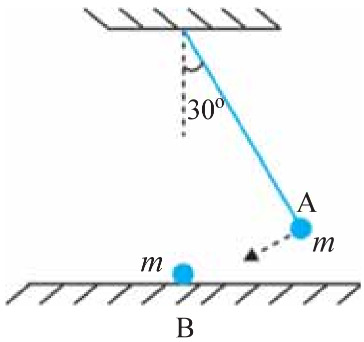
6.17 એક લોલકના ગોળા Aને લંબ સાથે 30^o ખૂણેથી છોડતાં, આકૃતિ 6.15માં દર્શાવ્યા મુજબ, તે એટલા જ દળના ટેબલ પર સ્થિર રહેલા દટ્ટા B સાથે અથડાય છે. અથડામણ બાદ ગોળો A કેટલે ઊંચે સુધી જશે ? ગોળાઓના કદને અવગણો અને અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક છે તેમ માનો.



આકૃતિ 6.15

6.18 એક લોલકના ગોળાને સમક્ષિતિજ સ્થિતિ (સ્થાન) પરથી છોડવામાં આવે છે. જો લોલકની લંબાઈ 1.5 m હોય, તો ગોળો જ્યારે ન્યૂનતમ બિંદુએ આવે ત્યારે તેની ઝડપ કેટલી હશે ? અહીં આપેલ છે કે તે તેની પ્રારંભિક ઊર્જાની 5 % ઊર્જા હવાના અવરોધક બળ સામે ગુમાવે છે.

6.19 300 kg દળની એક લારી, 25 kg રેતીનો કોથળો લઈને ઘર્ષણરહિત રસ્તા પર 27 km/hની એક ધારી ઝડપથી ગતિ કરે છે. થોડા સમય પછી રેતી એક કાણામાંથી 0.05 kg s^{-1}ના દરે નીકળીને લારીના તળિયા પર ઢોળાવા લાગે છે. રેતીનો સંપૂર્ણ કોથળો ખાલી થઈ જાય ત્યારે લારીની ઝડપ કેટલી હશે ?

6.20 0.5 kgનો એક પદાર્થ સીધી રેખામાં વેગ $\upsilon = ax^{3/2}$ થી જાય (મુસાફરી કરે) છે, જ્યાં $a = 5\ m^{-1/2}\ s^{-1}$. તેના $x = 0$ થી $x = 2$ m સ્થાનાંતર દરમિયાન પરિણામી બળ વડે કેટલું કાર્ય થયું હશે ?

6.21 એક પવનચક્કીનાં પાંખિયાં ફરે ત્યારે A જેટલા ક્ષેત્રફળનું વર્તુળ આવરી લે છે. (a) જો પવન υ વેગથી આ વર્તુળને લંબરૂપે વહેતો હોય, તો t સમયમાં કેટલા દળની હવા તેમાંથી પસાર થશે ? (b) હવાની ગતિઊર્જા કેટલી હશે ? (c) ધારો કે પવનચક્કી પવનઊર્જાની 25 % ઊર્જાનું વિદ્યુતઊર્જામાં રૂપાંતર કરે છે અને A = 30 m^2, υ = 36 km/h તથા હવાની ઘનતા 1.2 kg m^{-3} છે, તો કેટલો વિદ્યુતપાવર ઉત્પન્ન થશે ?

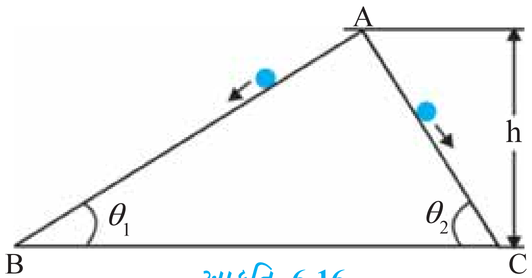
6.22 વજન ઓછું કરવા માગતી (ડાયેટિંગ કરતી) એક વ્યક્તિ, 10 kg દળને એક હજારવાર દરેક વખતે 0.5 m જેટલું ઊંચકે છે. ધારો કે તેણી જેટલી વખત દળને નીચે લાવે તેટલી વખત સ્થિતિઊર્જાનો વ્યય થાય છે. (a) તેણી ગુરુત્વાકર્ષણ બળ વિરુદ્ધ કેટલું કાર્ય કરે છે ? (b) ખોરાક (ફૅટ)માંથી કિલોગ્રામ દીઠ 3.8×10^7 J ઊર્જા મળે છે જેનું યાંત્રિકઊર્જામાં રૂપાંતરણ 20 % કાર્યક્ષમતાના દરે થાય છે. ડાયેટિંગ કરનારે કેટલું ફૅટ વાપર્યુ હશે ?

6.23 એક કુટુંબ 8 kW પાવરનો ઉપયોગ કરે છે. (a) સમક્ષિતિજ સપાટી પર સૂર્યઊર્જા સીધી જ, એક ચોરસ મીટર દીઠ 200 W જેટલા સરેરાશ દરથી, આપાત થાય છે. જો આની 20 % ઊર્જાનું ઉપયોગી વિદ્યુતઊર્જામાં રૂપાંતરણ થઈ શકતું હોય, તો 8 kW મેળવવા માટે કેટલું મોટું ક્ષેત્રફળ જોઈએ ? (b) આ ક્ષેત્રફળને સામાન્ય રીતે જોવા મળતા ઘરના છાપરાના ક્ષેત્રફળ સાથે સરખાવો.

વધારાનું સ્વાધ્યાય

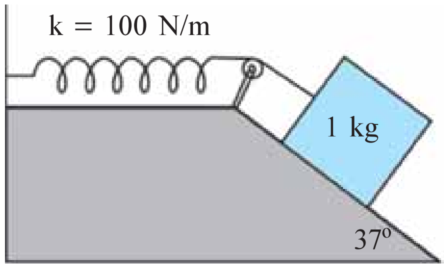
6.24 0.012 kg દળની એક બુલિટ (ગોળી) 70 m s^{-1}ની સમક્ષિતિજ ઝડપથી 0.4 kg દળના લાકડાના બ્લૉકને અથડાય છે અને તરત જ બ્લૉકની સાપેક્ષે સ્થિર થઈ જાય છે. આ બ્લૉકને ઉપરની છત સાથે પાતળા તાર વડે લટકાવ્યો છે. બ્લૉક કેટલી ઊંચાઈ સુધી જશે તે ગણો. આ ઉપરાંત, બ્લૉકમાં કેટલી ઉષ્મા ઉત્પન્ન થઈ જશે તે ગણો.

6.25 બે ઘર્ષણરહિત રસ્તાઓ એક ધીમો અને બીજો ઝડપી ઢાળવાળો એકબીજાને A પાસે મળે છે, જ્યાંથી બે પથ્થરોને સ્થિર સ્થિતિમાંથી દરેક રસ્તા પર સરકાવવામાં આવે છે (આકૃતિ 6.16). શું બંને પથ્થરો તળિયે એક જ સમયે પહોંચશે ? શું બંને ત્યાં એકસરખી ઝડપથી પહોંચશે ? સમજાવો. અહીંયાં $\theta_1 = 30^o$, $\theta_2 = 60^o$ અને $h = 10$ m આપેલ હોય, તો બંને પથ્થરોની ઝડપ અને તેમણે લીધેલ સમય કેટલા હશે ?



આકૃતિ 6.16

6.26 આકૃતિ 6.17માં દર્શાવ્યા મુજબ ખરબચડા ઢાળ પર રાખેલ 1 kgનો એક બ્લૉક, 100 N m^{-1} જેટલા સ્પ્રિંગ અચળાંકવાળી સ્પ્રિંગ સાથે જોડેલ છે. સ્પ્રિંગની ખેંચાયા પહેલાંની સામાન્ય પરિસ્થિતિમાં બ્લૉકને સ્થિર સ્થિતિમાંથી મુક્ત કરવામાં આવે છે. બ્લૉક સ્થિર સ્થિતિમાં આવતા પહેલાં ઢાળ પર 10 cm જેટલું નીચે જાય છે. બ્લૉક અને ઢાળ વચ્ચેનો ઘર્ષણ-આંક શોધો. ધારો કે સ્પ્રિંગનું દળ અવગણ્ય છે અને ગરગડી ઘર્ષણરહિત છે.

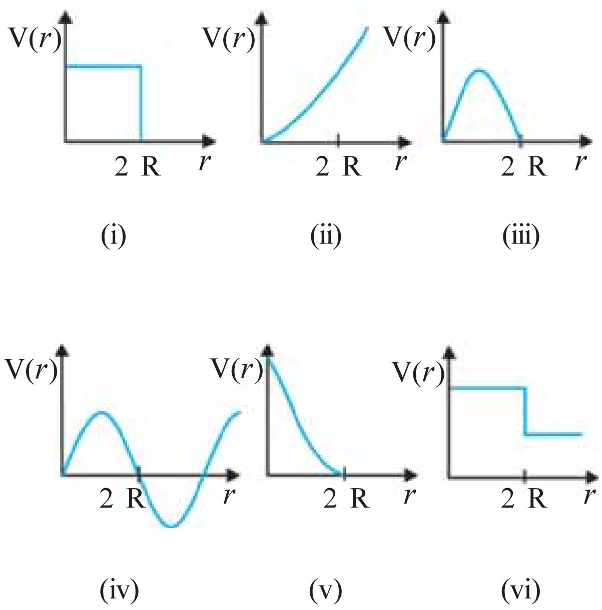


આકૃતિ **6.17**

6.27 સમાન ઝડપ 7 m s^{-1}થી નીચે તરફ જતી લિફ્ટની ઉપરની છત પરથી 0.3 kgનો એક સ્ક્રૂ (બૉલ્ટ) નીચે પડે છે. તે લિફ્ટના ભોંયતળિયા પર (લિફ્ટની લંબાઈ = 3 m) પડે છે અને પાછો ઉછળતો નથી. આ ધક્કા વડે કેટલી ઉષ્મા ઉત્પન્ન થઈ હશે ? જો લિફ્ટ સ્થિર હોત, તો તમારો જવાબ જુદો હોત ?

6.28 200 kg દળની એક લારી ઘર્ષણરહિત પટ્ટા પર 36 km/hની સમાન (એક ધારી) ઝડપે ગતિ કરે છે. 20 kg દળનો એક બાળક લારી પર તેના એક છેડાથી બીજા છેડા સુધી (10 મીટર સુધી) લારીની સાપેક્ષે તેની વિરુદ્ધ દિશામાં 4 m s^{-1}ની ઝડપથી દોડે છે અને લારી પરથી બહાર કૂદકો મારે છે. લારીની અંતિમ ઝડપ કેટલી છે ? છોકરો દોડવાનું શરૂ કરે તે સમયથી લારી કેટલે સુધી ગઈ હશે ?

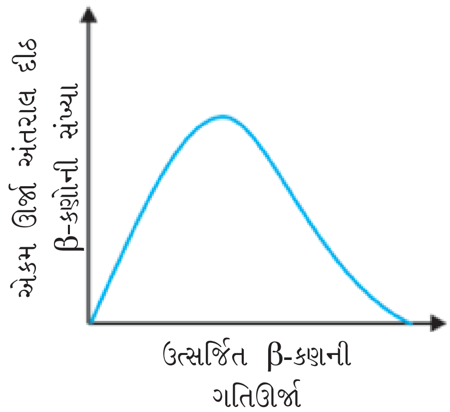
6.29 આકૃતિ 6.18માં દર્શાવેલ સ્થિતિઊર્જા વક્રોમાંથી કયા વક્રો બે બિલિયર્ડ બૉલની સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ દર્શાવતા નથી ? અહીં r એ બૉલનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર છે.



આકૃતિ **6.18**

6.30 સ્થિર રહેલા ન્યુટ્રૉનનો ક્ષય વિચારો : $n \rightarrow p + e^-$

દર્શાવો કે આ પ્રકારના દ્વિ-કણ ક્ષયમાં ચોક્કસ ઊર્જા ધરાવતો જ ઇલેક્ટ્રૉન મળવો જોઈએ અને તેથી ન્યુટ્રૉન કે ન્યુક્લિયસના (આકૃતિ 6.19) β-ક્ષયના સતત ઊર્જા-વિતરણને સમજાવી ન શકે.



