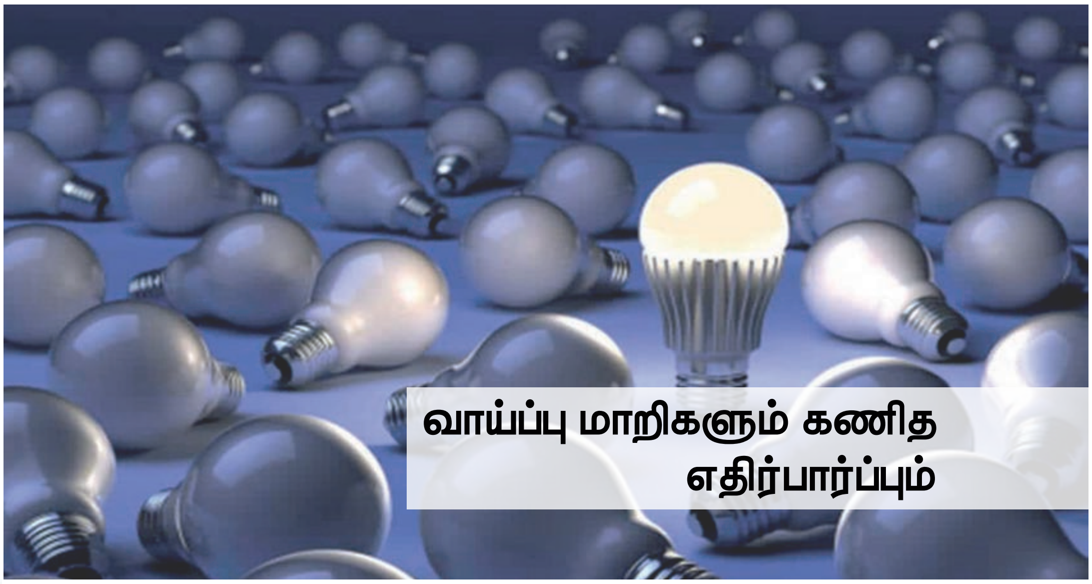
அத்தியாயம்

9



வாய்ப்பு மாறிகளும் கணித எதிர்பார்ப்பும்

சைமன் டெனிஸ் பாய்சான்
(21 சூன், 1781 – 25 ஏப்ரல், 1840)

சைமன் டெனிஸ் பாய்சான் என்பவர் பிரான்ஸ் நாட்டைச் சார்ந்த கணிதவியலார். வரையறுத்த தொகையிடல், மின்காந்தவியல், நிகழ்தகவு ஆகியவற்றில் அவரது பங்கு குறிப்பிடத்தக்கது. பாய்சானின் மிகப் பெரிய ஆய்வு நிகழ்தகவு பற்றியதாகும். பாய்சான் பரவல் மிக முக்கிய கண்டுபிடிப்பாகும். அவரது பங்களிப்பான பெரும் எண்களின் பரவல் விதி ஈருறுப்பு பரவலை தோராயமாக்குவதில் மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகும்.

பாய்சான் பரவல் இப்போது ரேடியோ செயல்கள், போக்குவரத்து, காலம் அல்லது வெளிகளில் இடம்பெறும் நிகழ்ச்சிகளில் அமையும் ராண்டம் நிகழ்வுகள் போன்றவற்றிற்கு அடிப்படையாக விளங்குகிறது.

'பிரபஞ்சத்தில் உள்ள எல்லாமே வாய்ப்புகளை எதிர்நோக்கியே காத்திருக்கிறது'.

- டெமாக்ரிடஸ்

நோக்கங்கள்

- வாய்ப்பு மாறியின் முக்கியத்துவத்தைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- வாய்ப்பு மாறியின் வகைகளை அறிந்து கொள்ளுதல்.
- நிகழ்தகவு சார்புகளின் வகைகளைத் தெரிந்து கொள்ளுதல்.
- குவிவு பரவல் சார்பின் பண்புகளை அறிதல்.
- எதிர்பார்ப்பின் கருத்தினைத் தெரிந்து கொள்ளுதல்.
- எதிர்பார்ப்பின் தேற்றங்களை ஆய்வு செய்தல்.
- விலக்கப்பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு மற்றும் சிறப்பியல்புச் சார்பினை வேறுபடுத்துதல்.

P84U5

Ch9_11th Stats TM.indd 258 07/12/2021 13:19:05

அறிமுகம்

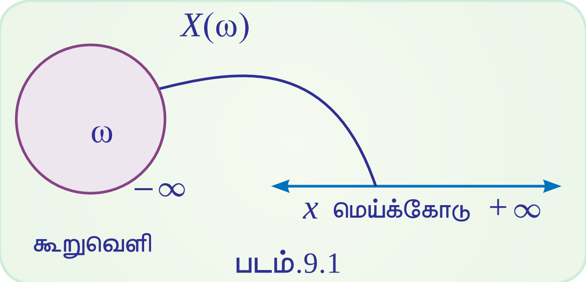
நாம் சென்ற பாடப்பகுதியில் நிகழ்தகவு பற்றி படித்துள்ளோம். நிகழ்தகவு கூறுகளின் தொடர்ச்சியாக வாய்ப்பு மாறி மற்றும் நிகழ்தகவு பரவல்கள் ஆகிய இரு வேறு கருத்துக்களில் கவனம் செலுத்த வேண்டியுள்ளது. நிகழ்தகவு பரவலின் வரையறையைப் பற்றி படிப்பதற்குமுன் வாய்ப்பு மாறியைப்பற்றி தெரிந்து கொள்வது மிகவும் முக்கியம் மற்றும் அவசியமாகிறது. பொதுவாக ஒரு சோதனையானது சில குறிப்பிட்ட நிபந்தனையின் அடிப்படையில் திரும்ப திரும்ப நடத்தப்பெற்றால் மாறிகளுக்குக் கிடைக்கப் பெறும் மதிப்புகள் சமமாக அமையும். எனினும் சில சமயங்களில் ஒரே மாதிரியான சோதனையில் வெவ்வேறு விளைவுகள் கிடைக்கப்பெறுகின்றன. இதன் விளைவாக மாறிகள் பெறும் மதிப்புகள் தீர்மானிக்க இயலாத நிலையில் சோதனை, வாய்ப்பு சோதனையாகிறது.

நாம் வாய்ப்பு சோதனை, கூறுபுள்ளி, கூறுவெளி மற்றும் நிகழ்ச்சி ஆகியவற்றை முன்பே படித்துள்ளோம். வாய்ப்பு சோதனையில் கூறுவெளியில் உள்ள மதிப்புகளைவிட அவற்றுடன் தொடர்புடைய எண்களுக்கு (x) முக்கியத்துவம் தரப்படுகிறது. இம்மதிப்புகள் ஒவ்வொரு சோதனையின் விளைவுகளுக்கு ஏற்ப மாறுபடும். எனவே இது மாறி எனப்படும். இம்மாதிரியான தருணங்களில் வாய்ப்பு மாறி என்ற தனித்துவமிக்க மாறி தேவையாகிறது. வாய்ப்பு சோதனையின் விளைவுகளுடன் தொடர்புடைய மாறி வாய்ப்பு மாறி எனப்படும்.

9.1 வாய்ப்பு மாறி

வரையறை

S என்பது வாய்ப்பு சோதனையின் கூறுவெளி வாய்ப்பு சோதனையின் விளைவுகள் மெய் எண்களோடு தொடர்புகொள்ளுமாறு அமைக்கப் பெறுவதை வாய்ப்பு மாறி X என்கிறோம். அதாவது ஒரு மாறியில் பெறப்படும் எண்கள் ஒரு வாய்ப்பு சோதனையின் விளைவுகளால் பெறப்பட்ட எண்களாக இருந்தால் அது வாய்ப்பு மாறி எனப்படும். ஒரு வாய்ப்பு சோதனையில் கூறுவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு விளைவிற்கும் (ω) ஒரே ஒரு மெய்யெண் x (வாய்ப்பு மாறி பெறும் மதிப்பு) உடன் தொடர்புடையது. அதாவது $X(\omega) = x$



படம்.9.1

பொதுவாக வாய்ப்பு மாறிகள் $X, Y, Z \ldots$ என்ற பெரிய ஆங்கில எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும். அவைபெறும் மதிப்புகள் $x,\ y,\ q$ என்னும் ஆங்கில சிறிய எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும். எடுத்துக்காட்டாக ஓ ஒரு வாய்ப்பு மாறி எனில் பெறும் மதிப்புகள் $x_1, x_2 \ldots$ என்று குறிக்கப்படுகின்றன

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) வாய்ப்பு சோதனை: பகடை உருட்டுதல்

கூறுவெளி $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

வாய்ப்பு மாறி X பகடையில் தோன்றும் எண்கள்

Ch9_11th Stats TM.indd 259 07/12/2021 13:19:05

வரையறுக்கப்பட்ட விதியின்படி

$X(1) = 1,\ X(2) = 2, X(3) = 3, X(4)=4,\ X(5)=5$ மற்றும் $X(6)=6$

எனவே, வாய்ப்பு மாறி X ஆனது 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகிய மதிப்புகளைப் பெறுகிறது.

