Chapter
34
गणितीय तर्कशास्त्र एवं बूलीय बीजगणित

गणितीय तर्कशास्त्र

प्रस्तावना (Introduction)

प्रारम्भ में तर्कशास्त्र की उत्पत्ति ग्रीस में हुई थी। मध्यकाल में अरस्तु की तर्क से संबंधित धारणाओं की पुनः खोज हुई। तर्क की अभिग्रहीत सोच सर्वप्रथम जार्ज बुल द्वारा दी गई। इसमें गणित से संबंधित विचार को कभी–कभी बुलियन तर्क भी कहा जाता है। इसे गणितीय तर्क अथवा सांकेतिक तर्क भी कहते हैं।

शब्दकोष के अनुसार 'तर्क' को "कारणों का विज्ञान" कहा जाता है। यह उपयुक्त विचारों की जानकारी एवं विश्लेषण है। तर्क शास्त्र में हम अपने विचारों अथवा वक्तव्यों को किसी भाषा के वाक्य के रूप में व्यक्त करते हैं। निम्न प्रकार के वाक्यों को हम प्रतिदिन प्रयोग में लाते हैं।

(1) निश्चयात्मक वाक्य (2) आदेशात्मक वाक्य

(3) विस्मादिबोधक वाक्य (4) प्रश्नवाचक वाक्य

इस अध्याय में हम विशिष्ट प्रकार के वाक्यों की चर्चा करेंगे जिसे "कथन" कहा जाता है।

कथन (Statements or propositions)

कथन : कथन एक निश्चयात्मक (या अनिश्चयात्मक) वाक्य है जो कि सत्य अथवा असत्य होगा किन्तु दोनों नहीं होंगे। सत्य कथन को उपयुक्त कथन कहा जाता है। यदि कथन असत्य है तो अनुपयुक्त कथन कहलाता है।

खुला कथन : अनिश्चयात्मक वाक्य चरों के समायोजित कर खुला कथन है यदि चरों को निश्चित मानों से परिवर्तित होने पर यह कथन बन जाए।

सत्यता समुच्चय : खुला कथन में चरों के उन सभी मानों का समुच्चय, जिनके लिए यह सत्य कथन है, खुला कथन का सत्यता समुच्चय कहलाता है।

सत्य मान : किसी कथन की सत्यता अथवा मिथ्या सत्य मान कहलाता है।

यदि कथन सत्य है तब हम कहते हैं कि उसका सत्य मान 'सत्य' या 'T' है। दूसरी तरफ मिथ्या कथन का सत्य मान 'असत्य' या 'F' है।

तर्किक चर : तर्क के अध्ययन में कथन को छोटे अक्षरों $p, q, r, s.$ से व्यक्त करते हैं। इन अक्षरों को तर्किक चर कहते हैं।

उदाहरणस्वरूप, कथन 'सूर्य सितारा है' को p द्वारा निरूपित किया जा सकता है एवं हम लिखेंगे

p : सूर्य सितारा है

इसी प्रकार हम कथन को व्यक्त कर सकते हैं

$14 - 5 = -2$

परिमाणक (Quantifiers): संकेत $\forall$ (सभी के लिए) एवं $\exists$(ऐसा अस्तित्व रखता है) को परिमाणक (Quantifiers) कहते हैं।

दूसरे शब्दों में यह एक संकेत है जिसका प्रयोग शब्दों के समूह के लिए होता है।

संकेत $\forall$ एवं $\exists$ को अस्तित्व परिमाणक(Existential quantifiers)कहते हैं। परिमाणक के साथ खुला वाक्य सदैव कथन होता है।

परिमाणक कथन : जिस कथन में परिमाणक (Quantifiers) का प्रयोग हो वह परिमाणक कथन (Quantified statement) कहलाता है।

$x^2 > 0. \forall x \in R$ एक परिमाणक कथन है, इसका सत्यता मान T है।

कथन की सत्यता एवं मिथ्या जाँच में वेन आरेख का प्रयोग (Use of venn diagrams in checking truth and falsity of statements)

इस खण्ड में हम चर्चा करेंगे कि किस प्रकार कथन की सत्यता या मिथ्या में वेन आरेख का प्रयोग होता है। माना कि कथन "सभी शिक्षक बुद्धिमान है" को लेते हैं। माना कि यह कथन सत्य है। उपरोक्त कथन की सत्यता को निरूपित करने के लिए हम निम्न समुच्चय परिभाषित करते हैं।

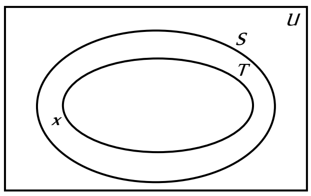
U = सभी मानवों का समुच्चय है

S = सभी बुद्धिमानों का समुच्चय

एवं T = सभी शिक्षकों का समुच्चय

स्पष्टतः, $S \subset U$ एवं $T \subset U$

उपरोक्त कथन के अनुसार $T \subset S$ अतः उपरोक्त कथन की सत्यता को वेन आरेख द्वारा निम्न प्रकार निरूपित किया जा सकता है।



अब हम लेते हैं कथन "कुछ बुद्धिमान है जो कि शिक्षक है"। वेन आरेख में साक्ष्य है कि x बुद्धिमान है जो कि शिक्षक नहीं है। अतः उपरोक्त

कथन 'असत्य' है एवं सत्य मान "*F*" है। अतः हम अन्य कथनों का भी परीक्षण कर सकते हैं जो कि सत्य अथवा असत्य है एवं दिये गये कथन से संबंधित है।

कथन के प्रकार (Types of statements)

गणितीय तर्क में हम कथन को दो प्रकार से व्यक्त करते हैं, "सामान्य कथन" एवं "संयुक्त कथन" जो कि निम्न रूप से परिभाषित है।

(1) **सामान्य कथन :** वह कथन जिसका सत्य मान किसी भी रूप से अन्य कथन पर आधारित न हो, सामान्य कथन कहलाता है।

अन्य रूप से वह कथन जो कि सामान्य कथन के टुकड़ों के रूप में व्यक्त न किया जा सके अर्थात् जो कि सामान्य कथनों से न बना हो।

(2) **संयुक्त कथन :** यदि कथन दो अथवा ज्यादा सामान्य कथनों का संयोजन हो, तो इसे संयुक्त कथन कहते हैं।

सत्यता तालिका (Truth tables)

तालिका जो कि संयुक्त कथन $S(p, q, r,..)$ के सत्यता मानो के बीच संबंध प्रदर्शित करें एवं इन उपकथनों p, q, r, ...इत्यादि के सत्य मानों को कथन S की सत्यता तालिका कहते हैं।

सत्यता तालिका की संरचना : संयुक्त कथन की सत्यता तालिका की संरचना में सर्वप्रथम हम पंक्तियों एवं स्तंभो वाली एक तालिका का निर्माण करते हैं। प्रारम्भिक स्तंभ के शीर्ष पर हम उपकथनों के चरों को व्यक्त करते हैं एवं अंतिम स्तंभ में संयुक्त कथन की सत्यता मानों को लिखते हैं। हम उपकथनों के सत्यता मानों के आधार पर हम संयुक्त कथनों की सत्यता मान रखते हैं। यदि संयुक्त कथन दो सामान्य कथनों से बना हो तब सत्यता तालिका में पंक्तियों की संख्या 2^2 होगीं एवं यदि यह तीन सामान्य कथनों से बना हो तब पंक्तियों की संख्या 2^3 होगी। सामान्यतः यदि संयुक्त कथन n सामान्य कथनों से बना हो तो इसकी सत्यता तालिका में 2^n पंक्तियाँ होंगी।

मूलभूत तार्किक संयोजक अथवा तार्किक संकरक (Basic logical connectives or logical operators)

वह शब्द अथवा वाक्य खंड जो सामान्य कथनों को जोड़े तार्किक संयोजक अथवा वाक्य संयोजक अथवा संयोजक अथवा तार्किक संकरक कहलाता है।

निम्न तालिका में हम कुछ संभव संयोजकों, उनके संकेत एवं संयुक्त कथनों की प्रवृत्ति को व्यक्त कर रहे हैं।

संयोजक	संकेत	उन संयोजकों द्वारा बनने वाले संयुक्त कथनों की प्रवृत्ति
एवं	$\wedge$	संयोजन
या	$\vee$	वैकल्पिक
यदि....तब	$\Rightarrow$ या $\rightarrow$	प्रतिबंधित
यदि और केवल यदि	$\Leftrightarrow$ या $\leftrightarrow$	द्विप्रतिबंधित
नहीं	~ या $\neg$	नकारात्मकता

(1) **संयोजन** (Conjuction) : कोई दो सामान्य कथनों को यदि "और" द्वारा संयोजित कर संयुक्त कथन बनाया जाए उसे वास्तविक कथनों का संयोजन कहा जाता है।

सांकेतिक रूप से p एवं q दो सामान्य कथन हैं, तब $p \wedge q$ को "p एवं q" पढ़ा जाएगा तथा यह p एवं q के संयोजन को निरूपित करेगा।

(2) **वियोजन या वैकल्पिक** (Disjunction or Alternation): कोई दो कथनों को "या" द्वारा संयोजित कर संयुक्त कथन बनाया जाए तो वास्तविक कथनों का वैकल्पिक कथन कहलाएगा।

सांकेतिक रूप से यदि p एवं q दो कथन है तब $p \vee q$ को "p या q" पढ़ा जाएगा एवं इसे p एवं q का वैकल्पिक कहेंगे।

(3) **निषेध** (Negation) **:** कथन p को मना करने को निषेध कहते हैं। यह $\sim p$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

किसी कथन की निषेध "यह प्रकरण नहीं ....." या "यह असत्य है कि......" p के पहले अथवा संभव हो तो "नहीं" के प्रयोग द्वारा तैयार की जाती है।

- निषेध को संयोजक कहा जाता है यद्यपि यह दो या उससे ज्यादा कथनों को नहीं जोड़ता है, सच में कहा जाए तो यह सिर्फ कथन को रूपांतरित करता है।

(4) **प्रतिबंधित कथन** (Conditional statement)**:** कोई दो कथन "यदि.. तब" द्वारा संयोजित कर संयुक्त कथन का निर्माण करे, प्रतिबंधित कथन कहलाता है।

यदि p एवं q दो कथन प्रतिबंधित हैं "यदि p तब q" द्वारा तब इस प्रतिबंध को हम व्यक्त करते हैं।

"$p \Rightarrow q$" या "$p \rightarrow q$".