આકૃતિ **6.19**

[**નોંધ :** આ સ્વાધ્યાયનું સામાન્ય પરિણામ, W. Pouli ના β-ક્ષય દરમિયાન ત્રીજા કણના અસ્તિત્વની ધારણા માટેની ઘણી દલીલોમાંનું એક હતું. આ કણને ન્યુટ્રિનો કહે છે. આપણે હવે જાણીએ છીએ કે, આ કણનો પ્રાકૃતિક સ્પીન (પરિક્રમણાંક) 1/2 (e^-, p અથવા nની જેમ) હોય છે, પરંતુ તે તટસ્થ (વિદ્યુતભારરહિત) હોય છે અને તે લગભગ દળરહિત અથવા અત્યંત નહિવત (ઇલેક્ટ્રૉનના દળ કરતાં પણ ઘણું ઓછું) દળ ધરાવે છે તથા તે દ્રવ્ય સાથે ખૂબ નબળી રીતે આંતરક્રિયા કરે છે. ન્યુટ્રૉનના ક્ષયની સાચી પ્રક્રિયા આ મુજબ છે : $n \rightarrow p + e^- + \nu$]

પરિશિષ્ટ 6.1 : ચાલતી વખતે થતો પાવરનો વપરાશ (વ્યય) (POWER CONSUMPTION IN WALKING)

નીચે આપેલ કોષ્ટકમાં 60 kg દળના પુખ્ત માણસે ખર્ચેલ (વાપરેલ) પાવરનું લિસ્ટ દર્શાવ્યું છે :

કોષ્ટક 6.4 પાવરના વપરાશનું લગભગ મૂલ્ય

પ્રવૃત્તિ	પાવર (W)
સુતી વખતે	75
ધીમેથી ચાલવું	200
સાઈકલ ચલાવવી	500
હૃદયનો ધબકાર	1.2

યાંત્રિક કાર્યની ગેરસમજ દરરોજના સામૂહિક કાર્ય (ટીમ વર્ક) સાથે ના કરવી જોઈએ. માથા પર ખૂબ ભાર ઊંચકીને ઊભી રહેલ સ્ત્રી ખૂબ થાકી જાય છે. પરંતુ કોઈ યાંત્રિક કાર્ય સંકળાયેલું નથી. આનો મતબલ એ નથી કે, માણસની દરરોજની પ્રવૃત્તિ (કામ)ને યાંત્રિક કાર્ય સાથે સાંકળી ન શકાય.

ધારો કે કોઈ વ્યક્તિ અચળ ઝડપ υ_0થી ચાલે છે. તેણે કરેલ યાંત્રિક કાર્યને કાર્યઊર્જા પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને સહેલાઈથી શોધી શકાય. ધારો કે,

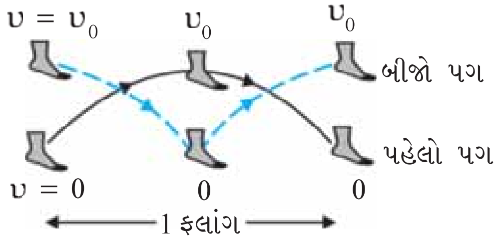
(a) ચાલતી વખતે ફલંગો (Stride) દરમિયાન બંને પગના પ્રવેગ અને પ્રતિપ્રવેગના કારણે મહત્તમ કાર્ય થાય છે. (જુઓ આકૃતિ 6.20)

(b) હવાનો અવરોધ અવગણો.

(c) પગને ગુરુત્વાકર્ષણની વિરુદ્ધ ઉપાડતી વખતે થતું નાનું કાર્ય અવગણો.

(d) ચાલતી વખતે હાથ વગેરેના ઝૂલવાને અવગણો.

આકૃતિ 6.20માં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, દરેક ફલાંગ દરમિયાન પગને સ્થિર સ્થિતિમાંથી ઝડપ (ગતિ) આપવામાં આવે છે, જે લગભગ ચાલવાની ઝડપ જેટલી હોય છે અને ત્યાર બાદ ફરીથી તે સ્થિર સ્થિતિમાં આવે છે.



આકૃતિ 6.20 ચાલતી વખતે એક તરફની ફલાંગનું ઉદાહરણ. જ્યારે પહેલો પગ જમીનથી મહત્તમ ઊંચાઈએ હોય ત્યારે બીજો પગ જમીન પર હોય અને તે રીતે વારાફરતી

કાર્યઊર્જા પ્રમેય અનુસાર, ફલાંગ વખતે એક પગ વડે થયેલ કાર્ય, $m_1\upsilon_0^2$ છે. અહીંયાં $m_1\upsilon_0^2/2$ ઊર્જા એક પગના સ્નાયુઓ વડે ખર્ચાય છે, જ્યારે વધારાની $m_1\upsilon_0^2/2$ સામેના પગને સ્થિર સ્થિતિમાંથી υ_0 ઝડપ આપવા માટે ખર્ચાય છે. આથી બંને પગ વડે એક ફલાંગ દરમિયાન થયેલ કાર્ય (આકૃતિ 6.20નો ધ્યાનથી અભ્યાસ કરો.)

$$W_s = 2m_1\upsilon_0^2 \tag{6.34}$$

m_1 = 10 kg અને ધીમી ઝડપે દોડીને નવ માઈલ જેટલું સામાન્ય અંતર SI એકમમાં 3 m s^{-1} જેટલી ઝડપે કાપવામાં આવે તો આપણને

$$W_s = 180 \text{ J / ફલાંગ}$$

મળે. જો આપણે ફલાંગ 2 m લાંબી ગણીએ, તો માણસ એક સેકન્ડમાં 3 m s^{-1}ની ઝડપે 1.5 ફલાંગ કાપે. આથી વપરાયેલ પાવર

$$P = 180\frac{\text{J}}{\text{ફલાંગ}} \times 1.5\frac{\text{ફલાંગ}}{\text{second}}$$
$$= 270 \text{ W}$$

આપણે એ ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ કે આ આછો અંદાજ છે કારણ કે પાવરના વ્યયના કેટલાય રસ્તાઓ (દા.ત., હાથનું ઝૂલવું, હવાનો અવરોધ વગેરે) અવગણવામાં આવ્યા છે. અગત્યની વાત એ છે કે આપણે આમાં સંકળાયેલાં બળોની ચિંતા કરવાની જરૂર નથી. અહીંયાં ઘર્ષણ અને શરીરના બીજા સ્નાયુઓ વડે પગ પર લાગતાં બળોની ગણતરી કરવી મુશ્કેલ છે. સ્થિત ઘર્ષણ કોઈ કાર્ય કરતું નથી અને આપણે કાર્યઊર્જા પ્રમેયનો આધાર લઈને સ્નાયુઓ વડે થતા કાર્યને ટાળ્યું છે. આપણે પૈડાની અગત્ય પણ જોઈ શકીએ છીએ. પૈડું આપણા સ્નાયુઓને સ્વયંસંચાલિત રીતે શરૂ કરવા અને ઊભા રહેવાની, હલન-ચલનની પળોજણમાંથી મુક્તિ આપે છે.

પ્રકરણ 7

કણોનાં તંત્રો અને ચાકગતિ
(SYSTEMS OF PARTICLES AND ROTATIONAL MOTION)

7.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

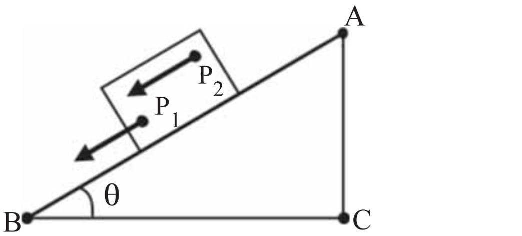
અગાઉનાં પ્રકરણોમાં આપણે મુખ્યત્વે એક જ કણની ગતિને ધ્યાનમાં લીધી હતી. (કણને એક દળબિંદુ (point mass) તરીકે રજૂ કર્યું છે. વ્યવહારમાં તેનું કોઈ કદ નથી.) ત્યાર બાદ આવા પદાર્થોની ગતિને એક કણની ગતિ તરીકે વર્ણવી શકાય છે એમ ધારી લઈને, આપણા અભ્યાસનાં આ પરિણામોને ચોક્કસ કદના પદાર્થોની ગતિને પણ લાગુ પાડ્યા છે.

દૈનિક જીવનમાં આપણા સંપર્કમાં આવતો કોઈ પણ વાસ્તવિક પદાર્થ પરિમિત કદ ધરાવે છે. મોટા (વિસ્તરીત) પદાર્થો (પરિમિત કદના પદાર્થો)ની ગતિ સમજવા ઘણી વખત કણોના આદર્શ સ્વરૂપનું મોડેલ અપૂરતું હોય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આ અપૂર્ણતાથી આગળ વધવાનો પ્રયાસ કરીશું. તેમજ આપણે વિસ્તૃત પદાર્થોની ગતિને સમજવાનો પણ પ્રયાસ કરીશું. એક વિસ્તૃત પદાર્થ, પ્રથમ તો, કણોનું એક તંત્ર છે. હવે આપણે સમગ્રપણે તંત્રની ગતિની વિચારણાથી શરૂ કરીશું. કણોના આ તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર (centre of mass) અહીં મુખ્ય સંકલ્પના હશે. આપણે કણોના આ તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ તથા વિસ્તરીત પદાર્થોની ગતિ સમજવામાં આ સંકલ્પનાની ઉપયોગિતાની ચર્ચા કરીશું.

મોટા વિસ્તરીત પદાર્થો સાથે સંકળાયેલ ઘણીબધી સમસ્યાઓ, તેમને દઢ પદાર્થો (rigid bodies) તરીકે વિચારીને ઉકેલી શકાય છે. **આદર્શ રીતે એક દઢ પદાર્થ એ એક સંપૂર્ણપણે ચોક્કસ અને અપરિવર્તિત આકાર ધરાવતો પદાર્થ છે. આવા પદાર્થના કણોની બધી જ જોડીઓ વચ્ચેનું અંતર બદલાતું નથી.** દઢ પદાર્થની આ વ્યાખ્યા પરથી સ્પષ્ટ છે કે કોઈ વાસ્તવિક પદાર્થ પૂર્ણતઃ દઢ નથી. કારણ કે વાસ્તવિક પદાર્થો બળોના પ્રભાવ હેઠળ વિરૂપ થાય છે. પરંતુ ઘણીબધી પરિસ્થિતિઓમાં આ વિરૂપતા અવગણ્ય હોય છે. બીજી તરફ, ઘણી પરિસ્થિતિઓમાં કે જ્યાં પૈડાઓ, ભમરડાઓ, સ્ટીલના સ્તંભો, અણુઓ અને ગ્રહો જેવા પદાર્થો સામેલ છે ત્યાં તેઓનું મરડાવું, વાંકું વળવું કે કંપન કરવું ને આપણે અવગણીશું અને તેમને દઢ તરીકે ગણીશું.

7.1.1 એક દઢ પદાર્થને કયા પ્રકારની ગતિ હોઈ શકે છે ? (What kind of motion can a rigid body have ?)

ચાલો, દઢ પદાર્થોની ગતિના કેટલાંક ઉદાહરણો લઈને આ પ્રશ્નને ઉકેલવાનો પ્રયાસ કરીએ. એક લંબચોરસ બ્લૉકથી શરૂ કરીએ જે એક ઢળતા સમતલ (inclined plane) પર આજુ બાજુ ખસ્યા વગર નીચે તરફ સરકે છે. આ બ્લૉક

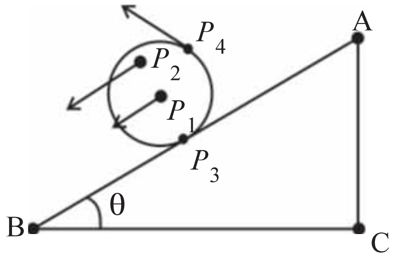


આકૃતિ 7.1 *ઢળતા સમતલ પર એક બ્લૉકની નીચે તરફ સ્થાનાંતરણ (સરકતી) ગતિ (આ બ્લૉકના કોઈ પણ બિંદુ જેવા કે P_1 અથવા P_2 સમયની કોઈ પણ ક્ષણે સમાન વેગથી ગતિ કરે છે.)*

એક દૃઢ પદાર્થ છે. આ સમતલ પર તેની નીચે તરફની ગતિ એવી છે કે પદાર્થના તમામ કણો એકસાથે આગળ વધી રહ્યા છે. એટલે કે કોઈ પણ સમયે બધા જ કણો સમાન વેગ ધરાવે છે. અહીં દૃઢ પદાર્થ શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ (ટ્રાન્સલેશનલ) ગતિમાં છે. (આકૃતિ 7.1)

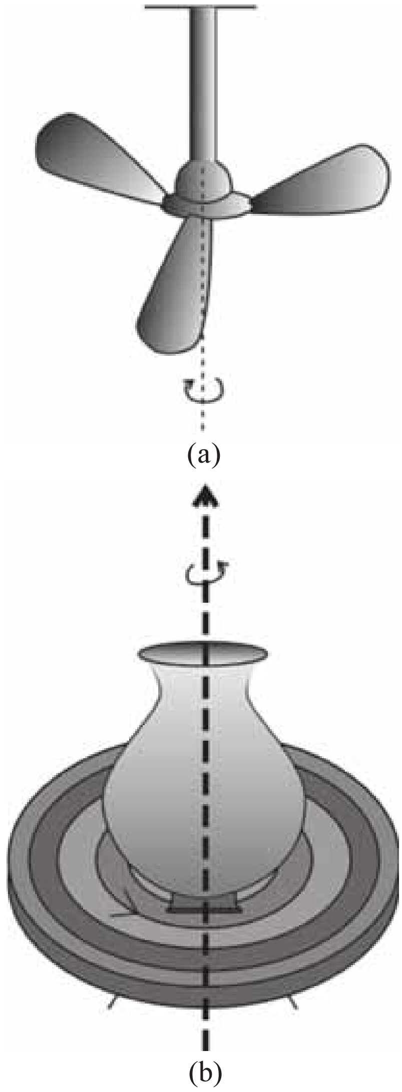
શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ (ટ્રાન્સલેશનલ) ગતિમાં તે પદાર્થનો દરેક કણ કોઈ પણ ક્ષણે સમાન વેગ ધરાવે છે.