வாய்ப்பு மாறி X ஐ உணர்ந்து கொள்ள இம்மதிப்புகள் உதவுகின்றன.

(ii) வாய்ப்பு சோதனை : ஒரே நேரத்தில் இரு நாணயங்கள் சுண்டப்படுதல்

கூறுவெளி : $S=\{HH, HT, TH, TT\}$

வாய்ப்பு மாறி X வரையறை : X தலைகளின் எண்ணிக்கை

கூறுவெளி ω	HH	HT	TH	TT
X (ω)	2	1	1	0

இங்கு வாய்ப்பு மாறி X இன் மதிப்புகள் 0, 1, 2 .

(iii) சோதனை : ஒரே நேரத்தில் இரு பகடைகள் உருட்டப்படுதலின்

கூறுவெளி : 36 புள்ளிகளைக் கொண்டது

கூறுவெளி : $\{(1, 1),(1, 2),(1, 3),\ldots(6, 6)\}$

வரையறுக்கப்பட்ட விதி : (விதி ஒதுக்கீடு) X – பகடையில் தோன்றும் எண்களின் கூடுதல் எனில் $X_{ij} = i + j$

i - முதல் பகடையில் தோன்றும் எண், j – இரண்டாம் பகடையில் தோன்றும் எண் எனில், வாய்ப்பு மாதிரி பெறும் மதிப்புகள் 2, 3, 4 . .... 12.

X ன் வீச்சு $\{2, 3, 4\ldots\ldots 12\}$

9.2 தனித்த வாய்ப்பு மாறி மற்றும் தொடர் வாய்ப்பு மாறி

வாய்ப்பு மாறிகள் அவை பெறும் மதிப்பினைக் கொண்டு தனித்த வாய்ப்பு மாறி அல்லது தொடர் வாய்ப்பு மாறி என இரு வகையாகப் பிரிக்கப்படுகிறது.

9.2.1 தனித்த வாய்ப்பு மாறி

வாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள் முடிவுறுவதாகவோ அல்லது எண்ணிடத்தக்க அளவுள்ள தாகவோ இருப்பின் தனித்த வாய்ப்பு மாறி எனப்படும்.

Ch9_11th Stats TM.indd 260 07/12/2021 13:19:05

(iv) நாணயம் சுண்டுதல் என்ற சோதனையில் வரையறுக்கப்பட்ட விதி

If X (தலை) $=1$, X (பூ) $= 0$

X பெறும் மதிப்புகள் 0 அல்லது 1 இது தனித்த வாய்ப்பு மாறியாகும்

> **குறிப்பு**
>
> எடுத்துக்காட்டுகள் 9.1, 9.2, மற்றும் 9.3 முடிவுறு எண்ணை வீச்சாகப் பெறும் தனித்த வாய்ப்பு மாறிகளாகும்.

(v) X என்பது தலை விழும் வரை நாணயம் சுண்டுதலின் எண்ணிக்கை எனில் X ன் மதிப்புகள் 1, 2, 3, .. இங்கு வாய்ப்பு மாறி எண்ணிடத்தக்க, முடிவுறா மதிப்பெண்களைப் பெறும்

9.2.2 தொடர் வாய்ப்பு மாறி:

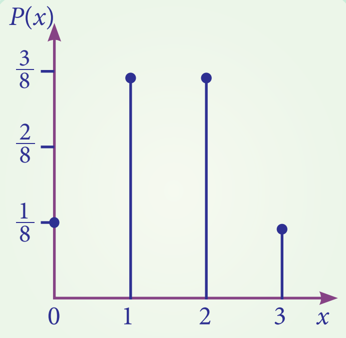
X என்ற வாய்ப்பு மாறி குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் சாத்தியமான அனைத்து மதிப்புகளையோ பெற்றிருக்கும் எனில் அம்மாறி ஒரு தொடர் வாய்ப்பு மாறி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) ஒரு பள்ளியில் பயிலும் மாணவர்களின் உயரம் X என்க. அவர்களின் உயரம் 120 செ.மீக்கும் 180 செ.மீக்கும் இடையே உள்ளது. $X = \{x/120$ செ.மீ $< x < 180$ செ.மீ $\}$ ஒரு தொடர் வாய்ப்பு மாறி.

(ii) மின்விளக்கு தொடர்ச்சியாக உழைப்பதற்கான அதிகபட்ச நேரம் 1500 மணிகள் எனில் அதன் தொடர் வாய்ப்பு மாறியை $X = \{x/0 \le x \le 1500\}$ என எழுதலாம்

9.3 நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு மற்றும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு



படம்.9.2

நிகழ்தகவு சார்பு என்பது வாய்ப்பு மாறியுடன் தொடர்புடையது. இச்சார்பு வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை அறிய பயன்படுகிறது. தனித்த மாறியின் நிகழ்தகவுச் சார்பு நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு என்றும் தொடர் வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவுச் சார்பு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

9.3.1 நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு.

X ஒரு தனித்த வாய்ப்பு மாறி ஏற்கும் மதிப்புகள் $x_1, x_2 \ldots. x_n$ என்றும் இம்மதிப்புகளின் நிகழ்தகவுகள் $p(x_1), p(x_2) \ldots.. p(x_n)$ எனில்

(i) $p(x_i) \ge 0, \quad \forall$ i (குறை எண் அல்லாத) மற்றும் (ii) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$ (எல்லா நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் 1 ஆகும்)

Ch9_11th Stats TM.indd 261 07/12/2021 13:19:06

இச்சார்பு $p(x)$ தனித்தமாதிரி X ன் நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு என அழைக்கப்படுகிறது

இவ்விணை $\{x_i, p(x_i); i = 1, 2, 3, ... \}$ X இன் நிகழதகவு திண்மைச் சார்பு.

எடுத்துக்காட்டு 9.1

ஒரு நாணயம் இருமுறை சுண்டப்படுகிறது. X – தலை விழுதலின் எண்ணிக்கை எனில் X இன் நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு:

நாணயம் இருமுறை சுண்டப்படுவதால் கூறுவெளி $S=\{HH, HT, TH, TT\}$

X தலைகளின் எண்ணிக்கை $X = 0,1,2$

$P(X = 0) = P$ (தலை விழாமல் இருக்க) $= \frac{1}{4}$

$P(X = 1) = P$ (ஒரு தலை விழுதல்) $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(X = 2) = P$ (இரண்டு தலைகள் விழுதல்) $= \frac{1}{4}$

X இன் நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு

X	0	1	2
$p(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

> **குறிப்பு**
>
> நிகழ்தகவுகள் குறையெண்கள் அல்ல மேலும் கூடுதல் 1 ஆகும்

எடுத்துக்காட்டு 9.2

எடுத்துக்காட்டு 9.3 இல் நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு பின்வருமாறு

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

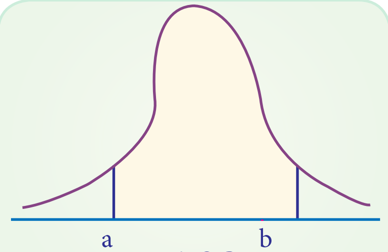
இங்கு நிகழ்தகவுகள் குறையெண்கள் அல்ல மற்றும் எல்லா மதிப்புகளின் கூடுதல் 1 என்பதை நிறைவு செய்வதால் இது நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு ஆகும்

9.3.2 நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

X என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆக இருக்க வேண்டுமாயின்

(i) $f(x) \geq 0, \forall x$ (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

குறிப்பு:



படம்.9.3

(i) மேற்கண்ட 2 நிபந்தனைகளையும் நிறைவு செய்யும் சார்பு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகும்

(ii) X என்ற வாய்ப்பு மாறி a மற்றும் b இடைவெளியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு
$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

(iii) தனித்த வாய்ப்பு மாறியில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் அதாவது $P(X = x)$ என்பது பூச்சியமாக இருக்க வேண்டியதில்லை. ஆனால் தொடர் வாய்ப்பு மாறியில் ஒரு புள்ளியில் காணும் நிகழ்தகவு எப்பொழுதும் பூச்சியமாகும்,
$P(X - a) = \int_a^a f(x)dx = 0$

(iv) $P(a < X < b) = p(a \le X < b) = p(a < X \le b) = p(a \le X \le b)$

எடுத்துக்காட்டு 9.3

ஒரு தொடர் வாய்ப்பு மாறி X என்பது $f(x) = \begin{cases} Ax^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$ என்ற விதிக்குட்பட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் A இன் மதிப்பு காண்

தீர்வு:

$f(x)$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_0^1 Ax^3 dx = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \quad A = 4$$

குறிப்பு

தொடர் வாய்ப்பு மாறியில் மொத்த நிகழ்தகவு = 1 என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் பரவி இருப்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.4

$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{9}, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{வேறிடங்களில்} \end{cases}$ என்பது ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பா என சரிபார்க்க.