प्रतिबंध में "$p \Rightarrow q$", p पूर्व पद (Antecedent) एवं q पर पद (Consequent) है।

प्रतिबंधित कथन की सत्यता तालिका

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(5) **द्विप्रतिबंधित कथन** (Biconditional statement)**:** कोई कथन द्विप्रतिबंधित कथन कहलाता है यदि यह दो प्रतिबंधित कथनों का संयोजन हो।

अतः यदि p एवं q दो कथन है तब संयुक्त कथन $p \Rightarrow q$ एवं $q \Rightarrow p$ द्विप्रतिबंधित कथन कहलाएगा एवं $p \Leftrightarrow q$ द्वारा निरूपित किया जाएगा।

अतः $p \Leftrightarrow q\ :(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

द्विप्रतिबंधित कथन की सत्यता तालिका : चूँकि $p \Leftrightarrow q$, $p \Rightarrow q$ एवं $q \Rightarrow p$ का संयोजन है अतः हमारे पास $p \Leftrightarrow q$ के लिए निम्न सत्यता तालिका है।

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

तार्किक समतुल्यता (Logical equivalence)

तार्किक समतुल्य कथन : दो संयुक्त कथन $S_1(p, q, r,...)$ एवं $S_2(p, q, r...)$ को तार्किक समतुल्य अथवा समतुल्य कहा जाता है यदि उनकी सत्यता तालिका सभी तार्किक संभावनाओं के लिए समान हो।

यदि कथन $S_1(p, q, r,...)$ एवं $S_2(p, q, r...)$ तार्किक समतुल्य है तो हम लिखते हैं $S_1(p, q, r,...) \equiv S_2(p, q, r...)$

उपरोक्त परिभाषाओं से दोनों कथन S_1 एवं S_2 तार्किक समतुल्य है यदि दोनों की सत्यता तालिका समान है, अर्थात् अंतिम पंक्ति के अवयव समान है।

संयुक्त कथनों की नकारात्मकता (Negation of compound statements)

हम सामान्य कथन की नकारात्मकता पढ़ चुके हैं। संयुक्त कथन की नकारात्मकता जिसमें conjunction वैकल्पिक, प्रतिबंधित एवं समतुल्यता इत्यादि हो आसान नहीं है। अतः संयुक्त कथनों की नकारात्मकता की आगे चर्चा करते हैं।

(i) **संयोजन की नकारात्मकता :**

यदि p एवं q दो कथन हैं, तब $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

(ii) **वैकल्पिक की नकारात्मकता :**

यदि p एवं q दो कथन हैं, तब $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

(iii) **प्रतिबंधित की नकारात्मकता :**

यदि p एवं q दो कथन हैं, तब $\sim (p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$

(iv) **द्विप्रतिबंधित की नकारात्मकता :**

यदि p एवं q दो कथन हैं, तब $\sim (p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$

$\sim (p \Leftrightarrow q) = (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

पुनरिक्ति एवं व्याघात (Tautologies and Contradictions)

माना $p, q, r, ...$ कथन है तब कोई कथन $p, q, r, ...$ एवं तार्किक संयोजक $\wedge, \vee, \sim, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ के मिलन से व्यक्त की जाए आदर्श कथन अथवा क्रमित सूत्र कहलाता है।

उदहारणस्वरूप

(i) $p \vee q$

(ii) $p \Rightarrow q$

(iii) $((p \wedge q) \vee r) \Rightarrow (s \wedge \sim s)$

(iv) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ इत्यादि

आदर्श कथन हैं।

अतः हम निम्न रूप से आदर्श कथन को परिभाषित कर सकते हैं।

आदर्श कथन : संयुक्त कथन तार्किक संयोजक की पुनरिक्ति के साथ आदर्श कथन अथवा उचित क्रमित सूत्र कहलाता है।

पुनरिक्ति : आदर्श कथन पुनरिक्ति कहलाता है यदि यह सदैव सत्य हो यद्यपि समयोजित कथन कुछ भी हो।

पुनरिक्ति उचित आदर्श तार्किक कथन का प्रमेय कहलाता है। पुनरिक्ति सत्यता तालिका के अंतिम स्तंभ में सिर्फ T रखता है।

व्याघात : आदर्श कथन व्याघात कहलाता है यदि यह सदैव असत्य हो चाहे संयोजित कथन कुछ भी हो।

सत्यता तालिका के अंतिम स्तंभ में सभी F हो तो व्याघात कहलाएगा।

- पुनरिक्ति की नकारात्मकता व्याघात एवं उसका विपरीत भी होगा।

कथनों का बीजगणित (Algebra of statements)

पूर्व खण्ड में हम देख चुके हैं कि कथन बहुत सारे महत्वपूर्ण परिणामों को संतुष्ट करता है। हम उन परिणामों को कथन के बीजगणित के नियम के रूप में व्यक्त कर सकते है।

निम्न कथन के कुछ बीजगणित नियम दिए गए है

(i) **वर्गसम नियम :** किसी कथन p के लिए

(a) $p \vee p \equiv p$ (b) $p \wedge p \equiv p$

(ii) **क्रम विनिमेय नियम :** किन्हीं कथन p एवं q के लिए

(a) $p \vee q \equiv q \vee p$ (b) $p \wedge p \equiv q \wedge p$

(iii) **साहचर्य नियम :** किन्हीं तीन कथन p, q, r के लिए

(a) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ (b) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

(iv) **वितरण नियम :** किन्हीं तीन कथन p, q, r के लिए

(a) $p \wedge (p \vee q) \equiv (p \wedge q) \vee (q \wedge r)$

(b) $p \vee (p \wedge q) \equiv (p \vee q) \wedge (q \vee r)$

(v) **डी मार्गन नियम :** यदि p एवं q दो कथन है, तब

(a) $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$ (b) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

(vi) **तत्समक नियम :** यदि t एवं c क्रमशः पुनरिक्ति एवं व्याघात व्यक्त करते हैं, तब किसी कथन p के लिए

(a) $p \wedge t \equiv p$ (b) $p \vee c \equiv p$ (c) $p \vee t \equiv t$ (d) $p \wedge c \equiv c$

(vii) **पूरक नियम :** किसी कथन p के लिए

(a) $p \vee \sim p = t$ (b) $p \wedge \sim p = c$ (c) $\sim t = c$ (d) $\sim c = t$

जहाँ t एवं c क्रमशः पुनरिक्ति एवं व्याघात व्यक्त करते हैं।

(viii) **प्रतिपरिवर्तित नियम** (Law of contrapostive) **:** किसी कथन p एवं q के लिए $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

(ix) **अंतर्वलनीय नियम :** किसी कथन p के लिए $\sim (\sim p) \equiv p$

द्वैतता (Duality)

परिभाषा : दो संयुक्त कथन S_1 एवं S_2 को एक–दूसरे की द्वैतता कहा जाएगा यदि एक दूसरे से $\wedge$ को $\vee$ से एवं $\vee$ को $\wedge$ से परिवर्तित कर प्राप्त की जाए।

- संयोजक $\wedge$ एवं $\vee$ को एक दूसरे का युग्म भी कहा जाता है।
- यदि संयुक्त कथन विशिष्ट चर t (निरर्थक पुनरिक्ति) एवं c (मतभेद) को समायोजित करता है तब इसके युग्म को प्राप्त करने के लिए t को c से एवं c को t से परिवर्तित कर साथ ही साथ $\wedge$ को $\vee$ से एवं $\vee$ को $\wedge$ से परिवर्तित करते हैं।
- माना $S(p, q)$ संयुक्त कथन है जो कि दो उपकथन को रखता है एवं $S^*(p, q)$ इसका युग्म है, तब

(i) $\sim S(p, q) \equiv S^*(\sim p, \sim q)$

(ii) $\sim S^*(p, q) \equiv S(\sim p, \sim q)$

- उपरोक्त परिणाम को परिमित उपकथन के संयुक्त कथन पर विस्तार कर सकते हैं अतः यदि $S(p_1, p_2, ... p_n)$ संयुक्त कथन है जो कि n उपकथन रखता है एवं $S^*(p_1 p_2, ..., p_n)$ इसका युग्म है, तब

(i) $\sim S(p_1, p_2, ..., p_n) \equiv S^*(\sim p_1, \sim p_2, ..., \sim p_n)$

(ii) $\sim S^*(p_1, p_2, ..., p_n) \equiv S(\sim p_1, \sim p_2, ..., \sim p_n)$

बूलीय बीजगणित

प्रस्तावना (Introduction)