ચાલો હવે, તે જ ઢળતા સમતલ પર ધાતુના અથવા લાકડાના એક નળાકારની નીચેની તરફ ગબડતી ગતિ (rolling motion)ને ધ્યાનમાં લો (આકૃતિ 7.2). આ સમસ્યામાં દૃઢ પદાર્થ, એટલે કે નળાકાર, જે ઢળતા સમતલની ટોચથી તળિયે સ્થાનાંતરિત થાય છે અને આમ, તેને સ્થાનાંતરણ ગતિ છે. પરંતુ આકૃતિ 7.2 એમ દર્શાવે છે કે તેના બધા જ કણો કોઈ પણ ક્ષણે એક સરખા વેગ સાથે આગળ ગતિ કરી રહ્યા નથી. આમ, આ પદાર્થ તેથી શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ ધરાવતો નથી. એટલે કે તેની ગતિમાં સ્થાનાંતરણની સાથે ‘બીજું કંઈક છે.’



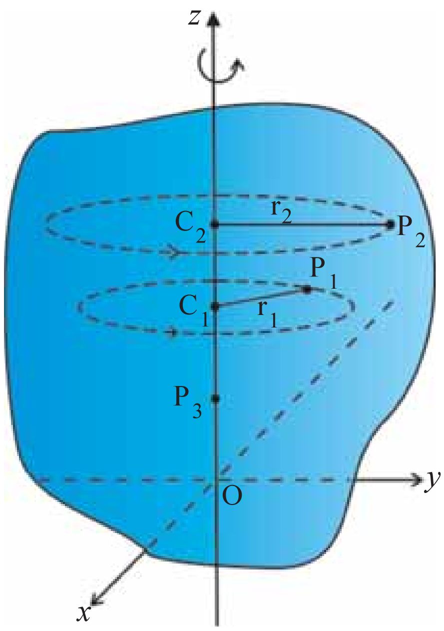
આકૃતિ 7.2 *નળાકારની રોલીંગ ગતિ. તે શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ ગતિ નથી. કોઈ એક ક્ષણે બિંદુઓ P_1, P_2, P_3 અને P_4ના વેગો અલગ અલગ છે. (તીરો વડે દર્શાવેલ છે.) વાસ્તવમાં, જો નળાકાર સરક્યા વિના ગબડતો હોય, તો કોઈ પણ ક્ષણે સંપર્કબિંદુ P_3 નો વેગ શૂન્ય છે.*

આ ‘કંઈક બીજું’ શું છે તે સમજવા માટે, ચાલો આપણે કોઈ એક દૃઢ પદાર્થ લઈએ કે જેને એ રીતે નિયંત્રિત કરવામાં આવેલ હોય કે તે સ્થાનાંતરણ ગતિ ન કરી શકે. એક દૃઢ પદાર્થને, સ્થાનાંતરણ ગતિ ન ધરાવે તે રીતે નિયંત્રિત કરવાની સૌથી સામાન્ય રીત એ છે કે, તેને એક સુરેખાને અનુલક્ષીને સ્થિર કરી દેવામાં આવે. આવા પદાર્થની એક માત્ર શક્ય ગતિ એ **ચાકગતિ (Rotational motion)** છે. એ રેખા કે જેને અનુલક્ષીને આ પદાર્થ સ્થિર છે તેને તેની **ભ્રમણ અક્ષ (ધરી) (Axis of rotation)** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. જો તમે આસપાસ જુઓ તો સિલીંગ પંખો. કુંભારનો ચાકડો, મેળામાંનો એક વિશાળ ફાળકો (જાયન્ટ વ્હીલ), ચકડોળ (મેરી-ગો રાઉન્ડ) અને બીજાં એવાં ઘણાં ઉદાહરણો જોવા મળશે કે તેમાં ચાકગતિ (પરિભ્રમણ) કોઈ એક અક્ષને અનુલક્ષીને થતી હોય છે (આકૃતિ (7.3 (a) અને (b)).



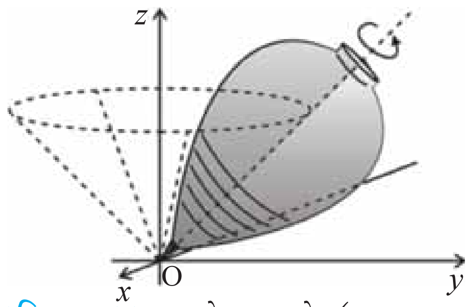
આકૃતિ 7.3 *સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ*
(a) સિલીંગ પંખો
(b) કુંભારનો ચાકડો

ચાલો, આપણે એ સમજવા પ્રયત્ન કરીએ કે, ચાકગતિ શું છે, ચાકગતિનાં લક્ષણો કયાં છે. તમે જોશો કે **સ્થિર અક્ષને**

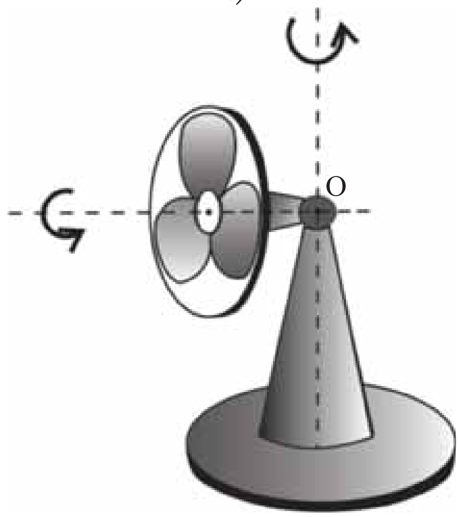


આકૃતિ 7.4 *z-અક્ષને અનુલક્ષીને દૃઢ પદાર્થનું પરિભ્રમણ (આ પદાર્થનું દરેક બિંદુ જેમકે P_1 અથવા P_2 એ આ અક્ષ પર જેનું કેન્દ્ર (C_1 કે C_2) હોય તેવું વર્તુળ બનાવે છે. આ વર્તુળની ત્રિજ્યા (r_1 કે r_2) તે આ અક્ષથી બિંદુ (P_1 કે P_2) સુધીનું લંબઅંતર છે. P_3 જેવું અક્ષ પર આવેલ બિંદુ સ્થિર રહે છે.)*

અનુલક્ષીને દૃઢ પદાર્થના પરિભ્રમણમાં, પદાર્થનો દરેક કણ વર્તુળમાં ફરે છે, જે વર્તુળ અક્ષના લંબસમતલમાં છે અને તેનું કેન્દ્ર અક્ષ પર છે. આકૃતિ 7.4 એ એક સ્થિર અક્ષ (નિર્દેશ-ફ્રેમની *z*-અક્ષ)ને અનુલક્ષીને એક દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિ દર્શાવે છે. એક સ્થિર અક્ષથી r_1 અંતર પર દૃઢ પદાર્થના યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરાયેલા એક કણ P_1ને ધ્યાનમાં લો. આ કણ P_1 સ્થિર અક્ષ પર તેના કેન્દ્ર C_1 સાથે r_1 ત્રિજ્યાનું વર્તુળ બનાવે છે. આ વર્તુળ અક્ષના લંબસમતલમાં છે. આ આકૃતિમાં દૃઢ પદાર્થનો બીજો કણ P_2 પણ દર્શાવેલ છે. P_2 સ્થિર અક્ષથી r_2 અંતર પર છે. આ કણ P_2 એ r_2 ત્રિજ્યાના વર્તુળ પર ગતિ કરે છે કે જેનું અક્ષ પર કેન્દ્ર C_2 છે. આ વર્તુળ પણ અક્ષના લંબસમતલમાં છે. નોંધ કરો કે P_1 અને P_2 દ્વારા બનાવેલ વર્તુળો અલગ અલગ સમતલમાં આવેલા હોઈ શકે છે; જોકે, આમ છતાં આ બંને સમતલો સ્થિર અક્ષને લંબ છે. અક્ષ પર કોઈ P_3 જેવા કણ માટે $r = 0$ છે. પદાર્થ જ્યારે ચાકગતિ કરતો હોય ત્યારે પણ આવો દરેક કણ સ્થિર જ રહે છે. આ અપેક્ષિત છે કારણ કે અક્ષ સ્થિર જ રહે છે.



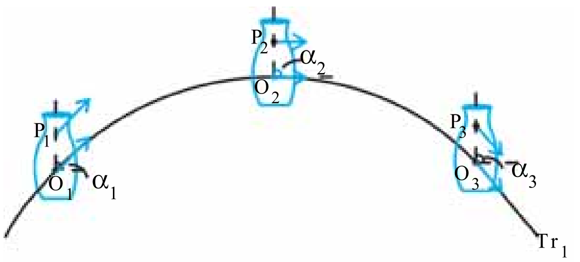
આકૃતિ 7.5 (*a*) *ફરતો ભમરડો (આ ભમરડાનું જમીન સાથેનું સંપર્ક-બિંદુ, તેની અણિ O, તે સ્થિર છે.)*



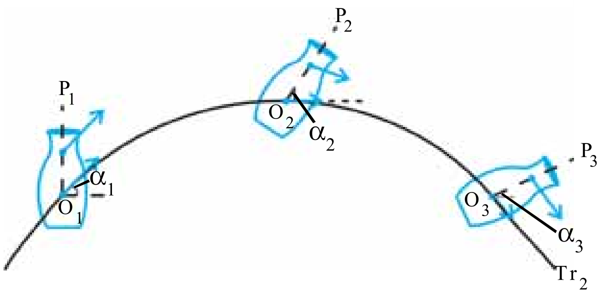
આકૃતિ 7.5 (*b*) *ફરતા ટેબલ-ફેનનું આધારબિંદુ O સ્થિર છે.*

પરિભ્રમણનાં કેટલાંક ઉદાહરણોમાં, જોકે ધરી સ્થિર ન પણ હોય. આ પ્રકારની ચાકગતિનું જાણીતું ઉદાહરણ એ જમીન પર ફરતો ભમરડો છે [આકૃતિ 7.5 (a)]. (આપણે અહીં એમ ધારીએ છીએ કે ભમરડો એક સ્થાનેથી બીજા સ્થાને સ્થાનાંતરિત થતો નથી જેથી તેને સ્થાનાંતરણ ગતિ પણ નથી.) અનુભવથી આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે, આવા ફરતા ભમરડાની (સ્પિનિંગ ટોપની) અક્ષ, જમીન સાથેના તેના સંપર્ક-બિંદુમાંથી પસાર થતી અભિલંબને ફરતે ગતિ કરે છે જે આકૃતિ 7.5(a)માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક શંકુ બનાવે છે. (ભમરડાની અક્ષનું ઉર્ધ્વઅક્ષને અનુલક્ષીને આ રીતે ફરવું તેને **ધૂર્ણન (precession)** કહેવામાં આવે છે. એ ધ્યાન રાખો કે, **જમીન સાથેનું ભમરડાનું સંપર્ક-બિંદુ સ્થિર છે.** કોઈ પણ ક્ષણે, ભમરડાની પરિભ્રમણ અક્ષ સંપર્ક-બિંદુમાંથી પસાર થાય છે. આ પ્રકારના પરિભ્રમણનું બીજું સરળ ઉદાહરણ એ દોલન કરતો (Oscillating) ટેબલ-ફેન અથવા પૅડેસ્ટલ-ફેન છે. તમે એવું જોયું હશે કે આવા પ્રકારના પંખાની ભ્રમણાક્ષ સમક્ષિતિજ સમતલમાં દોલિત (એક બાજુથી બીજી બાજુ) ગતિ ધરાવે છે અને આ ગતિ ઊર્ધ્વ અક્ષને અનુલક્ષીને હોય છે જે એ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે કે જ્યાં તે અક્ષ કિલકિત છે (આકૃતિ 7.5 (b)માં બિંદુ O).