தீர்வு :

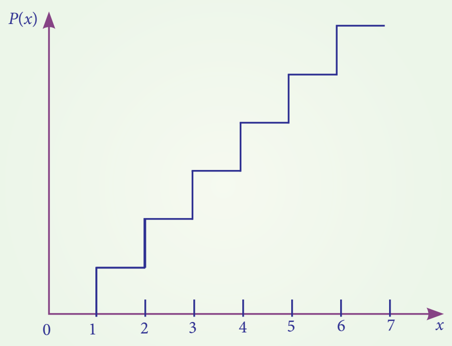
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^3 \frac{2x}{9} dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{9}\left[\frac{9}{2}\right] = 1$$

இங்கு மொத்த நிகழ்தகவு 1. எனவே $f(x)$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகும்.

Ch9_11th Stats TM.indd 263 07/12/2021 13:19:11

9.4 பரவல் சார்பு மற்றும் பண்புகள்



படம்.9.4

நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் குறிக்கும். ஆனால், இத்தகைய சூழ்நிலையில் நாம் ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளிக்குள் நிகழ்தகவு எடுக்கும் மதிப்புகளைக் காணவிழைகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக ஓர் ஆய்வாளார் நிகழ்தகவு குறிப்பிட்ட இடைவெளிக்குள் எவ்வாறு பரவியிருக்கிறது என்பதைக் காண பரவல்சார்பு அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

$[P(X < x)$ (அல்லது) $P(X > x)$ (அல்லது) $P(a < x < b)]$.

9.4.1 தனித்த பரவல் சார்பு

வரையறை : ஒரு தனித்த வாய்ப்பு மாறி X குவிவு பரவல் சார்பு $F(x) = P(X \leq x), \forall x$ பொதுவாக பரவல் சார்பு என அழைக்கப்படும்.

9.4.2 பண்புகள்:

(i) $0 \leq F(x) \leq 1, \ \forall x$, (குறைவற்ற சார்பு)

(ii) $F(x) \leq F(y), \ \forall x < y$, (ஏறும் சார்பு)

(iii) $\lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x), \ \forall x$,
($F(x)$ ஓர் வலப்பக்கத் தொடர்)

(iv) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

(v) $F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

குறிப்பு

X தனித்த வாய்ப்பு மாறி எனில்

(i) $F(x) = \sum_{r=-\infty}^{x} P(x = r)$

(ii) $P(X = x) = F(x) - F(x-1)$

9.4.3 தொடர் பரவல் சார்பு

(i) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

(ii) $f(x) = F'(x)$

(iii) $P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$

$= P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$

$= \int_{a}^{b} f(x)dx$

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு, பரவல் சார்பினை, வகைப்படுத்தினால் கிடைக்கும். இது போன்றே கொடுக்கப்பட்ட வீச்சினில் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பினைத் தொகையிட்டால் நிகழ்தகவு பரவல் சார்பு கிடைக்கும்.

பண்புகள்

(i) $F(x)$ ஓர் (குறைவற்ற) ஏறும் சார்பு

Ch9_11th Stats TM.indd 264 07/12/2021 13:19:14

(ii) $0<F(x)<1 \qquad -\infty < x < \infty$

(iii) $F(-\infty) = 0,$

(iv) $F(\infty) = 1$

(v) $\underline{a}$ மற்றும் bஇன் மெய் மதிப்புகளுக்கு $a < b,\ p(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

(vi) $f(x) = \frac{d}{dx}(F(x))$ அதாவது $f(x) = F'(x)$

எடுத்துக்காட்டு 9.5

ஒரு வாய்ப்பு மாறி பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலை பெற்றிருக்கிறது.

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	a	$3a$	$5a$	$7a$	$9a$	$11a$	$13a$

(i) 'a' இன் மதிப்பு காண்

(ii) குவிவு பரவல் சார்பு காண்க

(iii) பின்வருவனவற்றைக் காண்க : (a) $P(X \geq 4)$ (b) $P(X < 5)$ (c) $P(3 \le X \le 6)$

(iv) $P(X = 5)$ $F(x)$ பயன்படுத்திக் காணவும்.

தீர்வு:

(i) $P(X = x)$ என்பது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு, எனவே $\sum P(X=x) = 1$

i.e., $P(X = 0) + P(X =1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 1$

$$a + 3a + 5a + 7a + 9a + 11a + 13a = 1$$

$$49a = 1 => a = \frac{1}{49}$$

(ii) குவிவு பரவல் சார்பு

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	$\frac{1}{49}$	$\frac{3}{49}$	$\frac{5}{49}$	$\frac{7}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{11}{49}$	$\frac{13}{49}$
$F(x)$	$\frac{1}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{16}{49}$	$\frac{25}{49}$	$\frac{36}{49}$	$\frac{49}{49} = 1$

(iii) (a) $P(X \ge 4)$

$$= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$= 9a + 11a + 13a$$

Ch9_11th Stats TM.indd 265 07/12/2021 13:19:16

$$= 33a$$

$$= 33 \times \frac{1}{49} = \frac{33}{49}$$

(b) $P(X<5) = 1 - P(X \geq 5) = 1 - [P(X = 5) + P(X = 6)]$

$$= 1 - [11a + 13a]$$

$$= 1 - 24a$$

$$= 1 - \frac{24}{49}$$

$$= \frac{25}{49}$$

(c) $P(3 \leq x \leq 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$

$$= 7a + 9a + 11a + 13a$$

$$= 40$$

$$a = \frac{40}{49}$$

(iv) $P(X=5) = F(5) - F(5-1)$

$$= \frac{36}{49} - \frac{25}{49}$$

$$= \frac{11}{49}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.6

தொடர் வாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}; & 0 < x < 2 \\ 0 \; ; & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

(i) X இன் குவிவு சார்பு காண்க (ii) $P\left(\frac{1}{2} < X \leq 1\right)$ இன் மதிப்பு காண்க

(iii) $P(X=1.5)$ ஐ கணக்கிடுக

தீர்வு:

(i)குவிவு பரவல் சார்பு $F(x) = P(X \leq x)$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{x} \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{if } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{if } x \geq 2 \end{cases}$$

குறிப்பு

தொடர் வாய்ப்பு மாறியில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் நிகழ்தகவு 0

Ch9_11th Stats TM.indd 266 07/12/2021 13:19:19

(ii) $P\left(\frac{1}{2} < X \le 1\right) = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

நிகழ்தகவு மதிப்பு $f(x)$ ஐ பயன்படுத்தியும் காணலாம்.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{3}{16}$$

(iii) $P\ (X = 1.5) = 0$

9.5 இணைந்த மற்றும் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு

நடைமுறை வாழ்வில் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வாய்ப்பு மாறிகளை ஒரே நேரத்தில் காண இயலும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு தனி நபரின் இரத்த அழுத்தம் மற்றும் கொழுப்பு ஒரே நேரத்தில் கணக்கிடப்படுகிறது. இந்த நிலையில் இருமாறி வாய்ப்பு மாறிகள் தேவைப்படுகின்றன, இது(X, Y) எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது. இதில் X மற்றும் Y என்பன தனித்த வாய்ப்பு மாறிகளாகும்

9.5.1 வரையறை (இணைந்த நிகழ்தகவு திண்மைச்சார்பு)

(X, Y) என்பது ஒரு தனித்த இருமாறி வாய்ப்பு மாறியாகும். $p\ (x, y)$ ஒரு இணைந்த நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு எனில் கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்யும்.

$$p\ (x, y) \ge 0 \quad \forall\ x, y$$

$$\sum_{x,y} p(x,y) = 1$$

குறிப்பு

$p\ (x, y) = p\ (X = x,\ Y = y)$

வரையறை:

இறுதிநிலை நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு $p\ (x, y)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஓர் இணைந்த நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு எனில் $\sum_y p(x,y)$ என்பது X இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு எனப்படும். இதேபோல் $p\ (y) = \sum_x p(x,y)$ என்பது Y இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு எனப்படும்.

