}^{-1}$$
$$y = 0 - \frac{1}{2}g\,t^2 = -4.9\,t^2 \quad \text{m}$$
$$\upsilon^2 = 0 - 2\,g\,y = -19.6\,y \quad \text{m}^2\text{ s}^{-2}$$

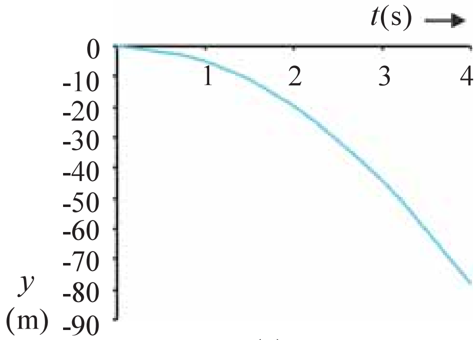
આ સમીકરણો વેગ અને કપાયેલ અંતરને સમય પરનાં વિધેય અને અંતર સાથે વેગનો ફેરફાર પણ આપે છે. આકૃતિ 3.14(a), (b) અને (c)માં સમય સાથે પ્રવેગ, વેગ અને અંતરમાં થતાં ફેરફારના આલેખ દોરેલા છે.



(a)



(b)



(c)

આકૃતિ **3.14** *મુક્તપતન પામતાં પદાર્થની ગતિ*
(a) સમય સાથે પ્રવેગમાં થતો ફેરફાર
(b) સમય સાથે વેગમાં થતો ફેરફાર
(c) સમય સાથે અંતરમાં થતો ફેરફાર ◀

▶ *ઉદાહરણ 3.6* **ગૅલેલિયોનો એકી અંકનો નિયમ (Galileo's Law of Odd Numbers)** "સ્થિર સ્થિતિમાંથી મુક્તપતન પામતાં પદાર્થ દ્વારા સમાન સમયગાળામાં કપાયેલ અંતરો એકબીજાના એવા ગુણોત્તરમાં હશે જે ગુણોત્તર 1થી શરૂ થતી એકી સંખ્યા માટે હોય. (એટલે કે 1 : 3 : 5 : 7 : ....) તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ મુક્તપતન પામતા પદાર્થના સમય અંતરાલને ઘણા-બધા સમાન સમયગાળા τમાં વિભાજિત કરીને ક્રમિક સમયગાળામાં પદાર્થ દ્વારા કપાયેલ અંતરો શોધીએ. અહીં પદાર્થનો પ્રારંભિક વેગ શૂન્ય છે માટે,

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

આ સમીકરણનો ઉપયોગ કરી, આપણે જુદા જુદા સમયગાળા 0, τ, 2τ, 3τ...માં પદાર્થનાં સ્થાનની ગણતરી કરી શકીએ છે. જેને કોષ્ટક 3.2ના બીજા સ્તંભમાં દર્શાવેલ છે. જો પ્રથમ સમયગાળા τ પછી પદાર્થનાં સ્થાન યામ $y_0 = (-1/2)g\tau^2$ લઈએ, તો ત્રીજા સ્તંભમાં પદાર્થનાં સ્થાનો y_0ના ગુણક સ્વરૂપે આપે છે. ચોથા સ્તંભમાં ક્રમિક સમયગાળામાં કપાયેલ અંતરો દર્શાવેલ છે. અંતિમ સ્તંભમાં દર્શાવ્યા મુજબ જોઈ શકાય છે કપાયેલાં અંતરો 1 : 3 : 5 : 7 : 9 જેવા સરળ ગુણોત્તરમાં છે.

આ નિયમને ગૅલેલિયો ગૅલિલીએ (1564–1642) પ્રતિપાદિત કર્યો હતો કે જેમણે મુક્તપતન પામતા પદાર્થ માટે પ્રથમ વખત માત્રાત્મક અભ્યાસ કર્યો હતો. ◀

▶ *ઉદાહરણ 3.7* **વાહનનું સ્ટોપિંગ ડિસ્ટન્સ (Stopping distance of vahicle)** ગતિમાન વાહનને બ્રેક લગાડવામાં આવે ત્યારે તે થોભે તે પહેલાં તેણે કાપેલ અંતરને વાહનનું સ્ટોપિંગ ડિસ્ટન્સ કહે છે. રસ્તા પર વાહનોની સલામતી માટે આ એક અગત્યનું પરિબળ છે. Stopping distance વાહનના પ્રારંભિક વેગ, બ્રેકની ક્ષમતા અથવા બ્રેક લગાડવાથી વાહનમાં ઉદ્‌ભવતા પ્રતિપ્રવેગ $(-a)$ પર આધારિત છે. વાહન υ_0 અને a માટેના પદમાં Stopping distanceનું સૂત્ર મેળવો.

ઉકેલ ધારો કે, બ્રેક માર્યા પછી વાહન ઊભું રહે તે પહેલાં તેને કાપેલું અંતર d_s છે. સમીકરણ $\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2ax$નો ઉપયોગ કરી અને $\upsilon = 0$ લેતાં, આપણને Stopping distanceનું સૂત્ર મળે.

$$d_s = -\frac{\upsilon_0^2}{2a}$$

કોષ્ટક 3.2

t	y	y_0 [$=(-1/2)g\tau^2$] yના સંદર્ભે	ક્રમિક સમયગાળામાં કપાયેલ અંતરો	કપાયેલ અંતરોનો ગુણોત્તર
0	0	0		
τ	$-(1/2)\ g\ \tau^2$	y_0	y_0	1
2 τ	$-4(1/2)\ g\ \tau^2$	$4\ y_0$	$3\ y_0$	3
3 τ	$-9(1/2)\ g\ \tau^2$	$9\ y_0$	$5\ y_0$	5
4 τ	$-16(1/2)g\ \tau^2$	$16\ y_0$	$7\ y_0$	7
5 τ	$-25(1/2)g\ \tau^2$	$25\ y_0$	$9\ y_0$	9
6 τ	$-36(1/2)g\ \tau^2$	$36y_0$	$11\ y_0$	11

આમ, Stopping distance વાહનની પ્રારંભિક વેગનાં વર્ગને સપ્રમાણ છે. વાહનનો પ્રારંભિક વેગ બમણો કરવામાં આવે તો Stopping distance ચારગણું થાય છે. (સમાન પ્રતિપ્રવેગ માટે).

કોઈ એક વિશિષ્ટ બનાવટની કાર માટે જુદા જુદા વેગો 11, 15, 20 તથા 25 m/sને અનુરૂપ Stopping distance અનુક્રમે 10 m, 20 m, 34 m તથા 50 m મળે છે. જે ઉપર્યુક્ત સમીકરણને લગભગ સુસંગત છે.

ઉદાહરણ તરીકે, શાળાકીય વિસ્તારમાં વાહનોની ગતિમર્યાદા માટે Stopping distance અગત્યનું પરિબળ છે. ◀

▶ ***ઉદાહરણ 3.8* પ્રતિક્રિયા સમય (Reaction Time) :** જ્યારે કોઈ પરિસ્થિતિ એવી નિર્માણ પામે કે જેથી આપણે ત્વરિત પ્રતિક્રિયા આપવાની જરૂરિયાત ઉભી થાય તો તે ક્રિયા ખરેખર કરીએ તે પહેલા અમુક સમય લાગે છે. આમ, કોઈ વ્યક્તિ અવલોકન કરે, તેના પર વિચાર કરે અને પછી કાર્યવાહી કરે તે માટે લાગતા સમયને પ્રતિક્રિયા-સમય કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે કોઈ એક વ્યક્તિ કાર ચલાવી રહ્યો છે અને અચાનક એક છોકરો રસ્તા પર આવી જાય છે ત્યારે કારને બ્રેક લગાડ્યા પહેલાં જે સમય વિતેલાં છે તેને Reaction time કહે છે. Reaction time પરિસ્થિતિની જટિલતા અને વ્યક્તિ વિશેષ પર આધારિત છે.

તમે તમારા Reaction timeનું માપન એક સરળ પ્રયોગ દ્વારા કરી શકો છો. તમારા મિત્રને એક ફૂટપટ્ટી આપો અને તેને કહો કે તે ફૂટપટ્ટી તમારા 1 અંગૂઠા અને બાકીની ચાર આંગળીઓ વચ્ચેની જગ્યામાંથી (આકૃતિ 3.15) શિરોલંબ પડતી મૂકે. જેવી ફૂટપટ્ટી મુક્તપતન પામે કે તરત જ તમે તેને પકડી લો. ફૂટપટ્ટી વડે કપાયેલ અંતર d માપો. એક વિશેષ ઉદાહરણમાં $d = 21.0$ cm મળ્યું હતું, તો Reaction timeની ગણતરી કરો.

***આકૃતિ 3.15** ક્રિયા-સમયનું માપન*

ઉકેલ

ફૂટપટ્ટી મુક્તપતન કરે છે. અહીં $\upsilon_o = 0$ અને $a = -g = -9.8$ m s^{-2}. પ્રતિક્રિયા સમય t_r તથા કપાયેલ અંતર d વચ્ચેનો સંબંધ.

$$d = -\frac{1}{2}gt_r^2 \quad \text{અથવા} \quad t_r = \sqrt{\frac{2d}{g}} \text{ s}$$

$d = 21.0$ cm, $g = -9.8$ m s^{-2} આપેલ છે, તો પ્રતિક્રિયા સમય,

$$\therefore\ t_r = \sqrt{\frac{2 \times 0.21}{9.8}} \cong 0.2 \text{ s.}$$ ◀

3.7 સાપેક્ષ વેગ (RELATIVE VELOCITY)

તમને ટ્રેનમાં મુસાફરી કરવાનો અને તમારી જ ટ્રેનની દિશામાં ગતિ કરતી બીજી ટ્રેનને તમારાથી આગળ જવાના અનુભવથી પરિચિત હશો. તમારી ટ્રેન કરતાં તે ટ્રેન વધારે ઝડપથી ગતિ કરતી હશે તો તે તમારાથી આગળ જશે. જમીન પર ઊભા રહેલા અને બંને ટ્રેનને જોનાર વ્યક્તિને તમારી ટ્રેન બીજી ટ્રેન કરતાં ધીમી દેખાશે. જો જમીનની સાપેક્ષે બંને ટ્રેનોનો વેગ સમાન હોય, તો તમને બીજી ટ્રેન ગતિ કરતી દેખાતી નથી. આવા અનુભવો સમજવા માટે આપણે સાપેક્ષ વેગની સંકલ્પના પ્રસ્તાવિત કરીશું.

એક પારિમાણિક (x-અક્ષ) પર નિયમિત ગતિ કરતાં બે પદાર્થો A અને Bના સરેરાશ વેગ υ_A અને υ_B છે. (જ્યાં સુધી વિશેષ રૂપે ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય ત્યાં સુધી આ પ્રકરણમાં તમામ વેગનું જમીન સાપેક્ષે માપન કરેલ છે.) $t = 0$ સમયે $x_A(0)$ અને $x_B(0)$ અનુક્રમે A અને Bનાં સ્થાન છે. t સમયે તેમનાં સ્થાન $x_A(t)$ અને $x_B(t)$ નીચે મુજબ આપી શકાય :

$$x_A(t) = x_A(0) + \upsilon_A\, t \qquad (3.12a)$$

$$x_B(t) = x_B(0) + \upsilon_B\, t \qquad (3.12b)$$

તો પદાર્થ Aથી પદાર્થ B સુધીનું સ્થાનાંતર,

$$x_{BA}(t) = x_B(t) - x_A(t)$$

$$= [x_B(0) - x_A(0)] + (\upsilon_B - \upsilon_A)\, t. \qquad (3.13)$$

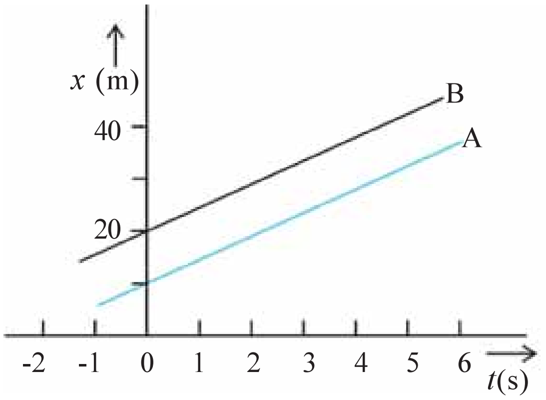
પરથી મળે છે.

સમીકરણ (3.13)નું અર્થઘટન સરળતાથી કરી શકાય છે. જે આપણને જણાવે છે કે, પદાર્થ Aથી જોઈએ તો, પદાર્થ Bનો વેગ $\upsilon_B - \upsilon_A$ કારણ કે એકમ સમયમાં A થી B સુધીનું સ્થાનાંતર $\upsilon_B - \upsilon_A$ જેટલા સ્થિત ફેરફાર જેટલું હોય છે. આમ, આપણે કહી શકીએ કે પદાર્થ Bનો વેગ પદાર્થ A સાપેક્ષે $\upsilon_B - \upsilon_A$ છે.

$$\upsilon_{BA} = \upsilon_B - \upsilon_A \qquad (3.14a)$$

આ જ રીતે પદાર્થ Aનો વેગ પદાર્થ B સાપેક્ષે વેગ

$$\upsilon_{AB} = \upsilon_A - \upsilon_B \qquad (3.14b)$$



આકૃતિ 3.16 *સમાન વેગથી ગતિ કરતાં બે પદાર્થ માટે સ્થાન-સમય આલેખ*

આ સૂચવે છે કે $\upsilon_{BA} = -\upsilon_{AB}$ (3.14c)

હવે આપણે કેટલાક વિશિષ્ટ કિસ્સા જોઈએ.

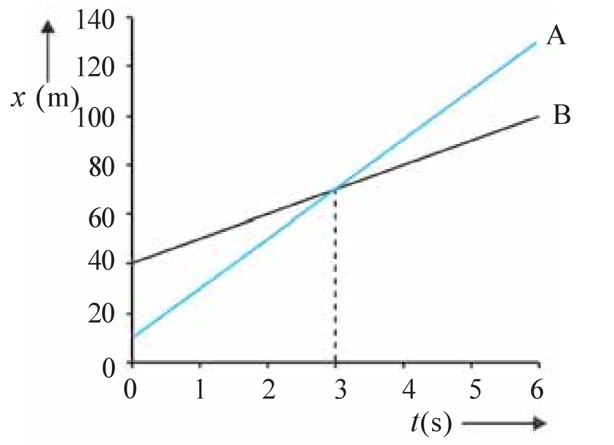
(a) જો $\upsilon_B = \upsilon_A$, તો $\upsilon_B - \upsilon_A = 0$ તો સમીકરણ (3.13) પરથી $x_B(t) - x_A(t) = x_B(0) - x_A(0)$. તેથી બંને પદાર્થ $x_B(0) - x_A(0)$ જેટલા અચળ અંતરે રહેલા છે અને તેમનો સ્થાન-સમય આકૃતિ 3.16માં દર્શાવ્યા મુજબ, એકબીજાને સમાંતર સુરેખા હશે. આ કિસ્સામાં સાપેક્ષ વેગ υ_{AB} અથવા υ_{BA} શૂન્ય હોય.

(b) જો $\upsilon_A > \upsilon_B$ તો $\upsilon_B - \upsilon_A$ ઋણ મળશે. એક આલેખ બીજા આલેખ કરતાં વધુ ઢોળાવવાળો હશે અને બંને આલેખો કોઈ સામાન્ય બિંદુએ ભેગા મળશે. ઉદાહરણ તરીકે ધારો કે $\upsilon_A = 20 \text{ m s}^{-1}$ અને $x_A(0) = 10$ m અને $\upsilon_B = 10 \text{ m s}^{-1}$, $x_B(0) = 40$ m, તો જે સમયે બંને પદાર્થો એકબીજાને મળશે તે સમય $t = 3$s હશે. (આકૃતિ 3.17) આ ક્ષણે બંનેનાં સ્થાન $x_A(t) = x_B(t) = 70$ m હશે. આમ, પદાર્થ (A) આ સમયે પદાર્થ Bની આગળ નીકળી જશે. આ કિસ્સામાં

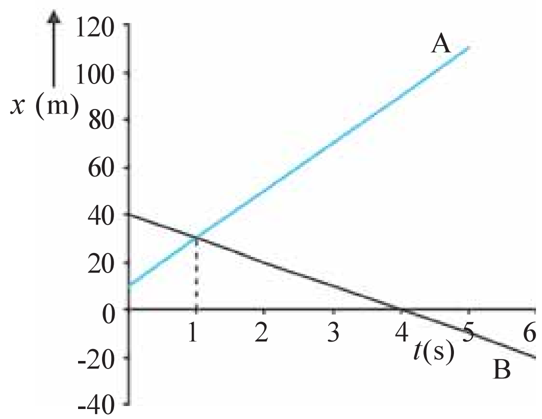
$\upsilon_{BA} = 10 \text{ m s}^{-1} - 20 \text{ m s}^{-1} = -10 \text{ m s}^{-1} = -\upsilon_{AB}$.

(c) ધારો કે υ_A અને υ_B વિરુદ્ધ સંજ્ઞા ધરાવે છે. ઉદાહરણ તરીકે, ઉપરનાં ઉદાહરણમાં પદાર્થ A, 20 m s^{-1} જેટલા વેગથી $x_A(0) = 10$ m સ્થાનેથી ગતિની શરૂઆત કરે છે અને પદાર્થ B, -10 m s^{-1} જેટલા વેગથી $x_B(0) = 40$ m સ્થાનેથી ગતિની શરૂઆત કરે છે. $t = 1$ s પછી બંને પદાર્થો એકબીજાને મળે છે. (આકૃતિ 3.18) Bનો A સાપેક્ષે વેગ $\upsilon_{BA} = [-10 - (20)] \text{ m s}^{-1} = -30 \text{ m s}^{-1} = -\upsilon_{AB}$. આ કિસ્સામાં υ_{BA} અને υ_{AB}ના માન $(= 30 \text{ m s}^{-1})$, A અને Bનાં વેગનાં માન કરતાં વધારે હોય છે. જોકે વિચારેલ પદાર્થો બે ટ્રેનો હોય, તો બેમાંથી કોઈ એક ટ્રેનમાં બેઠેલ વ્યક્તિને બીજી ટ્રેન ખૂબ જ ઝડપી ગતિ કરે છે તેમ દેખાશે.