જ્યારે પંખો ફરતો હોય છે અને તેની અક્ષ એક બાજુથી બીજી બાજુ ગતિ કરે છે, ત્યારે પણ આ બિંદુ સ્થિર રહે છે. આમ, ચાકગતિના વધુ સામાન્ય કિસ્સાઓમાં, જેમકે ભમરડા અથવા પૅડેસ્ટલ-ફેનના પરિભ્રમણમાં દૃઢ પદાર્થનું **એક બિંદુ સ્થિર રહે છે, નહિ કે એક રેખા.** આ કિસ્સામાં અક્ષ સ્થિર નથી. તેમ છતાં તે હંમેશા એક સ્થિર બિંદુમાંથી પસાર થાય છે. આપણા અભ્યાસમાં જોકે આપણે મોટે ભાગે ચાકગતિના એવા સરળ અને વિશિષ્ટ કિસ્સા જોઈશું કે જેમાં એક રેખા (એટલે કે અક્ષ) સ્થિર હોય. આમ, આપણા માટે ચાકગતિ એ ફક્ત એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને હશે. સિવાય કે બીજું વિશેષમાં જણાવ્યું હોય.



આકૃતિ 7.6(a) *દૃઢ પદાર્થની ગતિ જે શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ છે.*



આકૃતિ 7.6(b) *દૃઢ પદાર્થની ગતિ જે સ્થાનાંતરિત અને ચાકગતિનું મિશ્રણ છે.*

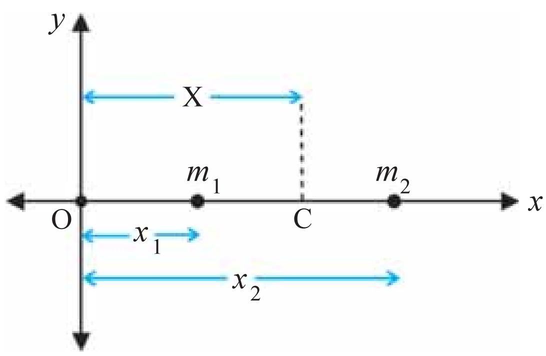
આકૃતિ 7.6(a) અને 7.6 (b) એક જ પદાર્થની જુદી જુદી ગતિને સમજાવે છે. ધ્યાન રહે કે P એ પદાર્થનું કોઈ યાદચ્છિક બિંદુ છે; O પદાર્થનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર છે. જેને હવે પછીના પરિચ્છેદમાં વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે. અહીં એ કહેવું પૂરતું છે કે O બિંદુના ગતિપથો એ જ પદાર્થના સ્થાનાંતરીય ગતિપથો Tr_1 અને Tr_2 છે. ત્રણ અલગ અલગ સમયે, બિંદુઓ O અને Pની સ્થિતિઓ બંને આકૃતિઓ 7.6 (a) અને (b)માં અનુક્રમે O_1, O_2, O_3 અને P_1, P_2, P_3 દ્વારા દર્શાવવામાં આવેલ છે. આકૃતિ 7.6(a) પરથી જોઈ શકાય છે કે, શુદ્ધ સ્થાનાંતરણની સ્થિતિમાં, પદાર્થના O અને P જેવા કોઈ પણ કણોનો વેગ સમાન હોય છે. નોંધ લો કે, આ કિસ્સામાં OPનું નમન (orientation), એટલે કે OP એ એક નિશ્ચિત દિશા છે - દા. ત., સમક્ષિતિજ, સાથે બનાવેલ કોણ સમાન રહે છે એટલે કે $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. *આકૃતિ* 7.6 ($b$) સ્થાનાંતરણ અને ચાકગતિના મિશ્રણનો કિસ્સો દર્શાવે છે. આ કિસ્સામાં કોઈ પણ સમયે O અને Pના વેગો અલગ અલગ હોઈ શકે છે. ઉપરાંત α_1, α_2 અને α_3 પણ બધા અલગ અલગ હોઈ શકે છે.

એક ઢળતાં સમતલ પર નીચેની તરફ ગબડતા એક નળાકારની રોલિંગ ગતિ એ સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ અને સ્થાનાંતરિત ગતિઓનું મિશ્રણ છે. આમ, લોટણ ગતિના કિસ્સામાં 'બીજું કંઈક' જેનો આપણે અગાઉ ઉલ્લેખ કરેલ તે ચાકગતિ છે આ દૃષ્ટિકોણથી આકૃતિ 7.6 (a) અને (b) તમારા માટે ઉપયોગી બનશે. આ બંને આકૃતિઓમાં એક જ પદાર્થની ગતિને સમાન સ્થાનાંતરિત ગતિ-પથ પર દર્શાવેલ છે. એક કિસ્સામાં, [આકૃતિ 7.6(a)], ગતિ એ શુદ્ધ સ્થાનાંતરિત છે; અન્ય કિસ્સામાં [આકૃતિ 7.6(b)] તે સ્થાનાંતરિત ગતિ અને ચાકગતિનું મિશ્રણ છે. (આપ પણ ભારે પુસ્તક જેવા એક દૃઢ પદાર્થનો ઉપયોગ કરીને અહીં બતાવવામાં આવેલ બે પ્રકારની ગતિને ઉત્પન્ન કરવાનો પ્રયત્ન કરી શકો છો.)

આવો, હવે આપણે પ્રસ્તુત વિભાગના સૌથી મહત્ત્વપૂર્ણ નિરીક્ષણોને ફરીથી જોઈ લઈએ : **એક દૃઢ પદાર્થની ગતિ કે જે કોઈ રીતે અક્ષ સાથે જોડાયેલ નથી અથવા સ્થિર નથી તે કાં તો શુદ્ધ સ્થાનાંતરિત છે અથવા સ્થાનાંતરિત અને ચાકગતિનું સંયોજન છે. એક દૃઢ પદાર્થની ગતિ કે જે અમુક રીતે કિલકિત (pivoted) અથવા સ્થિર છે તે ચાકગતિ છે.** ચાકગતિ એ એક સ્થિર અક્ષને (ઉદાહરણ : એક સિલીંગ પંખો) અથવા ચલિત અક્ષને (ઉદાહરણ : એક ઓસિલેટિંગ ટેબલ ફેન) અનુલક્ષીને હોઈ શકે છે. પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં, આપણે માત્ર એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ વિશે અધ્યયન કરીશું.

7.2 દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર (CENTRE OF MASS)

આપણે સૌપ્રથમ એ જોઈશું કે, કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર શું છે અને તે પછી તેના મહત્ત્વની ચર્ચા કરીશું. સરળતા માટે આપણે બે કણોના તંત્રથી શરૂઆત કરીશું. આપણે બે કણોને જોડતી રેખાને x-અક્ષ તરીકે લઈશું.



આકૃતિ 7.7

ધારો કે ઉદ્‌ગમ બિંદુ Oથી બે કણોના અંતરો અનુક્રમે x_1 અને x_2 છે. આ કણોનાં દ્રવ્યમાનો અનુક્રમે m_1 અને m_2 છે.

આ તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર બિંદુ C એ એવું બિંદુ હશે કે જે O થી X અંતર પર છે, જ્યાં Xને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય છે :

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \tag{7.1}$$

સમીકરણ (7.1)માં X ને આપણે x_1 અને x_2 નું દળ ભારિત સરેરાશ કહી શકીએ છીએ. જો બંને કણોના દળ $m_1 = m_2 = m$ સરખા હોય, તો

$$X = \frac{m x_1 + m x_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

આમ, સમાન દળના બે કણોનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તે બંનેની બરાબર મધ્યમાં હોય છે.

જો આપણી પાસે અનુક્રમે m_1, m_2, ..., m_n દળના n કણો હોય અને તે બધાંને x-અક્ષ તરીકે લીધેલ સુરેખા પર મૂકેલ હોય, તો આ વ્યાખ્યા અનુસાર આ કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનું સ્થાન નીચે મુજબ આપવામાં આવે છે :

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} \tag{7.2}$$

જ્યાં x_1, x_2, ..., x_n એ કણોના ઉદ્‌ગમ બિંદુથી અંતરો છે. X પણ તે જ ઉદ્‌ગમ બિંદુથી માપવામાં આવે છે. સંકેત Σ (ગ્રીક મૂળાક્ષર સિગ્મા) એ સરવાળો દર્શાવે છે જે આ કિસ્સામાં n કણો માટે છે. આમ, સરવાળો

$$\Sigma m_i = M$$

એ આ તંત્રનું કુલ દળ છે.

ધારો કે આપણી પાસે ત્રણ કણો છે. જે એક સુરેખા પર નથી. તો આપણે આ કણો જે સમતલમાં છે તેમાં x અને y-અક્ષોને વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ છીએ અને આ ત્રણ કણોનાં સ્થાનને અનુક્રમે યામો (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) વડે દર્શાવી શકાય છે. આ ત્રણ કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર C ને યામો (X, Y) વડે દર્શાવી શકાય છે અને તેને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે :

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{7.3a}$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{7.3b}$$

$m_1 = m_2 = m_3 = m$ સમાન દળના કણો માટે,

$$X = \frac{m(x_1 + x_2 + x_3)}{3m} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$Y = \frac{m(y_1 + y_2 + y_3)}{3m} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

આમ, સમાન દળના ત્રણ કણો માટે, તેનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર આ કણોથી બનતા ત્રિકોણના મધ્ય કેન્દ્ર પર હશે.

સમીકરણો (7.3a) અને (7.3b)ને n કણોના તંત્ર માટે સરળતાથી વ્યાપકરૂપ આપી શકાય છે. અહીં એ જરૂરી નથી કે બધા જ કણો એક જ સમતલમાં હોય. તે અવકાશમાં પણ વિતરીત હોય. આવા પ્રકારના તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર (X, Y, Z) પર છે, જ્યાં,

$$X = \frac{\Sigma m_i x_i}{M} \tag{7.4a}$$

$$Y = \frac{\Sigma m_i y_i}{M} \tag{7.4b}$$

$$\text{અને } Z = \frac{\Sigma m_i z_i}{M} \tag{7.4c}$$

અહીં $M = \Sigma m_i$ એ તંત્રનું કુલ દળ છે. સંકેત i એ 1થી n સુધી બદલાય છે. m_i એ iમા કણનું દળ છે અને iમા કણના સ્થાનને (x_i, y_i, z_i) વડે આપવામાં આવે છે.

સ્થાનસદિશ (Position Vector)ના સંકેતનો ઉપયોગ કરીને સમીકરણો (7.4a), (7.4b) અને (7.4c)ને એક સમીકરણમાં સંયોજિત કરી શકાય છે. જો $\mathbf{r}_i$ એ iમાં કણનો સ્થાનસદિશ અને $\mathbf{R}$ એ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો સ્થાનસદિશ હોય, તો

$$\mathbf{r}_i = x_i\,\hat{\mathbf{i}} + y_i\,\hat{\mathbf{j}} + z_i\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\text{અને } \mathbf{R} = X\hat{\mathbf{i}} + Y\hat{\mathbf{j}} + Z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\text{તો } \mathbf{R} = \frac{\Sigma m_i \mathbf{r}_i}{M} \tag{7.4d}$$

જમણી બાજુનો સરવાળો એ સદિશ સરવાળો છે.

સદિશોના ઉપયોગ દ્વારા પ્રાપ્ત કરેલ સમીકરણોની સંક્ષિપ્તતાની નોંધ લો. જો નિર્દેશ ફ્રેમ (યામ તંત્ર)ના ઉદ્‌ગમ બિંદુને આપેલ કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પર લેવામાં આવે, તો કણોના આપેલા તંત્ર માટે $\Sigma m_i \mathbf{r}_i = 0$.