बूलीय बीजगणित वह औजार है जिसकी मदद से गणितीय तर्कशास्त्र (जो कि अंग्रेज गणितज्ञ जार्ज बुल द्वारा दी गई थी) का अध्ययन एवं विश्लेषण करते हैं। 1854 ई. में जार्ज बुल ने एक किताब लिखी "विचारों के नियम का परीक्षण" जिसमें शब्दों की जगह संकेतों का प्रयोग किया। इसी बीजगणित का परीक्षण अब बूलीय बीजगणित कहलाता है।

परिभाषा : अरिक्त समुच्चय B दो संक्रिया '$\vee$' एवं '$\wedge$' के साथ बूलीय बीजगणित कहलाते हैं यदि निम्न अभिग्रहित संतुष्ट हो :

(i) $\forall x, y \in B$

(a) $x \vee y \in B$ ($\vee$ के लिए संवरक गुणधर्म)

(b) $x \wedge y \in B$ ($\wedge$ के लिए संवरक गुणधर्म)

(ii) $\forall x, y \in B$

(a) $x \vee y = y \vee x$ ($\vee$ के लिए क्रम विनिमेय नियम)

(b) $x \wedge y = y \wedge x$ ($\wedge$ के लिए क्रम विनिमेय नियम)

(iii) B में x, y एवं z के लिए

(a) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ ($\vee$ का साहचर्य नियम)

(b) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ ($\wedge$ का साहचर्य नियम)

(iv) B में x, y एवं z के लिए

(a) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ ($\wedge$ पर $\vee$ का बंटन नियम)

(b) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ ($\vee$ पर $\wedge$ का बंटन नियम)

(v) B में अवयव 0 एवं 1 इस प्रकार अस्तित्व रखता है कि सभी $x \in B$ के लिए

(a) $x \vee 0 = x$ ($\vee$ के लिए 0 तत्समक है)

(b) $x \wedge 1 = x$ ($\wedge$ के लिए 1 तत्समक है)

(vi) सभी $x \in B$ के लिए कोई अवयव x' अस्तित्व रखता है जिसे x का पूरक कहते हैं, इस प्रकार है कि

(a) $x \vee x' = 1$ (b) $x \wedge x' = 0$ (पूरक नियम)

द्वैतता का सिद्धांत (Principle of Duality)

बूलीय बीजगणित B में किसी कथन के युग्म कथन संक्रिया $\vee$ एवं $\wedge$ के रूपांतरण 0 एवं 1 के रूपांतरण से प्राप्त होता है।

बूलीय बीजगणित में शून्य अवयव 0 एवं इकाई अवयव 1 अद्वितीय होते हैं।

माना कि B बूलीय बीजगणित है, तब B में किसी x एवं y के लिए

(a) $x \vee x = x$ (a′) $x \wedge x = x$

(b) $x \vee 1 = 1$ (b′) $x \wedge 0 = 0$

(c) $x \vee (x \wedge y) = x$ (c′) $x \wedge (x \vee y) = x$

(d) $0' = 1$ (d′) $1' = 0$

(e) $(x')' = x$

(f) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ (f′) $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

महत्वपूर्ण बिन्दु :

- (i) (a) एवं (b) में संक्रिया + एवं B पर द्विआधारी संक्रियायें हैं।
- कभी–कभी हम बूलीय बीजगणित को निरूपित करते हैं (B, '∨', '∧', ''', 0, 1) द्वारा इस छः भागों को नामांकित करते हैं समुच्चय B, द्विआधारी संक्रिया '∨' एवं '∧' पूरक संक्रिया ''' एवं दो विशिष्ट अवयव 0 एवं 1इस विशिष्ट को कहते हैं शून्य एवं इकाई। फिर भी ज्ञात रहे कि संकेत 0 एवं 1 निश्चित रूप से संख्या 0 एवं 1 को निरूपित नहीं करते हैं।
- समुच्चय S के सभी तार्किक कथन के लिए संक्रिया + एवं . क्रमशः ∨ एवं ∧ के लिए प्रयोग होते हैं। पुनरिक्ति एवं व्याघात 1 एवं 0 के लिए एवं संक्रिया '~' ''' के लिए प्रयोग होते हैं।
- $P(A)$ के लिए समुच्चय A के सभी उपसमुच्चय का समुच्चय संक्रिया ∪ एवं ∩ क्रमशः '∨' एवं '∧' के लिए प्रयोग होते हैं। A एवं ϕ क्रमशः 1 एवं 0 के प्रयोग होते हैं एवं पूरक ''' के लिए प्रयोग होते हैं।

बूलीय फलन (Boolean functions)

कोई व्यंजक $x \wedge x'$, $a \wedge b'$, $[a \wedge (b \vee c')] \vee (a' \wedge b' \wedge c)$ इस प्रकार है जो कि ∨ एवं ∧ के बुलियन बीजगणित के परिमित अवयवों के संचय से बना है बुलियन फलन कहलाता है।

माना $B = \{a, b, c, ...\}$ अचर द्वारा बुलियन बीजगणित है यानि कि कोई संकेत 0 एवं 1 जो कि B के विशिष्ट अवयवों को निरूपित करता है।

चर का मतलब है कि संकेत जो B के सापेक्षिक अवयव को व्यक्त करे।

यदि व्यंजक में $x' \vee (y \wedge z)$ हम ∨ को + से एवं ∧ को • से बदल दें तो हम पाते हैं $x' + y.z$ यहाँ x' एवं $y \wedge z$ को एकपदीय एवं पूर्ण व्यंजक $x' \vee (y \wedge z)$ का बहुपदीय कहते हैं।

स्विच एवं विद्युत परिपथ (Switching circuits)

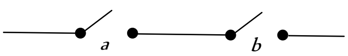
बूलीय बीजगणित का एक महत्वपूर्ण व्यवहारिक अनुप्रयोग स्विच निकाय में होता है। यह दो स्थिर युक्ति को संयोजित करता है। सबसे आसान संभव उदाहरण इस युक्ति का साधारण खुला–बंद स्विच है।

स्विच का हमारा अर्थ है "विद्युत परिपथ" में है जो कि विद्युत को प्रवाहित अथवा नहीं प्रवाहित होने देता है। स्विच में बंद एवं खुली अवस्था होती है। प्रथम प्रकरण में विद्युत प्रवाहित होती है जबकि दूसरे प्रकरण में विद्युत प्रवाहित नहीं होती है।

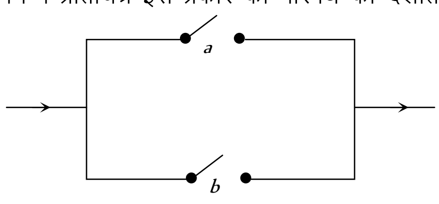
सांकेतिक रूप से $a, b, c, p, q, r, x, y, z$,..... इत्यादि विद्युत परिपथ में स्विच को दर्शाते हैं।

परिपथ का संयोजनः मुख्य रूप से स्विच एक दूसरे से दो प्रकार से जुड़े होते हैं। (i) श्रेणी क्रम (ii) समान्तर क्रम

(i) **श्रेणी क्रम** : दो स्विच a एवं b 'श्रृंखला में' जुड़ें हों यदि विद्युत प्रवाहित तभी हो जब दोनों बंद अवस्था में हों एवं उनमें एक भी खुला हो तो विद्युत प्रवाहित न हो। निम्न प्रतिचित्र इस प्रकार की परिपथ को दर्शाते हैं।



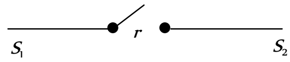
(ii) **समान्तर क्रम :** दो स्विच a एवं b 'समान्तर' में जुड़े हों यदि कोई एक भी बंद हो तो विद्युत प्रवाहित हो एवं यदि दोनों खुले हों तो विद्युत प्रवाहित नहीं होगी। निम्न प्रतिचित्र इस प्रकार की परिपथ को दर्शाते हैं।



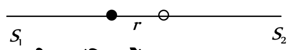
यदि दो स्विच किसी परिपथ में इस प्रकार हों कि दोनो एक साथ खुला (बंद) हो, हम उन्हें समान अक्षरों द्वारा व्यक्त करेंगे। पुनः यदि दो स्विच इस प्रकार हो कि खुला और सिर्फ यदि दूसरा बंद हो, हम उसे a एवं a' द्वारा दर्शाते हैं।

बंद स्विच या जब यह खुला हो का मान 1 एवं जब यह खुला स्विच या जब यह बंद हो का मान 0 होगा।

खुला स्विच r प्रतिचित्र में निम्न रूप से दर्शाया गया है :

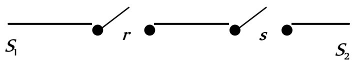


बंद स्विच r प्रतिचित्र में निम्न रूप से दर्शाया गया है :



स्विच परिपथ पर बूलीय संक्रियायें

(i) **बूलीय गुणन :** श्रृंखला में दो स्विच r एवं s बूलीय गुणन संक्रिया करते हैं।

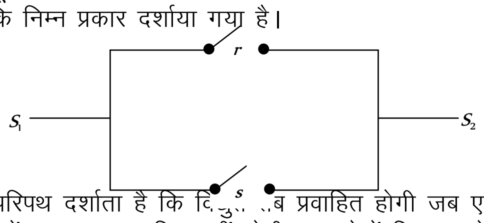


स्पष्टतः विद्युत S_1 से S_2 तक प्रवाहित नहीं हो सकती है जब तक एक या दो r, s खुले हो, यह तभी प्रवाहित होगी जब दोनों बंद हो।

r	s	$r \wedge s$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

यह संक्रिया चार प्रकरणों में से केवल एक के लिए सत्य है अर्थात् जब दोनों स्विच बंद हो।