ஒரு பையில் 1 முதல் 10 வரையுள்ள எண்கள் கொண்ட சீட்டுகள் உள்ளன. ஒன்றன்பின் ஒன்றாக திரும்ப வைக்கும் முறையில் இரண்டு சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றன.

இங்கு வாய்ப்புமாறி X என்பது முதல் சீட்டில் தோன்றும் எண்ணையும் வாய்ப்பு மாறி Y என்பது இரண்டாவது சீட்டில் தோன்றும் எண்ணையும் குறிக்கும்

9.5.2 இணைந்த மற்றும் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

9.5.1 இல் இணைந்த நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு வரையறைப்படியே இணைந்த நிகழ்தகவு

Ch9_11th Stats TM.indd 267 07/12/2021 13:19:21

அடர்த்திச் சார்பு வரையறுக்கப்படும்.

வரையறை:

(X, Y) என்பது ஒரு தொடர் இருமாறி வாய்ப்பு மாறியாகும். $f(x, y)$ சார்பு இருமாறி நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் கீழ்க்காணும் நிபந்தனை நிறைவு செய்யும்

(i) $f(x, y) \geq 0 \quad \forall\ x, y$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1$

X இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy$$

Y இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx$$

எடுத்துக்காட்டு 9.7

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y) & , \quad 0 < x, y \leq 2 \\ 0 & , \quad otherwise \end{cases}$$ ஓர் இருமாறி நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு என நிறுவுக.

தீர்வு:

f ஓர் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2\int_0^2 (x+y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int_0^2\int_0^2 x dx\,dy + \int_0^2\int_0^2 y dx\,dy\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left\{\int_0^2\left[\int_0^2 x dx\right]dy + \int_0^2\left[\int_0^2 y dy\right]dx\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int_0^2 2dy + \int_0^2 2dx\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[(2y)_0^2 + (2x)_0^2\right]$$

$$= \frac{1}{8}[(4-0)+(4-0)]$$

Ch9_11th Stats TM.indd 268 07/12/2021 13:19:23

$$= \frac{1}{8} \times 8 = 1$$

$\therefore$ $f(x, y)$ ஓர் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.8

X, Y இன் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$f(x, y) = \frac{3}{2}\begin{cases} x^2 y & , \ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 \\ 0 & , \ \text{வேறிடங்களில்} \end{cases}$ எனில் x மற்றும் y இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு காண்க.

தீர்வு:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

$$f(x) = \frac{3}{2}\int_{1}^{2} x^2 y dy$$

$$= \frac{3}{2} x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2} x^2 \left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{2} x^2 \times 2 = 3x^2$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

$$f(y) = \frac{3}{2}\int_{0}^{1} x^2 y dy$$

$$= \frac{3}{2} y \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{3}{2} y \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{y}{2}$$

X இன் இறுதி நிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \ 0 \le x \le 1, \\ 0 & , \ \text{வேறிடங்களில்} \end{cases}$$

Y இன் இறுதி நிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{2} & , \ 0 \le y \le 2, \\ 0 & , \ \text{வேறிடங்களில்} \end{cases}$$

எடுத்துக்காட்டு 9.9

X, Y இன் இணைந்த நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு

$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{10}(4x - 2y) & , \ 1 \le x \le 3, 1 \le y \le 2 \\ 0 & , \ \text{வேறிடங்களில்} \end{cases}$ X, Y இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு காண்.

தீர்வு:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy$$

$$f(x) = \frac{1}{10}\int_{1}^{2} (4x - 2y)\,dy$$

$$= \frac{1}{10}\left[4xy - \frac{2y^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{10}\left[4x(2-1) - (4-1)\right] = \frac{1}{10}(4x - 3)$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx$$

$$f(y) = \frac{1}{10}\int_{1}^{3} (4x - 2y)\,dx$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{4x^2}{2} - 2xy\right)_1^3$$

$$= \frac{1}{10}\left(2x^2 - 2xy\right)_1^3$$

$$= \frac{1}{10}\left[2(9-1) - 2y(3-1)\right]$$

$$= \frac{1}{10}(2 \times 8 - 6y + 2y)$$

$$= \frac{1}{10}(16 - 4y) = \frac{1}{5}(8 - 2y)$$

X இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}(4x-3) & , 1 \le x \le 3 \\ 0 & , \text{வேறிடங்களில்} \end{cases}$$

Y இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{5}(8-2y) & , 1 \le y \le 2 \\ 0 & , \text{வேறிடங்களில்} \end{cases}$$

9.6 கணித எதிர்பார்ப்பு

நிகழ்தகவு பரவல் ஒரு வாய்ப்பு மாறியில் பெறும் மதிப்புகளையும் அவை பெறும் நிகழ்தகவுகளையும் விளக்குகிறது எனினும், நிகழ்தகவு பரவலை, மையஅளவைகள், சிதறல்கள், சமச்சீர்தன்மை மற்றும் தட்டையளவுகளைக் கொண்டு விவரிப்பது தேவையாகிறது. அவை கருத்து அளவைகள் அல்லது விளக்க அளவைகள் எனப்படுகின்றன. நிகழ்வெண் பரவலைப் போலவே நமக்குக் கிடைக்கப் பெற்ற நிகழ்தகவு பரவலின் பண்புகளை விவரிப்பது அத்தியாவசியமாகிறது.

Ch9_11th Stats TM.indd 270 07/12/2021 13:19:34

இப்பகுதி கருத்தளவைகள் எவ்வாறு கணக்கிடப்படுகின்றன என்பதைக் கவனமாக எடுத்துரைக்கிறது. கணக்கிடுவதற்காக மூன்று அணுகுமுறைகள் உள்ளன. அவை

(i) நேரடிமுறை, (சராசரி மற்றும் மாறுபாடு)

(ii) விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

(iii) சிறப்பியல்பு சார்பு.

9.6.1 தனித்த வாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்ப்பு

X என்பது ஒரு தனித்த வாய்ப்பு மாறி, மதிப்புகள் $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ என்றும் அதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ எனில் கணித எதிர்பார்த்தல் $E(X)$ என்பது

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad \text{where } \sum p_i = 1$$

X இன் கணித எதிர்பார்த்தல் $E(X)$ என்பது கூட்டு சராசரி எனப்படும்.

நிரூபணம்:

X இன் ஒரு சார்பு $g(X)$ எனில் $E\ g(X) = \sum g(x) p(X = x)$

பண்புகள்:

(i) $E(c) = c,\quad c$ ஓர் மாறிலி

நிரூபணம் : வரையறையின்படி

$$E(X) = \sum x_i p_i$$

$$E(c) = \sum c p_i = c \sum p_i = c \times 1 = c$$

(ii) $E(cX) = cE(X)$, c ஓர் மாறிலி

நிரூபணம்:

$$E(X) = \sum x_i p_i$$

$$E(X) = \sum c x_i p_i$$

$$= c \sum x_i p_i$$

$$= c\ E(X).$$

(iii) $E(aX+b) = aE(X)+b$

தனித்த வாய்ப்பு மாறியின் மாறுபாடு

நிகழ்தகவு பரவலில், மாறுபாடு என்பது ஒரு வாய்ப்பு மாறி மற்றும் கூட்டு சராசரியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் சராசரி எனப்படும். குறியீட்டின்படி

மாறு $(X) = E(X - E(X))^2$

$= E(X^2) - (E(X))^2$

எடுத்துக்காட்டு 9.10

ஒரு பகடை உருட்டப்படுகிறது. ஒரு பகடையில் தோன்றும் எண் X எனில், $E(X)$, $E(X^2)$ மற்றும் மாறு(X) காண்க.

தீர்வு:

X பகடையில் தோன்றும் எண்

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ மற்றும் விளைவுகள் அனைத்திற்கும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ ஆகும்.

நிகழ்தகவு பரவல்

X	1	2	3	4	5	6
P(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \sum x_i p_i$$

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_6 p_6$$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \ldots + 6 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$$

$$= \frac{7}{2}$$

$$E(X^2) = \sum x_i{}^2 p_i$$

$$E(X^2) = x_1{}^2 p_1 + x_2{}^2 p_2 + \ldots + x_6{}^2 p_6$$

$$E(X^2) = \left(1^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(2^2 \times \frac{1}{6}\right) + \ldots \left(6^2 \times \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36)$$

$$= \frac{1}{6}(91) = \frac{91}{6}$$

மாறு $(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{91}{6} - \frac{49}{4}$$

$$\text{மாறு}(X) = \frac{35}{12}$$

எடுத்துக்காட்டு 9.11

வாய்ப்பு மாறி X இன் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் முறையே 5 மற்றும் 4 எனில் $E\,(X^2)$ காண்க.