નોંધો કે સમીકરણ (3.14) ત્યારે જ સાચા છે જ્યારે υ_A અને υ_B તાત્ક્ષણિક વેગોને રજૂ કરતા હોય.



આકૃતિ 3.17 *અસમાન વેગથી ગતિ કરતાં બે પદાર્થ માટે સ્થાન-સમય આલેખ, એકબીજાને મળવાનો સમય દર્શાવે છે.*



આકૃતિ 3.18 *વિરુદ્ધ દિશામાં વેગ ધરાવતા પદાર્થો માટે સ્થાન-સમય આલેખ, એકબીજાને મળવાનો સમય દર્શાવે છે.*

ઉદાહરણ 3.9 બે સમાંતર રેલવે ટ્રેક ઉત્તર દક્ષિણ દિશામાં છે. ટ્રેન A ઉત્તર તરફ 54 km h^{-1}ની ઝડપે અને ટ્રેન B દક્ષિણ દિશામાં 90 km h^{-1}ની ઝડપે ગતિ કરે છે. તો,

(a) A સાપેક્ષે Bનો વેગ અને

(b) B સાપેક્ષે જમીનનો વેગ અને

(c) ટ્રેન Aની છત પર તેની ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં. (ટ્રેન A સાપેક્ષે 18 km h^{-1}ની ઝડપથી) દોડતાં વાંદરાનો વેગ જમીન પર ઊભી રહેલી વ્યક્તિ સાપેક્ષે શોધો.

ઉકેલ (a) X-અક્ષની ધન દિશાને દક્ષિણથી ઉત્તર દિશા તરફની પસંદ કરો તો,

$\upsilon_A = + 54 \text{ km h}^{-1} = 15 \text{ m s}^{-1}$

$\upsilon_B = - 90 \text{ km h}^{-1} = - 25 \text{ m s}^{-1}$

A સાપેક્ષે Bનો વેગ $\upsilon_B - \upsilon_A = - 40 \text{ m s}^{-1}$ થશે. એટલે કે ટ્રેન Aને ટ્રેન B, ઉત્તરથી દક્ષિણ દિશામાં 40 m s^{-1}ની ઝડપથી ગતિ કરતી દેખાશે.

(b) B સાપેક્ષે જમીનનો સાપેક્ષ વેગ $= 0 - \upsilon_B = 25 \text{ m s}^{-1}$

(c) ધારો કે જમીન સાપેક્ષે વાંદરાનો વેગ υ_M છે. A સાપેક્ષ વાંદરાનો વેગ $\upsilon_{MA} = \upsilon_M - \upsilon_A = - 18 \text{ km h}^{-1} = - 5 \text{ m s}^{-1}$

તેથી, $\upsilon_M = (15 - 5) \text{ m s}^{-1} = 10 \text{ m s}^{-1}$ ◀

સારાંશ

1. જો પદાર્થનું સ્થાન સમય સાથે બદલાતું હોય, તો પદાર્થ ગતિમાં છે તેમ કહેવાય. અનુકૂળતા મુજબ પસંદ કરેલ ઊગમબિંદુ સાપેક્ષે પદાર્થનું સ્થાન દર્શાવી શકાય છે. સુરેખ રેખાની ગતિ માટે, ઊગમબિંદુની જમણી બાજુ ધન અને ડાબી બાજુ ઋણ લેવામાં આવે છે.
2. પદાર્થ વડે કપાયેલ કુલ અંતરને પથલંબાઈ કહે છે.
3. સ્થાનમાં થતાં ફેરફારને સ્થાનાંતર કહે છે. $\Delta x = x_2 - x_1$ આપેલ બે બિંદુ વચ્ચેની પથલંબાઈ સ્થાનાંતરના માન જેટલી કે તેનાથી વધુ હોઈ શકે.
4. જ્યારે કોઈ પદાર્થ સમાન સમયગાળામાં સમાન અંતર કાપે, તો તેવી ગતિને નિયમિત ગતિ કહે છે. તેમ ના હોય, તો અનિયમિત ગતિ કહેવાય.
5. સ્થાનાંતર અને તે માટે લાગતા સમયગાળાનાં ભાગાકારને સરેરાશ વેગ કહે છે.

   $$\bar{\upsilon} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

   $x - t$ આલેખમાં, આપેલ સમયગાળા માટેનો સરેરાશ વેગ તે જ સમયગાળા માટે પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થાનને જોડતી રેખાના ઢાળ જેટલો હોય છે.
6. કપાયેલ કુલ પથલંબાઈ અને તે માટે લાગતાં સમયગાળાના ગુણોત્તરને સરેરાશ ઝડપ કહે છે. આપેલ સમયગાળા માટે પદાર્થની સરેરાશ ઝડપ તેના સરેરાશ વેગનાં માન જેટલી કે તેનાથી વધુ હોય છે.
7. તાત્ક્ષણિક વેગ અથવા સાદી રીતે વેગ તે સરેરાશ વેગના સમયગાળાનું ખૂબ જ સૂક્ષ્મ મૂલ્ય $\Delta t \to 0$ લક્ષમૂલ્ય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

   $$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

   $x \to t$ આલેખમાં કોઈ એક ક્ષણ માટે દોરેલા સ્પર્શકનો ઢાળ તે ક્ષણે તાત્ક્ષણિક વેગ બરાબર હોય છે.
8. વેગમાં થતાં ફેરફાર અને તે ફેરફાર માટેના સમયગાળાના ભાગાકારને સરેરાશ પ્રવેગ કહે છે.

   $$\bar{a} = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$$
9. તાત્ક્ષણિક પ્રવેગને સરેરાશ પ્રવેગના $\Delta t \to 0$ લક્ષમૂલ્ય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે.

   $$a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt}$$

   $\upsilon - t$ આલેખમાં કોઈ એક ક્ષણ પાસે ઢાળ તે ચોક્કસ ક્ષણે પદાર્થનો પ્રવેગ દર્શાવે છે. નિયમિત ગતિ માટે પ્રવેગ શૂન્ય હોય છે અને $x - t$ આલેખ સમય અક્ષ સાથે સીધી રેખામાં ઢળતો હોય છે અને $\upsilon - t$ આલેખ સમયની અક્ષને સમાંતર સીધી રેખામાં હોય છે. નિયમિત પ્રવેગી ગતિ માટે $x - t$ આલેખ પરવલય જ્યારે $\upsilon - t$ આલેખ સમયની અક્ષ સાથે ઢળતી સીધી રેખા હોય છે.

10. t_2 અને t_1 સમય વચ્ચેના વેગ-સમય વક્ર નીચે ઘેરાયેલ ક્ષેત્રફળ આ જ સમયગાળા માટે સ્થાનાંતર જેટલું હોય છે.

11. સુરેખ રેખા પર નિયમિત પ્રવેગી ગતિ કરતાં પદાર્થો માટે પાંચ રાશિઓ, સ્થાનાંતર x, લાગેલ સમય t, પ્રારંભિક વેગ υ_0, અંતિમ વેગ υ અને પ્રવેગ a ને સાંકળતાં સાદાં સમીકરણોના સમૂહને શુદ્ધ ગતિવિજ્ઞાનમાં ગતિનાં સમીકરણ કહે છે.

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

$$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2ax$$

જો $t = 0$ સમયે પદાર્થનું સ્થાન 0 (zero) હોય. પરંતુ કણ $x = x_0$ પાસેથી ગતિ શરૂ કરે, તો ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં xને બદલે $(x - x_0)$ લેવું પડે.

ભૌતિક રાશિ	સંકેત/સંજ્ઞા	પરિમાણ	એકમ	નોંધ
પથલંબાઈ		[L]	m	
સ્થાનાંતર	Δx	[L]	m	$= x_2 - x_1$ એક પરિમાણીય, તેની નિશાની દિશાનું સૂચન કરે છે.
વેગ		$[LT^{-1}]$	$m\ s^{-1}$	
(a) સરેરાશ	$\bar{\upsilon}$			$= \frac{\Delta x}{\Delta t}$
(b) તાત્ક્ષણિક	υ			$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ એક પરિમાણીય, તેની નિશાની દિશાનું સૂચન કરે છે.
ઝડપ		$[LT^{-1}]$	$m\ s^{-1}$	
(a) સરેરાશ				$= \frac{\text{પથલંબાઈ}}{\text{સમયગાળો}}$
(b) તાત્ક્ષણિક				$= \frac{dx}{dt}$
પ્રવેગ		$[LT^{-2}]$	$m\ s^{-2}$	
(a) સરેરાશ	$\bar{a}$			$= \frac{\Delta x}{\Delta t}$
(b) તાત્ક્ષણિક	a			$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt}$ એક પરિમાણીય તેની નિશાની દિશાનું સૂચન કરે છે.

ગહન વિચારણાના મુદ્દા (POINTS TO PONDER)

1. પદાર્થ વડે બે બિંદુ વચ્ચે કપાયેલ પથલંબાઈ સામાન્ય રીતે સ્થાનાંતરનાં માન જેટલી હોતી નથી. સ્થાનાંતરનો આધાર ફક્ત અંતિમ સ્થાન પર છે. પથલંબાઈ (નામ જ સ્પષ્ટ કરે છે.) પદાર્થના ખરા ગતિમાર્ગ પર આધારિત છે. એક પરિમાણમાં જ્યારે પદાર્થ ગતિ દરમિયાન પોતાની દિશા બદલતા ન હોય ત્યારે બંને રાશિ સમાન હોય છે. જ્યારે બાકીના કિસ્સાઓમાં પથલંબાઈ હંમેશાં સ્થાનાંતરનાં માન કરતાં મોટી હોય છે.
2. ઉપરના મુદ્દા 1ના સંદર્ભે આપેલ સમયગાળા માટે પદાર્થની સરેરાશ ઝડપ, સરેરાશ વેગનાં માન જેટલી કે તેનાથી વધારે હોય છે. જ્યારે પથલંબાઈ અને સ્થાનાંતરનું માન સમાન હોય ત્યારે જ બંને સમાન હશે.
3. ઉદ્‌ગમબિંદુ અને અક્ષની ધન દિશા પસંદગીની બાબત છે. સ્થાનાંતર, વેગ અને પ્રવેગ જેવી રાશિઓને સંજ્ઞા આપતાં પહેલાં પસંદગીની સ્પષ્ટતા કરવી જોઈએ.
4. જો કણની ઝડપ વધતી હોય તો પ્રવેગ વેગની દિશામાં હોય. જો તેની ઝડપ ઘટતી હોય, તો પ્રવેગ ગતિની વિરુધ્ધ દિશામાં હોય. આ કથન ઊગમબિંદુ અને અક્ષની પસંદગીથી સ્વતંત્ર છે.
5. પ્રવેગનું ચિહ્ન કણની ઝડપ વધે છે કે ઘટે છે તે આપણને સૂચવતું નથી. પ્રવેગના ચિહ્ન (મુદ્દા 3 મુજબ)નો આધાર અક્ષની ધન દિશાની પસંદગી પર છે. ઉદાહરણ તરીકે શિરોલંબ ઊર્ધ્વદિશાને અક્ષની ધન દિશા તરીકે પસંદ કરેલ હોય, તો ગુરુત્વીય પ્રવેગ ઋણ ગણાય. જો કણ ગુરુત્વની અસર હેઠળ પતન પામતો હોય, તો ઋણ પ્રવેગ તેની ઝડપમાં વધારો કરે છે. કોઈ એક કણને ઊર્ધ્વદિશામાં ફેંકવામાં આવે, તો આ જ ઋણપ્રવેગ તેના વેગને ઘટાડે છે.
6. કોઈ એક ક્ષણે કણનો વેગ શૂન્ય હોય, તો તે ક્ષણે તેનો પ્રવેગ શૂન્ય હોવો જરૂરી નથી. કોઈ કણ ક્ષણ માટે સ્થિર અવસ્થામાં હોઈ શકે પરંતુ તે ક્ષણે પ્રવેગ શૂન્ય નથી હોતો. ઉદાહરણ તરીકે કોઈ કણને ઉપર તરફ ફેંકવામાં આવે, તો તેની મહત્તમ ઊંચાઈએ વેગ શૂન્ય થશે પરંતુ તેનો પ્રવેગ ગુરુત્વીયપ્રવેગ જેટલો જ હશે.
7. ગતિ માટેના શુદ્ધ ગતિકી સમીકરણ (સમીકરણ 3.11)ની વિભિન્ન રાશિઓ બીજગણિતીય રાશિઓ છે. એટલે કે તે ધનાત્મક અને ઋણાત્મક હોઈ શકે. વિભિન્ન રાશિઓના મૂલ્ય યોગ્ય ચિહ્ન સાથે મૂકવામાં આવે, તે શરતને આધિન આ સમીકરણો બધી જ પરિસ્થિતિમાં (અચળ પ્રવેગી એક પારિમાણિય ગતિ માટે) લાગુ પડે છે.
8. તાત્ક્ષણિક વેગ તથા પ્રવેગની વ્યાખ્યાઓ (સમીકરણ (3.3) અને (3.5)) ચોક્કસ અને હંમેશ માટે સાચા છે જ્યારે શુદ્ધ ગતિકી સમીકરણો (સમીકરણ (3.11)) તે જ ગતિ માટે સાચા થશે કે જેમાં પ્રવેગનું માન અને દિશા સમગ્ર ગતિ દરમિયાન અચળ રહે.

સ્વાધ્યાય

3.1 નીચે આપેલ ગતિનાં ઉદાહરણો પૈકી કયા ઉદાહરણમાં તંત્રને આશરે બિંદુવત પદાર્થ ગણી શકાય ?

(a) બે સ્ટેશન વચ્ચે વગર ઝટકે (jerks) ગતિ કરતી ટ્રેન

(b) સરળતાથી કોઈ વર્તુળમાર્ગ પર સાઈકલ ચલાવતી વ્યક્તિના માથા પર બેઠેલ કોઈ વાંદરો

(c) જમીન પર અથડાઈને તીવ્ર વળાંક લેતો સ્પિન થતો (spining) ક્રિકેટનો દડો

(d) ટેબલની કિનારી પરથી ખસીને પડતું બીકર

3.2 બે બાળકો A અને B તેમની શાળા Oથી અનુક્રમે તેમના ઘરે P અને Q પરત ફરી રહ્યાં છે. જેનો સ્થાન-સમય ($x - t$) આલેખ આકૃતિ 3.19માં દર્શાવેલ છે. નીચે કૌંસમાં દર્શાવેલ સાચી નોંધ પસંદ કરો.

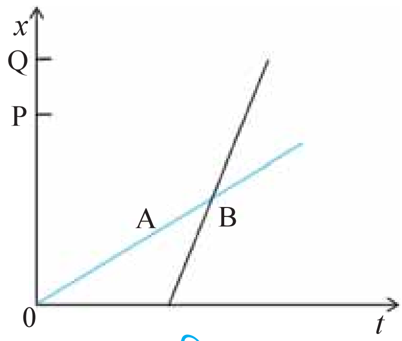
(a) (B/A), (A/B) કરતાં શાળાની નજીક રહે છે.

(b) (B/A), (A/B) કરતાં શાળાએથી વહેલી શરૂઆત કરે છે.

(c) (B/A), (A/B) કરતાં ઝડપથી ચાલે છે.

(d) A અને B એક જ/જુદા જુદા સમયે ઘરે પહોંચે છે.

(e) (A/B) રસ્તા પર (B/A)થી (એક વખત/બે વખત) આગળ નીકળી જાય છે.



આકૃતિ 3.19

3.3 એક મહિલા સવારે 9.00 કલાકે પોતાના ઘરેથી 2.5 km દૂર આવેલા પોતાના કાર્યાલય પર 5 km h^{-1}ની ઝડપે સીધી સડક પર ચાલીને જાય છે. ત્યાં તે સાંજે 5.00 કલાક સુધી રહે છે અને 25 km h^{-1}ની ઝડપે ગતિ કરતી ઑટોરિક્સામાં પોતાના ઘરે પરત ફરે છે. યોગ્ય સ્કેલમાપ પસંદ કરીને મહિલાની ગતિ માટે $x - t$ આલેખ દોરો.

3.4 એક દારૂડિયો એક સાંકડી ગલીમાં 5 પગલાં આગળ ભરે છે અને 3 પગલાં પાછળ ભરે છે. ત્યાર બાદ ફરીથી 5 પગલાં આગળ ભરે છે અને 3 પગલાં પાછળ ભરે છે અને આ રીતે તે ચાલતો રહે છે. તેનું દરેક પગલું 1 m લંબાઈનું અને તે માટે 1 s જેટલો સમય લે છે, તો તેની આ ગતિ માટે $x - t$ આલેખ દોરો. આલેખીય રીતે કે અન્ય કોઈ રીતે નક્કી કરો કે તેની ગતિનો પ્રારંભ બિંદુથી 13 m દૂર આવેલા ખાડામાં તે કેટલા સમય બાદ પડશે.

3.5 એક જેટ પ્લેન 500 km h^{-1}ની ઝડપે ઊડી રહ્યું છે, અને તે જેટ પ્લેનની સાપેક્ષે 1500 km h^{-1}ની ઝડપે દહન-ઉત્પાદનો (વાયુ)ને બહાર કાઢી રહ્યું છે. જમીન પર ઊભેલા કોઈ અવલોકનકારની સાપેક્ષે દહન- ઉત્પાદનોની ઝડપ કેટલી હશે ?

3.6 સુરેખ રાજમાર્ગ પર 126 km h^{-1} જેટલા ઝડપે દોડી રહેલી એક કાર 200 m અંતર કાપીને ઊભી રાખવી છે તો કારનો નિયમિત પ્રતિપ્રવેગ કેટલો હોવો જોઈએ ? કારને સ્થિર થવા માટે કેટલો સમય લાગશે ?

3.7 400 m જેટલી સમાન લંબાઈ ધરાવતી બે ટ્રેનો A અને B બે સમાંતર રેલવે ટ્રેક પર 72 km h^{-1}ની ઝડપે એક જ દિશામાં દોડી રહી છે. ટ્રેન A, ટ્રેન B કરતાં આગળ છે. B ટ્રેનનો ડ્રાઇવર ટ્રેન Aને ઓવરટેક કરવાનું વિચારે છે અને પોતાની ટ્રેનને 1 m s^{-2} જેટલી પ્રવેગિત કરે છે. જો 50 s બાદ ટ્રેન Bનો ગાર્ડ ટ્રેન Aના ડ્રાઇવરની આગળ થઈ જાય છે, તો બંને ટ્રેન વચ્ચેનું પ્રારંભિક અંતર કેટલું હશે ?