(ii) **बूलीय योग :** योग संक्रिया के प्रकरण में दोनों स्विच समान्तर में होंगे जो कि निम्न प्रकार दर्शाया गया है।



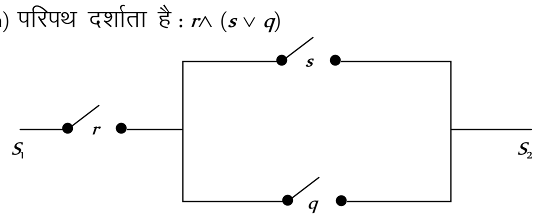
यह परिपथ दर्शाता है कि वि[illegible]ब प्रवाहित होगी जब एक या दोनों स्विच बंद हों। यह तब प्रवाहित नहीं होगी जब दोनों स्विच खुले हों।

r	s	$r \vee s$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

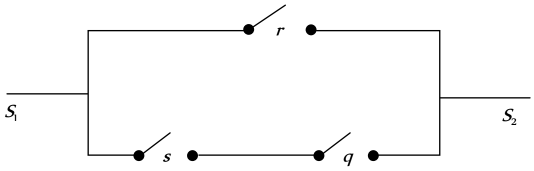
यह संक्रिया चारों प्रकरण में से केवल एक के लिए सत्य नहीं होगी। अर्थात् जब दोनों r एवं s खुले हों।

(iii) **संयोजित संक्रिया के साथ विद्युत परिपथ :**

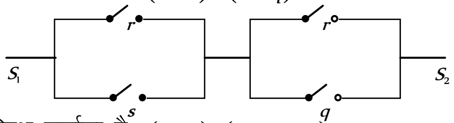
(a) परिपथ दर्शाता है : $r \wedge (s \vee q)$



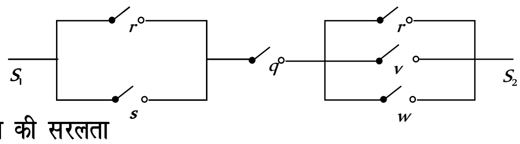
(b) परिपथ दर्शाता है : $r \vee (s \wedge q)$



(c) परिपथ दर्शाता है : $(r \vee s) \wedge (r \vee q)$



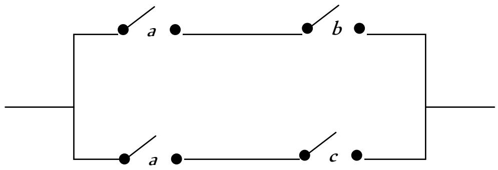
(d) परिपथ दर्शाता है : $(r \vee s) q (u \vee v \vee w)$



परिपथ की सरलता

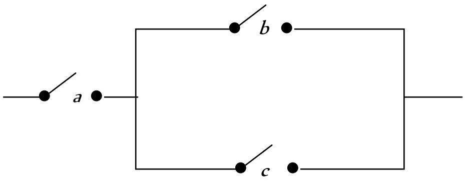
परिपथ की सरलता का सामान्यतः अर्थ न्यूनतम उलझा हुआ परिपथ न्यूनतम मूल्य के साथ सर्वोत्तम परिणाम। यह विभिन्न कारणों द्वारा हो सकता है जैसे कि उपकरणों के मूल्य, स्विचों की स्थिति एवं संख्या, पदार्थ के प्रकार इत्यादि। हमारे लिए परिपथ की सरलता का अर्थ है न्यूनतम स्विचों की संख्या जो कि हम बूलीय बीजगणित विभिन्न गुणधर्म से प्राप्त करते हैं। उदाहरणस्वरुप परिपथ $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ लेते हैं।

यह निरूपित की गई है।



चूँकि $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c)$

$\therefore$ परिपथ को सरलतम किया जा सकता है।

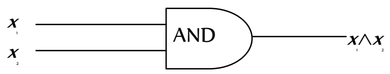


तार्किक गेट्स (Logic gates)

(1) **AND :** यह बूलीय फलन परिभाषित होता है

$f(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$; $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$

यह निम्न चित्र द्वारा दर्शाया गया है।

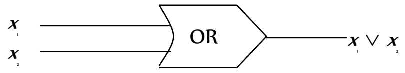


आगम		निर्गम
x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

(2) **OR :** यह बूलीय परिभाषित होता है।

$f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$; $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$

यह निम्न चित्र द्वारा दर्शाया गया है।

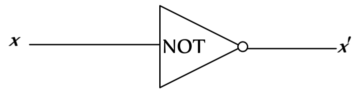


आगम		निर्गम
x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(3) **NOT :** यह बूलीय फलन परिभाषित है

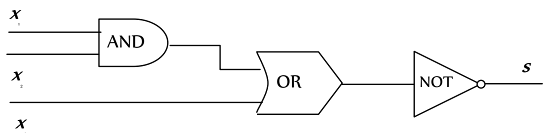
$f(x) = x', \quad x \in \{0, 1\}$

यह निम्न चित्र द्वारा दर्शाया गया है :

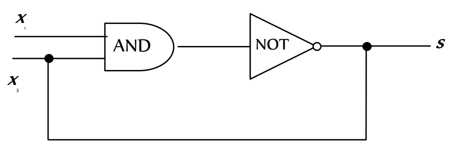


आगम	निर्गम
x	x'
1	0
0	1

संयोजित परिपथ :



उपरोक्त चित्र में उत्सर्जक प्रत्येक संयोजित x_1, x_2 एवं x_3 के लिए अद्वितीय रूप से परिभाषित है। इस प्रकार के परिपथ को संयोजित परिपथ कहते हैं।



उपरोक्त चित्र में यदि $x_1 = 1, x_2 = 0$ हो तब AND गेट से 1 एवं 0 अंदर आयेगा एवं AND गेट से '0' बाहर जाएगा। यह NOT गेट से अंदर आयेगा एवं बाहर $s = 1$ जाएगा किन्तु चित्र बताता है कि $x_2 = s$ अर्थात् $0 = 1$ जो कि मतभेद है।

$\therefore$ उत्सर्जक अद्वितीय रूप से परिभाषित नहीं है। इस प्रकार के परिपथ संयोजित परिपथ नहीं है।

दो संयोजित परिपथ : यदि किसी परिपथ में $x_1, x_2, ... x_n$ अंदर जाए एवं एक उत्सर्जन हो तो इस प्रकार के परिपथ को दो संयोजित परिपथ कहते हैं, यदि परिपथ के अंदर एवं बाहर आने वाले अवयव समान हों। अर्थात् यदि आगम तथा निर्गम तालिका समान होगी।

OT Ordinary Thinking

Objective Questions

गणितीय तर्कशास्त्र

1. निम्न में से कौनसा कथन है
(a) दरवाजा खोलो
(b) अपना गृहकार्य करो
(c) पंखा चलाओ
(d) दो और दो जोड़ने पर चार होते हैं

2. निम्न में से कौनसा कथन नहीं है
(a) तुम बहुत जीयो ! (b) भगवान तुम्हे आर्शीवाद दें !
(c) सूर्य सितारा है (d) वाह ! हम खेल जीत गए

3. निम्न में से कौनसा कथन नहीं है
(a) गुलाब लाल होता है
(b) नई दिल्ली भारत में है
(c) सभी वर्ग आयत है
(d) आह ! मैं फेल हो गया

4. निम्न में से कौनसा कथन नहीं है
(a) सभी समुच्चय परिमित समुच्चय है
(b) 8 छोटा है 6 से
(c) तुम कहाँ जा रहे हो ?
(d) त्रिभुज के अंतः कोणों का योग 180^o होता है

5. निम्न में से कौनसा कथन नहीं है
(a) कृपया मेरा पक्ष लो (b) 2 सम पूर्णांक है
(c) $2+1=3$ (d) संख्या 17, अभाज्य है

6. निम्न में से कौनसा कथन नहीं है
(a) मुझे एक गिलास पानी दो
(b) एशिया एक महाद्वीप है
(c) पृथ्वी सूर्य की परिक्रमा करती है
(d) संख्या 6 के, दो अभाज्य गुणज 2, 3 है

7. निम्न में से कौनसा खुला कथन है
(a) x प्राकृत संख्या है
(b) मुझे एक गिलास पानी दो
(c) तुम्हारे अच्छे की कामना करता हूँ
(d) सभी को सुप्रभात

8. प्रतिबंध "यदि बारिश हुई तो मैं स्कूल जाऊँगा" की नकारात्मकता होगी
(a) यदि बारिश हुई तो मैं स्कूल जाऊँगा
(b) बारिश हुई एवं मैं स्कूल नहीं जाऊँगा
(c) बारिश नहीं हुई और मैं स्कूल जाऊँगा
(d) इनमें से कोई नहीं

9. "पेरिस फ्राँस में एवं लंदन इंग्लैंड में है" की नकारात्मकता है
(a) पेरिस फ्राँस में एवं लंदन इंग्लैंड में है
(b) पेरिस फ्राँस में नहीं है एवं लंदन इंग्लैंड में नहीं है
(c) पेरिस इंग्लैंड में या लंदन फ्राँस में है
(d) इनमें से कोई नहीं