தீர்வு:

$$E\,(X) = 5 \quad \text{மற்றும்} \quad \sigma = 4$$

$$\therefore \quad \text{மாறு}\,(X) = 16$$

வரையறையின்படி,

$$\text{மாறு}\,(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$16 = E\,(X^2) - (5)^2$$

$$E(X^2) = 25 + 16 = 41$$

எடுத்துக்காட்டு 9.12

ஒரு நபர் இரு நாணயங்களை ஒரே நேரத்தில் சுண்டுகிறார். இரு தலைகள் விழுந்தால் அவருக்கு ₹ 4உம் ஒரு தலை விழுந்தால் ₹ 2–ம் கிடைக்கிறது. ஆனால் இரண்டுமே பூ விழுந்தால் அவருக்கு ₹ 3 இழப்பாகிறது. அவரின் எதிர்பார்க்கப்படும் இலாபம் காண்?

தீர்வு:

வாய்ப்பு மாறி X என்பது வெற்றி பெற்றால் கிடைக்கும் தொகை

X க்கு வாய்ப்புள்ள மதிப்புகள் 4, 2 மற்றும் −3

$P(X = 4) =$ P(இரண்டு தலைகள் விழுதல்) $= \frac{1}{4}$

$P(X = 2) =$ P(ஒரு தலை விழுதல்) $= \frac{1}{2}$

$P(X = 3) =$ P(இரு பூ விழுதல்) $= \frac{1}{4}$

x இன் நிகழ்தகவு பரவல்

X	4	2	-3
$P(\mathbf{X}=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X) = \sum x_i\, p_i$$

$$E(X) = x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + x_3\, p_3$$

$$E(X) = 4 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} - 3 \times \frac{1}{4} = 1.25$$

எடுத்துக்காட்டு 9.13

X என்ற தனித்த வாய்ப்பு மாறி கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவு பரவலைக் கொண்டிருக்கிறது எனில் சராசரி, மாறுபாடு காண்.

X	-3	6	9
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

தீர்வு:

$$\text{சராசரி} = E(X) = \sum x_i\, p_i$$

$$= x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + x_3\, p_3$$

$$= -3 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{2} + 9 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{11}{2}$$

$$E(X^2) = \sum x_i^{\,2} p_i$$

$$= x_1^{\,2} p_1 + x_2^{\,2}\, p_2 + x_3^{\,2} p_3$$

$$= \left(-3^{2 \times \frac{1}{6}}\right) + \left(6^{2 \times \frac{1}{2}}\right) + \ldots \left(9^{2 \times \frac{1}{3}}\right)$$

$$= \frac{3}{2} + 18 + 27$$

$$= \frac{93}{2}$$

$$\text{Van}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{93}{2} - \left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$$= \frac{93}{2} - \frac{121}{4}$$

$$= \frac{186 - 121}{4}$$

$$= \frac{65}{4}$$

$$\text{சராசரி} = \frac{11}{2},$$

$$\text{மாறுபாடு}(X) = \frac{65}{4}$$

9.6.2 தொடர் வாய்ப்பு மாறியின் கணித எதிர்பார்ப்பு

X என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x)$ எனில் X இன் கணித எதிர்பார்ப்பு E (X)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$ ஐ தொகையிடல் இருக்கும் எனில்

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$$

குறிப்பு

வாய்ப்பு மாறி ஓ இன் சார்பு $g(X)$ மற்றும் $E[g(X)]$ இருக்கும் எனில்

முடிவுகள் :

(1) $E(c) = c,$ c ஓர் மாறிலி

நிரூபணம் :

வரையறையின்படி,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

$$E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} cf(x)\,dx = c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= c \times 1 = c \qquad \left(\because \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1\right)$$

(2) $E(aX) = a\,E(X)$

நிரூபணம் :

$$E(aX) = \int_{-\infty}^{\infty} axf(x)\,dx = a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

$$= a\,E(X)$$

எடுத்துக்காட்டு 9.14

X என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$

(elsewhere: வேறிடங்களில்) சராசரியும் மாறுபாடும் காண்க

தீர்வு:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

$$E(X) = \int_{0}^{2} x\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

Ch9_11th Stats TM.indd 275 07/12/2021 13:19:40

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^3/3\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\ \left[\frac{8}{3} - 0\right]$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\ \left[x^4/4\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{8}\ [16\text{-}0]$$

$$= 2$$

குறிப்பு

கீழ்க்காணும் முடிவுகள் தனித்த மற்றும் தொடர் வாய்ப்பு மாறிகளுக்கு உண்மையாகும்.

(i) $E(1/X) \neq 1/E(X)$

(ii) $E[\log(X)] \neq \log E(X)$

(iii) $(E(X^2) \neq [E(X)]^2$

மாறுபாடு $(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$= 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

இது வரையில் நாம் ஒரு வாய்ப்பு மாறியின் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு காண்பதைப் பற்றி தெரிந்து கொண்டோம். ஆனால் ஒரு சில இடங்களில் நாம் X மற்றும் Y யிற்கிடையேயான நேரிய தொடர்பு எடுத்துக்காட்டாக $(aX + bY)$ அல்லது $(cX \times dY)$ அல்லது அதிகமான வாய்ப்பு மாறிகளுக்கு எதிர்பார்ப்பு காண வேண்டும். இந்த சூழ்நிலையில் பயன்படுத்தப்படும் சில தேற்றங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

9.6.3 சார்பிலா வாய்ப்பு மாறிகள்

X , Y என்ற வாய்ப்பு மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவலை X மற்றும் Y வாய்ப்பு மாறிகளின் இறுதி நிலை நிகழ்தகவுப் பரவல்களின் பெருக்குத் தொகையாக எழுத முடியுமானால் இரு வாய்ப்பு மாறிகளும் சார்பிலா வாய்ப்பு மாறிகளாகும்.

அதாவது $f(x,y) = g(x)\,h(y)$

இங்கு $g(x)$ X இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவுப் பரவல்

$h(y)$ Y இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவுப் பரவல்

Ch9_11th Stats TM.indd 276 07/12/2021 13:19:43

9.7 கணித எதிர்பார்ப்பின் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் தேற்றம்

9.7.1 கணித எதிர்பார்ப்பின் கூட்டல் தேற்றம்

1. தனித்த வாய்ப்பு மாறி

X மற்றும் Y என்பன வாய்ப்பு மாறிகளாயின்

$$E\,(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

நிரூபணம்

X என்ற வாய்ப்பு மாறி ஏற்கும் மதிப்புகள் $x_1, x_2 \ldots x_n$ என்றும் அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் p_1, $p_2 \ldots .p_n$ என்றும் X என்ற வாய்ப்பு மாறி ஏற்கும் மதிப்புகள் $y_1, y_2 \ldots\ldots y_m$ அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் $p_1, p_2 \ldots .p_m$ எனவும் கொள்வோம்.

வரையறையின்படி,

$$E\,(X) = \sum x_i p_i \qquad \text{இங்கு } \sum p_i = 1$$

$$E(Y) = \sum y\,jpj \qquad \sum p_j = 1$$

$$E\,(X+Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(x_i + y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} x_i + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_i + y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{ij} y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{j=1}^{m} y_j p_j$$

$$= E(X) + E(Y)$$

2. தொடர் வாய்ப்பு மாறி

X மற்றும் Y என்பன தொடர் வாய்ப்பு மாறிகள் மற்றும் அவற்றின் நிகழ்தகவு பரவல்கள் முறையே $f(x), f(y)$ எனில் $E\,(X + Y) = E(X) + E(Y)$

நிரூபணம்:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \qquad \text{மற்றும்}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)\,dy$$

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+y)f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{-\infty}^{\infty} y\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\right)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)\,dy$$

$$= E\,(X) + E\,(Y)$$

$$E\,(aX + b) = a\,E\,(X) \pm b$$

$$E\,(aX \pm b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax \pm b) f(x)\,dx$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \pm b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= a\,E\,(X) \pm b \times 1 \qquad \text{as} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$= a\,E\,((X) \pm b)$$

குறிப்புரை:

1. கூற்று: $E\,(aX+b) = aE(X)+b$ இங்கு a, b மாறிலிகள்

நிரூபணம்: $E(aX+b) = E(aX)+E(b)$ பண்பு 3

$= aE(X)+b$ பண்பு 2

இது போன்றே $E(aX-b) = aE(X)-b$

2. கூற்று: $E\left(\dfrac{ax+b}{c}\right) = \dfrac{[aE(x)+b]}{c}$

நிரூபணம்: $E\dfrac{(aX+b)}{c} = \dfrac{E(aX+b)}{c}$

$= \dfrac{[aE(x)+b]}{c}$

3. கூற்று: $E\,(X - \overline{X}) = 0$

நிரூபணம்: $E\,(X - \overline{X}) = E(X) - E(\overline{X})$ ஏனெனில் $E(X) = \overline{X}$

$= \overline{X} - \overline{X} = 0$ $\quad \overline{X}$ ஒரு மாறிலி

எடுத்துக்காட்டு 9.15

இரு பகடைகள் வீசும்பொழுது, பகடையில் தோன்றும் எண்களின் கூடுதலின் எதிர்பார்ப்பு காண்.