3.8 એક દ્વિમાર્ગી (two-lane road) રસ્તા પર કાર A 36 km h^{-1}ની ઝડપે ગતિ કરે છે. એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં 54 km h^{-1} જેટલી સમાન ઝડપથી દોડતી કાર B અને C કાર A સુધી પહોંચવાનો પ્રયત્ન કરે છે. કોઈ એક ક્ષણે AB તથા AC વચ્ચેનું સમાન અંતર 1 km છે. આ ક્ષણે કાર Bનો ડ્રાઇવર, કાર C, કાર Aને ઓવરટેક કરે તે પહેલાં ઓવરટેક કરવાનું વિચારે છે, તો અકસ્માત-નિવારણ માટે કાર Bનો લઘુતમ પ્રવેગ કેટલો હોવો જોઈએ ?

3.9 બે શહેર A અને B નિયમિત બસસેવા દ્વારા એકબીજાંથી જોડાયેલાં છે. તથા પ્રત્યેક T મિનિટ પછી બંને બાજુ બસો દોડે છે. કોઈ એક વ્યક્તિ 20 km h^{-1}ની ઝડપે સાઇકલ દ્વારા A થી B તરફ જઈ રહ્યો છે. ત્યારે તે નોંધે છે કે પ્રત્યેક 18 min પછી એક બસ તેની ગતિની દિશામાં તથા પ્રત્યેક 6 min પછી તેની વિરુદ્ધ દિશામાં પસાર થાય છે. બસસેવા સમય T કેટલો હશે અને રસ્તા પર દોડતી બસની ઝડપ (અચળ ધારો) કેટલી હશે ?

3.10 કોઈ એક ખેલાડી 29.4 m s^{-1}ની પ્રારંભિક ઝડપથી એક દડાને ઊર્ધ્વદિશામાં ફેંકે છે.

(a) દડાની ઊર્ધ્વદિશાની ગતિ દરમિયાન પ્રવેગની દિશા કઈ હશે ?

(b) તેની ગતિના મહત્તમ ઊંચાઈવાળા બિંદુએ દડાનો વેગ અને પ્રવેગ કેટલા હશે ?

(c) દડાની મહત્તમ ઊંચાઈવાળા બિંદુએ સ્થાન $x = 0$ m અને $t = 0$ s તથા શિરોલંબ નીચે તરફની દિશાને x-અક્ષની ધન દિશા તરીકે પસંદ કરો. આ પસંદગીના સંદર્ભે દડાની ઊર્ધ્વદિશાની ગતિ અને અધોદિશાની ગતિ માટે સ્થાન, વેગ અને પ્રવેગનાં ચિહ્નો દર્શાવો.

(d) દડો કેટલી મહત્તમ ઊંચાઈએ પહોંચશે ? અને કેટલા સમય બાદ ખેલાડીના હાથમાં પાછો આવશે ? ($g = 9.8$ m s^{-2} અને વાયુનો અવરોધ અવગણીએ છીએ.)

3.11 નીચે આપેલ કથનોને ધ્યાનપૂર્વક વાંચી ઉદાહરણ અને કારણ સહિત તે સાચાં છે કે ખોટાં તે દર્શાવો કણની એક પરિમાણિક ગતિમાં,

(a) કોઈ એક ક્ષણે તેની ઝડપ શૂન્ય હોવા છતાં તેનો પ્રવેગ અશૂન્ય હોઈ શકે છે.

(b) ઝડપ શૂન્ય હોવા છતાં તેનો વેગ અશૂન્ય હોઈ શકે.

(c) ઝડપ અચળ હોય, તો પ્રવેગ હંમેશાં શૂન્ય હોય.

(d) પ્રવેગ ધન મૂલ્ય માટે ગતિ વધતી હોય છે.

3.12 કોઈ એક દડાને 90 mની ઊંચાઈ પરથી ફર્શ (floor) પર પડતો મૂકવામાં આવે છે. ફર્શ સાથેના પ્રત્યેક સંઘાત દરમિયાન, દડો તેની મૂળ ઝડપના દસમા ભાગ જેટલી ઝડપ ગુમાવે છે. દડાની આ ગતિ માટે $t = 0$ થી $t = 12$ s માટે ઝડપ સમયનો આલેખ દોરો.

3.13 ઉદાહરણ સહિત બંને તફાવત સ્પષ્ટ કરો.

(a) કોઈ એક સમયગાળામાં સ્થાનાંતરનું માન (જેને ઘણી વાર અંતર પણ કહે છે.) અને કોઈ કણ દ્વારા આટલા જ સમયગાળામાં કાપેલ કુલ પથલંબાઈ

(b) કોઈ એક સમયગાળામાં સરેરાશ વેગનું માન અને એટલા જ સમયગાળા માટે સરેરાશ ઝડપ [આપેલ સમયગાળા માટે કણની સરેરાશ ઝડપને કુલ પથલંબાઈ અને સમયગાળાના ગુણોત્તર વડે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.] (a) અને (b) બંને માટે દર્શાવો કે બીજી રાશિ પ્રથમ રાશિ કરતાં મોટી કે તેના જેટલી જ છે. સમાનતાનું ચિહ્ન ક્યારે સાચું હશે ? [સરળતા માટે ગતિને એક પારિમાણિક ગતિ લો.]

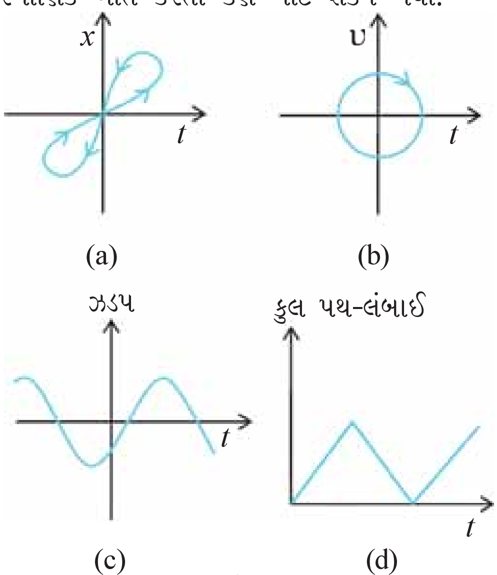
3.14 એક વ્યક્તિ સુરેખ માર્ગે 5 km h^{-1}ની ઝડપે તેના ઘરેથી 2.5 km દૂર આવેલા માર્કેટમાં જાય છે. પરંતુ માર્કેટને બંધ જુએ છે, તે તરત જ 7.5 km h^{-1}ની ઝડપે ઘરે પાછો ફરે છે તો,

(a) સરેરાશ વેગનું માન અને

(b) સમયગાળા (i) 0 થી 30 min (ii) 0 થી 50 min (iii) 0 થી 40 min માટે વ્યક્તિની સરેરાશ ઝડપ કેટલી હશે ? (નોંધ : આ ઉદાહરણથી તમે પ્રભાવિત થશો કે સરેરાશ ઝડપને સરેરાશ વેગનાં માન તરીકે દર્શાવવા કરતાં કુલ પથલંબાઈ અને કુલ સમયગાળાના ગુણોત્તર સ્વરૂપે વ્યાખ્યાયિત કરવી કેમ વધુ યોગ્ય છે ? થાકીને ઘરે પહોંચેલી વ્યક્તિને તેની સરેરાશ ઝડપ શૂન્ય છે, તેમ કહેવાનું મુનાસિબ નહિ માનો !)

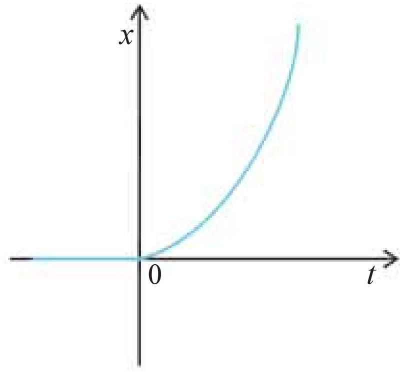
3.15 સ્વાધ્યાય પ્રશ્ન 3.13 અને 3.14માં આપણે સરેરાશ ઝડપ અને સરેરાશ વેગ વચ્ચેનો તફાવત કાળજીપૂર્વક સ્પષ્ટ કર્યો. તાત્ક્ષણિક ઝડપ અને તાત્ક્ષણિક વેગ માટે આવા તફાવત પર વિચાર કરવો આવશ્યક નથી. તાત્ક્ષણિક ઝડપ હંમેશાં તાત્ક્ષણિક વેગના માન જેટલી હોય છે. શા માટે ?

3.16 આકૃતિ 3.20માં દર્શાવેલ આલેખો (a) થી (d) ધ્યાનથી જુઓ અને કારણ સહિત જણાવો કે તે પૈકી કયો આલેખ એક પારિમાણિક ગતિ કરતાં કણ માટે શક્ય નથી.



આકૃતિ 3.20

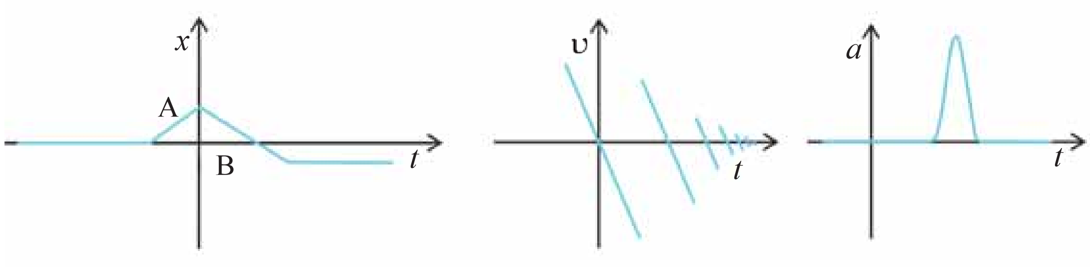
3.17 આકૃતિ 3.21માં કણની એક પારિમાણિક ગતિ માટે $x - t$ આલેખ દર્શાવેલ છે. આલેખ પરથી એમ કહેવું સાચું છે કે, $t < 0$ માટે કણ સુરેખ માર્ગે અને $t > 0$ માટે પરવલય માર્ગે ગતિ કરે છે ? જો ના, તો આ આલેખ માટે યોગ્ય ભૌતિક સંદર્ભનો અભિપ્રાય આપો.



આકૃતિ 3.21

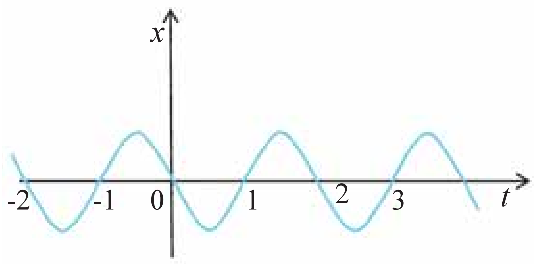
3.18 કોઈ એક રાજમાર્ગ પર 30 km h^{-1}ની ઝડપે દોડતી પોલીસવાનમાંથી, તેની જ દિશામાં 192 km h^{-1} ઝડપે દોડી રહેલી ચોરની કાર પર ગોળી છોડવામાં આવે છે. જો બંદૂકની નળીમાંથી નીકળતી ગોળીની ઝડપ 150 km h^{-1} હોય, તો ગોળી ચોરની કારને કઈ ઝડપે અથડાશે ? (નોંધ : ગોળીની તે ઝડપ નક્કી કરો કે જે ચોરની કારને નુકસાન પહોંચાડી શકે ?)

3.19 નીચે આકૃતિ 3.22માં આપેલ આલેખો માટે યોગ્ય પરિસ્થિતિ સૂચવો.



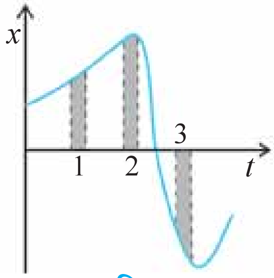
આકૃતિ 3.22

3.20 આકૃતિ 3.23માં એક પારિમાણિક સરળ આવર્તગતિ માટેનો $x - t$ આલેખ દર્શાવેલ છે. (આ ગતિ વિશેનો વિગતવાર અભ્યાસ તમે પ્રકરણ 14માં કરશો.) સમય t = 0.3 s, 1.2 s, − 1.2 s માટે કણનાં સ્થાન, વેગ અને પ્રવેગનાં ચિહ્નો શું હોઈ શકે ?



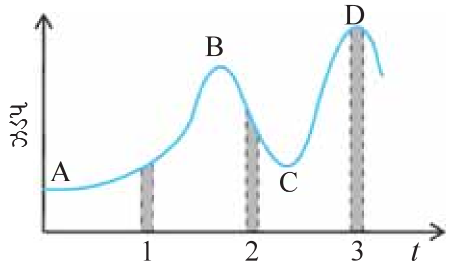
આકૃતિ 3.23

3.21 આકૃતિ 3.24માં એક પારિમાણિક ગતિ કરતાં કણ માટેનો $x - t$ આલેખ દર્શાવેલ છે. જેમાં ત્રણ સમાન સમયગાળા દર્શાવેલ છે. કયા સમયગાળા માટે સરેરાશ ઝડપ સૌથી વધુ અને કયા માટે તે સૌથી ઓછી હશે ? દરેક સમયગાળાને અનુરૂપ સરેરાશ વેગનાં ચિહ્ન આપો.



આકૃતિ 3.24

3.22 આકૃતિ 3.25માં અચળ દિશામાં ગતિ કરતાં કણ માટે ઝડપ-સમયનો આલેખ દર્શાવેલ છે. જેમાં ત્રણ સમાન સમયગાળા દર્શાવ્યા છે. કયા સમયગાળા માટે સરેરાશ પ્રવેગનું માન સૌથી વધુ હશે ? કયા સમયગાળા માટે સરેરાશ ઝડપ સૌથી વધુ હશે ? પદાર્થની અચળ ગતિની દિશાને ધન દિશા તરીકે પસંદ કરી, ત્રણેય સમયગાળાને અનુરૂપ v અને aનાં ચિહ્ન જણાવો. A, B, C અને D. બિંદુ પર પ્રવેગ શું હશે ?



આકૃતિ **3.25**

વધારાનું સ્વાધ્યાય

3.23 ત્રિચક્રી વાહન પોતાની સ્થિર સ્થિતિમાંથી 1 m s^{-2} જેટલા અચળ પ્રવેગ સાથે સુરેખમાર્ગ પર 10 s સુધી ગતિ કરે છે અને ત્યાર બાદ તે નિયમિત વેગથી ગતિ કરે છે. વાહન દ્વારા nમી સેકન્ડ (n = 1, 2, 3, ...)માં કપાયેલ અંતર વિરુદ્ધ nનો આલેખ દોરો. પ્રવેગી ગતિ દરમિયાન આવા આલેખ માટે તમે શું ધારો છો ? એક સુરેખા કે પરવલય ?

3.24 સ્થિર લિફ્ટ (ઉપરથી ખુલ્લી હોય તેવી)માં ઊભેલો એક બાળક 49 m s^{-1} જેટલી મહત્તમ પ્રારંભિક ઝડપે એક દડાને ઊર્ધ્વદિશામાં ફેંકે છે. તો દડાને તેના હાથમાં પાછો આવવા માટે કેટલો સમય લાગશે ? જો લિફ્ટ 5 m s^{-1} જેટલી નિયમિત ઝડપે ઉપર તરફ ગતિ કરવાની શરૂઆત કરે અને બાળક ફરીથી દડાને ઉપર તરફ તે જ મહત્તમ ઝડપે ફેંકે, તો કેટલા સમય પછી દડો બાળકના હાથમાં પરત આવશે ?

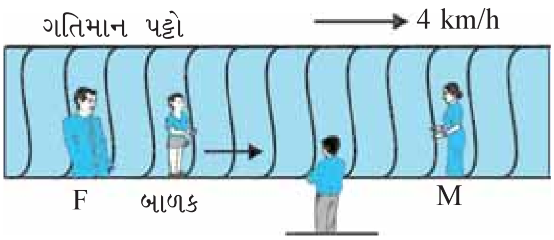
3.25 આકૃતિ 3.26માં દર્શાવ્યા મુજબ સમક્ષિતિજ લાંબો પટ્ટો 4 km h^{-1} ઝડપે ગતિમાં છે. આ પટ્ટા પર એક બાળકનાં માતા-પિતા એકબીજાંથી 50 m દૂર બેઠાં છે અને બાળક પટ્ટાની સાપેક્ષે 9 km h^{-1} ઝડપે પટ્ટા પર માતા-પિતાની વચ્ચે આગળ-પાછળ દોડે છે. પ્લેટફૉર્મ ઉપર સ્થિર ઊભેલ અવલોકનકાર માટે

(a) પટ્ટાની ગતિની દિશામાં દોડતાં બાળકની ઝડપ શું હશે ?

(b) પટ્ટાની ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં દોડતા બાળકની ઝડપ શું હશે ?

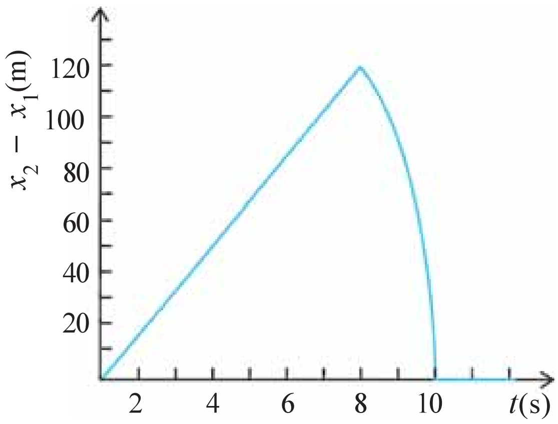
(c) (a) અને (b)માં બાળકને લાગતો સમય શું હશે ?

જો બાળકની ગતિનું અવલોકન તેનાં માતા કે પિતા કરતાં હોય, તો ઉપરમાંથી કયા પ્રશ્નનો જવાબ પરસ્પર બદલાઈ જશે ?