10. "$2+3=5$ एवं $8<10$" की नकारात्मकता है
(a) $2+3\neq 5$ एवं <10 (b) $2+3=5$ एवं $8 \not< 10$
(c) $2+3\neq 5$ या $8 \not< 10$ (d) इनमें से कोई नहीं

11. "राम कक्षा X में है या रश्मी कक्षा XII में है" की नकारात्मकता है
(a) राम कक्षा X में नहीं है किन्तु राम कक्षा XII में है
(b) राम कक्षा X में नहीं है किन्तु रश्मी कक्षा XII में नहीं है
(c) या तो राम कक्षा X में नहीं है या राम कक्षा XII में नहीं है
(d) इनमें से कोई नहीं

12. प्रतिबंध $(p\wedge q) \Rightarrow p$ है
(a) पुनरिक्ति (b) व्याघात
(c) ना ही पुनरिक्ति ना ही व्याघात (d) इनमें से कोई नहीं

13. निम्न में से कौनसा व्याघात है
(a) $(p\wedge q)\wedge \sim(p\vee q)$ (b) $p\vee(\sim p\wedge q)$
(c) $(p\Rightarrow q)\Rightarrow p$ (d) इनमें से कोई नहीं

14. $\sim(\sim p\Rightarrow q)$ के तार्किक समतुल्य कौनसा है
(a) $p\wedge q$ (b) $p\wedge\sim q$
(c) $\sim p\wedge q$ (d) $\sim p\wedge\sim q$

15. $\sim(p\vee q)=$
(a) $\sim p\vee\sim q$ (b) $\sim p\wedge\sim q$
(c) $\sim p\vee q$ (d) $p\vee\sim q$

16. $\sim(p\wedge q)=$
(a) $\sim p\vee\sim q$ (b) $\sim p\wedge\sim q$
(c) $\sim p\wedge q$ (d) $p\wedge\sim q$

17. $(\sim(\sim p))\wedge q=$
(a) $\sim p\wedge q$ (b) $p\wedge q$
(c) $p\wedge\sim q$ (d) $\sim p\wedge\sim q$

18. $\sim(p\vee(\sim q))=$
(a) $\sim p\vee q$ (b) $(\sim p)\wedge q$
(c) $\sim p\vee\sim p$ (d) $\sim p\wedge\sim q$

19. $\sim((\sim p)\wedge q)=$
(a) $p\vee(\sim q)$ (b) $p\vee q$
(c) $p\wedge(\sim q)$ (d) $\sim p\wedge\sim q$

20. $\sim(p\Leftrightarrow q)$ है
(a) $\sim p\wedge\sim q$ (b) $\sim p\vee\sim q$
(c) $(p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. $p\Rightarrow q$ को ऐसे भी लिख सकते हैं
(a) $p\Rightarrow\sim q$ (b) $\sim p\vee q$
(c) $\sim q\Rightarrow\sim p$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. यदि p, q, r सत्यता मान T, F, T के साथ सामान्य कथन $(\sim p\vee q)\wedge\sim r\Rightarrow p$ की सत्यता का मान है
(a) सत्य (b) असत्य
(c) सत्य यदि r असत्य है (d) सत्य यदि q सत्य है

23. यदि $(p\wedge\sim r)\Rightarrow(q\vee r)$ असत्य है एवं q एवं r दोनों असत्य है, तब p है
(a) सत्य
(b) असत्य
(c) सत्य या असत्य
(d) आँकड़े अधूरे हैं

24. यदि p, q, r सामान्य कथन है, तब $(p\wedge q)\wedge(q\wedge r)$ सत्य है, तब
(a) p, q, r सभी असत्य हैं (b) p, q, r सभी सत्य हैं
(c) p, q सत्य है एवं r असत्य है (d) p सत्य है एवं q एवं r असत्य है

25. $\sim(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow\sim p\vee\sim q$ है
(a) पुनरिक्ति
(b) व्याघात
(c) ना तो पुनरिक्ति और ना ही व्याघात
(d) कोई निष्कर्ष नहीं

26. $(p\wedge\sim q)\wedge(\sim p\vee q)$ है
(a) व्याघात (b) पुनरिक्ति
(c) या तो (a) या (b) (d) ना तो (a) ना ही (b)

27. निम्न में से कौनसा कथन : "वास्तविक संख्या या तो परिमेय है या अपरिमेय" के तार्किक समतुल्य है
(a) यदि संख्या ना तो परिमेय और ना ही अपरिमेय है तब यह वास्तविक नहीं होगी

(b) यदि संख्या परिमेय नहीं है या अपरिमेय नहीं है, तब यह वास्तविक नहीं है

(c) यदि संख्या वास्तविक नहीं है तब यह ना तो परिमेय और ना ही अपरिमेय है

(d) यदि संख्या वास्तविक है तब यह या तो परिमेय होगी या अपरिमेय

28. यदि p : आज बारिश हुई, q : मैं स्कूल जाता हूँ, r : मैं किसी दोस्त से मिलूंगा s : मैं सिनेमा देखने जाऊँगा, तब निम्न में से कौनसा कथन, है

यदि आज बारिश नहीं हुई या यदि मैं स्कूल नहीं जाता हूँ तब मैं अपने दोस्तों से मिलूंगा एवं सिनेमा देखने जाऊँगा, है

(a) $\sim (p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s)$ (b) $\sim (p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \wedge s)$

(c) $\sim (p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s)$ (d) इनमें से कोई नहीं

29. $p \vee (\sim p \vee q)$ संयुक्त कथन की नकारात्मकता है

(a) $(p \wedge \sim q) \wedge \sim p$ (b) $(p \wedge \sim q) \vee \sim p$

(c) $(p \vee \sim q) \vee \sim p$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. निम्न में से कौनसा सत्य है

(a) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \Rightarrow \sim q$

(b) $\sim (p \Rightarrow \sim q) \equiv \sim p \wedge q$

(c) $\sim (\sim p \Rightarrow \sim q) \equiv \sim p \wedge q$

(d) $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv [\sim (p \Rightarrow q) \wedge \sim (q \Rightarrow p)]$

31. $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$ तार्किक समतुल्य है

(a) $\sim p$ (b) p

(c) q (d) $\sim q$

32. $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$ का प्रतिलोम है

(a) $\sim r \Rightarrow \sim p \vee q$ (b) $\sim p \vee q \Rightarrow \sim r$

(c) $r \Rightarrow p \wedge \sim q$ (d) इनमें से कोई नहीं

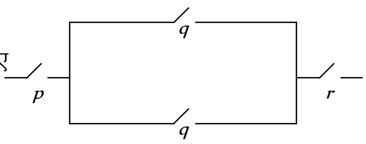
33. परिपथ से विद्युत कब प्रवाहित होगी

(a) p, q, r बंद होने चाहिए

(b) p, q, r खुले होने चाहिए

(c) सदैव

(d) इनमें से कोई नहीं



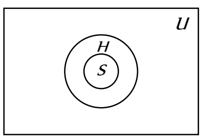
34. कौन सा वेन आरेख कथन

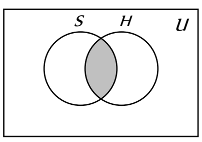
"सभी विद्यार्थी मेहनती है" की सत्यता को दर्शाता है

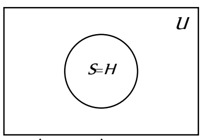
जहाँ U = मानवों का समष्टीय समुच्चय

S = सभी विद्यार्थियों का समुच्चय

H = सभी मेहनती का समुच्चय

(a)


(b)


(c)


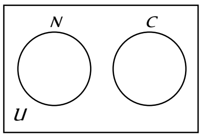
(d) इनमें से कोई नहीं

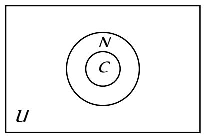
35. कौनसा वेन आरेख कथन "कोई बच्चा शरारती नहीं है" की सत्यता को दर्शाता है

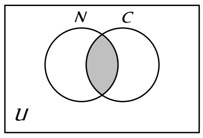
जहाँ U = सभी मानवों का समष्टीय समुच्चय

C = बच्चों का समुच्चय

N = शरारती लोगों का समुच्चय

(a)


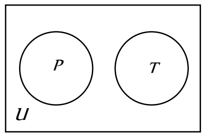
(b)


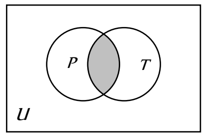
(c)


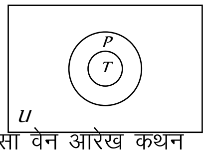
(d) इनमें से कोई नहीं

36. कौनसा वेन आरेख कथन

"कोई पुलिसवाला चोर नहीं है" की सत्यता को दर्शाता है

(a)


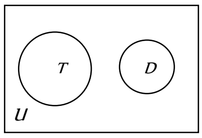
(b)


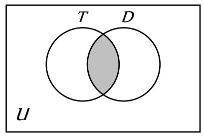
(c)


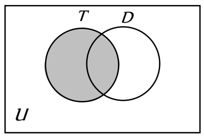
(d) इनमें से कोई नहीं

37. कौनसा वेन आरेख कथन

"कुछ युवा स्वप्निल नहीं है" की सत्यता को दर्शाता है।

(a)


(b)