தீர்வு:

வாய்ப்பு மாறிகள் X மற்றும் Y முதல் மற்றும் இரண்டாம் பகடையில் தோன்றும் எண்களைக் குறிக்கும் இரண்டு வாய்ப்பு மாறிகளின் விளைவுகள் 1, 2, 3, 4, 5, 6 மற்றும் அவை ஒவ்வொன்றின் நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ ஆகும்

$$E(X) = \sum x_i p_i$$
$$= 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+.....+6\times\frac{1}{6}$$
$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

இதேபோல், ,

$$E(Y) = \frac{7}{2}$$

இரு பகடைகளில் தோன்றும் எண்களின் கூடுதலின் எதிர்பார்ப்பு வாய்ப்பு மாறி $X+Y$ பெறும் மதிப்புகள் $2, 3\ldots12$.

நிகழ்தகவு பரவல்

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X+Y) = 2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+\ldots+12\times\frac{1}{36}$$
$$= \frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36} = 7$$
$$E(X)+E(Y) = \frac{7}{2}+\frac{7}{2} = 7$$
$$\therefore \quad E(X+Y) = E(X)+E(Y)$$

எடுத்துக்காட்டு 9.16

வாய்ப்பு மாறிகள் X மற்றும் Y இன் இணைந்த நிகழ்தகவு பரவல்

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

வாய்ப்பு மாறி X இன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

Ch9_11th Stats TM.indd 279 07/12/2021 13:19:50

வாய்ப்பு மாறி Yஇன் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு சார்பு

$$g(y)=\begin{cases}2y, & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{மற்றபடி}\end{cases} \quad \text{எனில்} \quad E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

தீர்வு:

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (x+y)4xy\,dxdy$$

$$= 4\left[\int_0^1\int_0^1 x^2y\,dx\,dy + \int_0^1\int_0^1 xy^2\,dx\,dy\right]$$

$$= 4\left[\int_0^1\left(\int_0^1 x^2\,dx\right)ydy + \int_0^1\left(\int_0^1 y^2\,dy\right)xdx\right]$$

$$= 4[\int_0^1 \frac{1}{3}y\,dy + \int_0^1 \frac{1}{3}x\,dx]$$

$$= \frac{4}{3}\left[\int_0^1 y\,dy + \int_0^1 x\,dx\right]$$

$$= \frac{4}{3}[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}] = \frac{4}{3} \qquad \ldots (1)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x\times 2x\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx$$

$$E(X) = 2\left[\frac{1}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)\,dy = \int_0^1 y\times 2y\,dy$$

$$= 2\int_0^1 y^2\,dy$$

$$E(Y) = 2\left[\frac{1}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

$$E(X)+E(Y) = \frac{2}{3}+\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$$

Ch9_11th Stats TM.indd 280 07/12/2021 13:19:54

9.7.2 கணித எதிர்பார்ப்பின் பெருக்கல் தேற்றம்

தனித்த வாய்ப்பு மாறி :

தேற்றம்: X மற்றும் Y என்பன சார்பிலா வாய்ப்பு மாறிகள் எனில் $E(XY) = E(X)\,E(Y)$

நிரூபணம்:

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_i p_j$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_i p_i\right)$$

$$= E(X)\,E(Y)$$

X மற்றும் Y சார்பிலா வாய்ப்பு மாறிகள் எனில் $P_{ij} = p_i p_j$

தொடர் வாய்ப்பு மாறி:

தேற்றம்: X மற்றும் Y என்பன சார்பிலா வாய்ப்பு மாறிகள் எனில் $E(XY) = E(X)\,E(Y)$

நிரூபணம்:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x, y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)\,dy$$

$$= E(X)\,E(Y)$$

எடுத்துக்காட்டு 9.17

இரு நாணயங்கள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக சுண்டப்படுகிறது. முதலில் சுண்டப்படுதல் வாய்ப்பு மாறி X எனவும் இரண்டாவது சுண்டுதல் வாய்ப்பு மாறி Y எனவும் கொண்டால் இணைந்த நிகழ்தகவு திண்மைச்சார்பு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

Y \ X	1	0	மொத்தம்
1	0.25	0.25	0.5
0	0.25	0.25	0.5
மொத்தம்	0.5	0.5	1

[தலை விழுந்தால் 1 எனவும் பூ விழுந்தால் 0 எனவும் கொள்க]

$E(XY) = E(X)\,E(Y)$ என நிறுவுக

Ch9_11th Stats TM.indd 281 07/12/2021 13:19:55

தீர்வு:

வாய்ப்பு மாறி X Y எடுக்கும் மதிப்புகள் 0 மற்றும் 1

$$E(XY) = \Sigma\,\Sigma\, xy\, p(x,y)$$

$$=1 \times 0.25 + 0 \times 0.25 + 0\times0.25 + 0\times0.25$$

$$=0.25$$

$$E(X) = \Sigma\, x\, p_i$$

$$= 1 \times 0.5 + 0\times0.5$$

$$= 0.5$$

$$E(Y) = \Sigma\, y\, p_j$$

$$= 1 \times 0.5 + 0\times0.5 = 0.5$$

$$E(X)\times E(Y) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$$

$$E(XY) = E(X)\, E(Y)$$

[X மற்றும் Y சார்பிலா மாறிகளாக இருந்தால் மட்டுமே பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.18

X மற்றும் Y என்பன சார்பிலா இரு வாய்ப்பு மாறிகள், எனில் அவற்றின் இறுதிநிலை நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} 4ax, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} 4by, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

$E(XY) = E(X)\, E(Y)$ என நிறுவுக

தீர்வு:

X மற்றும் Y என்பன சார்பிலா வாய்ப்பு மாறிகள் எனில்

$$f(x,y) = f(x) \times f(Y)$$

$$f(x,y) = 4ax \times 4by$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 16abxy, & 0 \le x,y \le 1 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

Ch9_11th Stats TM.indd 282 07/12/2021 13:19:56

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 xy \times 16abxydxdy$$

$$= 16ab \int_0^1 \left[\int_0^1 x^2\,dx\right] y^2\,dy$$

$$= 16ab \int_0^1 \frac{1}{3} y^2\,dy$$

$$= 16ab\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{16ab}{9} \qquad \ldots 1$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x\times 4ax\,dx = 4a\int_0^1 x^2\,dx$$

$$= 4a\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4a}{3}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)\,dy$$

$$= \int_0^1 y\times 4by\,dy$$

$$=4a\int_0^1 y^2\,dy$$

$$=4b\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4b}{3}$$

$$E(X)\,E(Y) = \frac{4a}{3}\times\frac{4b}{3}$$

$$= \frac{16ab}{9} \qquad \ldots 2$$

(1), (2) லிருந்து

$$E(XY) = E(X)\,E(Y)$$

9.8 விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

நிகழ்தகவு பரவலின் அளவைகள் காண மற்றொரு முறை விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை அடிப்படையாகக் கொண்டதாகும். நாம் இரு வகையான விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை விவரிக்கலாம்.

Ch9_11th Stats TM.indd 283 07/12/2021 13:20:00

(i) ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கப்பெருக்குத்தொகை (ஆதி என்பது 0 வாகவோ மற்ற எண்ணாகவோ (A) இருக்கலாம்.

(ii) மைய விலக்கப்பெருக்குத்தொகை

9.8.1. ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கப் பெருக்குத்தொகை

வரையறை:

X என்பது வாய்ப்பு மாறி, ஒரு மிகை முழுஎண் r $(r = 1, 2, ...)$ இன் r ஆவது ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கப்பெருக்குத்தொகை ஆனது (ஆதி 0) '0' is $\mu'_r = E(X^r) = \sum x_i^r \, p_i$

ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட முதல் விலக்கப்பெருக்குத்தொகை

வரையறையில் $r = 1$ எனில்

$$\mu'_1 = E(X) = \sum x_i \, p_i = \overline{X}$$

இது வாய்ப்பு மாறி X இன் சராசரி ஆகும். அதாவது ஆதியானது பெறப்பட்ட முதல் விலக்கப்பெருக்குத்தொகை சராசரியாகும். ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட இரண்டாம் விலக்கப்பெருக்குத்தொகை

வரையறையில் $r = 2$ எனில்

$$\mu'_2 = E(X^2) = \sum x_i^2 p_i$$

இது ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட இரண்டாம் விலக்கப்பெருக்குத்தொகை எனப்படும்.