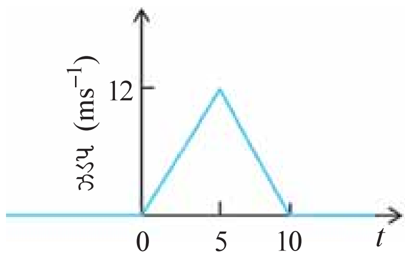
આકૃતિ **3.26**

3.26 200 m ઊંચાઈના એક ખડકની ટોચ પરથી બે પથ્થરને એક સાથે 15 m s^{-1} અને 30 m s^{-1}ની પ્રારંભિક ઝડપથી ઊર્ધ્વદિશામાં ફેંકવામાં આવે છે. આકૃતિ 3.27માં દર્શાવેલ આલેખ પ્રથમ પથ્થરની સાપેક્ષે બીજા પથ્થરનું સ્થાનમાં સમય સાથે થતાં ફેરફારો દર્શાવે છે, તેની ચકાસણી કરો. હવાનો અવરોધ અવગણો અને સ્વીકારો કે જમીનને અથડાયા બાદ પથ્થર ઉપર તરફ ઊછળતા નથી. g = 10 m s^{-2} લો. આલેખમાં રેખીય અને વક્ર ભાગ માટેનાં સમીકરણો લખો.



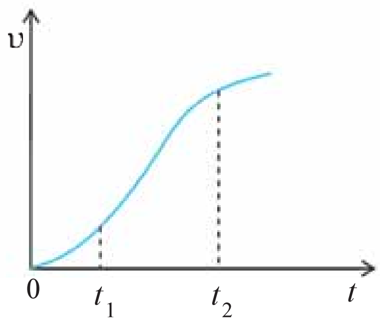
આકૃતિ 3.27

3.27 આકૃતિ 3.28માં ચોક્કસ દિશામાં ગતિ કરતાં કણ માટે ઝડપ-સમય આલેખ દર્શાવેલ છે. (a) $t = 0$ s થી $t = 10$ s (b) $t = 2$ s થી $t = 6$ s માટે કણ દ્વારા કપાયેલ અંતર શોધો. સમયગાળા (a) અને (b) માટે કણની સરેરાશ ઝડપ કેટલી હશે ?



આકૃતિ 3.28

3.28 આકૃતિ 3.29માં એક પરિમાણમાં ગતિ કરતાં કણ માટે વેગ-સમય આલેખ દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.29

સમયગાળા t_1 થી t_2 માટે નીચેમાંથી ક્યાં સમીકરણો કણની ગતિને વર્ણવે છે :

(a) $x(t_2) = x(t_1) + \upsilon(t_1)\,(t_2 - t_1) + (1/2)\,a\,(t_2 - t_1)^2$

(b) $\upsilon(t_2) = \upsilon(t_1) + a\,(t_2 - t_1)$

(c) $\upsilon_{average} = [x(t_2) - x(t_1)]\,/\,(t_2 - t_1)$

(d) $a_{average} = [\upsilon(t_2) - \upsilon(t_1)]\,/\,(t_2 - t_1)$

(e) $x(t_2) = x(t_1) + \upsilon_{average}\,(t_2 - t_1) + (1/2)\,a_{average}\,(t_2 - t_1)^2$

(f) $x(t_2) - x(t_1)$ = t-અક્ષ અને રેખાંકન કરેલી લાઇન વડે $\upsilon - t$ વક્ર નીચે ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ.

પરિશિષ્ટ 3.1 : કલનશાસ્ત્રનાં તત્ત્વો (ELEMENTS OF CALCULUS)

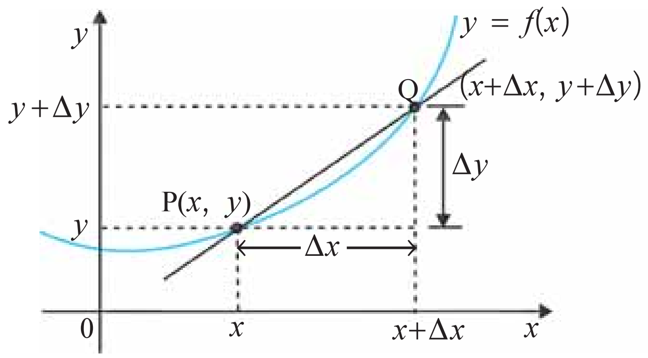
વિકલ કલનશાસ્ત્ર (Differential Calculus)

વિકલ ગુણાંક અથવા વિકલિતની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરીને આપણે સરળતાથી વેગ અને પ્રવેગને વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ છીએ. જો કે વિકલિત વ્યુત્પનોનો અભ્યાસ વધુ વિસ્તારથી ગણિતમાં કરશો. છતાં આ પરિશિષ્ટ દ્વારા સંક્ષિપ્તમાં વિકલનનો પરિચય કેળવીશું. જેથી ગતિ સંબંધિત ભૌતિકરાશિઓનાં વર્ણન માટે સરળતા રહે.

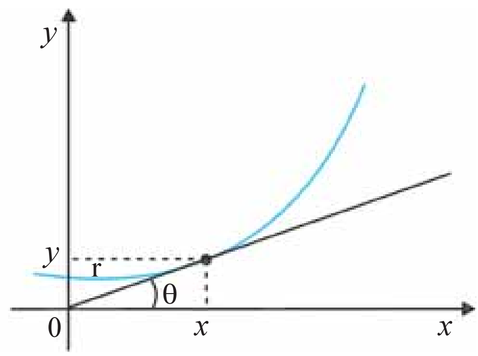
ધારો કે, આપણી પાસે એક રાશિ y છે. જેનું માન કોઈ સુરેખ ચલ (x) પર આધારિત છે તથા રાશિને એક સમીકરણ વડે વ્યક્ત કરી શકાય છે. જે y ને xના ચોક્કસ વિધેય સ્વરૂપે દર્શાવતું હોય, જેને નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય :

$$y = f(x) \tag{1}$$

આકૃતિ 3.30 (a)માં દર્શાવ્યા મુજબ x અને y કાર્ટેઝિયન યામોના અનુસંધાનને વિધેય $y = f(x)$નો આલેખ દોરીને ઉપર્યુક્ત સંબંધ આલેખમાં જોઈ શકાય છે.



(a)



(b)

આકૃતિ 3.30

$y = f(x)$ વક્ર પર એક બિંદુ P જેના યામ (x, y) અને બીજું બિંદુ Q જેના યામ $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ છે. P અને Qને જોડતી રેખાનો ઢાળ

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x} \tag{2}$$

ધારો કે, બિંદુ Q વક્ર પર P બિંદુ તરફ ખસે છે. આ પ્રક્રિયામાં Δy અને Δx ઘટતા જશે અને શૂન્યની નજીક પહોંચશે. પરંતુ તેમનો ગુણોત્તર $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ જરૂરી નથી કે શૂન્ય (નાશ) થાય. જ્યાં, $\Delta y \to 0$, $\Delta x \to 0$ માટે રેખા PQ નું શું થાય ? આકૃતિ 3.30(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ તમે જોઈ શકો છો કે આ રેખા PQ, P બિંદુએ વક્રનો સ્પર્શક બની જશે. એનો અર્થ એ થાય કે $\tan \theta$નું મૂલ્ય બિંદુ P પાસેના સ્પર્શકના ઢાળના મૂલ્યની ખૂબ જ નજીક જાય છે. તેને m વડે દર્શાવીએ તો,

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x} \tag{3}$$

ગુણોત્તર $\Delta y/\Delta x$નું લક્ષ જેમ Δx શૂન્યની નજીક જાય તેને yનું x સાપેક્ષ વિકલન કહેવાય તથા તેને dy/dx લખાય. જે, વક્ર $y = f(x)$નો બિંદુ (x, y) પાસે સ્પર્શકનો ઢાળ દર્શાવે છે.

જો $y = f(x)$ તથા $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, હોય તો આપણે વિકલિતની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ લખી શકીએ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

નીચે કેટલાંક વિધેયોનાં વિકલિત સૂત્રો આપેલ છે. અહીં, $u(x)$ તથા $v(x)$ યાદચ્છિક વિધેયો xને રજૂ કરે છે. a અને b અચળ રાશિઓને દર્શાવે છે જે x પર આધારિત નથી. કેટલાંક સામાન્ય વિધેયો માટે વિકલનની યાદી પણ નોંધેલ છે.

$\frac{d(a\,u)}{dx} = a\frac{du}{dx}$: $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$

$\frac{d(u\,v)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$: $\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1}$

$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$: $\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{1}{v^2}\left[v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right]$

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$: $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x\,\sec x$: $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

$\frac{d}{dx}(u)^n = n\,u^{n-1}\frac{du}{dx}$: $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^2 x) = -\cot x\,\operatorname{cosec} x$

$\frac{d}{du}(e^u) = e^u$: $\frac{d}{du}(ln\,u) = \frac{1}{u}$

વિકલનના સંદર્ભે તાત્ક્ષણિક વેગ અને પ્રવેગ નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત થાય :

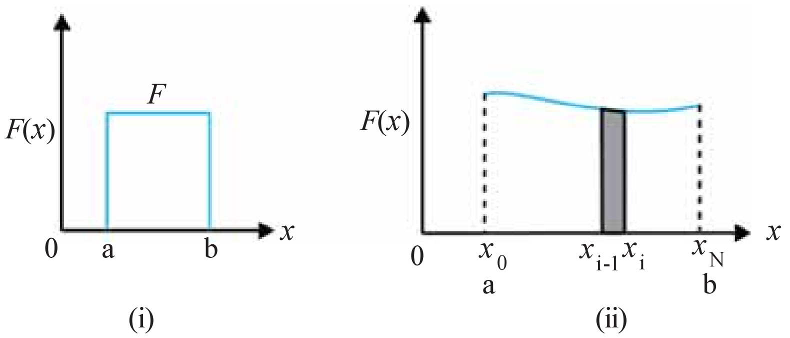
$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

સંકલન કલનશાસ્ત્ર (Integral Calculus)

તમે ક્ષેત્રફળની ધારણાથી પરિચિત છો. કેટલાક સરળ ભૌમિતિક આકારોનાં સૂત્રો પણ તમે જાણો છો. ઉદાહરણ તરીકે, લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ તેની લંબાઈ અને પહોળાઈમાં ગુણાકાર જેટલું તથા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ તેના પાયા અને વેધના ગુણાકાર કરતાં અડધું હોય છે. પરંતુ કોઈ અનિયમિત ભૌમિતિક આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ શોધવાની સમસ્યા પર વિચારીએ તો ? આવી સમસ્યાઓ સાથે સંકલનની ગાણિતીય ધારણા અનિવાર્યપણે સંકળાયેલ છે.

હવે આપણે એક વાસ્તવિક ઉદાહરણ જોઈએ. ધારો કે કોઈ એક કણ ચર બળ $f(x)$ની અસર હેઠળ $(x = a)$ થી $(x = b)$ સુધી x-અક્ષ પર ગતિ કરે છે. કણની ગતિ દરમિયાન બળ વડે થતું કાર્ય નક્કી કરવાની સમસ્યા છે. આ સમસ્યાની વિસ્તારપૂર્વક ચર્ચા પ્રકરણ 6માં કરેલ છે.



આકૃતિ 3.31

આકૃતિ 3.31, x સાથે બળ $F(x)$માં થતો ફેરફાર દર્શાવે છે. જો બળ અચળ હોય, તો આકૃતિ 3.31 (i) મુજબ થતું કાર્ય, $F(b - a)$ ક્ષેત્રફળ જેટલું થાય. પરંતુ વ્યાપક કિસ્સામાં બળ ચલિત હોય છે.

આકૃતિ 3.31(ii)માં દર્શાવેલ વક્ર નીચેનાં ક્ષેત્રફળની ગણતરી કરવી છે. આ માટે નીચે મુજબની એક યુક્તિ અપનાવીશું. X-અક્ષ પર a થી b સુધીનાં અંતરાલને ખૂબ જ મોટી સંખ્યા (N) જેટલા સૂક્ષ્મ અંતરાલોમાં વિભાજિત કરીશું. જે $x_0 = a$ થી x_1, x_1 થી x_2, x_2 થી x_3 .... x_{N-1}થી $x_N (= b)$. આમ, વક્ર નીચેનું ક્ષેત્રફળ N સંખ્યાની પાતળી પટ્ટીઓમાં વિભાજિત થશે. દરેક પટ્ટી પર $F(x)$નો ફેરફાર અવગણતાં દરેક પાતળી પટ્ટી લગભગ લંબચોરસ થશે. આકૃતિ 3.11(ii)માં દર્શાવેલ i^{th} પટ્ટીનું ક્ષેત્રફળ લગભગ,

$$\Delta A_i = F(x_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i)\Delta x$$

અહીં, Δx પટ્ટીની પહોળાઈ છે. જે દરેક પટ્ટી માટે આપણે સમાન લીધેલ છે. તમે દ્વિધામાં પડશો કે ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં આપણે $F(x_{i-1})$ અથવા $F(x_i)$ અને $F(x_{i-1})$નું સરેરાશ મૂકવું જોઈએ. આ બાબતનું કોઈ જ મહત્ત્વ રહેતું નથી, જ્યારે આપણે સંખ્યા N ખૂબ જ મોટી ($N \to \infty$) લઈએ. ત્યારે દરેક પટ્ટી એટલી પાતળી હોય કે જેનાથી $F(x_i)$ અને $F(x_{i-1})$ વચ્ચેનું અંતર અવગણી શકાય તેટલું નાનું બનશે. પરિણામે, વક્ર નીચે ઘેરાયેલું કુલ ક્ષેત્રફળ,

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} F(x_i)\Delta x$$

આ સરવાળાનું લક્ષ $N \to \infty$ હોય ત્યારે તે a થી b સુધી $F(x)$નું x પર સંકલન દર્શાવે છે તેની ચોક્કસ સંજ્ઞા નીચે દર્શાવ્યા મુજબ છે :

$$\mathrm{A} = \int_a^b F(x)dx$$

સંકલનની સંજ્ઞા $\int$ વિસ્તરેલ s આકાર જેવી છે, જે આપણને યાદ કરાવે છે કે, તે અસંખ્ય પદોના સરવાળાની સીમા છે. એક અત્યંત મહત્ત્વપૂર્ણ ગણિતીય તથ્ય એ છે કે સંકલન એ વિકલનનું વ્યસ્ત છે. ધારો કે, આપણી સામે એક વિધેય $g(x)$ જેનું વિકલિત $f(x)$ છે, ત્યારે $f(x) = \dfrac{dg(x)}{dx}$

વિધેય $g(x)$ને અનિયત સંકલન કહે છે તથા તેને નીચે મુજબ દર્શાવાય છે :

$$g(x) = \int f(x)dx$$

સંકલનમાં નીચલી સીમા અને ઊપલી સીમા આપેલ હોય ત્યારે તેને નિયત સંકલન કહે છે અને તે એક સંખ્યા છે. અનિયત સંકલનને કોઈ સીમા હોતી નથી અને તે એક વિધેય છે.

ગણિતનો પાયાનો એક પ્રમેય દર્શાવે છે કે,

$$\int_a^b f(x)dx = g(x)\Big|_a^b \equiv g(b) - g(a)$$

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે $f(x) = x^2$ તથા આપણે $x = 1$ થી $x = 2$ સુધી નિયત સંકલનનું મૂલ્ય શોધવા ઇચ્છીએ છીએ. વિધેય $f(x) = x^2$નું સંકલન $g(x) = x^3/3$ છે. તેથી,

$$\int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

સ્પષ્ટ છે કે, નિયત સંકલનનું મૂલ્યાંકન કરવા માટે આપેલ તદ્નુરૂપ અનિયત સંકલનને જાણવું પડે. આ માટે કેટલાંક સામાન્ય અનિયત સંકલનો નીચે દર્શાવેલ છે :

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \ln x \qquad (x > 0)$$

$$\int \sin x \ \mathrm{d}x = -\cos x \qquad \int \cos x \ \mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

વિકલન અને સંકલન કલનશાસ્ત્રની આ પ્રસ્તાવના વિસ્તૃત નથી અને તેનો ઇરાદો તમને કલનશાસ્ત્રની પાયાની વ્યાખ્યાઓ સમજાવવાનો છે.

પ્રકરણ 4

સમતલમાં ગતિ (Motion in a Plane)

4.1 પ્રસ્તાવના
4.2 અદિશ અને સદિશ
4.3 વાસ્તવિક સંખ્યા વડે સદિશોનો ગુણાકાર
4.4 સદિશોનાં સરવાળા અને બાદબાકી-આલેખની રીત
4.5 સદિશોનું વિભાજન
4.6 સદિશોના સરવાળા બૈજિક રીત
4.7 સમતલમાં ગતિ
4.8 સમતલમાં અચળ પ્રવેગથી ગતિ
4.9 દ્વિપરિમાણમાં સાપેક્ષ વેગ
4.10 પ્રક્ષિપ્ત ગતિ
4.11 નિયમિત વર્તુળગતિ
સારાંશ
ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ
સ્વાધ્યાય
વધારાનું સ્વાધ્યાય

4.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

આગળના પ્રકરણમાં આપણે સુરેખ પથ પર પદાર્થની ગતિના વર્ણન માટે જરૂરી સ્થાન, સ્થાનાંતર, વેગ તેમજ પ્રવેગની સંકલ્પનાની વિચારણા કરી. આપણે જોયું કે એક પરિમાણમાં માત્ર બે જ દિશાઓની શક્યતા હોવાથી (+) ધન અને (–) ઋણ ચિહ્નોનો ઉપયોગ કરવાથી દિશાઓની કાળજી આપોઆપ લઈ શકાય છે. પરંતુ પદાર્થની ગતિનું દ્વિપરિમાણમાં (સમતલમાં) અથવા ત્રિપરિમાણમાં (અવકાશમાં) વર્ણન કરવા માટે ઉપર્યુક્ત ભૌતિકરાશિઓને દર્શાવવા માટે સદિશની જરૂર પડે છે. તેથી સૌપ્રથમ આપણે સદિશો વિશેની સમજૂતી મેળવવી જરૂરી છે. સદિશ એટલે શું ? સદિશનાં સરવાળા, બાદબાકી અને ગુણાકાર કેવી રીતે કરવાં ? સદિશને વાસ્તવિક સંખ્યાથી ગુણતાં શું પરિણામ મળશે ? આ બધું આપણે એટલા માટે શીખીશું કે જેથી સમતલમાં પદાર્થના વેગ તેમજ પ્રવેગને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે આપણે સદિશનો ઉપયોગ કરી શકીએ. ત્યાર બાદ આપણે સમતલમાં પદાર્થની ગતિની ચર્ચા કરીશું. સમતલમાં ગતિના સાદા કિસ્સા તરીકે આપણે અચળ પ્રવેગી ગતિ તથા વિગતવાર રીતે પ્રક્ષિપ્ત ગતિની ચર્ચા કરીશું. ગતિના પ્રચલિત પ્રકાર વર્તુળાકાર ગતિનું રોજબરોજના જીવનમાં ખાસ મહત્ત્વ હોવાથી આપણે નિયમિત વર્તુળગતિનો વિગતવાર અભ્યાસ કરીશું.