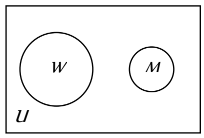
(c)


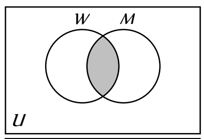
(d) इनमें से कोई नहीं

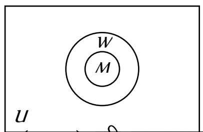
38. कौनसा वेन आरेख कथन

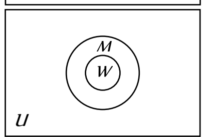
"सभी मातायें औरत हैं" की सत्यता को दर्शाता है।

(M सभी माताओं का समुच्चय, W सभी औरतों का समुच्चय)

(a)


(b)


(c)


(d)


39. $q \vee \sim (p \wedge r)$ की नकारात्मकता है [Karnataka CET 1997]

(a) $\sim q \wedge \sim (p \wedge r)$ (b) $\sim q \wedge (p \wedge r)$

(c) $\sim q \vee (p \wedge r)$ (d) इनमें से कोई नहीं

40. $(p \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow p)$ कथन है एक [Karnataka CET 1997]

(a) पुनरिक्ति एवं व्याघात

(b) ना तो पुनरिक्ति और ना ही व्याघात

(c) व्याघात

(d) पुनरिक्ति

41. निम्न में से कौनसा सदैव सत्य है [Karnataka CET 1998]

(a) $(p \Rightarrow q) \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ (b) $\sim (p \vee q) \equiv \vee p \vee \sim q$

(c) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ (d) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

42. $(p \vee q) \Rightarrow r$ का प्रतिपरिवतर्तित (Contrapositive) है [Karnataka CET 1999]

(a) $r \Rightarrow (p \vee q)$ (b) $\sim r \Rightarrow (p \vee q)$
(c) $\sim r \Rightarrow \sim p \wedge \sim q$ (d) $p \Rightarrow (q \vee r)$

43. यदि $p \Rightarrow (q \vee r)$ असत्य है, तब p, q, r की सत्यता मान क्रमशः है [Karnataka CET 2000]

(a) T, F, F (b) F, F, F
(c) F, T, T (d) T, T, F

44. $p \Leftrightarrow q$ का तार्किक समतुल्य कथन है [Karnataka CET 2000]

(a) $(p \wedge q) \vee (p \wedge q)$ (b) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
(c) $(p \wedge q) \vee (q \Rightarrow p)$ (d) $(p \wedge q) \Rightarrow (q \vee p)$

45. निम्न में से असत्य कथन है [Karnataka CET 2002]

(a) $p \wedge (\sim p)$ व्याघात है
(b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ व्याघात है
(c) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ पुनरिक्ति है
(d) $p \vee (\sim p) \Leftrightarrow$ पुनरिक्ति है

46. यदि $p \Rightarrow (\sim p \vee q)$ असत्य है , तब p एवं q की सत्यता मान क्रमशः [Karnataka CET 2002]

(a) F, T (b) F, F
(c) T, T (d) T, F

47. निम्न में से कौनसा कथन नहीं है [Karnataka CET 2002]

(a) $\sqrt{3}$ अभाज्य है (b) $\sqrt{2}$ अपरिमेय है
(c) गणित रोचक है (d) 5 सम पूर्णांक है

48. $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \wedge q)$ है [Karnataka CET 2003]

(a) एक पुनरिक्ति (b) एक व्याघात
(c) पुनरिक्ति एवं व्याघात (d) ना तो पुनरिक्ति और ना ही व्याघात

49. $\sim p \wedge q$ के तार्किक समतुल्य है [Karnataka CET 2004]

(a) $p \to q$ (b) $q \to p$
(c) $\sim(p \to q)$ (d) $\sim(q \to p)$

50. निम्न में से कौन कथन के विपरीत है : "यदि संख्या अभाज्य है तो विषम भी होगी" [Karnataka CET 2004]

(a) यदि संख्या अभाज्य नहीं है तो विषम भी होगी
(b) यदि संख्या अभाज्य नहीं है तो विषम नहीं होगी
(c) यदि संख्या विषम नहीं है तो अभाज्य भी नहीं होगी
(d) यदि संख्या विषम नहीं है तो अभाज्य होगी

बूलीय बीजगणित

1. बूलीय बीजगणित में शून्य अवयव '0'

(a) दो मान रखता है
(b) अद्वितीय है
(c) कम से कम दो मान रखता है
(d) इनमें से कोई नहीं

2. बूलीय बीजगणित में इकाई अवयव '1'

(a) दो मान रखता है (b) अद्वितीय है
(c) कम से कम दो मान रखता है (d) इनमें से कोई नहीं

3. बूलीय बीजगणित B में, B के सभी x के लिए $x \vee x =$

(a) 0 (b) 1
(c) x (d) इनमें से कोई नहीं

4. बूलीय बीजगणित B में, B के सभी x के लिए $x \wedge x =$

(a) 0 (b) 1
(c) x (d) इनमें से कोई नहीं

5. बूलीय बीजगणित B में, B के सभी x के लिए $x \vee 1 =$

(a) 0 (b) 1
(c) x (d) इनमें से कोई नहीं

6. बूलीय बीजगणित B में, B के सभी x, y के लिए $x \vee (x \wedge y) =$

(a) y (b) x
(c) 1 (d) 0

7. बूलीय बीजगणित B में, B के सभी x के लिए $x \wedge (x \vee y) =$

(a) y (b) x
(c) 1 (d) 0

8. बूलीय बीजगणित B में, B के सभी x के लिए $(x')' =$

(a) x' (b) x
(c) 1 (d) 0

9. बूलीय बीजगणित B में, B के सभी x के लिए $(x \vee y)' =$

(a) $x' \vee y'$ (b) $x' \wedge y'$
(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

10. बूलीय बीजगणित B में, B के सभी x, y के लिए $(x \wedge y)' =$

(a) $x' \wedge y'$ (b) $x' \vee y'$
(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

11. बूलीय बीजगणित B में, B के सभी x के लिए $0'$ बराबर है

(a) 0 (b) 1
(c) $x.0$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. बूलीय बीजगणित B में, B के सभी x के लिए $1' =$

(a) 0 (b) 1
(c) $x \wedge 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. $(x' \vee y')' = x \wedge y$ की द्वैतता (dual) है

(a) $(x' \vee y') = x \vee y$ (b) $(x' \wedge y')' = x \vee y$
(c) $(x' \wedge y')' = x \wedge y$ (d) इनमें से कोई नहीं

14. $x \vee (y \wedge x) = x$ की द्वैतता (dual) है

(a) $x \wedge (y \vee x) = x$ (b) $x \wedge (y \wedge x) = x$
(c) $(x \vee y) \wedge (x \vee x) = x$ (d) इनमें से कोई नहीं

माना B={$p, q, r, ...$} एवं माना दो द्विआधारी संक्रियायें '$\vee$' एवं '$\wedge$' या '+' एवं '.', द्वारा प्रदर्शित होती है, तब

15. (a) $p \vee p' = 0$ (b) $p \wedge p' = 1$
(c) $p \vee p' = 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. (a) $p \wedge p' = 1$ (b) $p \wedge p' = 0$
(c) $p \vee p' = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

17. (a) $a \vee a = 0$ (b) $a \vee a = a$
(c) $a \vee 1 = a$ (d) इनमें से कोई नहीं

18. (a) $a \wedge a = 1$ (b) $a \wedge a = a$
(c) $a \wedge a = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. (a) $a \vee 1 = a$ (b) $a \vee 1 = 1$
(c) $a \vee 1 = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

20. (a) $a \vee a' = 0$ (b) $a \vee a' = 1$
(c) $a \vee a' = a$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. (a) $a \wedge a' = 1$ (b) $a \wedge a' = 0$
(c) $a \wedge a' = a$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. (a) $0' = 0$ (b) $0' = 1$
(c) $1' = 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

23. (a) $(a \vee b)' = a' \vee b'$ (b) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$
(c) $(a \vee b)' \vee a \vee b$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. (a) $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ (b) $(a \wedge b)' = a' \wedge b'$
(c) $(a \wedge b)' = a \vee b$ (d) इनमें से कोई नहीं

25. (a) $a \vee (a \wedge b) = a$ (b) $a \vee (a \wedge b) = b$
(c) $a \vee (a \wedge b) = a \vee b$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. (a) $a \wedge (a \vee b) = b$ (b) $a \wedge (a \vee b) = a$
(c) $a \wedge (a \vee b) = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

27. (a) $x \vee x' x = x'$ (b) $x \vee x' x = x$
(c) $x \vee x' x = 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

28. (a) $x \vee x'y = x$ (b) $x \vee x'y = y$
(c) $x \vee x'y = x \vee y$ (d) इनमें से कोई नहीं

29. (a) $x \wedge (x \vee y) = x$ (b) $x \wedge (x \vee y) = y$
(c) $x \wedge (x \vee y) = 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. OR गेट बूलीय फलन है, परिभाषित होता है
(a) $f(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2;\ x_1, x_2 \in \{0,1\}$
(b) $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2;\ x_1, x_2 \in \{0,1\}$
(c) $f(x_1, x_2) = x_1;\ x_1, x_2 \in \{0,1\}$
(d) $f(x_1, x_2) = x_2;\ x_1, x_2 \in \{0,1\}$