9.8.2. மைய விலக்கப் பெருக்குத்தொகை

வரையறை:

X என்பது வாய்ப்பு மாறி, ஒரு மிகை முழு எண் r, $(r = 1, 2, ...)$, X இன் r ஆவது மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை ஆனது $\mu_r = E(X - \overline{X})^r$

முதல் மைய விலக்கப்பெருக்குத்தொகை வரையறையில் r = 1 எனில்

$$\mu_1 = E(X - \overline{X}) = 0 \text{ (எப்போதும்)}$$

குறிப்புரை:

சராசரியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கங்களின் கூடுதல் பூஜ்ஜியமாகும்.

இரண்டாம் மையவிலக்கப் பெருக்குத்தொகை வரையறையில் $r = 2$ எனில்

$$\mu_2 = E(X - \overline{X})^2$$

Ch9_11th Stats TM.indd 284 07/12/2021 13:20:01

$$= E\left(X^2 - 2\ X \times \overline{X} + \overline{X}^2\right)$$

$$= E\left(X^2\right) - 2E\left(X\right) E\left(\overline{X}\right) + E\left(\overline{X}\right)^2$$

$$= E(X^2) - 2\,\overline{X}\ \overline{X} + (\overline{X})^2$$

$$= E(X^2) - (\overline{X})^2$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$ இங்கு $\overline{X}$ மாறிலி மற்றும் $E(X) = \overline{X}$

$$\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$

சராசரியிலிருந்து பெறப்பட்ட 2ஆவது மைய விலக்கப்பெருக்குத்தொகை வாய்ப்பு மாறி X இன் மாறுபாடு ஆகும்.

மாறுபாடு $=$ மாறு $(X) = \mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$

திட்டவிலக்கம் (S.D) $= \sigma = \sqrt{\text{மாறுபாடு}}$

சில குறிப்பிட்ட முடிவுகள் (மாறுபாடு):

(i) மாறு $(c) = 0$ i.e. மாறிலியின் மாறுபாடு பூஜ்ஜியம்

(ii) c என்பது மாறிலி எனில் மாறு $(cX) = c^2$ மாறு(X)

(iii) X என்பது வாய்ப்பு மாறி மற்றும் c என்பது மாறிலி எனில் மாறு $(X \pm c) =$ மாறு (X)

(iv) a மற்றும் b என்பது மாறிலி எனில் மாறு $(aX \pm b) = a^2$ மாறு (X)

(v) a மற்றும் b என்பது மாறிலி எனில் மாறு $(a \pm bX) = b^2$ மாறு (X).

(vi) X, Y ஆனது சார்பிலா வாய்ப்பு மாறி எனில் மாறு $(X + Y) =$ மாறு $(X) +$ மாறு(Y)

(vii) X, Y ஆனது சார்பிலா வாய்ப்பு மாறிகள் எனில் மாறு $(aX + bY) = a^2$ மாறு $(X) + a^2$ மாறு(Y)

9.8.3. விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு (M.G.F.)

வரையறை:

வாய்ப்பு மாறி X இன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு $M_x(t)$

$$M_x(t) = E\left(e^{tx}\right),\ |t| < 1$$

(i) $M_x(t) = \sum (e^{tx})\, p(x)$ தனித்த வாய்ப்பு மாறி

(ii) $M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$ தொடர் வாய்ப்பு மாறி

Ch9_11th Stats TM.indd 285 07/12/2021 13:20:02

வாய்ப்பு மாறி X இன் ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட பெருக்குத்தொகை காண விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு பயன்படுகிறது.

$$E\,(X^r) = M_x^r(t) \text{ at } t=0 \; M_x^r(t)$$

$M_x^r(t)$ என்பது $M_x(t)$ இன் r ஆவது வகையிடல் ஆகும்

$$\mu_2 = \mu_2{}' - (\mu_1{}')^2$$

ஆதியில் r ஆவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை காணல்

$$M_x(t) = E\,(e^{tX})$$

$$= E\,[1 + \frac{tX}{1!} + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \ldots + \frac{(tX)^r}{r!} + \ldots]$$

$$= 1 + \frac{E(tX)}{1!} + \frac{E(tX)^2}{2!} + \frac{E(tX)^3}{3!} + \ldots + \frac{E(tX)^r}{r!} + \ldots$$

$$= 1 + t\frac{E(X)}{1!} + \frac{t^2 E(X^2)}{2!} + \ldots + \frac{t^r E(X^r)}{r!} + \ldots$$

$$= 1 + t\,\mu'_1 + t^2\frac{\mu'_2}{2!} + \ldots + t^r\frac{\mu'_r}{r!} + \ldots$$

$$M_x(t) = \sum_{r=0}^{\infty} t^r \frac{\mu'_r}{r!}$$

விலக்கப்பெருக்குத்தொகை M_x (t) இல் $\frac{t^r}{r!}$ இன் குணகம் $\mu_r{}'$ ஆகும். M_x (t) விலக்கப்பெருக்குத் தொகையை உருவாக்குவதால், விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு எனப்படுகிறது.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பினைப் பயன்படுத்தி சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டை, முதல் மற்றும் இரண்டாம் விலக்கப் பெருக்குத் தொகையிலிருந்து பெறலாம்.

$$\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$

9.8.4. சிறப்பியல்புச் சார்பு

எல்லாப் பரவல்களுக்கும் விலக்கப்பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு காண இயலாது. இந்நிலையில் சிறப்பியல்புச் சார்பு அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

வரையறை:

X என்ற வாய்ப்பு மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ எனில் சிறப்பியல்புச் சார்பு $\phi_x(t)$, இங்கு $\phi_x(t) = E(e^{i\,t\,X})$

பின்னர் $\phi_x(t) = E(e^{i\,tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx$, (தொடர் பரவல்)

$\phi_x(t) = \sum_e^{itx} p(x)$, (தனித்த பரவல்) , இங்கு $i = \sqrt{-1}$

Ch9_11th Stats TM.indd 286 07/12/2021 13:20:05

நினைவில் கொள்க...

- வாய்ப்பு மாறி என்பது கூறுவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் மெய் மதிப்புகளை எடுக்கும் சார்பாகும்.
- வீச்சைப் பொறுத்து வாய்ப்பு மாறி வகைப்படுத்தப்படுகிறது.
- நிகழ்தகவு சார்பு வீச்சினைக் கொண்டு ஒரு புள்ளியிலோ அல்லது இடைவெளியிலோ நிகழ்தகவைக் காணப் பயன்படுகிறது.
- குவிவு பரவல் சார்பு வீச்சின் உட்கணத்தின் நிகழ்தகவைக் காண உதவுகிறது.
- நிகழ்தகவுப் பரவலின் சுருக்க அளவைகளான சராசரி மற்றும் மாறுபாடு ஆகியவை இருவிதமான வழிகளில் (i) எதிர்பார்ப்பு (ii) விலக்கப்பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு கொண்டு கணக்கிடப்படுகிறது.

NQS72

பயிற்சி

I . மிகச் சரியான விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. $f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \le x \le 3 \\ 0 & elsewhere \end{cases}$ ஓர் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் K இன் மதிப்பு

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{9}$ (d) $\frac{1}{12}$

2. ஒரு வாய்ப்பு 2மாறியின் நிகழ்தகவு பரவல்

X	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$\frac{1}{4}$

எனில் $P(1 \le X \le 4)$ இன் மதிப்பு

(a) $\frac{10}{21}$ (b) $\frac{2}{7}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{14}$

3. X என்பது தனித்த வாய்ப்பு மாதிரி பெறும் மதிப்புகள் 0, 1, 2 மற்றும் $P(X = 0) = \frac{144}{169}$ எனில் $P(X=1) = \frac{1}{169}$, $P(X=2) = K$ எனில், K இன் மதிப்பு

(a) $\frac{145}{169}$ (b) $\frac{24}{169}$ (c) $\frac{2}{169}$ (d) $\frac{143}{169}$

4. $E(X+C) = 8$ மற்றும் $E(X-C) = 12$ எனில் C இன் மதிப்பு

(a) -2 (b) 4 (c) -4 (d) 2

5. வாய்ப்பு மாறி X இன் மாறுபாடு 4 மற்றும் சராசரி 2 எனில் $E(X^2)$

(a) 8 (b) 6 (c) 4 (d) 2

Ch9_11th Stats TM.indd 287 07/12/2021 13:20:08

6. மாறு $(4X+3)$ =

(a) 7 மாறு (X) (b) 16 மாறு (X) (c) 256 மாறு X (d) 0

7. இரண்டாம் மையவிலக்கப் பெருக்குத்தொகை என்பது

(a) சராசரி (b) திட்டவிலக்கம் (c) மாறுபாடு (d) இடைநிலை

8. மாறுபாடு = 20 ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட இரண்டாம் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை = 276, X இன் சராசரி

(a) 16 (b)5 (c)4 (d) 2

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக:

9. ஒரு மாறியில் பெறப்படும் மெய்எண்கள் வாய்ப்பு சோதனையின் விளைவுகளால் பெறப்பட்ட எண்களாக இருந்தால் ______________ என அழைக்கப்படுகிறது.