આ પ્રકરણમાં સમતલમાંની ગતિ માટે મેળવેલાં સમીકરણોને સહેલાઈથી ત્રિપરિમાણીક ગતિનાં સમીકરણોમાં વિસ્તારિત કરી શકાય છે.

4.2 અદિશ અને સદિશ (SCALARS AND VECTORS)

ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં આપણે રાશિઓનું અદિશ અથવા સદિશ તરીકે વર્ગીકરણ કરી શકીએ. મૂળભૂત ફરક એટલો છે કે અદિશ રાશિઓ સાથે દિશા સંકળાયેલી નથી જ્યારે સદિશ રાશિઓ સાથે **દિશા** સંકળાયેલી છે. અદિશ રાશિને ફક્ત મૂલ્ય (માન) હોય છે. તેને મૂલ્ય દર્શાવતી સંખ્યા અને યોગ્ય એકમ સાથે સંપૂર્ણપણે દર્શાવી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે : બે બિંદુઓ વચ્ચે અંતર, પદાર્થનું દળ, શરીરનું તાપમાન અને તે સમય કે જ્યારે કોઈ ઘટના બની હોય. અદિશ રાશિઓનું સંયોજન સામાન્ય બીજગણિતના નિયમોને અનુસરે છે. સામાન્ય સંખ્યાઓ જેમ જ અદિશ રાશિઓનાં સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર

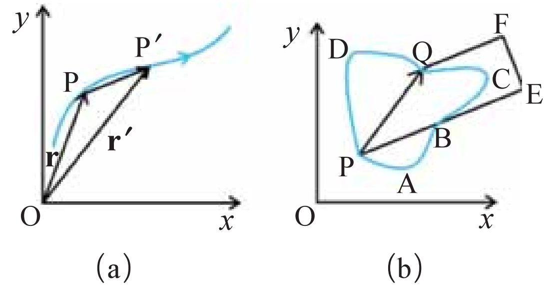
અને ભાગાકાર થઈ શકે છે.* ઉદાહરણ તરીકે એક લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈ અનુક્રમે 1.0 m અને 0.5 m હોય, તો તેની પરિમિતિ તેની ચારેય બાજુઓની લંબાઈના સરવાળા 1.0 m + 0.5 m + 1.0 m + 0.5 m = 3.0 m જેટલી થાય. દરેક બાજુની લંબાઈ અદિશ રાશિ છે તથા પરિમિતિ પણ અદિશ રાશિ છે. એક બીજું ઉદાહરણ લઈએ : કોઈ એક દિવસનું મહત્તમ અને લઘુતમ તાપમાન અનુક્રમે 35.6 ^{o}C અને 24.2 ^{o}C છે. આથી, આ બંને તાપમાનો વચ્ચેનો તફાવત 11.4 ^{o}C થશે. તે જ રીતે ઍલ્યુમિનિયમના એક નિયમિત સમઘનની દરેક બાજુની લંબાઈ 10 cm હોય અને તેનું દળ 2.7 kg હોય, તો તેનું કદ 10^{-3} m^3 (અદિશ) તથા તેની ઘનતા 2.7×10^3 kg m^{-3} (અદિશ) થશે.

જે રાશિઓ વિશેની સંપૂર્ણ માહિતી મેળવવા માટે તેમના માન ઉપરાંત દિશાની પણ જરૂર પડતી હોય, તેવી રાશિઓને **સદિશ રાશિઓ** કહે છે તથા તે **સરવાળા માટેના ત્રિકોણનો નિયમ** અથવા **સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના નિયમ**નું પાલન કરે છે. આમ, કોઈ સદિશના માનને સંખ્યા આપીને તથા તેની દિશા આપીને સદિશને રજૂ કરી શકાય છે. કેટલીક ભૌતિકરાશિઓ કે જેમને સદિશ સ્વરૂપે રજૂ કરવામાં આવે છે તે સ્થાનાંતર, વેગ, પ્રવેગ અને બળ છે.

સદિશને રજૂ કરવા માટે આપણે આ પુસ્તકમાં ઘાટા (Bold) અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીશું. આમ, વેગ સદિશને **v** સંજ્ઞા વડે દર્શાવી શકાય. પરંતુ હાથથી લખતી વખતે ઘાટા અક્ષરો લખવા થોડા મુશ્કેલ હોવાથી સદિશ રાશિની સંજ્ઞા ઉપર તીર મૂકીને પણ દર્શાવાય છે જેમકે, $\vec{v}$. આમ, **v** અને $\vec{v}$ બંને વેગ સદિશને રજૂ કરે છે. કોઈ સદિશના માનને ઘણી વાર 'નિરપેક્ષ મૂલ્ય' પણ કહીએ છીએ. તેને $|\mathbf{v}| = v$ વડે દર્શાવાય છે. આમ, એક સદિશને આપણે ઘાટા અક્ષરો જેમકે **A, a, p, q, r, ... x, y** વડે રજૂ કરીએ છીએ જ્યારે તેના માનને આછા અક્ષરો વડે અનુક્રમે A, a, p, q, r, ... x, y વડે દર્શાવી શકાય.

4.2.1 સ્થાન અને સ્થાનાંતર સદિશો (Position and Displacement Vectors)

કોઈ સમતલમાં ગતિમાન પદાર્થનું સ્થાન દર્શાવવા માટે આપણે અનુકૂળતા ખાતર કોઈ બિંદુ 'O'ને (ઉગમ બિંદુ) (સંદર્ભ બિંદુ) તરીકે લઈશું. ધારો કે કોઈ t અને t' સમયે વસ્તુનાં સ્થાન અનુક્રમે P અને P′ છે (આકૃતિ 4.1.(a)). જો આપણે બિંદુ P ને O સાથે જોડતી રેખા દોરીએ, તો મળતી રેખા **OP** પદાર્થનો t સમયે સ્થાનસદિશ દર્શાવે છે. આ રેખાના છેડા પર એક તીરનું નિશાન દોરવામાં આવે છે. તેને (રેખાને) કોઈ એક ચિહ્ન **r** થી દર્શાવવામાં આવે છે, એટલે કે **OP** = **r**. તે જ રીતે બિંદુ P′ને બીજા સ્થાનસદિશ **OP′** એટલે કે **r′** વડે દર્શાવાય છે. સદિશ **r** ની લંબાઈ સદિશનું માન દર્શાવે છે અને તેની દિશા, બિંદુ Oથી જોતાં P જ્યાં આવેલું છે તે તરફની હોય છે. જો પદાર્થ P થી P′ સુધી જાય, તો (t સમયે) બિંદુ P પરથી (t' સમયે) બિંદુ P′ સુધીની ગતિને અનુલક્ષીને સદિશ **PP′** (જેની પુચ્છ P પર અને શીર્ષ P′ હોય)ને **સ્થાનાંતર સદિશ** કહેવાય છે.



આકૃતિ 4.1 (a) *સ્થાન તથા સ્થાનાંતર સદિશો*
(b) *સ્થાનાંતર સદિશ* **PQ** *તથા ગતિના જુદા જુદા માર્ગ*

અત્રે અગત્યની નોંધવા જેવી બાબત એ છે કે, 'સ્થાનાંતર સદિશ'ને એક સુરેખા વડે દર્શાવાય છે જે પદાર્થની પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થિતિને જોડે છે તથા તે વાસ્તવિક પથ પર આધાર રાખતું નથી જેના પર પદાર્થ ખરેખર ગતિ કરતો હોય. ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 4.1(b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રારંભિક સ્થિતિ P અને અંતિમ સ્થિતિ Qની વચ્ચે સ્થાનાંતર સદિશ **PQ**, જુદા જુદા ગતિમાર્ગો PABCQ, PDQ કે PBEFQ માટે સમાન જ રહેશે. તેથી **કોઈ પણ બે બિંદુઓની વચ્ચે સ્થાનાંતર સદિશનું માન ગતિમાન પદાર્થની પથલંબાઈ જેટલું અથવા તેનાથી ઓછું હશે.** આ હકીકત અગાઉના પ્રકરણમાં સુરેખ પથ પર પદાર્થની ગતિ દરમિયાન પણ આપણે સારી રીતે સમજી ચૂક્યાં છીએ.

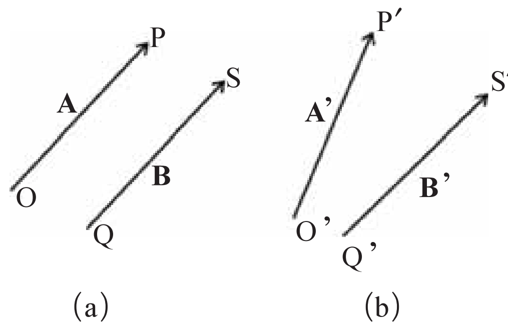
4.2.2 સદિશોની સમાનતા (Equality of Vectors)

જો બે સદિશો **A** અને **B**નાં માન અને દિશા સમાન હોય, તો તેવા સદિશોને સમાન સદિશો કહે છે.**

આકૃતિ 4.2(a)માં બે સમાન સદિશો **A** તથા **B**ને દર્શાવેલ છે. આપણે તેની સમાનતા સરળતાથી ચકાસી શકીએ છીએ. હવે **B**ને તેને પોતાને સમાંતર એવી રીતે ખસેડો કે જેથી તેની પૂચ્છ Q, સદિશ **A**ની પૂચ્છ O પર સંપાત થાય. હવે તેમના શીર્ષ S અને P

* *અદિશ રાશિઓનાં સરવાળા અને બાદબાકી ફક્ત સમાન એકમો ધરાવતી રાશિઓ માટે જ શક્ય છે. જ્યારે ગુણાકાર કે ભાગાકાર જુદા જુદા એકમો ધરાવતી અદિશ ભૌતિકરાશિઓ માટે કરી શકાય.*

** *આપણા અભ્યાસમાં, સદિશોને કોઈ ચોક્કસ સ્થાન હોતું નથી. તેથી સદિશને તેના પોતાને સમાંતર સ્થાનાંતરિત કરાવતાં તે સદિશ બદલાતો નથી. આવા સદિશોને મુક્ત સદિશો કહે છે. જોકે કેટલાક ભૌતિક ઉપયોગોમાં સદિશોની રેખા કે સ્થાન ઘણાં જ અગત્યનાં છે. આવા સદિશોને સ્થાનિય સદિશો (Localised Vectors) કહે છે.*



આકૃતિ 4.2 (a) *બે સમાન સદિશ* **A** *અને* **B** **(b)** *બે સદિશો* **A′** *અને* **B′** *અસમાન છે છતાં તેમની લંબાઈ સમાન છે.*

પણ સંપાત થતાં હોવાથી બંને સદિશો સમાન સદિશો કહેવાશે. સામાન્ય રીતે આ સમાનતાને **A** = **B** વડે દર્શાવાય છે. એ બાબત પર ધ્યાન આપો કે આકૃતિ 4.2(b)માં સદિશો **A′** અને **B′**ના માન સમાન હોવા છતાં તે સમાન સદિશો નથી કારણ કે તેમની દિશાઓ જુદી જુદી છે. **B′**ને તેને પોતાને સમાંતર એવી રીતે ખસેડો કે જેથી તેની પૂચ્છ Q′, સદિશ **A′**ની પુચ્છ O′ પર સંપાત થાય પરંતુ સદિશ **B′**નું શીર્ષ S′, **A′**નું શીર્ષ P′ પર સંપાત થતું નથી.

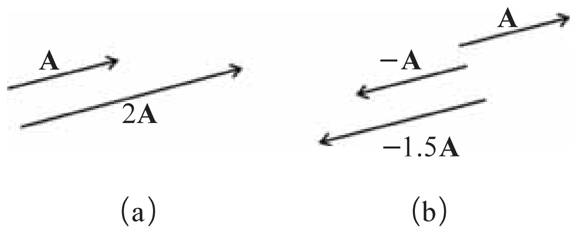
4.3 વાસ્તવિક સંખ્યા વડે સદિશોનો ગુણાકાર (MULTIPLICATION OF VECTORS BY REAL NUMBERS)

કોઈ સદિશ **A**નો ધન સંખ્યા λ સાથે ગુણાકાર કરતાં મળતાં સદિશનું મૂલ્ય λ ગણું થાય છે પરંતુ તેની દિશા સદિશ **A** ની દિશામાં જ રહે છે.

$|\lambda \mathbf{A}| = \lambda|\mathbf{A}|$ જો $\lambda > 0$

ઉદાહરણ તરીકે, જો **A**ને 2 વડે ગુણવામાં આવે તો આકૃતિ 4.3 (a)માં દર્શાવ્યા મુજબ પરિણામી સદિશ 2**A** થશે જેની દિશા **A**ની દિશામાં જ હશે તથા માન |**A**| કરતાં બમણું થશે.

સદિશ **A**ને કોઈ ઋણ સંખ્યા λ વડે ગુણવામાં આવે, તો સદિશ λ**A** પ્રાપ્ત થશે જેની દિશા **A**ની દિશાની વિરુદ્ધમાં હશે અને માન |**A**| કરતાં −λ ગણું હશે.



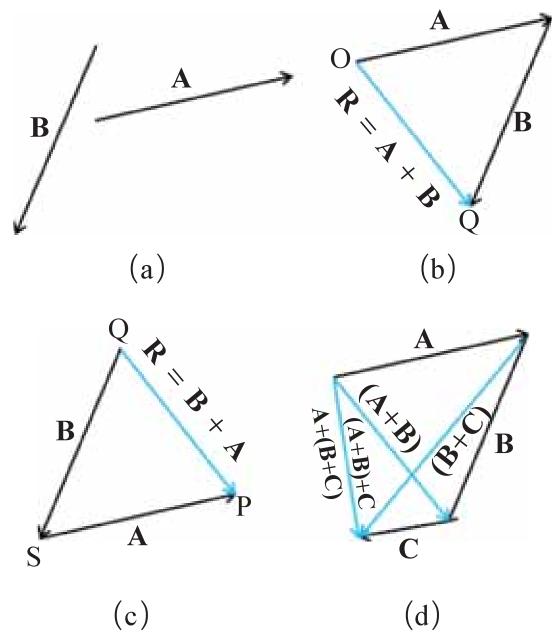
આકૃતિ 4.3 (a) *સદિશ* **A** *અને* **A***ને ધન સંખ્યા 2થી ગુણવાથી મળતો પરિણામી સદિશ* (b) *સદિશ* **A** *અને તેને ઋણ સંખ્યાઓ −1 અને −1.5થી ગુણતાં મળતા પરિણામી સદિશ*

જો કોઈ સદિશ **A**ને ઋણ સંખ્યા, ધારો કે −1 અને −1.5 વડે ગુણવામાં આવે, તો મળતા પરિણામી સદિશ આકૃતિ 4.3(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ મળશે.

સદિશ **A** સાથે ગુણાકારમાં લેવાતો ગુણાંક λ ભૌતિક પરિમાણ ધરાવતો અદિશ પણ હોઈ શકે છે. તેથી પરિણામી સદિશ λ**A**ના પરિમાણ, λ અને **A** પરિમાણોનો ગુણાકાર છે. દા.ત., અચળ વેગનો સમયગાળા સાથેનો ગુણાકાર, સ્થાનાંતર સદિશ આપે છે.

4.4 સદિશોનાં સરવાળા અને બાદબાકી - આલેખની રીત (ADDITION AND SUBTRACTION OF VECTORS) (GRAPHICAL METHOD)

પરિચ્છેદ 4.2માં ઉલ્લેખ કર્યા મુજબ સદિશો, વ્યાખ્યા મુજબ સરવાળા માટેનો ત્રિકોણના નિયમ કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના નિયમનું પાલન કરે છે. હવે આપણે સરવાળા માટેના આ નિયમો આલેખની રીતથી સમજીશું. આકૃતિ 4.4(a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક સમતલમાં રહેલા બે સદિશો **A** અને **B**નો વિચાર કરો. આ સદિશોને દર્શાવતાં રેખાખંડોની લંબાઈ સદિશોના માનના સમપ્રમાણમાં છે. **A** + **B** સરવાળો મેળવવા માટે આકૃતિ 4.4(b)માં દર્શાવ્યા અનુસાર આપણે સદિશ **B**ને એવી રીતે ગોઠવીશું કે જેથી તેની પુચ્છ સદિશ **A**ના શીર્ષ પર હોય. ત્યાર બાદ આપણે **A**ની પુચ્છને **B**ના શીર્ષ સાથે જોડીશું. આ રેખા OQ, પરિણામી સદિશ **R** દર્શાવે છે, જે સદિશો **A** અને **B**નો સરવાળો છે. સદિશોના સરવાળાની આ પ્રક્રિયામાં



આકૃતિ 4.4 (a) *સદિશ* **A** *અને* **B** *સદિશો* (b) **A** *અને* **B***ના સરવાળા માટે આલેખીય રીત* (c) *સદિશો* **B** *અને* **A***ના સરવાળા માટે આલેખીય રીત* (d) *સદિશોના સરવાળા માટે જૂથના નિયમનું ઉદાહરણ*

કોઈ એકના શીર્ષ પર બીજાના પુચ્છને ગોઠવતા હોવાથી આ આલેખીય રીતને **શીર્ષથી પુચ્છ રીત** પણ કહે છે. સદિશોના સરવાળાની આ રીતમાં બે સદિશો અને તેમનો પરિણામી સદિશ ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓની રચના કરતાં હોવાથી તેને **સદિશ સરવાળાની ત્રિકોણની રીત** પણ કહે છે. જો આપણે આકૃતિ 4.4(c)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે **B** + **A**નો પરિણામી સદિશ પ્રાપ્ત કરીશું તો તે સદિશ **R** જ મળશે. આમ, સદિશોનો સરવાળો **ક્રમના નિયમ**નું પાલન કરે છે.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (4.1)$$

સદિશોનો સરવાળો **જૂથના નિયમ**નું પણ પાલન કરે છે જે આકૃતિ 4.4(d)માં દર્શાવેલ છે. પ્રથમ સદિશો **A** અને **B**નો સરવાળો કરી તેમાં સદિશ **C** ઉમેરતાં તે જ પરિણામ છે જે સદિશો **B** અને **C**નો પ્રથમ સરવાળો કરી તેમાં સદિશ **A** ઉમેરતાં મળતું હોય. આમ,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \quad (4.2)$$

સમાન અને વિરોધી બે સદિશોનો સરવાળો કરતાં શું પરિણામ મળે ? આકૃતિ 4.3(b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે સદિશો **A** અને **–A**નો વિચાર કરો. તેમનો સરવાળો **A** + (**–A**) થશે. અહીં બંને સદિશોના માન સમાન હોવા છતાં તે પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં હોવાથી પરિણામી સદિશનું માન શૂન્ય મળશે. તેને **શૂન્ય સદિશ (Null Vector)** કહે છે અને **0** વડે દર્શાવાય છે.

$$\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad |\mathbf{0}| = 0 \quad (4.3)$$

શૂન્ય સદિશનું મૂલ્ય શૂન્ય હોવાથી તેની દિશા દર્શાવી શકાય નહિ.