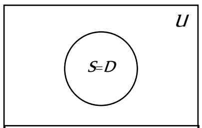
31. NOT गेट बूलीय फलन है, परिभाषित होता है
(a) $f(x) = x,\ x \in \{0,1\}$ (b) $f(x) = x',\ x \in \{0,1\}$
(c) $f(x) = x + x',\ x \in \{0,1\}$ (d) इनमें से कोई नहीं

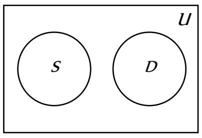
Critical Thinking

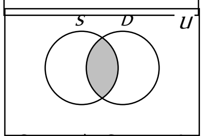
Objective Questions

1. कथन : "यदि हम जनसंख्या वृद्धि पर नियंत्रण रखें, हम संपन्न होंगे" की नकारात्मकता है
(a) यदि हम जनसंख्या वृद्धि पर नियंत्रण नहीं रखेगें, हम संपन्न होंगे
(b) यदि हम जनसंख्या वृद्धि पर नियंत्रण रखें, हम संपन्न नहीं होंगे
(c) हम जनसंख्या नियंत्रित करें किन्तु संपन्न नहीं होंगे
(d) हम जनसंख्या नियंत्रण करें किन्तु संपन्न होंगे

2. कौनसा वेन आरेख कथन
"सभी धूम्रपान करने वाले मदिरापान करते हैं एवं सभी मदिरापान करने वाले धूम्रपान करते हैं" की सत्यता दर्शाते हैं

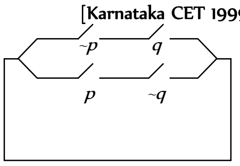
(a) 

(b) 

(c) 

(d) इनमें से कोई नहीं

3. निम्न परिपथ के लिए बूलीय बहुपद है [Karnataka CET 1999]



(a) $(\sim p \vee q) \vee (p \vee \sim q)$
(b) $(\sim p \wedge p) \wedge (q \wedge q)$
(c) $(\sim p \wedge \sim q) \wedge (q \wedge p)$
(d) $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

4. माना p कथन है : गणित रोचक है एवं माना q कथन है कि गणित कठिन है तब संकेत $p \wedge q$ का अर्थ [Karnataka CET 2001]
(a) गणित रोचक है प्रदर्शित करता है गणित कठिन है
(b) गणित रोचक है द्विप्रतिबंधित गणित कठिन है
(c) गणित रोचक है एवं गणित कठिन है
(d) गणित रोचक है या गणित कठिन है

5. AND गेट बूलीय फलन में परिभाषित है
(a) $f(x_1, x_2) = x_1 : x_2,\quad x_1, x_2 \in \{0,1\}$
(b) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2,\quad x_1, x_2 \in \{0,1\}$
(c) $f(x_1, x_2) = x_1,\quad x_1, x_2 \in \{0,1\}$
(d) $f(x_1, x_2) = x_2,\quad x_1, x_2 \in \{0,1\}$

Answers

गणितीय तर्कशास्त्र

1	d	2	c	3	d	4	c	5	a
6	a	7	a	8	b	9	b	10	c
11	d	12	a	13	a	14	d	15	b
16	a	17	b	18	b	19	a	20	c
21	b	22	a	23	a	24	b	25	c
26	a	27	b	28	a	29	a	30	c
31	a	32	b	33	a	34	a	35	a
36	a	37	c	38	c	39	b	40	c
41	c	42	c	43	a	44	b	45	b
46	d	47	c	48	b	49	d	50	b

बूलीय बीजगणित

1	b	2	b	3	c	4	c	5	b
6	b	7	b	8	b	9	b	10	b
11	b	12	a	13	b	14	a	15	c
16	b	17	b	18	b	19	b	20	b
21	b	22	b	23	b	24	a	25	a
26	b	27	b	28	c	29	a	30	b
31	b								

Critical Thinking Questions

1	c	2	a	3	d	4	c	5	a

Answers and Solutions

गणितीय तर्कशास्त्र

1. (d) "दो और दो जोड़ने पर चार होते है" कथन है।

2. (c) "सूर्य सितारा है" कथन है।

3. (d) "आह ! मैं फेल हो गया" कथन नहीं है।

4. (c) "तुम कहाँ जा रहे हो?" कथन नहीं है।

5. (a) "कृपया मेरा पक्ष लो" कथन नहीं है।

6. (a) "मुझे एक गिलास पानी दो" कथन नहीं है।

7. (a) "x परिमेय संख्या है" खुला कथन है।

8. (b) p : बारिश हुई, q : मैं स्कूल जाऊँगा।
अतः $p \Rightarrow q$
इसकी नकारात्मकता $\sim (p \Rightarrow q)$ अर्थात् $p \wedge \sim q$
अर्थात् बारिश हुई एवं मैं स्कूल नहीं जाऊँगा।

9. (b) माना p : पेरिस फ्रांस में है, q : लंदन इंग्लैंड में है
$\therefore p \wedge q$
इसकी नकारात्मकता $\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$
अर्थात् पेरिस फ्रांस में नहीं है या लंदन इंग्लैंड में नहीं है।

10. (c) माना $p : 2+3=5$, $q : 8<10$

कथन दिया गया है : $p \wedge q$

इसकी नकारात्मकता $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$

$\therefore 2+3 \neq 5$ or $8 \not< 10$.

11. (d) माना p : राम कक्षा X में है, q : रश्मी कक्षा XII में है

कथन दिया गया है $p \vee q$

इसकी नकारात्मकता $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$

अर्थात् राम कक्षा X में नहीं है एवं रश्मी कक्षा XII में नहीं है।

12. (a)

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

$\therefore (p \wedge q) \Rightarrow p$ पुनरिक्ति है।

13. (a)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

$\therefore (p \wedge q) \wedge (\sim(p \vee q))$ व्याघात है।

14. (d) चूँकि $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

$\sim(\sim p \Rightarrow q) = \sim p \wedge \sim q$

15. (b) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.

16. (a) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$.

17. (b) $(\sim(\sim p)) \wedge q = p \wedge q$.

18. (b) $\sim(p \vee (\sim q)) \equiv \sim p \wedge \sim(\sim q) \equiv (\sim p) \wedge q$.

19. (a) $\sim((\sim p) \wedge q) \equiv \sim(\sim p) \vee \sim q \equiv p \vee (\sim q)$.

20. (c) $\sim(p \Leftrightarrow q) = (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$.

21. (b) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$.

22. (a) $\sim p \vee q$ अर्थात् $F \vee F = F$, $\sim r$ मतलब $F (\sim p \vee q) \wedge \sim r$ यानि कि F

$\because [(\sim p \vee q) \wedge \sim r] \Rightarrow p$ यानि कि T

[$\because p \Rightarrow q$ में हमारे पास है FTT]

23. (a) दिये गये परिणाम का अर्थ है $p \wedge \sim r$ सत्य है, $q \vee r$ असत्य है।

24. (b) $(p \wedge q) \wedge (q \wedge r)$ सत्य है अर्थात् $p \wedge q$, $q \wedge r$ दोनों सत्य है $\Rightarrow p, q, r$ सभी सत्य है।

25. (c)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	T	T	F

अंतिम स्तंभ दर्शाता है कि परिणाम ना तो पुनरिक्ति है और ना ही व्याघात (Contradiction) है।

26. (a)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \vee q$	$(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$
T	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	F
F	F	T	T	F	T	F

स्पष्टतः $(p \wedge \sim q) \wedge (p \vee \sim q)$ व्याघात है।

27. (b) यह सही है।

$\because \sqrt{3}$ परिमेय नहीं है किन्तु वास्तविक है।

28. (a) सही परिणाम है $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (r \wedge s)$

अतः $\sim(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s)$.

29. (a) $\sim[p \vee (\sim p \vee q)] \equiv \sim p \wedge \sim(\sim p \vee q)$

$\equiv \sim p \wedge (\sim(\sim p) \wedge \sim q)$

$\equiv \sim p \wedge (p \wedge \sim q)$.

30. (c) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

$\therefore \sim(\sim p \Rightarrow \sim q) \equiv \sim p \wedge \sim(\sim q) \equiv \sim p \wedge q$

अतः $\sim(\sim p \Rightarrow \sim q) \equiv \sim p \wedge q$.

31. (a) $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \vee q))$

$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

$\equiv \sim p \wedge (\sim q \vee q) \equiv \sim p$.

32. (b) $p \Rightarrow q$ का प्रतिलोम $\sim p \Rightarrow \sim q$ है

$\therefore (p \wedge \sim q) \Rightarrow r$ का प्रतिलोम है

$\sim(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim r$ अर्थात् $(\sim p \vee q) \Rightarrow \sim r$.

33. (a) विद्युत प्रवाहित होने के लिए p, q, r को बंद होना पड़ेगा।

34. (a) सभी विद्यार्थी मेहनती है का अर्थ है $S \subseteq H$.

35. (a) "कोई बच्चा शरारती नहीं है" का अर्थ है $C \cap N = \phi$ अर्थात् C एवं N में कोई अवयव समान नहीं है।

36. (a) कोई पुलिसवाला चोर नहीं है का अर्थ है $P \cap T = \phi$ अर्थात् P एवं T में कोई अवयव समान नहीं है।

37. (c) कुछ युवा स्वप्निल नहीं है का अर्थ है युवा जो कि स्वप्निल नहीं है।

38. (c) सभी मातायें औरत हैं।

$M \subseteq W$.