એક દૃઢ પદાર્થ, જેવા કે મીટર-પટ્ટી કે ફ્લાય વ્હીલ એ ખૂબ જ નજીક નજીક હોય તેવા કણોનું તંત્ર છે, આથી સમીકરણો (7.4a), (7.4b), (7.4c) અને (7.4d) એ દૃઢ પદાર્થને લાગુ પડે છે. આ પ્રકારના પદાર્થમાં કણોની (પરમાણુ અથવા અણુની) સંખ્યા એટલી મોટી હોય છે કે આ સમીકરણોમાં પ્રત્યેક કણો પર સરવાળો કરવો અસંભવ છે. કારણ કે આ કણો વચ્ચેનું અંતર ખૂબ જ નાનું છે. તેથી આપણે પદાર્થને દ્રવ્યમાનના સતત

વિતરણ તરીકે લઈ શકીએ છીએ. આપણે પદાર્થને n નાના દ્રવ્યમાન-ખંડોમાં વિભાજિત કરીએ કે જેનાં દ્રવ્યમાન Δm_1, Δm_2, ..., Δm_n હોય અને તેનો iમો ખંડ Δm_i એ બિંદુ (x_i, y_i, z_i) પર સ્થિત હોય. આમ વિચારીએ તો દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના યામોને લગભગ નીચે મુજબ આપવામાં આવે છે :

$$X = \frac{\Sigma(\Delta m_i)x_i}{\Sigma \Delta m_i},\ Y = \frac{\Sigma(\Delta m_i)y_i}{\Sigma \Delta m_i},\ Z = \frac{\Sigma(\Delta m_i)z_i}{\Sigma \Delta m_i}$$

જેમ આપણે n મોટો અને મોટો લઈએ છીએ અને દરેક Δm_i જેમ નાનો લઈએ તેમ આ સમીકરણો વધુ સચોટ બને છે. આવા કિસ્સામાં i પરના સરવાળાઓને આપણે સંકલનો દ્વારા દર્શાવીએ છીએ. આમ,

$$\sum \Delta m_i \rightarrow \int \mathrm{d}m = M,$$

$$\sum (\Delta m_i)x_i \rightarrow \int x\,\mathrm{d}m,$$

$$\sum (\Delta m_i)y_i \rightarrow \int y\,\mathrm{d}m,$$

અને $$\sum (\Delta m_i)z_i \rightarrow \int z\,\mathrm{d}m,$$

અહીં M એ પદાર્થનું કુલ દ્રવ્યમાન છે. હવે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના યામો

$$X = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m,\ Y = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m \text{ અને } Z = \frac{1}{M}\int z\,\mathrm{d}m \qquad (7.5a)$$

થશે. આ ત્રણ અદિશ સમીકરણોને સમતુલ્ય સદિશ સમીકરણ

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,\mathrm{d}m \qquad (7.5b)$$

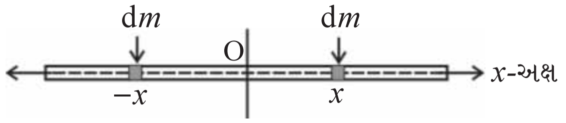
છે. જો આપણે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને આપણા યામ તંત્રનું ઉદ્‌ગમબિંદુ તરીકે પસંદ કરીએ, તો

$\mathbf{R}\ (x, y, z) = 0$

એટલે કે, $\int \mathbf{r}\,\mathrm{d}m = \mathbf{0}$

અથવા $$\int x\,\mathrm{d}m = \int y\,\mathrm{d}m = \int z\,\mathrm{d}m = 0 \qquad (7.6)$$

ઘણીબધી વખત આપણે વલય, તક્તી, ગોળાઓ, સળિયાઓ વગેરે જેવા નિયમિત આકારના સમાંગ પદાર્થોના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગણતરી કરવી પડશે. (સમાંગ પદાર્થોનો આપણો અર્થ એ છે કે, એકસરખી રીતે વિતરણ થયેલ દ્રવ્યમાનવાળો પદાર્થ) સંમિતિના ખ્યાલને ધ્યાનમાં લેતાં, આપણે સરળતાથી તે બતાવી શકીએ છીએ કે, આ પદાર્થોનાં દ્રવ્યમાન કેન્દ્રો તેમનાં ભૌમિતિક કેન્દ્રો પર આવેલાં છે.



આકૃતિ 7.8 એક પાતળા સળિયાનું CM નક્કી કરવું

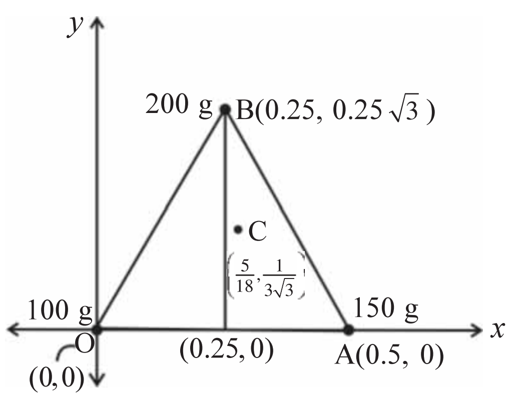
ચાલો હવે એક પાતળો સળિયો લો કે જેની પહોળાઈ અને જાડાઈ (જો સળિયાનો આડછેદ લંબચોરસ હોય) અથવા ત્રિજ્યા (જો સળિયાનો આડછેદ નળાકાર હોય) તેની લંબાઈ કરતાં ઓછી છે. સળિયાની લંબાઈ x-અક્ષની દિશાને સમાંતર દિશામાં મૂકતાં અને ઉદ્‌ગમબિંદુને તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર લેતાં, પરાવર્તન સમિતિને લીધે આપણે એમ કહી શકીએ છીએ કે, પ્રત્યેક x પર સ્થિત સળિયાના દરેક dm ખંડને સમાન dmનો ખંડ એ $-x$ પર રહેલો છે. (આકૃતિ 7.8)

સંકલનમાં આવી દરેક જોડનો ચોખ્ખો ફાળો શૂન્ય છે અને તેથી સંકલન $x dm$ પોતે પણ શૂન્ય થાય છે. સમીકરણ (7.6) પરથી એમ કહી શકાય કે, જે બિંદુ માટે સંકલન પોતે શૂન્ય હોય તે બિંદુ દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર છે. આમ, સમાંગ પાતળા સળિયાનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર સાથે એકરૂપ છે. પરાવર્તન સંમિતિના આધારે આ સમજી શકાય છે.

સંમિતિની આ દલીલ સમાંગ વલય, તકતી, ગોળાઓ અથવા વર્તુળાકાર કે લંબચોરસ આડછેદના જાડા સળિયા પર પણ લાગુ થશે. આવા તમામ પદાર્થો માટે તમે જોઈ શકશો કે એક બિંદુ (x, y, z) પર સ્થિત દરેક ઘટક dm માટે બિંદુ $(-x, -y, -z)$ પર પણ તેટલા જ દ્રવ્યમાનનો એક ઘટક લઈ શકો છો. (અન્ય શબ્દોમાં, આ બધા પદાર્થો માટે ઉદ્‌ગમબિંદુ એ પરાવર્તન સંમિતિનું બિંદુ છે.) પરિણામે, સમીકરણ (7.5 a)માં બધાં સંકલન શૂન્ય છે. તેનો અર્થ એ છે કે, ઉપર્યુક્ત તમામ પદાર્થો માટે તેમના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તેમના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર સંપાત થયેલ હશે.

▶ ***ઉદાહરણ 7.1*** એક સમભુજ ત્રિકોણના શિરોબિંદુ પર રહેલ ત્રણ કણોના બનેલા તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર શોધો. આ કણોના દ્રવ્યમાન અનુક્રમે 100 g, 150 g અને 200 g છે. સમભુજ ત્રિકોણની દરેક બાજુ 0.5 m લાંબી છે.

ઉકેલ



આકૃતિ 7.9

આકૃતિ 7.9માં બતાવ્યા પ્રમાણે x અને y અક્ષોની પસંદગી કરતાં સમબાજુ ત્રિકોણ બનાવતાં બિંદુઓ O, A અને Bના યામો એ અનુક્રમે (0, 0), (0.5, 0) અને $(0.25, 0.25\sqrt{3})$ છે. 100 g, 150 g અને 200 gના દ્રવ્યમાન અનુક્રમે O, A અને B પર સ્થિત છે. ત્યારે,

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{[100(0) + 150(0.5) + 200(0.25)]\ \text{g m}}{(100 + 150 + 200)\ \text{g}}$$

$$= \frac{75+50}{450}\,\text{m} = \frac{125}{450}\,\text{m} = \frac{5}{18}\,\text{m}$$

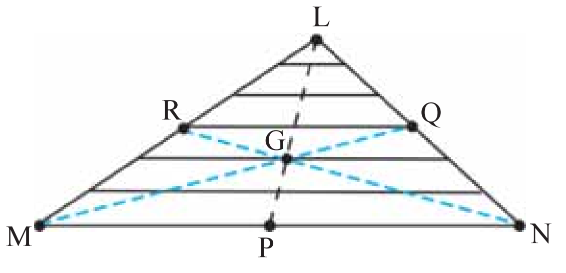
$$Y = \frac{[100(0) + 150(0) + 200(0.25)\sqrt{3}]\ \text{g m}}{450\,\text{g}}$$

$$= \frac{50\sqrt{3}}{450}\,\text{m} = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\text{m} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\,\text{m}$$

દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર C ને આકૃતિમાં દર્શાવવામાં આવ્યું છે. નોંધો કે તે ત્રિકોણ OABનું ભૌમિતિક કેન્દ્ર નથી. શા માટે ?

ઉદાહરણ 7.2 ત્રિકોણાકાર તક્તી (લેમિના)નું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર શોધો.

ઉકેલ આકૃતિ 7.10માં બતાવ્યા પ્રમાણે આ લેમિના (ΔLMN)ને પાયા (MN)ને સમાંતર સાંકડી પટ્ટીઓ (સ્ટ્રિપ્સ)માં વિભાજિત કરી શકાય.

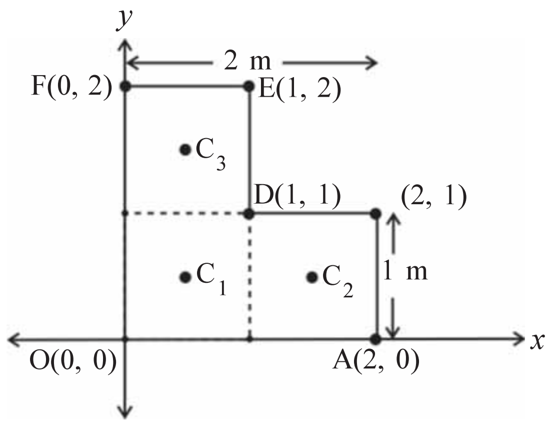


આકૃતિ 7.10

સંમિતિના આધારથી આપણે એમ કહી શકીએ કે દરેક સ્ટ્રિપનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તેના મધ્યબિંદુ પર છે. જો આપણે આ તમામ સ્ટ્રિપ્સનાં મધ્યબિંદુઓને જોડીએ તો આપણને મધ્યગા (median) LP મળશે. આમ, સમગ્ર ત્રિકોણનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર મધ્યગા LP પર આવેલ છે. તેવી જ રીતે, આપણે એવી દલીલ કરી શકીએ કે તે મધ્યગા MQ અને NR પર પણ સ્થિત છે. આનો અર્થ એ કે આ દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર એ મધ્યગાઓનું છેદ બિંદુ છે. એટલે કે ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્ર (Centroid) G પર છે.

ઉદાહરણ 7.3 આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણેનાં પરિમાણોવાળી એક સમાંગ L આકારની લેમિના (પાતળી સપાટ તક્તી)નું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર શોધો. આ તક્તીનું દળ 3 kg છે.

ઉકેલ આકૃતિ 7.11માં બતાવ્યા પ્રમાણે x અને y-અક્ષો પસંદ કરતાં, આપણને L આકારની તક્તીનાં શિરોબિંદુઓના યામો આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણેના મળે છે. આપણે એમ વિચારી શકીએ કે, આ L આકાર એ દરેક 1 m લંબાઈના 3 ચોરસનો બનેલો છે. દરેક ચોરસનું દ્રવ્યમાન 1 kg છે, કેમ કે લેમિના સમાંગ છે. આ ચોરસોનાં દ્રવ્યમાન કેન્દ્રો C_1, C_2 અને C_3 તેમની સંમિતિના કારણે તેમનાં ભૌમિતિક કેન્દ્રો છે અને તેમના યામો અનુક્રમે (1/2, 1/2), (3/2, 1/2), (1/2, 3/2) છે. આપણે ચોરસનાં દ્રવ્યમાનોને આ બિંદુઓ પર કેન્દ્રિત થયેલ છે તેમ લઈએ છીએ. સમગ્ર L આકારનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર (X, Y)એ આ દ્રવ્યમાન બિંદુઓનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર છે.