કોઈ સદિશ **A**ને શૂન્ય સંખ્યા વડે ગુણતાં પણ આપણને શૂન્ય સદિશ મળે છે. **0** સદિશ (શૂન્ય સદિશ)ના ગુણધર્મો નીચે પ્રમાણે છે :

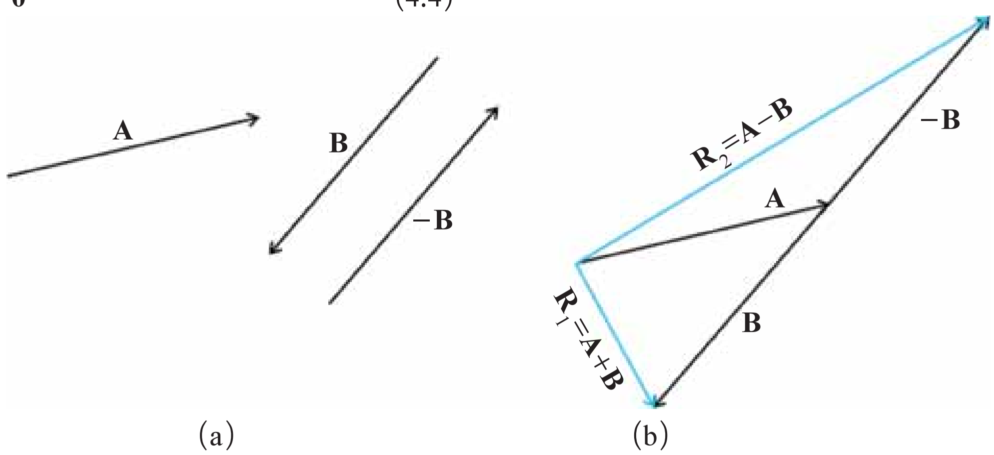
$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$
$$\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$0\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (4.4)$$

શૂન્ય સદિશનો ભૌતિક અર્થ શું છે ? આકૃતિ 4.1(a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સમતલમાં સ્થાનસદિશ અને સ્થાનાંતર સદિશનો વિચાર કરો. હવે, ધારો કે *t* સમયે બિંદુ P પાસે રહેલો એક પદાર્થ ગતિ કરીને P′ સુધી પહોંચે છે અને ત્યાંથી ફરી પાછો P પાસે આવે છે, તો તેનું સ્થાનાંતર કેટલું હશે ? અહીં તેનું પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થાન એક જ હોવાથી તેનું સ્થાનાંતર 'શૂન્ય સદિશ' મળશે.

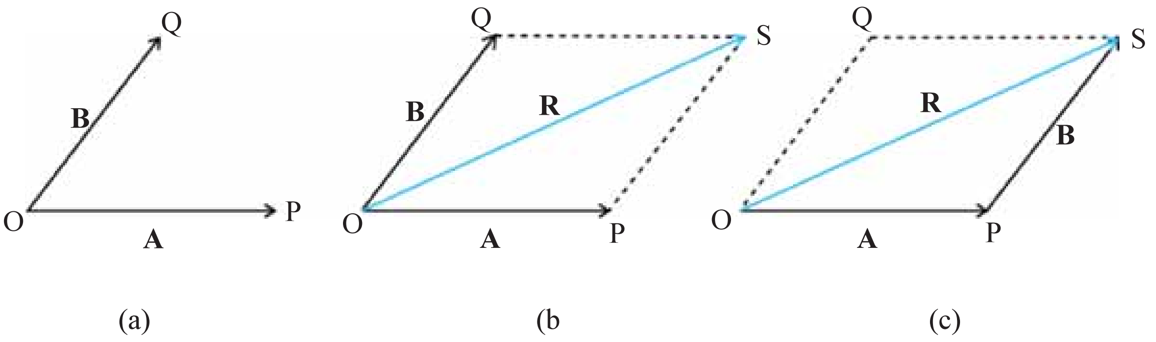
સદિશોની બાદબાકી (Subtraction of Vectors)ને સદિશોના સરવાળા સ્વરૂપે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. બે સદિશો **A** અને **B**ના તફાવતને આપણે બે સદિશો **A** અને **–B**ના સરવાળા સ્વરૂપે રજૂ કરી શકીએ :

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \quad (4.5)$$

જે આકૃતિ 4.5માં દર્શાવેલ છે. સદિશ **–B**ને સદિશ **A**માં ઉમેરતાં $\mathbf{R}_2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B})$ મળે છે. સરખામણી માટે આ આકૃતિમાં સદિશ $\mathbf{R}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ પણ દર્શાવેલ છે. આપણે સદિશોનો સરવાળો કરવા માટે **સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીત**નો પણ ઉપયોગ કરી શકીએ. ધારો કે આપણી પાસે બે સદિશો **A** અને **B** છે. તેમનો સરવાળો કરવા માટે બંને સદિશોના પુચ્છ આકૃતિ 4.6(a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક જ બિંદુ O પર લાવીશું. હવે, આપણે **A**ના શીર્ષથી **B**ને સમાંતર એક રેખા દોરીશું તથા **B**ના શીર્ષથી **A**ને સમાંતર એક બીજી રેખા દોરી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ OQSP પૂર્ણ કરીશું. જે બિંદુ પર આ બંને રેખાઓ એકબીજીને છેદે છે તેને ઊગમબિંદુ O સાથે જોડી દો. પરિણામી સદિશ **R**ની દિશા સામાન્ય ઊગમબિંદુ Oથી છેદનબિંદુ S સુધી દોરેલ વિકર્ણ OSની દિશામાં મળે છે (આકૃતિ 4.6(b)). આકૃતિ 4.6(c)માં સદિશો **A** અને **B**નો પરિણામી સદિશ મેળવવા માટેનો ત્રિકોણનો નિયમ દર્શાવ્યો છે. બંને આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, બંને રીતોમાં સમાન પરિણામ મળે છે. એટલે કે બંને રીતો એકબીજાને સમતુલ્ય છે.

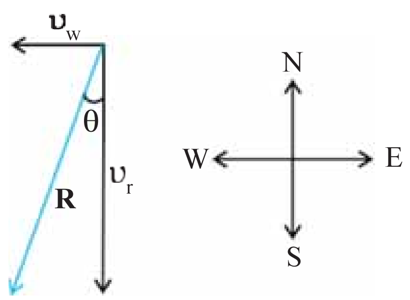


આકૃતિ 4.5 (a) *બે સદિશો* **A** *અને* **B**, **–B** *પણ દર્શાવેલ છે.* (b) *સદિશ* **A***માંથી* **B** *બાદ કરતાં પરિણામે* $\mathbf{R}_2$ *મળે છે. સરખામણી માટે સદિશો* **A** *અને* **B***નો સરવાળો* $\mathbf{R}_1$ *પણ દર્શાવ્યો છે.*



આકૃતિ 4.6 (a) *એક જ ઉગમબિંદુ પર પુચ્છ રહે તે રીતે દર્શાવેલ બે સદિશો* **A** *અને* **B** (b) *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીતથી મેળવેલ સરવાળો* **A** + **B** (c) *બે સદિશોના સરવાળા માટેની સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીત, ત્રિકોણની રીતને સમતુલ્ય છે.*

> *ઉદાહરણ 4.1* વરસાદ શિરોલંબ દિશામાં 35 m s^{-1}ની ઝડપથી પડે છે. થોડા સમય બાદ હવા 12 m s^{-1}ની ઝડપે પૂર્વથી પશ્ચિમ દિશામાં ફૂંકાવા લાગે છે. બસ-સ્ટેન્ડ પર ઉભેલા છોકરાએ પોતાની છત્રી કઈ દિશામાં રાખવી જોઈએ ?



આકૃતિ 4.7

ઉકેલ વરસાદ તથા હવાના વેગોને સદિશ $\boldsymbol{\upsilon}_r$ તથા $\boldsymbol{\upsilon}_w$ વડે આકૃતિ 4.7માં દર્શાવ્યા છે. તેમની દિશાઓ પ્રશ્નમાં આપ્યા મુજબ દર્શાવેલ છે. સદિશોના સરવાળા માટેના નિયમનો ઉપયોગ કરી $\boldsymbol{\upsilon}_r$ અને $\boldsymbol{\upsilon}_w$નો પરિણામી **R** આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ છે.

Rનું માન,

$$R = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_w^2} = \sqrt{35^2 + 12^2}\ \text{m s}^{-1} = 37\ \text{m s}^{-1}$$

જો પરિણામી સદિશ R શિરોલંબ દિશા સાથે θ ખૂણો બનાવતો હોય તો,

$$\tan\theta = \frac{\upsilon_w}{\upsilon_r} = \frac{12}{35} = 0.343$$

અથવા $\theta = \tan^{-1}(0.343) = 19^{\circ}$

આમ, છોકરાએ પોતાની છત્રી ઊર્ધ્વ સમતલમાં શિરોલંબ સાથે 19°ના ખૂણે પૂર્વ તરફ રાખવી જોઈએ. ◀

4.5 સદિશોનું વિભાજન (RESOLUTION OF VECTORS)

આકૃતિ 4.8માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક સમતલમાં જુદી જુદી દિશાઓમાં બે અશૂન્ય સદિશ **a** અને **b** તથા તે જ સમતલમાં બીજો એક સદિશ **A** ધ્યાનમાં લો. સદિશ **A**ને બે સદિશોના સરવાળારૂપે દર્શાવી શકાય જેમાંનો એક સદિશ, **a**ને કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા વડે ગુણીને મેળવેલ હોય અને બીજો સદિશ, **b**ને અન્ય વાસ્તવિક સંખ્યા વડે ગુણીને મેળવેલ હોય. ઉપર્યુક્ત વિધાનને ચકાસવા માટે ધારો કે O અને P સદિશ **A**ના પુચ્છ અને શીર્ષ છે. Oમાંથી પસાર થતી અને **a**ને સમાંતર સુરેખા દોરો. તેવી જ રીતે Pમાંથી પસાર થતી તથા **b**ને સમાંતર સુરેખા દોરો. આ બંને સુરેખાઓના છેદનબિંદુને Q વડે દર્શાવવામાં આવે, તો

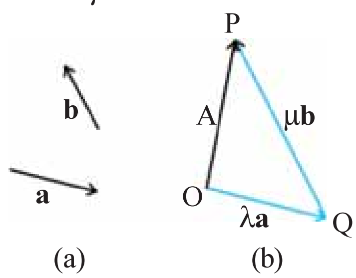
$$\mathbf{A} = \mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP} \qquad (4.6)$$

પરંતુ **OQ** સદિશ **a**ને સમાંતર છે અને **QP** સદિશ **b**ને સમાંતર છે, તેથી

$$\mathbf{OQ} = \lambda\mathbf{a} \text{ અને } \mathbf{QP} = \mu\mathbf{b} \qquad (4.7)$$

જ્યાં λ અને μ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

તેથી, $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ (4.8)



આકૃતિ 4.8 (a) *બે અરેખીય સદિશો* **a** *અને* **b** (b) *સદિશ* **A***નું* **a** *અને* **b***નાં પદોમાં વિભાજન*

આમ, આપણે કહી શકીએ કે સદિશ **A**નું **a** અને **b**ની દિશામાં રહેલાં ઘટક સદિશો અનુક્રમે $\lambda\mathbf{a}$ અને $\mu\mathbf{b}$માં વિભાજન થયું છે. આ રીતનો ઉપયોગ કરીને આપણે આપેલ સદિશને

બે ઘટક સદિશોમાં વિભાજિત કરી શકીએ - ત્રણેય સદિશો એક જ સમતલમાં મળશે. લંબ યામાક્ષ પદ્ધતિમાં એકમ સદિશનો ઉપયોગ કરી સામાન્ય સદિશનું અક્ષોની દિશાઓમાં સરળતાથી વિભાજન કરી શકાય છે. જેની હવે આપણે ચર્ચા કરીશું.

એકમ સદિશ (Unit Vector) : એકમ સદિશ એવો સદિશ છે કે જેનું માન એક એકમ છે અને તે ચોક્કસ દિશાનું નિદર્શન કરે છે. તેને કોઈ એકમ કે પરિમાણ હોતાં નથી. તે ફક્ત દિશા દર્શાવવા માટે ઉપયોગી છે. લંબ યામાક્ષ પદ્ધતિમાં x, y અને z અક્ષની દિશામાંના એકમ સદિશોને અનુક્રમે $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ અને $\hat{\mathbf{k}}$ વડે દર્શાવાય છે, જે આકૃતિ 4.9(a)માં દર્શાવેલ છે.

આ દરેક એકમ સદિશો હોવાથી

$$|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1 \qquad (4.9)$$

આ એકમ સદિશો એકબીજાને લંબ હોય છે. બીજા સદિશોથી તેમને અલગ તારવવા માટે આપણે આ પુસ્તકમાં તેમને ઘાટા અક્ષરોની ઉપર એક કૅપ (^) દ્વારા દર્શાવેલ છે. આ પ્રકરણમાં આપણે દ્વિપરિમાણમાં થતી ગતિની ચર્ચા કરતાં હોવાથી આપણને ફક્ત બે એકમ સદિશોની જરૂરિયાત પડશે. જો આપણે એકમ સદિશ $\hat{\mathbf{n}}$ ને કોઈ અદિશ λથી ગુણીએ તો પરિણામી સદિશ $\lambda\hat{\mathbf{n}}$ મળશે. સામાન્ય રીતે કોઈ સદિશ **A**ને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે :

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\ \hat{\mathbf{n}} \qquad (4.10)$$

જ્યાં, $\hat{\mathbf{n}}$ એ **A**ની દિશામાંનો એકમ સદિશ છે.

આપણે કોઈ સદિશ **A**ને એકમ સદિશો $\hat{\mathbf{i}}$ અને $\hat{\mathbf{j}}$ના ઘટક સદિશોમાં વિભાજિત કરી શકીએ છીએ. ધારો કે સદિશ **A** આકૃતિ 4.9(b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $x - y$ સમતલમાં આવેલ છે. આકૃતિ 4.9(b)માં દર્શાવ્યા અનુસાર સદિશ **A**ના શીર્ષ પરથી આપેલ અક્ષો પર આપણે લંબ દોરીશું. તેથી આપણને બે સદિશો $\mathbf{A}_1$ તથા $\mathbf{A}_2$ એ પ્રકારે મળશે કે જેથી $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}$. $\mathbf{A}_1$ એકમ સદિશ $\hat{\mathbf{i}}$ અને $\mathbf{A}_2$ એકમ સદિશ $\hat{\mathbf{j}}$ને સમાંતર હોવાથી,

$$\mathbf{A}_1 = A_x\hat{\mathbf{i}} \text{ તથા } \mathbf{A}_2 = A_y\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.11)$$

જ્યાં A_x અને A_y વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

$$\text{આમ, } \mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.12)$$

જે આકૃતિ 4.9(c)માં દર્શાવેલ છે. રાશિ A_x અને A_yને સદિશ **A**ના x અને y ઘટકો કહે છે. અહીં ધ્યાન રાખો કે, A_x પોતે સદિશ નથી પરંતુ $A_x\hat{\mathbf{i}}$ સદિશ છે, તે જ રીતે $A_y\hat{\mathbf{j}}$ પણ સદિશ છે. ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ કરી આપણે A_x અને A_yને **A**ના માનના સ્વરૂપમાં તથા તેના દ્વારા x-અક્ષ સાથે બનતા ખૂણા θ ના પદમાં દર્શાવી શકીએ :

$$A_x = A\cos\theta$$
$$A_y = A\sin\theta \qquad (4.13)$$

સમીકરણ (4.13) પરથી સ્પષ્ટ છે કે કોઈ સદિશનાં ઘટકો ધન, ઋણ કે શૂન્ય હોઈ શકે જે ખૂણા θ ના મૂલ્ય પર આધારિત છે.

કોઈ સમતલમાં સદિશ Aને બે રીતે રજૂ કરી શકાય :

(i) તે સદિશનું માન A તથા તેના દ્વારા x-અક્ષ સાથે બનાવેલ ખૂણા θ વડે, અથવા

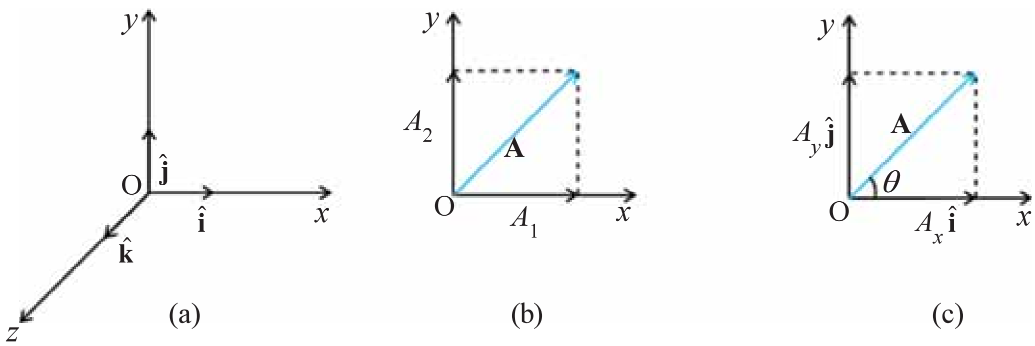
(ii) તેનાં ઘટકો A_x તથા A_y દ્વારા.