10. $F(X)$ என்பது ஒரு பரவல் சார்பானால் $F(-\infty)$ என்பது ______________

11. X ஓர் தொடர் வாய்ப்பு மாறி, a, b மாறிலிகள் மற்றும் $a \leq b$ எனில் $P(a \leq X \leq b)$ = ______________

12. தொடர் வாய்ப்பு மாறியில் ஒரு புள்ளியில் காணும் நிகழ்தகவு ______________

13. ஒரு தொடர் வாய்ப்பு மாறியில் அமைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு, $F(X)$ என்பது அதன் குவிவு பரவல்சார்பு எனில் $F'(X)$ = ______________

14. $f(x)$ ஓர் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$ ______________

15. X என்ற வாய்ப்பு மாறியின் கணித எதிர்பார்த்தல் ______________ என அழைக்கப்படும்

III. குறு வினா (ஓரிரு சொற்களில் விடையளி):

16. தனித்த மற்றும் தொடர் வாய்ப்பு மாறிக்கும் இடையேயான வேறுபாடு எழுதுக

17. நிகழ்தகவு திண்மைச்சார்பு மற்றும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு வேறுபடுத்தவும்.

18. தனித்த வாய்ப்பு மாறியின் கணித எதிர்பார்த்தலை வரையறுக்கவும்

19. விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பை எழுதுக.

20. தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் சிறப்பியல்பு சார்பினை எழுதுக.

21. X இன் நிகழ்தகவு பரவல் பின்வருமாறு

X	o	1	2	3	4
$P(X=x)$	$3a$	$4a$	$6a$	$7a$	$8a$

'a' இன் மதிப்பைக் காண்க

22. $f(x) = 5x^4$, $0<x<1$ என்பது நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பாகுமா?

Ch9_11th Stats TM.indd 288 07/12/2021 13:20:08

23. வாய்ப்பு மாறி X இல் $E(X)=\frac{1}{2}$, $E(X^2)=\frac{1}{2}$ திட்டவிலக்கம் காண்.

III. குறு வினா (ஓரிரு சொற்றொடர்களில் விடையளி):

24. பரவல் சார்பின் பண்புகளை எழுதுக.

25. மூன்று பகடைகள் ஒருமுறை வீசப்படும்பொழுது 6 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு பரவலைக்காண்.

26. ஒரு பெட்டியில் 6 சிவப்பு மற்றும் 4 வெள்ளைப் பந்துகள் உள்ளன. ஒரே நேரத்தில் மூன்று பந்துகள் வாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகின்றன எனில் வெள்ளைப் பந்துகள் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவுப் பரவல் காண்.

27. வாய்ப்பு மாறி X பின்வரும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைப் பெற்றுள்ளது

வேறிடங்களில்

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & -2<x<2\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

(i) $P(-1 < X < 2)$ (2) $P(X>1)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

28. ஒரு சீரான பகடையை வைத்து ஒரு விளையாட்டு விளையாடப்படுகிறது. ஒருவருக்கு பகடையின் மேல் 2 விழுந்தால் ரூ. 20 இலாபமும் பகடையின் மேல் 4 விழுந்தால் ரூ. 40 இலாபமும் பகடையின் மேல் 6 விழுந்தால் ரூ.30 இழப்பும் அடைகிறார். வேறு எந்த எண் விழுந்தாலும் இலாபமும் இழப்போ கிடையாது. அவர் அடையும் எதிர்பார்ப்பு யாது?

IV. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு விரிவான விடை தருக:

29. ஒரு தொடர் வாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திசார்பு

வேறிடங்களில்

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3x(2-x)}{4} & 0<x<2\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$ எனில் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு காண்

30. x என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திசார்பு

வேறிடங்களில்

$$f(x)=\begin{cases}\frac{k(1-x^2)}{4} & 0<x<1\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

K மற்றும் $E(X)$ காண்க.

31. இரண்டு சீரான பகடைகள் வீசப்படுகின்றன. பகடையில் மேல் எண்களின் கூடுதலின் எதிர்பார்ப்பு காண்

32. X இன் நிகழ்தகவு பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

X	-2	3	1
$P(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$E(2X+5)$ இன் மதிப்பு காண்

Ch9_11th Stats TM.indd 289 07/12/2021 13:20:10

33. மூன்று நாணயங்கள் சுண்டும் பொழுது தலை விழுவதற்கான எண்ணிக்கையின் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு காண்

34. ஒரு வாய்ப்பு மாறி பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலை பெற்றிருக்கிறது.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(x)$	a	$3a$	$5a$	$7a$	$9a$	$11a$	$13a$	$15a$	$17a$

(i) a (ii) $P(X<3)$ (iii) $P(X\geq 5)$ (iv) $P(3<X<7)$ காண்க.

35. 52 சீட்டுகள் கொண்ட கட்டிலிருந்து இரண்டு சீட்டுகள் ஒன்றன் பின் ஒன்றாக திரும்ப வைக்கப்படும் முறையில் எடுக்கப்பட்டால் ஏஸ் சீட்டுகளின் எண்ணிக்கைக்கு சராசரி மற்றும் மாறுபாடு காண்

36. ஒரு நுழைவுத் தேர்வில் ஒரு மாணவன் 120 கேள்விகளுக்கும் விடையளிக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு கேள்விக்கும் நான்கு விடைகள் உள்ளன. ஒருசரியான விடைக்கு 1 மதிப்பெண் பெறமுடியும். தவறான விடைக்கு 1/2 மதிப்பெண் இழக்க நேரிடும். ஒவ்வொரு கேள்விக்கும் சமவாய்ப்பு முறையில் விடையளித்தால் அம்மாணவன் பெறும் மதிப்பெண்ணின் எதிர்பார்ப்பு என்ன?

37. ஒரு பெட்டியில் 8 பொருட்களுடன் இரண்டு குறைபாடுள்ள பொருட்களும் உள்ளன. இதிலிருந்து மூன்று பொருட்கள் வாய்ப்பு முறையில் திரும்ப வைக்காமல் எடுக்கப்படுகின்றன எனில், குறைபாடுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கையின் சராசரி காண்க

38. ஒரு பெட்டியில் 4 வெள்ளை மற்றும் 3 சிவப்பு பந்துகளும் உள்ளன. 3 பந்துகளை ஒவ்வொன்றாக எடுக்கும் போது சிவப்பு நிறப் பந்துகளின் எண்ணிக்கையின் நிகழ்தகவுப் பரவல் காண்க

(i) மாறும்பொழுது (ii) மாறாத பொழுது

39. X, Y இன் இணைந்த நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பு பின்வருமாறு

X \ Y	1	3	9
2	0.1	0.1	0.05
4	0.2	0	0.1
6	0.1	0.15	K

(i) K (ii) $E(X+Y)$ காண்

40. கீழ்க்காணும் X, Y இன் இணைந்த நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பிற்கு $E(3X)$ மற்றும் $E(4Y)$

X \ Y	1	2	3
–5	0	0.1	0.1
0	0.1	0.2	0.2
5	0.2	0.1	0

Ch9_11th Stats TM.indd 290 07/12/2021 13:20:10

விடைகள்:

I.1. *c*.   2. *c*   3. *b*   4. *a*   5. *a*   6. *b*   7. *c*   8. *a*

II. 9. வாய்ப்பு மாறி   10. 0   11. $F(b) - F(a)$ 12. 0   13. $f(x)$

14. $E(X)$ 15. கூட்டுச்சராசரி

III. 21. $\frac{1}{28}$ 23. $\frac{1}{2}$

IV. 25.

X	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

26.

X	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$

27. $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$ 28. 5

V. 29. $1, \frac{1}{5}$ 30. $6, \frac{3}{8}$ 31. 7   32. 7

33. $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}$ 34. $\frac{1}{81}, \frac{1}{9}, \frac{56}{81}, \frac{11}{27}$

35. $\frac{2}{13}, \frac{24}{169}$ 36. -15 37. $\frac{3}{4}$

38. (i)

X	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{64}{343}$	$\frac{144}{343}$	$\frac{108}{343}$	$\frac{27}{343}$

(ii)

X	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$

39. 0.2, 8.7   40. -1.5, 2.0

Ch9_11th Stats TM.indd 291 07/12/2021 13:20:14