આકૃતિ 7.11

તેથી,

$$X = \frac{[1(1/2) + 1(3/2) + 1(1/2)]\,\text{kg m}}{(1+1+1)\,\text{kg}} = \frac{5}{6}\,\text{m}$$

$$Y = \frac{[1(1/2) + 1(1/2) + 1(3/2)]\,\text{kg m}}{(1+1+1)\,\text{kg}} = \frac{5}{6}\,\text{m}$$

આ L આકારનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર રેખા OD પર આવેલું છે. આ અનુમાન આપણે કોઈ પણ ગણતરી વિના પણ લગાવી શકીએ છીએ. તમે કહી શકો કેવી રીતે ? ધારો કે, ત્રણેય

ચોરસો કે જે આકૃતિ 7.11ની L આકારની તક્તી બનાવે છે તેમનાં દ્રવ્યમાન જુદાં જુદાં છે. તો પછી તમે આ તક્તીનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર કેવી રીતે નક્કી કરશો ? ◀

7.3 દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ (MOTION OF CENTRE OF MASS)

દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની વ્યાખ્યાથી સજ્જ હવે આપણે એ સ્થિતિમાં છીએ કે, કણોના તંત્ર માટે તેના ભૌતિક મહત્ત્વની ચર્ચા કરી શકીએ. સમીકરણ (7.4d)ને ફરીથી આપણે નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ છીએ :

$$M\mathbf{R} = \sum m_i \mathbf{r}_i = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + ... + m_n\mathbf{r}_n \quad (7.7)$$

આ સમીકરણની બંને બાજુઓનું સમયની સાપેક્ષમાં વિકલન લેતા આપણને

$$M\frac{d\mathbf{R}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + ... + m_n\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}$$

અથવા

$$M\mathbf{V} = m_1\boldsymbol{\upsilon}_1 + m_2\boldsymbol{\upsilon}_2 + ... + m_n\boldsymbol{\upsilon}_n \quad (7.8)$$

મળે છે. અહીં $\boldsymbol{\upsilon}_1(= d\mathbf{r}_1/dt_1)$ એ પ્રથમ કણનો વેગ છે. $\boldsymbol{\upsilon}_2(= d\mathbf{r}_2/dt)$ એ દ્વિતીય કણનો વેગ છે વગેરે અને $\mathbf{V}(= d\mathbf{R}/dt)$ એ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ છે. ધ્યાન રહે કે આપણે m_1, m_2, ... વગેરે દ્રવ્યમાનોનું મૂલ્ય સમય સાથે બદલાતું નથી તેમ ધારેલ છે. આથી આપણે તેમને સમીકરણોનું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતી વખતે અચળ લીધા છે.

સમીકરણ (7.8)નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં આપણને

$$M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = m_1\frac{d\boldsymbol{\upsilon}_1}{dt} + m_2\frac{d\boldsymbol{\upsilon}_2}{dt} + ... + m_n\frac{d\boldsymbol{\upsilon}_n}{dt}$$

અથવા

$$M\mathbf{A} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + ... + m_n\mathbf{a}_n \quad (7.9)$$

મળે છે. જ્યાં, $\mathbf{a}_1(= d\boldsymbol{\upsilon}_1/dt)$ એ પ્રથમ કણનો પ્રવેગ છે. $\mathbf{a}_2(= d\boldsymbol{\upsilon}_2/dt)$ એ દ્વિતીય કણનો પ્રવેગ છે વગેરે અને $\mathbf{A}$ $(= d\mathbf{V}/dt)$ એ કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો પ્રવેગ છે.

હવે, ન્યૂટનના બીજા નિયમ અનુસાર, પ્રથમ કણ પર લાગતા બળને $\mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{a}_1$ વડે આપવામાં આવે છે. દ્વિતીય કણ પર લાગતા બળને $\mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{a}_2$ વડે આપવામાં આવે છે વગેરે. તેથી સમીકરણ (7.9)ને નીચે મુજબ લખી શકાય છે :

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + ... + \mathbf{F}_n \quad (7.10)$$

આમ, કણોના તંત્ર (પ્રણાલી) પર લાગતાં તમામ બળોનો સદિશ સરવાળો એ કણોના તંત્રના કુલ દ્રવ્યમાન અને તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના પ્રવેગના ગુણાકાર જેટલો છે.

નોંધ કરો કે, આપણે પ્રથમ કણ પરના જે બળ $\mathbf{F}_1$ની વાત કરીએ છીએ તે ફક્ત એક જ બળ નથી, પરંતુ પ્રથમ કણ પર લાગતા તમામ બળોનો સદિશ સરવાળો છે. તેવી જ રીતે બીજા કણ માટે વગેરે. દરેક કણ પર લાગતાં આ બળોમાં પ્રણાલી પર બહારના પદાર્થો દ્વારા લાગતાં **બાહ્ય (External)** બળો અને કણો દ્વારા એકબીજાં પર લગાડવામાં આવતા **આંતરિક (Internal)** બળો પણ હશે. આપણે ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ અનુસાર એ પણ જાણીએ છીએ કે, આ આંતરિક બળો દરેક જોડમાં સમાન અને વિરુદ્ધ હોય છે અને સમીકરણ (7.10)ના બળોના સરવાળામાં તેમનું યોગદાન શૂન્ય છે. આમ માત્ર બાહ્ય બળો જ આ સમીકરણમાં ફાળો આપે છે. આપણે તેથી સમીકરણ (7.10)ને ફરીથી નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ છીએ :

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}_{ext} \quad (7.11)$$

જ્યાં $\mathbf{F}_{ext}$ એ કણોના તંત્ર પર લાગતા બધાં જ બાહ્ય બળોનો સદિશ સરવાળો છે.

સમીકરણ (7.11) દર્શાવે છે કે કણોના કોઈ એક તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર એ રીતે ગતિ કરે છે **જાણે કે તંત્રનું સમગ્ર દ્રવ્યમાન, તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પર સંકેન્દ્રિત હોય તથા બધા જ બાહ્ય બળો તેના પર જ લાગતાં હોય.**

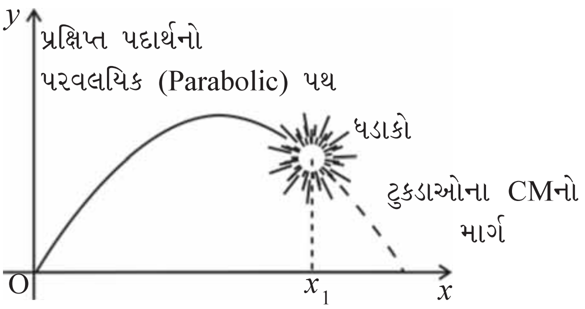
નોંધો કે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ જાણવા માટે કણોના તંત્રના આંતરિક બળોની જાણકારીની જરૂરિયાત નથી. આ માટે આપણે ફક્ત બાહ્ય બળોને જાણવા જ આવશ્યક છે.

સમીકરણ (7.11) મેળવવા માટે આપણે કણોના તંત્રના પ્રકારને સ્પષ્ટ કરવાની જરૂર નથી. આ તંત્ર એ ગતિમાન કણોનું એક સમૂહ હોઈ શકે છે, જેમાં તમામ પ્રકારની આંતરિક ગતિ હોઈ શકે છે અથવા તે એક દૃઢ પદાર્થ પણ હોઈ શકે છે કે જે શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ (ટ્રાન્સલેશન) ગતિ અથવા સ્થાનાંતરણ ગતિ અને ચાકગતિ (રોટેશનલ)નું મિશ્રણ ધરાવતું હોય. કોઈ પણ તંત્ર અને તેના પ્રત્યેક કણોની ગતિ ગમે તેવા હોય તો પણ દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સમીકરણ (7.11) મુજબ ગતિ કરે છે.

જેમ આપણે અગાઉનાં પ્રકરણોમાં કર્યું છે તેમ હવે આપણે વિસ્તરીત પદાર્થોને એકાકી (single) કણો તરીકે લેવાની જગ્યાએ તેમને કણોનાં તંત્રો તરીકે લઈ શકીએ છીએ. તંત્રનું સમગ્ર દ્રવ્યમાન તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું અને તંત્ર પરનાં તમામ બાહ્ય બળો દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પર લાગે છે. આમ ધારીને, આપણે તેમની ગતિના શુદ્ધ સ્થાનાંતરીય ઘટક એટલે કે, તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ મેળવી શકીએ છીએ.

અગાઉ આપણે આ પ્રક્રિયાને સ્પષ્ટ રીતે વ્યાખ્યાયિત અને યોગ્ય ઠેરવ્યા વિના પદાર્થો પરના બળના વિશ્લેષણમાં અને

સમસ્યાઓ ઉકેલવા માટે અનુસરતા હતા. હવે આપણે સમજીએ છીએ કે અગાઉના અભ્યાસોમાં આપણે કહ્યા વગર જ એમ ધાર્યું હતું કે કણોની ચાકગતિ અને/અથવા આંતરિક ગતિ કાં તો હતી જ નહિ અથવા અવગણ્ય હતી. હવે આપણે આમ કરવાની જરૂર નથી. હવે આપણે અગાઉ જે પ્રક્રિયાને અનુસરતા હતા તેને ફક્ત સમર્થન જ નથી મળ્યું, પરંતુ એ પણ જાણી શક્યા છીએ કે જેના દ્વારા (1) એક દૃઢ પદાર્થ જે પરિભ્રમણ કરતો હોય અથવા (2) એક એવું કણોનું તંત્ર કે જેમાં કણો તમામ પ્રકારની આંતરિક ગતિ ધરાવતા હોય, તો તેમની સ્થાનાંતરણ ગતિને કેવી રીતે વર્ણવી શકાય અને અલગ પાડી શકાય.



આકૃતિ 7.12 કોઈ એક પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના ટુકડાઓના દ્વ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ વિસ્ફોટ બાદ પણ એ જ પરવલય પથ પર ચાલુ રહે છે કે જે ગતિપથને તે વિસ્ફોટ ન થયો હોત તો પણ અનુસરત

આકૃતિ 7.12 એ સમીકરણ (7.11)નું સારું ઉદાહરણ છે. સામાન્યતઃ પરવલય આકારના પથને અનુસરતો એક પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ હવામાં ફૂટીને ટુકડાઓમાં વિભાજિત થાય છે. આ વિસ્ફોટ તરફ દોરી રહેલાં બળો આંતરિક બળો છે. તેઓ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિમાં કોઈ જ ફાળો આપતા નથી. કુલ બાહ્ય બળ એટલે કે ગુરુત્વાકર્ષણ બળ એ પદાર્થ પર લાગે છે. તે વિસ્ફોટ પહેલાં અને પછી સમાન જ છે. દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર વિસ્ફોટ બાદ પણ આ બાહ્ય બળના પ્રભાવ હેઠળ એ જ પરવલય પથ પર ગતિમાન રહે છે કે જેને તે વિસ્ફોટ ન થયો હોત તોપણ અનુસરત.

7.4 કણોના તંત્રનું રેખીય વેગમાન (LINEAR MOMENTUM OF A SYSTEM OF PARTICLES)

ચાલો આપણે ફરીથી યાદ કરીએ કે, કણોના રેખીય વેગમાનને

$$\mathbf{p} = m\,\boldsymbol{\upsilon} \tag{7.12}$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત કર્યું છે.