જો આપણે A અને θ જાણતાં હોઈએ તો A_x અને A_yનાં મૂલ્યો સમીકરણ (4.13) પરથી મેળવી શકાય છે. જો A_x અને A_y જાણતાં હોઈએ, તો A અને θનાં મૂલ્યો નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય છે :

$$A_x^2 + A_y^2 = A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta$$
$$= A^2$$

$$\text{અથવા } A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (4.14)$$

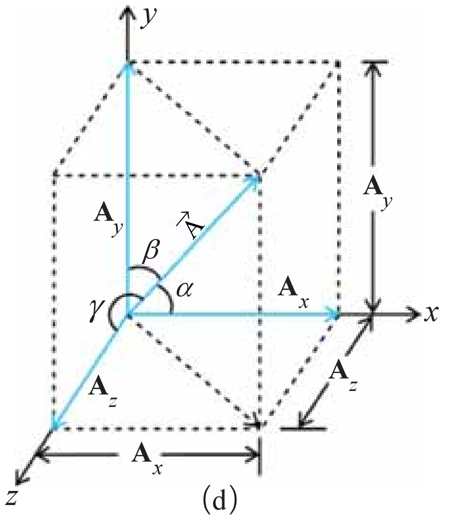
$$\text{અને } \tan\theta = \frac{A_y}{A_x}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x} \qquad (4.15)$$



આકૃતિ 4.9 (a) એકમ સદિશો $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ અક્ષો x, y, zની દિશામાં છે. (b) કોઈ સદિશ **A**ને x અને y અક્ષોની દિશામાં અનુરૂપ ઘટકો A_1 તથા A_2માં વિભાજિત કરેલ છે. (c) $\mathbf{A}_1$ અને $\mathbf{A}_2$ને $\hat{\mathbf{i}}$ અને $\hat{\mathbf{j}}$નાં પદોમાં દર્શાવેલ છે.

અત્યાર સુધી આપણે x–y સમતલમાં રહેલ સદિશ ધ્યાનમાં લીધેલ. આ જ પ્રક્રિયા દ્વારા કોઈ સદિશ **A**ને ત્રિપરિમાણમાં x, y અને z અક્ષો પર આવેલા ત્રણ ઘટકોમાં વિભાજિત કરી શકાય છે. આકૃતિ 4.9(d)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જો સદિશ **A**ના x, y તથા z અક્ષો સાથેના ખૂણાઓ* અનુક્રમે α, β અને γ હોય તો,

$$A_x = A\cos\alpha,\ A_y = A\cos\beta,\ A_z = A\cos\gamma \quad (4.16a)$$



આકૃતિ **4.9** (d) સદિશ **A**નું x, y અને z અક્ષો પરનાં અનુરૂપ ઘટકોમાં વિભાજન

વ્યાપક રૂપે,

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \quad (4.16b)$$

સદિશ **A**નું માન,

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (4.16c)$$

સ્થાન સદિશ **r**ને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad (4.17)$$

જ્યાં x, y અને z. **r**ના અનુક્રમે x, y અને z અક્ષ પરનાં ઘટકો છે.

4.6 સદિશોના સરવાળા : બૈજિક રીત (VECTOR ADDITION - ANALYTICAL METHOD)

આમ તો સદિશોના સરવાળા માટેની આલેખીય રીત આપણને સદિશો તથા તેના પરિણામી સદિશને સ્પષ્ટ રૂપે સમજવા માટે ઉપયોગી છે પરંતુ ક્યારેક આ પ્રક્રિયા કંટાળાજનક અને તેની ચોકસાઈ પણ મર્યાદિત હોય છે. આવા સંજોગોમાં સદિશ સરવાળાની બૈજિક રીત ખૂબ જ અનુકૂળ પડે છે. ધારો કે સદિશ **A** અને **B** એ x-y સમતલમાં આવેલા બે સદિશો છે અને તેમનાં ઘટકો A_x, A_y અને B_x, B_y છે માટે,

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}$$

જો તેમનો સરવાળો **R** હોય, તો

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$= (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}) + (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}) \quad (4.19a)$$

સદિશોના સરવાળા સમક્રમી છે અને તે જૂથના નિયમને અનુસરે છે, માટે આપણે સમીકરણ (4.19a)માં સદિશોને આપણને અનુકૂળ એવા જૂથમાં ગોઠવી શકીએ.

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} \quad (4.19b)$$

વળી $\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$ હોવાથી, (4.20)

$$R_x = A_x + B_x,\ R_y = A_y + B_y \quad (4.21)$$

આમ, પરિણામી સદિશ **R**નો દરેક ઘટક એ સદિશ **A** અને **B**નાં અનુરૂપ ઘટકોના સરવાળા જેટલો હોય છે.

આ રીતે ત્રિપરિમાણમાં,

$$A = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$B = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$R = \mathbf{A} + \mathbf{B} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$$

જ્યાં, $R_x = A_x + B_x$

$$R_y = A_y + B_y$$

$$R_z = A_z + B_z \quad (4.22)$$

આ રીતની મદદથી ગમે તેટલી સંખ્યાના સદિશોનો સરવાળો કે બાદબાકી કરી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે જો સદિશો **a**, **b** અને **c** નીચે પ્રમાણે આપેલ હોય :

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{b} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{c} = c_x\hat{\mathbf{i}} + c_y\hat{\mathbf{j}} + c_z\hat{\mathbf{k}} \quad (4.23a)$$

તો સદિશ **T** = **a** + **b** – **c**નાં ઘટકો,

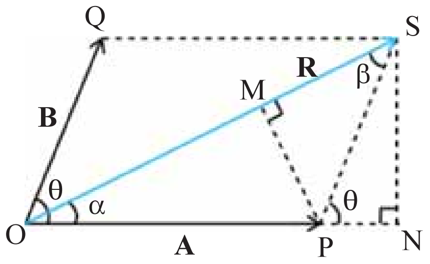
$$T_x = a_x + b_x - c_x$$

$$T_y = a_y + b_y - c_y \quad (4.23b)$$

$$T_z = a_z + b_z - c_z$$

▶ *ઉદાહરણ 4.2* આપેલ સદિશો **A** અને **B**ના પરિણામી સદિશનું માન અને દિશા, તેમના માન અને તેમની વચ્ચેના ખૂણા θ ના પદમાં મેળવો.

* *અહીં નોંધો કે α, β અને γ અવકાશમાં રહેલા ખૂણાઓ છે. તે એવી બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાઓ છે જે એક જ સમતલમાં નથી.*



આકૃતિ 4.10

ઉકેલ આકૃતિ 4.10માં દર્શાવ્યા અનુસાર **OP** અને **OQ** બે સદિશો **A** અને **B**ને રજૂ કરે છે જેમની વચ્ચેનો ખૂણો θ છે. તો સદિશોના સરવાળા માટેની સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીત અનુસાર **OS** પરિણામી સદિશ **R** રજૂ કરે છે :

$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

SN, *OP*ને લંબ છે તથા *PM*, *OS*ને લંબ છે.

તેથી આકૃતિની ભૂમિતિ અનુસાર,

$OS^2 = ON^2 + SN^2$

પરંતુ, $ON = OP + PN = A + B\cos\theta$

$SN = B\sin\theta$

$OS^2 = (A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2$

અથવા, $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \qquad (4.24a)$$

ΔOSNમાં, $SN = OS\sin\alpha = R\sin\alpha$, અને

ΔPSNમાં, $SN = PS\sin\theta = B\sin\theta$

તેથી $R\sin\alpha = B\sin\theta$

$$\text{અથવા, } \frac{R}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (4.24b)$$

તે જ રીતે, $PM = A\sin\alpha = B\sin\beta$

$$\text{અથવા, } \frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (4.24c)$$

સમીકરણ (4.24b) અને (4.24c) પરથી,

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (4.24d)$$

સમીકરણ (4.24d) પરથી આપણે નીચેનું સૂત્ર મેળવી શકીએ છીએ :

$$\sin\alpha = \frac{B}{R}\sin\theta \qquad (4.24e)$$

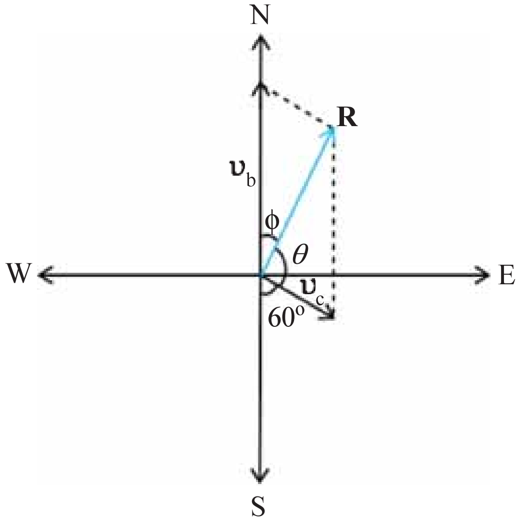
અહીં *R*નું મૂલ્ય સમીકરણ (4.24a)માં આપેલ છે.

$$\text{અથવા, } \tan\alpha = \frac{SN}{OP + PN} = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta} \qquad (4.24f)$$

સમીકરણ (4.24a) પરિણામી સદિશનું માન અને સમીકરણો (4.24e) તથા (4.24f) તેની દિશા આપે છે. સમીકરણ (4.24a)ને **કોસાઈનનો નિયમ (Law of Cosines)** અને સમીકરણ (4.24d)ને **સાઈનનો નિયમ (Law of Sines)** કહે છે. ◀

▶ *ઉદાહરણ 4.3* એક મોટરબોટ ઉત્તર દિશામાં 25 km/h ના વેગથી ગતિ કરે છે અને આ વિસ્તારમાં પાણીના પ્રવાહનો વેગ 10 km/h છે. પાણીના પ્રવાહની દિશા દક્ષિણથી પૂર્વ તરફ 60°ના ખૂણે છે. મોટરબોટનો પરિણામી વેગ શોધો.

ઉકેલ આકૃતિ 4.11માં સદિશ $\boldsymbol{\upsilon}_b$ મોટરબોટનો વેગ તથા $\boldsymbol{\upsilon}_c$ પાણીના પ્રવાહનો વેગ દર્શાવે છે. પ્રશ્નમાં જણાવ્યા અનુસાર આકૃતિમાં તેમની દિશા દર્શાવેલ છે. સદિશોના સરવાળા માટેના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના નિયમ અનુસાર મળતાં પરિણામી સદિશ **R**ની દિશા આકૃતિમાં દર્શાવી છે.



આકૃતિ 4.11

કોસાઈન નિયમ (Law of Cosines)નો ઉપયોગ કરી આપણે સદિશ **R**નું મૂલ્ય શોધી શકીએ છીએ.

$$R = \sqrt{\upsilon_b^2 + \upsilon_c^2 + 2\upsilon_b\upsilon_c\cos 120^o}$$

$$= \sqrt{25^2 + 10^2 + 2\times 25\times 10(-1/2)} \cong 22 \text{ km/h}$$

દિશા શોધવા માટે આપણે સાઈન નિયમ (Laws of Sine)નો ઉપયોગ કરીશું.

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{\upsilon_c}{\sin\phi} \text{ અથવા } \sin\phi = \frac{\upsilon_c}{R}\sin\theta$$

$$= \frac{10\times\sin 120^o}{21.8} = \frac{10\sqrt{3}}{2\times 21.8} \cong 0.397$$

$\phi \cong 23.4^o$ ◀

4.7 સમતલમાં ગતિ (MOTION IN A PLANE)

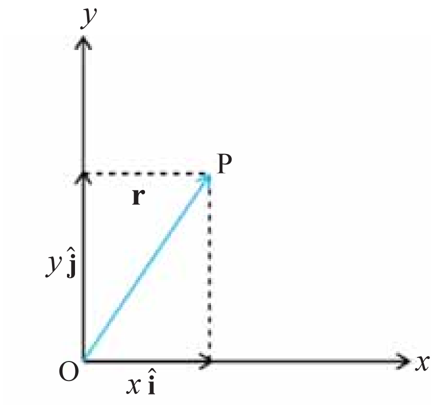
આ વિભાગમાં આપણે જોઈશું કે સદિશોના ઉપયોગથી કેવી રીતે દ્વિપરિમાણિક ગતિ વર્ણવી શકાય છે.

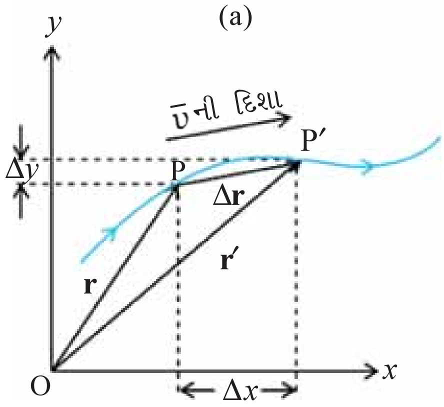
4.7.1 સ્થાન સદિશ અને સ્થાનાંતર (Position Vector and Displacement)

કોઈ સમતલમાં આવેલા કણ Pનો x–y નિર્દેશ ફ્રેમના ઊગમબિંદુની સાપેક્ષે સ્થાનસદિશ **r** આ મુજબ રજૂ કરી શકાય :

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

જ્યાં x અને y અનુક્રમે સદિશ **r**ના X-અક્ષ તથા Y-અક્ષ પરનાં ઘટકો એટલે કે કણના યામ છે.





આકૃતિ 4.12 (a) *સ્થાન સદિશ* **r** (b) *કણના સ્થાનાંતર* **Δr** *અને સરેરાશ વેગ* **υ**

ધારો કે, આકૃતિ (4.12b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોઈ કણ જાડી રેખા દ્વારા દર્શાવેલ વક્ર પર ગતિ કરે છે અને તે t સમયે P પાસે તથા t' સમયે P′ પાસે પહોંચે છે. તેથી કણનું સ્થાનાંતર,

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} \qquad (4.25)$$

અને તેની દિશા P થી P′ તરફની છે.

સમીકરણ (4.25)ને આપણે સદિશોના ઘટકના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ :

$$\Delta\mathbf{r} = (x'\hat{\mathbf{i}} + y'\hat{\mathbf{j}}) - (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\Delta x + \hat{\mathbf{j}}\Delta x$$

જ્યાં, $\Delta x = x' - x$, $\Delta y = y' - y$ (4.26)

વેગ (Velocity)

પદાર્થના સ્થાનાંતર તથા તેને અનુરૂપ સમયગાળાના ગુણોત્તરને સરેરાશ વેગ ($\bar{\upsilon}$) કહે છે.

$$\bar{\boldsymbol{\upsilon}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\hat{\mathbf{j}}}{\Delta t} = \hat{\mathbf{i}}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (4.27)$$

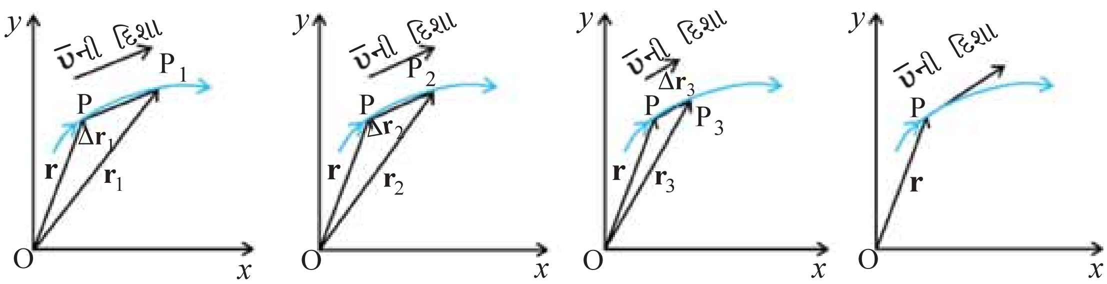
અથવા, $\bar{\boldsymbol{\upsilon}} = \bar{\upsilon}_x\hat{\mathbf{i}} + \bar{\upsilon}_y\hat{\mathbf{j}}$

$\bar{\boldsymbol{\upsilon}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ હોવાથી, આકૃતિ (4.12) અનુસાર સરેરાશ વેગની દિશા **Δr**ની દિશામાં જ મળે છે. ગતિમાન પદાર્થનો **વેગ** (તાત્ક્ષણિક વેગ), સમયગાળો શૂન્ય તરફ જાય ($\lim_{\Delta t \to 0}$), ત્યારે મળતા સરેરાશ વેગનું સીમાન્ત મૂલ્ય છે.