39. (b) $\sim(q \vee \sim(p \wedge r)) = \sim q \wedge (\sim(\sim(p \wedge r)) = \sim q \wedge (p \wedge r)$.

40. (c)

p	$\sim p$	$p \Rightarrow \sim p$	$\sim p \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow p)$
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F

स्पष्टतः $(p \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow p)$ व्याघात है।

41. (c) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ $\therefore \sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$.

42. (c) $p \Rightarrow q$ का प्रतिपरिवर्तित $\sim q \Rightarrow \sim p$ है।

$\therefore (p \vee q) \Rightarrow r$ का प्रतिपरिवर्तित

$\sim r \Rightarrow \sim(p \vee q)$ अर्थात् $\sim r \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ है।

43. (a) $p \Rightarrow q$ असत्य है केवल तब जब p सत्य एवं q असत्य है।

$\therefore$ $p \Rightarrow q$ असत्य है जब p सत्य एवं $q \vee r$ असत्य है एवं $q \vee r$ असत्य है जब q एवं r दोनों असत्य है।

अतः p, q एवं r के सत्यता मान क्रमशः T, F, F है।

44. (b) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ अर्थात् $p \Leftrightarrow q$

45. (b) $p \Rightarrow q$ तार्किक समतुल्य है $\sim q \Rightarrow \sim p$

$\therefore$ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ पुनरिक्ति है किन्तु व्याघात नहीं।

46. (d) $p \Rightarrow (\sim p \vee q)$ असत्य है, यानि कि p सत्य एवं $\sim p \vee q$ असत्य है

$\Rightarrow p$ सत्य है एवं $\sim p$ एवं q दोनों असत्य है।

$\Rightarrow p$ सत्य है एवं q असत्य है।

47. (c) गणित रोचक है तार्किक वाक्य नहीं है। यह संभवतः कुछ लोगों के लिए रोचक हो सकता है एवं कुछ लोगों के लिए रोचक नहीं भी हो सकता है।

$\therefore$ यह कथन नहीं है।

48. (b) $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \wedge q) = (p \wedge \sim p) \wedge (\sim q \wedge q) = f \wedge f = f$.

(साहचर्य एवं क्रमविनिमेय नियम के प्रयोग से)

$\therefore$ $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \wedge q)$ व्याघात है।

49. (d) $\sim p \wedge q = \sim (q \rightarrow p)$.

50. (b) p : A अभाज्य संख्या है।

Q : यह विषम है।

$p \Rightarrow q$

$p \Rightarrow q$ की नकारात्मकता $\sim p \Rightarrow \sim q$ है

अर्थात् यदि संख्या अभाज्य नहीं है तो यह विषम नहीं होगी।

बूलीय बीजगणित

1. (b) यह स्पष्ट है।

2. (b) यह स्पष्ट है।

3. (c) यह स्पष्ट है।

4. (c) यह स्पष्ट है।

5. (b) यह स्पष्ट है।

6. (b) यह स्पष्ट है।

7. (b) यह स्पष्ट है।

8. (b) यह स्पष्ट है।

9. (b) यह स्पष्ट है।

10. (b) यह स्पष्ट है।

11. (b) यह स्पष्ट है।

12. (a) यह स्पष्ट है।

13. (b) '$\vee$' को '$\wedge$' से एवं '$\wedge$' को '$\vee$' से परिवर्तित करें।

14. (a) '$\vee$' को '$\wedge$' से एवं '$\wedge$' को '$\vee$' से परिवर्तित करें।

15. (c) $p \vee p' = 1$.

16. (b) $p \wedge p' = 0$.

17. (b) $a \vee a = a$.

18. (b) $a \wedge a = a$.

19. (b) $a \vee 1 = 1$.

20. (b) $a \vee a' = 1$.

21. (b) $a \wedge a' = 0$.

22. (b) $0' = 1$.

23. (b) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$.

24. (a) $(a \wedge b)' = a' \vee b'$.

25. (a) $a \vee (a \wedge b) = a \wedge 1 \vee a \wedge b = a \wedge (1 \vee b) = a \wedge 1 = a$.

26. (b) $a \wedge (a \vee b) = a \wedge a \vee a \wedge b$.

$= a \wedge 1 \vee a \wedge b = a \wedge (1 \vee b) = a \wedge 1 = a$.

27. (b) $x \vee x' \wedge x = (x \vee x') \wedge (x \vee x) = 1 \wedge (x \vee x) = 1 \wedge x = x$

28. (c) $x \vee x' \wedge y = (x \vee x') \wedge (x \vee y) = 1 \wedge (x \vee y) = x \vee y$

29. (a) $x \wedge (x \vee y) = x \wedge x \vee x \wedge y = x \vee x \wedge y$

$= x \wedge 1 \vee x \wedge y = x \wedge (1 \vee y) = x \wedge 1 = x$.

30. (b) यह परिभाषा है।

31. (b) यह परिभाषा है।

Critical Thinking Questions

1. (c) p : हम जनसंख्या नियंत्रित कर सकते हैं, q : हम संपन्न होंगे

$\therefore$ $p \Rightarrow q$

इसकी नकारात्मकता है $\sim (p \Rightarrow q)$ अर्थात् $p \wedge \sim q$

अर्थात् हम जनसंख्या नियंत्रण करें किन्तु हम संपन्न नहीं होंगे।

2. (a) सभी धूम्रपान करने वाले मदिरापान करते हैं एवं सभी मदिरापान करने वाले धूम्रपान करते हैं।

$\therefore$ $S \subseteq D$ एवं $D \subseteq S$

इसका अर्थ है $S = D$

3. (d) दिये गये परिपथ के लिए बूलीय बहुपद

$(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$ है।

4. (c) $p \wedge q$ का अर्थ गणित रोचक है एवं गणित कठिन है।

5. (a) यह परिभाषा है।

गणितीय तर्कशास्त्र एवं बूलीय बीजगणित

SET Self Evaluation Test -34

1. संयुक्त कथन : यदि परीक्षा कठिन है तो यदि मैं कड़ी मेहनत करूँ तो उत्तीर्ण हो जाऊँगा, का निषेध है
   (a) परीक्षा कठिन है एवं मैं कड़ी मेहनत करूँगा एवं मैं उत्तीर्ण हो जाऊँगा
   (b) परीक्षा कठिन है एवं मैं कड़ी मेहनत करूँगा किन्तु उत्तीर्ण नहीं हो पाऊँगा
   (c) परीक्षा कठिन नहीं है एवं मैं कड़ी मेहनत करूँगा एवं मैं उत्तीर्ण हो जाऊँगा
   (d) इनमें से कोई नहीं
2. यदि p एवं q सामान्य कथन है, तब $p \Rightarrow q$ असत्य है जब
   (a) p सत्य एवं q सत्य है (b) p असत्य है एवं q सत्य है
   (c) p सत्य है एवं q असत्य है (d) p एवं q दोनों असत्य है
3. यदि p एवं q सामान्य कथन है, तब $p \Leftrightarrow \sim q$ सत्य है जब
   (a) p सत्य है एवं q सत्य है (b) दोनों p एवं q असत्य है
   (c) p असत्य है एवं q सत्य है (d) इनमें से कोई नहीं
4. $p \Rightarrow \sim (p \wedge \sim q)$ कथन है
   (a) व्याघात (b) पुनरिक्ति
   (c) या तो (a) नहीं तो (b) (d) ना तो (a) और ना ही (b)
5. $(x \vee y) \wedge (x \vee 1) = x \vee (x \wedge y) \vee y$ का युग्म है
   (a) $(x \wedge y) \vee (x \wedge 0) = x \wedge (x \vee y) \wedge y$
   (b) $(x \vee y) \vee (x \wedge 1) = x \wedge (x \vee y) \wedge y$
   (c) $(x \wedge y) \wedge (x \wedge 0) = x \wedge (x \vee y) \wedge y$
   (d) इनमें से कोई नहीं

AS Answers and Solutions

(SET - 34)

1. (b) p : परीक्षा कठिन है।
   q : मैं उत्तीर्ण हो जाऊँगा
   r : मैं कड़ी मेहनत करूँगा
   दिया गया परिणाम है : $p \Rightarrow (r \Rightarrow q)$
   अब $\sim (r \Rightarrow q) = r \wedge \sim q$
   $\sim (p \Rightarrow (r \Rightarrow q)) \equiv p \wedge (r \wedge \sim q)$
   परीक्षा कठिन है एवं कड़ी मेहनत भी करूँगा किन्तु उत्तीर्ण नहीं हो पाऊँगा।
2. (c) $p \Rightarrow q$ असत्य है, जब p सत्य एवं q असत्य है
   चूँकि q, r असत्य है $\therefore q \vee r$ असत्य है
   चूँकि r असत्य है $\therefore \sim r$ सत्य है
   चूँकि $p \wedge \sim r$ सत्य है $\therefore p$ सत्य है।
3. (c) $p \Leftrightarrow \sim q$ सत्य है यदि और सिर्फ यदि $p, \sim q$ दोनों ही सत्य है अथवा असत्य
   [$\because q$ सत्य $\Rightarrow \sim q$ असत्य $\therefore p, \sim q$ दोनों ही असत्य है]
4. (d)

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$p \Rightarrow \sim (p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T

परिणाम ना तो निरर्थक पुनरिक्ति है और न ही व्याघात है।

5. (a) '$\vee$' का '$\wedge$' से एवं '$\wedge$' को '$\vee$' से परिवर्तित करें।

* * *