ચાલો આપણે એ પણ યાદ કરીએ કે, એક કણ માટે સાંકેતિક સ્વરૂપે ન્યૂટનના દ્વિતીય નિયમને નીચે મુજબ લખી શકાય છે.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{7.13}$$

જ્યાં, $\mathbf{F}$ એ કણ પરનું બળ છે. ચાલો આપણે n કણોનું એક તંત્ર લઈએ કે જેમનાં દ્રવ્યમાનો અનુક્રમે m_1, m_2, ..., m_n અને વેગો અનુક્રમે $\boldsymbol{\upsilon}_1$, $\boldsymbol{\upsilon}_2$, ..., $\boldsymbol{\upsilon}_n$ હોય. આ કણો પરસ્પર આંતરક્રિયા પણ કરતાં હોઈ શકે અને તેમના પર બાહ્ય બળ પણ લાગતું હોઈ શકે છે. પ્રથમ કણનું રેખીય વેગમાન $m_1\boldsymbol{\upsilon}_1$ છે, દ્વિતીય કણનું રેખીય વેગમાન $m_2\boldsymbol{\upsilon}_2$ છે અને વગેરે વગેરે.

n કણોના આ તંત્ર માટે તંત્રના રેખીય વેગમાનને તંત્રના તમામ વ્યક્તિગત (એકાકી) કણોના રેખીય વેગમાનના સદિશ સરવાળા તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + ... + \mathbf{p}_n$$
$$= m_1\boldsymbol{\upsilon}_1 + m_2\boldsymbol{\upsilon}_2 + ... + m_n\boldsymbol{\upsilon}_n \tag{7.14}$$

આ સમીકરણને સમીકરણ (7.8) સાથે સરખાવતાં,

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V} \tag{7.15}$$

આ રીતે **કણોના તંત્રનું કુલ વેગમાન એ તંત્રના કુલ દ્રવ્યમાન અને તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના વેગના ગુણનફળ સમાન છે.** સમીકરણ (7.15)નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = M\mathbf{A} \tag{7.16}$$

સમીકરણ (7.16) અને સમીકરણ (7.11)ને સરખાવતાં,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \tag{7.17}$$

આ વિધાન એ **કણના તંત્રને લાગુ પડતું ન્યૂટનના બીજા નિયમનું કથન છે.**

હવે ધારી લો કે કણોના તંત્ર પર લાગતાં બાહ્ય બળોનો સરવાળો શૂન્ય છે, તો સમીકરણ (7.17) પરથી,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \text{ અથવા } \mathbf{P} = \text{અચળ} \tag{7.18a}$$

આમ, જ્યારે કણોના તંત્ર પર લાગતું કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, ત્યારે તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન અચળ રહે છે. આ વિધાનને કણોના તંત્રના કુલ રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ કહે છે. સમીકરણ (7.15)ના કારણે આનો અર્થ એ પણ છે કે જ્યારે તંત્ર પર કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય છે ત્યારે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ અચળ રહે છે. (આપણે આ પ્રકરણમાં કણોનાં તંત્રોની ચર્ચા દરમિયાન તંત્રનું કુલ દ્રવ્યમાન અચળ રહે છે તેમ ધારીએ છીએ.)

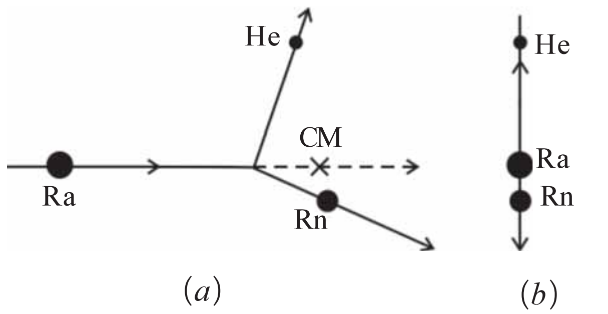
નોંધ કરો કે આંતરિક બળો એટલે કે કણો દ્વારા એકબીજા પર લાગતાં બળોના કારણે પ્રત્યેક કણોનો ગતિપથ જટિલ હોઈ શકે છે. છતાં, જો તંત્ર પર લાગતું કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર અચળ વેગ સાથે ગતિ કરે છે. એટલે

કે એક મુક્ત કણની જેમ સીધી રેખામાં એકસમાન રીતે ગતિ કરે છે.

સદિશ સમીકરણ (7.18a) નીચેનાં ત્રણ અદિશ સમીકરણોને સમતુલ્ય છે.

$P_x = c_1$, $P_y = c_2$ અને $P_z = c_3$ (7.18 b)

અહીં P_x, P_y અને P_z એ કુલ રેખીય વેગમાન સદિશ **P**ના અનુક્રમે x, y અને z અક્ષ પરના ઘટકો છે. c_1, c_2 અને c_3 એ અચળાંકો છે.

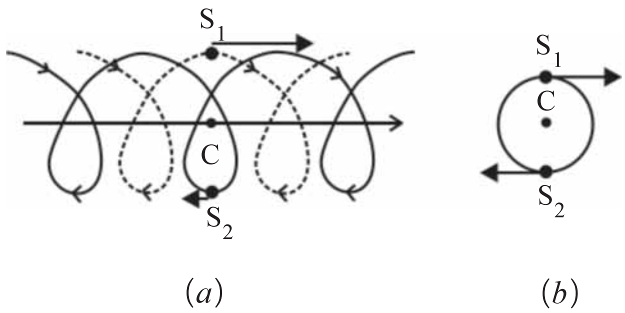


આકૃતિ **7.13** (*a*) *એક ભારે ન્યુક્લિયસ* (Ra)*એ એક હલકા ન્યુક્લિયસ* (R*n*) *અને આલ્ફા કણ* (He)*માં વિભાજિત થાય છે. તંત્રનું* CM *નિયમિત ગતિમાં છે.*

(*b*) *દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની સ્થિર અવસ્થામાં આ જ ભારે ન્યુક્લિયસ* (R*a*)*ના વિભાજનમાં બે કણો એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે.*

ઉદાહરણ તરીકે, ચાલો ગતિમાન એવા અસ્થાયી કણના કિરણોત્સર્ગી ક્ષય (Radioactive Decay)ને ધ્યાનમાં લઈએ. જેમકે, રેડિયમનું ન્યુક્લિયસ. રેડિયમ ન્યુક્લિયસનું એક રેડોન ન્યુક્લિયસ અને એક આલ્ફા કણમાં વિઘટન થાય છે. આ ક્ષયકારક બળો તંત્રનાં આંતરિક બળો છે અને તંત્ર પરના બાહ્ય બળો અવગણ્ય છે. તેથી તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન ક્ષય પહેલાં અને પછી સમાન જ છે. ક્ષયમાં ઉત્પન્ન થયેલા બે કણો રેડોન ન્યુક્લિયસ અને આલ્ફા કણ એવી રીતે જુદી જુદી દિશામાં ગતિમાન થાય છે કે, તેમના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર એ જ દિશામાં ગતિ કરે છે કે ક્ષય પૂર્વે મૂળ રેડિયમ ન્યુક્લિયસ જે પથ પર ગતિ કરતો હતો. [આકૃતિ 7.13(a)]

જો આપણે એ નિર્દેશ ફ્રેમમાંથી ક્ષયનું અવલોકન કરીએ કે જેમાં દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સ્થિર છે, તો ક્ષયમાં સામેલ કણોની ગતિ વિશેષરૂપે સરળ લાગે છે. ઉત્પન્ન થયેલા કણો એકબીજાની પ્રતિસમીપ (Back to Back) દિશામાં એવી રીતે ગતિ કરે છે કે જેથી તેમનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સ્થિર રહે, જે આકૃતિ 7.13(b)માં બતાવ્યું છે. ઉપર્યુક્ત રેડિયોઍક્ટિવ ક્ષય સમસ્યાની જેમ કણોના તંત્રની ઘણી સમસ્યાઓમાં લેબોરેટરી નિર્દેશ



આકૃતિ **7.14** (*a*) *દ્વિસંગી (યુગ્મ) તંત્ર બનાવતા બે તારાઓ,* S_1 *(ત્રુટક રેખા) અને* S_2 *(સળંગ રેખા)ના ગતિપથો. તેમનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર* C *નિયમિત ગતિમાં છે.*

(*b*) *તે જ દ્વિસંગી તંત્ર કે જેનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર* C *સ્થિર છે.*

ફ્રેમના સ્થાને દવ્યમાન કેન્દ્રને નિર્દેશ ફ્રેમ તરીકે લઈ કામ કરવું અનુકૂળ છે.

ખગોળશાસ્ત્રમાં, દ્વિસંગી (યુગ્મ) તારા એક સામાન્ય ઘટના છે. જો કોઈ બાહ્ય બળો ન હોય, તો કોઈ દ્વિસંગી (યુગ્મ) તારાનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર એક મુક્ત કણની જેમ ગતિ કરશે. જે આકૃતિ 7.14(a)માં બતાવ્યા પ્રમાણે છે. સમાન દ્રવ્યમાનવાળા બે તારાઓના ગતિપથો પણ આકૃતિમાં દર્શાવવામાં આવ્યા છે, જે જટિલ દેખાય છે. જો આપણે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની નિર્દેશ ફ્રેમમાં જઈએ તો આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે ત્યાં બે તારાઓ એક વર્તુળમાં સ્થિર દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને ગતિ કરે છે. નોંધ કરો કે આ તારાઓનાં સ્થાન એકબીજાથી સંપૂર્ણ વિરુદ્ધ વ્યાસાંત બિંદુઓ પર હોય છે. (આકૃતિ 7.14(b)) આમ, આપણી નિર્દેશ ફ્રેમમાં, તારાઓના ગતિપથોએ (i) દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની સીધી રેખામાં નિયમિત ગતિ અને (ii) દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને તારાઓની વર્તુળાકાર ભ્રમણકક્ષાઓનું સંયોજન છે.

આ બે ઉદાહરણો પરથી જોઈ શકાય છે, તેમ તંત્રના જુદા જુદા ભાગોની ગતિને **દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને થતી ગતિમાં વિભાજન કરવું** એ ખૂબ જ ઉપયોગી પદ્ધતિ છે જે તંત્રની ગતિ સમજવામાં મદદ કરે છે.

7.5 બે સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર (VECTOR PRODUCT OF TWO VECTORS)

ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં આપણે સદિશ અને તેમના ઉપયોગથી પરિચિત છીએ જ. પ્રકરણ 6 (કાર્ય, ઊર્જા, પાવર)માં આપણે બે સદિશોના અદિશ ગુણાકારને વ્યાખ્યાયિત કર્યો છે. એક મહત્ત્વપૂર્ણ ભૌતિકરાશિ, કાર્યને બે સદિશ રાશિઓ, બળ અને સ્થાનાંતરના અદિશ ગુણાકાર (Scalar Product) તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે.

હવે આપણે બે સદિશોના અન્ય ગુણાકારને વ્યાખ્યાયિત કરીશું. આ ગુણાકાર એ સદિશ રાશિ છે. ચાકગતિના અભ્યાસમાં બે મહત્ત્વની રાશિઓ, બળની ચાકમાત્રા (Moment of Force) અને કોણીય વેગમાન (Angular Momentum) સદિશ ગુણાકારો તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

સદિશ ગુણાકારની વ્યાખ્યા

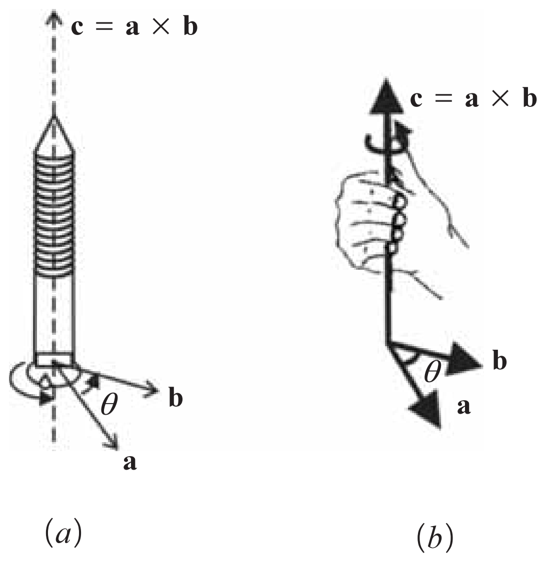
બે સદિશો **a** અને **b**નો સદિશ ગુણાકાર એ સદિશ **c** એવો છે કે,

(i) **c**નું માન = $c = ab \sin\theta$ છે, જ્યાં a અને b એ **a** અને **b**ના માન છે અને θ બે સદિશો વચ્ચેનો કોણ છે.

(ii) **c** એ **a** અને **b**ને સમાવતા સમતલને લંબ છે.

(iii) જો આપણે એક જમણા હાથના સ્ક્રૂને લઈએ કે જેનું શિર્ષ **a** અને **b**ના સમતલમાં હોય અને આ સ્ક્રૂ આ સમતલને લંબ હોય અને જો આપણે તેના શિર્ષને **a** થી **b** દિશામાં ફેરવીએ તો સ્ક્રૂની અણી (ટીપ)એ **c**ની દિશામાં ખસશે. જમણા હાથના સ્ક્રૂનો આ નિયમ આકૃતિ 7.15aમાં દર્શાવેલ છે.

આના બદલે આકૃતિ 7.15bમાં બતાવ્યા પ્રમાણે જો સદિશો **a** અને **b**ના સમતલને લંબ રેખાની ફરતે જમણા હાથની આંગળીઓને **a** થી **b**ની દિશામાં વીંટાળવામાં આવે, તો વિસ્તરેલો (ઊભો) અંગૂઠો **c**ની દિશા દર્શાવે છે.