એટલે કે,

$$\boldsymbol{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (4.28)$$

લક્ષની પ્રક્રિયાનો અર્થ આકૃતિ 4.13(a) થી (d) દ્વારા સહેલાઈથી સમજી શકાય છે. આ આકૃતિઓમાં જાડી રેખા પદાર્થનો ગતિપથ દર્શાવે છે, જે t સમયે P પાસે છે. P_1, P_2 અને P_3 અનુક્રમે Δt_1, Δt_2 અને Δt_3 સમયગાળા બાદ પદાર્થનું સ્થાન દર્શાવે છે. Δt_1, Δt_2 અને Δt_3 સમય દરમિયાન પદાર્થના સ્થાનાંતરો અનુક્રમે $\Delta\mathbf{r}_1$, $\Delta\mathbf{r}_2$ અને $\Delta\mathbf{r}_3$ છે. આકૃતિ (a), (b)



આકૃતિ 4.13 સમયગાળો Δt શૂન્ય લક્ષ તરફ જાય છે ત્યારે સરેરાશ વેગ પદાર્થના વેગ **υ** *જેટલો થઈ જાય છે.* $\bar{\upsilon}$*ની દિશા તે ક્ષણે પથ પર દોરેલ સ્પર્શક રેખાની દિશામાં હોય છે.*

તથા (c)માં Δtના ક્રમશઃ ઘટતાં જતાં મૂલ્યો એટલે કે Δt_1, Δt_2, Δt_3 ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$) માટે પદાર્થના સરેરાશ વેગ $\bar{\boldsymbol{\upsilon}}$ની દિશા દર્શાવી છે. જ્યારે $\Delta t \to 0$ થાય ત્યારે $\Delta \mathbf{r} \to 0$ અને તે ગતિપથના સ્પર્શકની દિશામાં મળે છે. (આકૃતિ 4.13(d)). આમ, **પદાર્થના ગતિપથના કોઈ પણ બિંદુ પાસે તેનો વેગ તે બિંદુ પાસે ગતિપથને દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે અને ગતિની દિશામાં હોય છે.**

આપણે સદિશ $\boldsymbol{\upsilon}$ને તેનાં ઘટકોના સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ :

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}} \right) \quad (4.29)$$

$$= \hat{\mathbf{i}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

અથવા $\boldsymbol{\upsilon} = \hat{\mathbf{i}} \frac{dx}{dt} + \hat{\mathbf{j}} \frac{dy}{dt} = \upsilon_x \hat{\mathbf{i}} + \upsilon_y \hat{\mathbf{j}}$

જ્યાં, $\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \ \upsilon_y = \frac{dy}{dt}$ (4.30a)

આમ, જો ગતિ કરતાં પદાર્થના યામો x અને y સમયના વિધેય સ્વરૂપે જાણીતા હોય, તો ઉપર્યુક્ત સમીકરણોનો ઉપયોગ કરીને υ_x અને υ_y મેળવી શકાય છે.

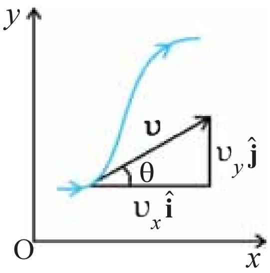
તેથી, $\boldsymbol{\upsilon}$નું મૂલ્ય,

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} \quad (4.30b)$$

તથા $\boldsymbol{\upsilon}$ની દિશા, ખૂણા θ ના સ્વરૂપમાં

$\tan\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}, \ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}\right)$ વડે આપી શકાય છે. (4.30c)

આકૃતિ 4.14માં વેગ સદિશ $\boldsymbol{\upsilon}$ માટે υ_x, υ_y અને ખૂણો θ દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 4.14 વેગ $\boldsymbol{\upsilon}$નાં ઘટકો υ_x, υ_y તથા તે X-અક્ષ સાથે ખૂણો θ બનાવે છે. $\upsilon_x = \upsilon\cos\theta$, $\upsilon_y = \upsilon\sin\theta$

પ્રવેગ (Acceleration)

x–y સમતલમાં ગતિમાન પદાર્થનો **સરેરાશ પ્રવેગ a** તેના વેગમાં થતાં ફેરફાર તથા તેને અનુરૂપ સમયગાળાના ગુણોત્તર જેટલો હોય છે.

$$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta\boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\upsilon_x\hat{\mathbf{i}} + \upsilon_y\hat{\mathbf{j}})}{\Delta t} = \frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta\upsilon_y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}} \quad (4.31a)$$

અથવા, $\boldsymbol{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}$ (4.31b)

પ્રવેગ (તાત્ક્ષણિક પ્રવેગ), **સમયગાળો શૂન્ય તરફ જાય ત્યારે મળતા સરેરાશ પ્રવેગનું સીમાન્ત મૂલ્ય છે. એટલે કે,**

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} \quad (4.32a)$$

$\Delta\boldsymbol{\upsilon} = \Delta\upsilon_x\hat{\mathbf{i}} + \Delta\upsilon_y\hat{\mathbf{j}}$ હોવાથી,

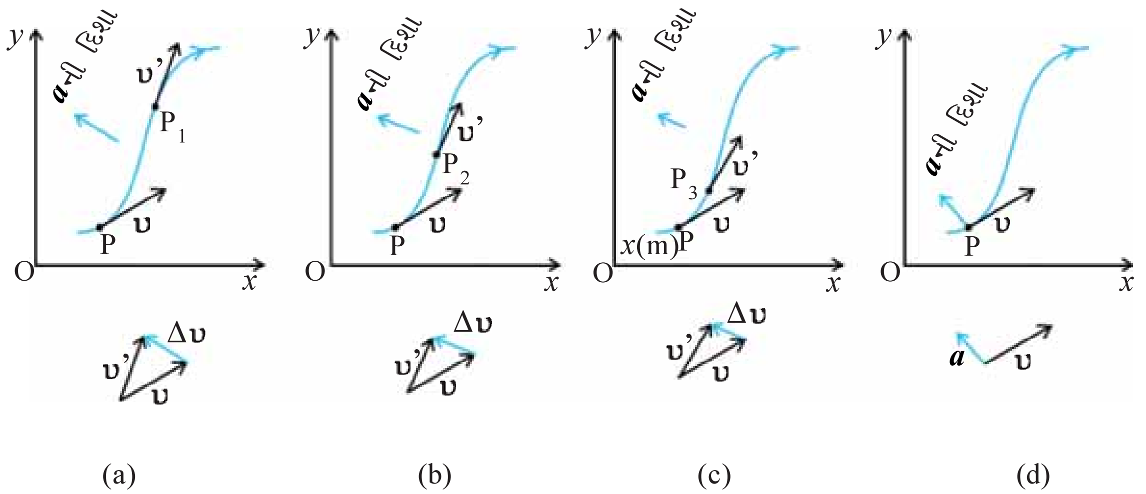
$$\boldsymbol{a} = \hat{\mathbf{i}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\upsilon_y}{\Delta t}$$

અથવા $\boldsymbol{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}$ (4.32b)

જ્યાં, $a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}, \ a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt}$ (4.32c)*

વેગના કિસ્સાની જેમ આપણે પદાર્થનો પથ દર્શાવતા આલેખ પર, પ્રવેગને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે લક્ષની પ્રક્રિયાને આલેખીય રીતે સમજી શકીએ છીએ. તે આકૃતિ (4.15a) થી (4.15d)માં દર્શાવેલ છે. t સમયે પદાર્થનું સ્થાન P દ્વારા દર્શાવેલ છે. Δt_1, Δt_2, Δt_3 ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$) સમયગાળા બાદ પદાર્થના સ્થાનને અનુક્રમે P_1, P_2, P_3 દ્વારા દર્શાવેલ છે. આકૃતિ (4.15) (a), (b) અને (c)માં આ દરેક બિંદુઓ P, P_1, P_2, P_3 પર વેગના સદિશો પણ દર્શાવેલ છે. Δtના દરેક કિસ્સામાં $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ સદિશ સરવાળાના ત્રિકોણના નિયમ પરથી મેળવેલ છે. વ્યાખ્યા મુજબ સરેરાશ પ્રવેગની દિશાએ $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ની દિશા જ છે. આપણે જોઈએ છીએ કે જેમ જેમ Δtનું મૂલ્ય ઘટતું જાય છે તેમ તેમ $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ની દિશા પણ બદલાતી જાય છે. તેના પરિણામ સ્વરૂપે પ્રવેગની દિશા પણ બદલાય છે. અંતમાં $\Delta t \to 0$

* x અને yનાં પદોમાં a_x અને a_yને આ પ્રમાણે દર્શાવી શકાય : $a_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}, \ a_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$



આકૃતિ 4.15 *ત્રણ સમયગાળા* (a) Δt_1, (b) Δt_2, (c) Δt_3 ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$) *માટે સરેરાશ પ્રવેગ* ***a*** (d) $\Delta t \rightarrow 0$ *સીમાને અનુરૂપ સરેરાશ પ્રવેગ પદાર્થના પ્રવેગ જેટલો થાય છે.*

લક્ષમાં (આકૃતિ 4.15d), સરેરાશ પ્રવેગ, તાત્ક્ષણિક પ્રવેગ જેટલો થઈ જાય છે અને તેની દિશા આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે હોય છે.

ખાસ નોંધો કે એક પરિમાણમાં પદાર્થનો વેગ તથા પ્રવેગ હંમેશાં એક જ સુરેખ પથ પર હોય છે. (તે કાં તો એક જ દિશામાં હશે કે પછી પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં) જ્યારે દ્વિપરિમાણમાં કે ત્રિપરિમાણમાં પદાર્થની ગતિ માટે વેગ અને પ્રવેગ સદિશો વચ્ચે 0° થી 180° વચ્ચેનો કોઈ પણ ખૂણો હોઈ શકે છે.

▶ *ઉદાહરણ 4.4* કોઈ કણનું સ્થાન $\mathbf{r} = 3.0t\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 5.0\,\hat{\mathbf{k}}$ વડે અપાય છે, જ્યાં t સેકન્ડમાં છે. સહગુણકોના એકમો એવી રીતે છે કે જેથી **r** મીટરમાં મળે. (a) કણના $\boldsymbol{\upsilon}(t)$ તથા $\boldsymbol{a}(t)$ શોધો. (b) $t = 1.0$ s માટે $\upsilon(t)$નું મૂલ્ય અને દિશા શોધો.

ઉકેલ

$$\boldsymbol{\upsilon}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(3.0t\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 5.0\,\hat{\mathbf{k}})$$

$$= 3.0\,\hat{\mathbf{i}} + 4.0t\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = +4.0\,\hat{\mathbf{j}}$$

$a = 4.0 \text{ m s}^{-2}$ y-દિશામાં

$t = 1.0$ s પર $\boldsymbol{\upsilon} = 3.0\,\hat{\mathbf{i}} + 4.0\,\hat{\mathbf{j}}$

તેનું માન $\upsilon = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.0 \text{ m s}^{-1}$ તથા

તેની દિશા $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \cong 53^\circ$

x-અક્ષ સાથે. ◀

4.8 સમતલમાં થતી અચળ પ્રવેગી ગતિ (MOTION IN A PLANE WITH CONSTANT ACCELERATION)

ધારો કે કોઈ પદાર્થ x–y સમતલમાં અચળ પ્રવેગ **a**થી ગતિ કરે છે. પ્રવેગ અચળ હોવાથી કોઈ પણ સમયગાળામાં તેનો સરેરાશ પ્રવેગ આ અચળ પ્રવેગના મૂલ્ય જેટલો જ મળશે. હવે, ધારો કે $t = 0$ સમયે પદાર્થનો વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_0$ અને t સમયે વેગ $\boldsymbol{\upsilon}$ છે.

તેથી વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{\upsilon}_0}{t - 0} = \frac{\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{\upsilon}_0}{t}$$

અથવા $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{a}t$ (4.33a)

ઘટકોના સ્વરૂપમાં,

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$$

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t \quad (4.33b)$$

હવે આપણે જોઈશું કે સમયની સાથે સ્થાનસદિશ **r** કેવી રીતે બદલાય છે. અહીં એક પરિમાણમાં ઉપયોગમાં લીધેલી પદ્ધતિને અનુસરીશું. ધારો કે, $\mathbf{r}_0$ અને **r** અનુક્રમે $t = 0$ અને t સમયે કણના સ્થાનસદિશો છે અને આ સમયે કણના વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_0$ અને $\boldsymbol{\upsilon}$ છે. તેથી t સમયગાળામાં પદાર્થનો સરેરાશ વેગ $(\boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{\upsilon}) / 2$ થશે. હવે, સ્થાનાંતર એટલે સરેરાશ વેગ અને સમયગાળાનો ગુણાકાર,

$$\therefore\ \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \frac{\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\upsilon}_0}{2}\ t = \left(\frac{(\boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{a}t) + \boldsymbol{\upsilon}_0}{2}\right)t$$

$$= \boldsymbol{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

અથવા $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$ (4.34a)

સમીકરણ (4.34a)નું વિકલન એટલે કે $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ કરતાં સમીકરણ (4.33a) મળે છે તેમ સરળતાથી ચકાસી શકાય છે તથા તે $t = 0$ સમયે $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ શરતનું પણ પાલન કરે છે. સમીકરણ (4.34a)ને ઘટકોના સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$x = x_0 + \upsilon_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y = y_0 + \upsilon_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (4.34b)$$

સમીકરણ (4.34b)નું સીધું અર્થઘટન એ છે કે x તથા y દિશાઓમાંની ગતિઓને એકબીજાથી સ્વતંત્ર ગતિ તરીકે ગણી શકાય છે. એટલે કે, **સમતલમાં (દ્વિપરિમાણમાં) થતી અચળ પ્રવેગી ગતિને બે સ્વતંત્ર, એક સાથે અચળ પ્રવેગથી એક પરિમાણમાં પરસ્પર લંબ દિશાઓમાં થતી ગતિ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય છે.** આ એક અગત્યનું પરિણામ છે, જે દ્વિપરિમાણમાં પદાર્થની ગતિના વિશ્લેષણ માટે ઉપયોગી છે. આવું પરિણામ ત્રિપરિમાણીક ગતિમાં પણ મળે છે. ઘણીબધી ભૌતિક સ્થિતિઓમાં બે લંબ દિશાઓની પસંદગી અનુકૂળતા મુજબની હોય છે, જે પરિચ્છેદ (4.10)માં પ્રક્ષિપ્ત ગતિ માટે આપણે જોઈશું.

ઉદાહરણ 4.5 $t = 0$ સમયે એક કણ ઊગમબિંદુ પાસેથી $5.0\hat{\mathbf{i}}$ m s^{-1}ના વેગથી ગતિ શરૂ કરે છે. x-y સમતલમાં તેની પર બળ એવી રીતે લાગે છે કે જેથી તે $(3.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s^{2}નો અચળ પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરે છે. (a) જ્યારે કણનો x-યામ 84 m હોય ત્યારે y-યામ કેટલો હશે ? (b) તે સમયે કણની ઝડપ કેટલી હશે ?

ઉકેલ કણનું સ્થાન નીચેના સૂત્ર પ્રમાણે આપી શકાય :

$$\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

$$= 5.0\hat{\mathbf{i}}t + (1/2)(3.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})t^2$$

$$= (5.0t + 1.5t^2)\hat{\mathbf{i}} + 1.0t^2\hat{\mathbf{j}}$$

તેથી, $x(t) = 5.0t + 1.5t^2$

$y(t) = +1.0t^2$

હવે, $x(t) = 84$ m, $t = ?$

$5.0t + 1.5t^2 = 84 \Rightarrow t = 6$ s

હવે, $t = 6$ s માટે, $y = 1.0\,(6)^2 = 36.0$ m

હવે, વેગ $\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (5.0 + 3.0t)\hat{\mathbf{i}} + 2.0t\hat{\mathbf{j}}$

તેથી $t = 6$ s માટે, $\boldsymbol{\upsilon} = 23.0\hat{\mathbf{i}} + 12.0\hat{\mathbf{j}}$ માટે,

ઝડપ $= |\boldsymbol{\upsilon}| = \sqrt{23^2 + 12^2} = 26$ m s^{-1} ◀

4.9 દ્વિપરિમાણમાં સાપેક્ષ વેગ (RELATIVE VELOCITY IN TWO DIMENSIONS)

પરિચ્છેદ 3.7માં કોઈ સુરેખ પથ પર ગતિ કરતાં પદાર્થ માટે સાપેક્ષ વેગની સંકલ્પનાથી આપણે પરિચિત થયા જેને સમતલ કે ત્રિપરિમાણમાં વિસ્તારિત કરી શકાય છે. ધારો કે, બે પદાર્થો A અને B, $\boldsymbol{\upsilon}_A$ અને $\boldsymbol{\upsilon}_B$ જેટલા વેગથી ગતિ કરે છે. (દરેક ગતિ કોઈ સામાન્ય નિર્દેશ ફ્રેમ જેમકે જમીનની સાપેક્ષે છે.) તેથી પદાર્થ **Aનો Bની સાપેક્ષે વેગ**

$$\boldsymbol{\upsilon}_{AB} = \boldsymbol{\upsilon}_A - \boldsymbol{\upsilon}_B \quad (4.35a)$$

તે જ રીતે પદાર્થ Bનો Aની સાપેક્ષ વેગ,

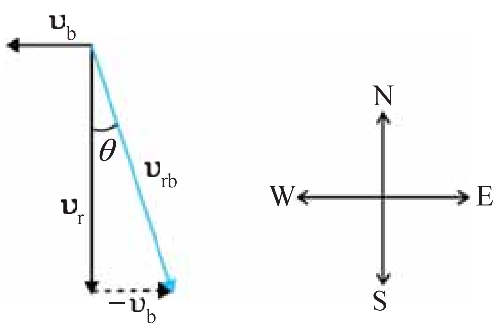
$$\boldsymbol{\upsilon}_{BA} = \boldsymbol{\upsilon}_B - \boldsymbol{\upsilon}_A$$

તેથી $\boldsymbol{\upsilon}_{AB} = -\boldsymbol{\upsilon}_{BA}$ (4.35b)

અને $|\boldsymbol{\upsilon}_{AB}| = |\boldsymbol{\upsilon}_{BA}|$ (4.35c)

ઉદાહરણ 4.6 શિરોલંબ દિશામાં 35 m s^{-1}ના વેગથી વરસાદ પડી રહ્યો છે. કોઈ મહિલા પૂર્વથી પશ્ચિમ દિશામાં 12 m s^{-1} ઝડપથી સાઇકલ ચલાવી રહી છે. વરસાદથી બચવા માટે તેણીએ કઈ દિશામાં છત્રી રાખવી જોઈએ ?

ઉકેલ આકૃતિ 4.16માં $\boldsymbol{\upsilon}_r$ વરસાદનો વેગ અને $\boldsymbol{\upsilon}_b$ મહિલા દ્વારા ચલાવાતી સાઇકલનો વેગ દર્શાવે છે. આ બંને વેગ જમીનની સાપેક્ષે છે. મહિલા સાઇકલ ચલાવતી હોવાથી તેણીને વરસાદનો



આકૃતિ 4.16

વેગ સાઇકલની સાપેક્ષે અનુભવાશે. એટલે કે, $\boldsymbol{\upsilon}_{rb} = \boldsymbol{\upsilon}_r - \boldsymbol{\upsilon}_b$