આકૃતિ **7.15** (a) *બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારની દિશા નિર્ધારિત કરવા માટે જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ*
(b) *સદિશ ગુણાકારની દિશા નિર્ધારિત કરવા માટે જમણા હાથનો નિયમ*

જમણા હાથના નિયમનું એક સરળ સ્વરૂપ નીચે મુજબ છે : તમારા જમણા હાથની હથેળી ખોલો અને આંગળીઓને **a** થી લઈને **b** તરફ વાળો. તમારો ઊભો અંગૂઠો **c** ની દિશામાં હશે.

તે યાદ રાખવું જોઈએ કે કોઈ પણ બે સદિશો **a** અને **b** વચ્ચે બે ખૂણા છે. આકૃતિ 7.15 (a) અથવા (b)માં તેઓ θ (દર્શાવ્યા પ્રમાણે) અને $(360° - \theta)$ને અનુરૂપ છે. ઉપર્યુક્ત નિયમોમાંથી કોઈ એકને લાગુ કરતી વખતે પરિભ્રમણને **a** ને **b** વચ્ચેના નાના કોણ ($<180°$) દ્વારા લેવું જોઈએ. જે અહીં θ છે.

સદિશ ગુણાકારને દર્શાવવા માટે ઉપયોગમાં લેવાતા ક્રોસને (×) કારણે તેને ક્રોસ પ્રોડક્ટ તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.

- નોંધો કે બે સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે જે અગાઉ જણાવ્યું છે. **a.b** = **b.a**

સદિશ ગુણાકાર, જોકે ક્રમના નિયમનું પાલન કરતો નથી એટલે કે **a** × **b** ≠ **b** × **a.**

a × **b** અને **b** × **a** બંનેનું માન સમાન ($ab \sin\theta$) જ છે તથા તે બંને **a** અને **b**ના સમતલને લંબ છે. પરંતુ જમણા હાથના સ્ક્રૂનું પરિભ્રમણ **a** × **b**ના કિસ્સામાં **a** થી **b**નું હોય છે. જ્યારે **b** × **a**માં તે **b** થી **a** છે. આનો અર્થ એ છે કે બે સદિશો પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશાઓમાં છે. આમ

આપણને **a** × **b** = − **b** × **a** મળે છે.

- સદિશ ગુણાકારની અન્ય એક રસપ્રદ બાબત એ તેનો પરાવર્તન હેઠળનો તેનો ગુણધર્મ છે. પરાવર્તન હેઠળ (એટલે કે અરીસામાં પ્રતિબિંબ તરીકે લેતાં) આપણને $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$ અને $z \rightarrow -z$ મળે છે. પરિણામે સદિશના બધાં ઘટકો સંજ્ઞા બદલે છે અને આમ $a \rightarrow -a$, $b \rightarrow -b$. પરાવર્તનમાં **a** × **b**નું શું થશે ?

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \rightarrow (-\mathbf{a}) \times (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

આમ, **a** × **b** પરાવર્તનમાં સંજ્ઞા બદલતું નથી.

- અદિશ અને સદિશ બંને ગુણાકારો સદિશ સરવાળા પર વિભાજનના નિયમનું પાલન કરે છે.

$$\mathbf{a}.(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{a}.\mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

- આપણે ઘટક સ્વરૂપમાં **c** = **a** × **b** લખી શકીએ છીએ. આ માટે આપણે પહેલાં કેટલાક પ્રાથમિક સદિશ ગુણાકારો (ક્રોસ પ્રોડક્ટ્સ) મેળવવાની જરૂર છે.

(i) **a** × **a** = **0** (**0** એ એક શૂન્ય સદિશ (Null Vector) છે. એટલે કે શૂન્ય માનવાળો સદિશ)

આમ થવાનું કારણ એ છે કે **a** × **a**નું માન એ $a^2 \sin 0° = 0$ છે.

આ પરથી નીચેના પરિણામ મળે છે :

$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \mathbf{0},\ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0},\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$

(ii) $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$

નોંધો કે, $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$નું માન sin 90° કે 1 છે. કારણ કે $\hat{\mathbf{i}}$ અને $\hat{\mathbf{j}}$ બંને એકમ માન ધરાવે છે અને તેમની વચ્ચેનો ખૂણો 90° છે. આમ, $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$ એકમ સદિશ (Unit Vector) છે. $\hat{\mathbf{i}}$ અને $\hat{\mathbf{j}}$ના સમતલને લંબ અને જમણી બાજુના સ્ક્રૂના નિયમ દ્વારા તેમની સાથે સંકળાયેલ એવો એક એકમ સદિશ $\hat{\mathbf{k}}$ છે. તેથી ઉપર્યુક્ત પરિણામ મળે છે. તમે આ જ રીતે ચકાસી શકો છો કે,

$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}$ અને $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$

સદિશ ગુણાકારના ક્રમના નિયમ પરથી આપણે કહી શકીએ કે,

$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}},\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}$

નોંધ કરો કે, ઉપરના સદિશ ગુણાકારના સંબંધમાં જો $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ ચક્રીય ક્રમમાં હોય તો સદિશ ગુણાકાર ધન છે. જો $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ ચક્રીય ક્રમમાં ન હોય, તો સદિશ ગુણાકાર ઋણ છે.

હવે,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}}) \times (b_x \hat{\mathbf{i}} + b_y \hat{\mathbf{j}} + b_z \hat{\mathbf{k}})$$

$$= a_x b_y \hat{\mathbf{k}} - a_x b_z \hat{\mathbf{j}} - a_y b_x \hat{\mathbf{k}} + a_y b_z \hat{\mathbf{i}} + a_z b_x \hat{\mathbf{j}} - a_z b_y \hat{\mathbf{i}}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\mathbf{i}} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{\mathbf{k}}$$

ઉપર્યુક્ત સંબંધ મેળવવા માટે આપણે પ્રાથમિક ક્રોસ પ્રોડક્ટ્સનો ઉપયોગ કર્યો છે. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ની આ અભિવ્યક્તિને નિશ્ચાયક સ્વરૂપમાં મૂકી શકાય છે જે યાદ રાખવું સરળ છે.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

▶ *ઉદાહરણ 7.4 બે સદિશોના અદિશ અને સદિશ ગુણાકારો શોધો.*

$\mathbf{a} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}})$ અને $\mathbf{b} = (-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}})$

ઉકેલ

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}) \cdot (-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}})$$
$$= -6 - 4 - 15$$
$$= -25$$

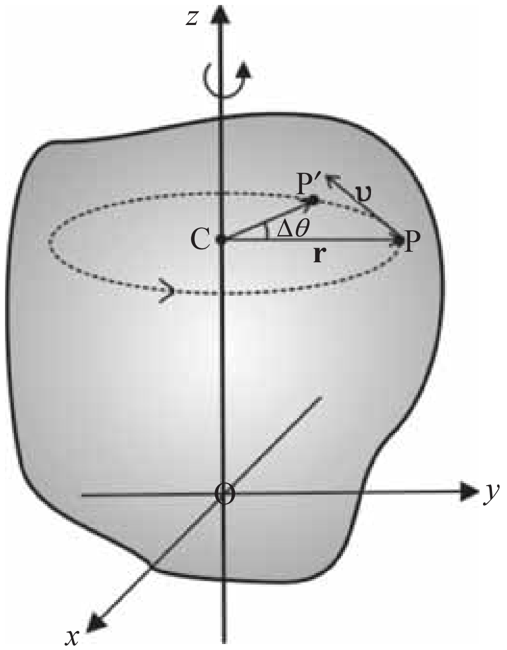
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$$

નોંધો કે, $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -7\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$ ◀

7.6 કોણીય વેગ અને તેનો રેખીય વેગ સાથેનો સંબંધ (ANGULAR VELOCITY AND ITS RELATION WITH LINEAR VELOCITY)

આ વિભાગમાં આપણે કોણીય વેગ અને ચાકગતિમાં તેની ભૂમિકા શું છે તેનો અભ્યાસ કરીશું. આપણે જોયું છે કે ચાકગતિ કરતાં પદાર્થનું દરેક કણ વર્તુળ-પથ પર ગતિમાન છે. કણોનો રેખીય વેગ તેના કોણીય વેગથી સંબંધિત છે. આ બંને રાશિઓ વચ્ચેના સંબંધમાં જેના વિશે આપણે છેલ્લા વિભાગમાં શીખ્યા તે સદિશ ગુણાકારનો સમાવેશ થાય છે.

ચાલો પાછા આકૃતિ 7.4 પર જઈએ. ઉપર જણાવ્યા મુજબ, સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતા એક દૃઢ



આકૃતિ 7.16 સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને પરિભ્રમણ. (સ્થિર z– અક્ષને અનુલક્ષીને ફરતા એક દૃઢ પદાર્થનો એક કણ (P) અક્ષ પરના કેન્દ્ર (C)ની આસપાસ એક વર્તુળ પર ગતિમાન છે.)

પદાર્થનો દરેક કણ એક વર્તુળ-પથ પર ગતિ કરે છે. જે અક્ષને લંબ સમતલમાં છે અને તેનું કેન્દ્ર અક્ષ પર છે. આકૃતિ 7.16માં આપણે આકૃતિ 7.4ને ફરીથી દોરેલ છે. જે એક સ્થિર અક્ષ (z-અક્ષ તરીકે લેવામાં આવેલ છે)ની ફરતે ચાકગતિ કરતા દૃઢ પદાર્થનો કોઈ એક લાક્ષણિક કણ (એક બિંદુ P) દર્શાવે છે. આ કણ જેનું કેન્દ્ર C હોય તેવું એક વર્તુળ બનાવે

છે. આ વર્તુળની ત્રિજ્યા r છે, જે બિંદુ 'P'નું અક્ષથી લંબઅંતર દર્શાવે છે. P આગળ કણનો રેખીય વેગ સદિશ **υ** પણ બતાવેલ છે. તે વર્તુળ પર P પરના સ્પર્શકની દિશામાં છે.

Δt સમયના અંતરાલ (આકૃતિ 7.16) પછી કણની સ્થિતિ P′ છે. કોણ PCP′ એ Δt સમયમાં કણનું કોણીય સ્થાનાંતર $\Delta\theta$ દર્શાવે છે. Δt અંતરાલ પર કણનો સરેરાશ કોણીય વેગ એ $\Delta\theta / \Delta t$ છે. Δt જેમ શૂન્યની નજીક જાય છે (એટલે કે ક્રમશઃ નાનાં મૂલ્યો લે છે.) તેમ ગુણોત્તર $\Delta\theta / \Delta t$ એવા લક્ષ પર પહોંચે છે કે જે P સ્થાન પરના કણનો તાત્ક્ષણિક કોણીય વેગ $d\theta / dt$ છે. આપણે **તાત્ક્ષણિક કોણીય વેગ (Instantaneous Angular Velocity)**ને ω (ગ્રીક અક્ષર ઓમેગા) વડે દર્શાવીએ. આપણે વર્તુળાકાર ગતિના આપણા અભ્યાસ પરથી જાણીએ છીએ કે વર્તુળાકાર ગતિ કરતા કોઈ કણના રેખીય વેગનું માન એ તે કણના કોણીય વેગ સાથે સરળ સંબંધ $\upsilon = \omega r$ દ્વારા સંબંધિત છે. જ્યાં r એ વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.

આપણે એમ પણ અવલોકન કરી શકીએ છીએ કે કોઈ પણ ક્ષણે સંબંધ $\upsilon = \omega r$ એ બધા કણોને લાગુ પડે છે. આમ, દૃઢ પદાર્થમાં સ્થિર અક્ષથી લંબ અંતર r_i પરના કણ માટે આપેલ ક્ષણે રેખીય વેગ

$$\upsilon_i = \omega r_i \tag{7.19}$$

દ્વારા અપાય છે. ક્રમ i એ 1 થી n સુધી ચલે છે. જ્યાં n એ પદાર્થના કણોની કુલ સંખ્યા છે.

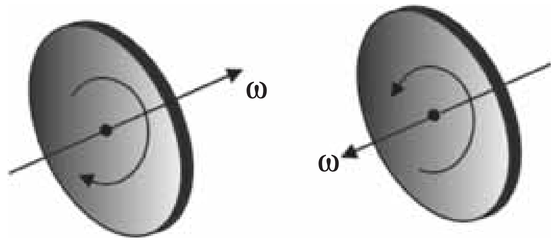
અક્ષ પરના કણો માટે $r = 0$ અને તેથી $\upsilon = \omega r = 0$, તેથી ધરી પરના કણો સ્થિર છે. આમ અક્ષ સ્થિર છે તેની ચકાસણી થાય છે.

નોંધ લો કે **આપણે તમામ કણો માટે સમાન કોણીય વેગ ω નો ઉપયોગ કરીએ છીએ. તેથી આપણે ωને સમગ્ર પદાર્થના કોણીય વેગ તરીકે સ્વીકારીશું.**

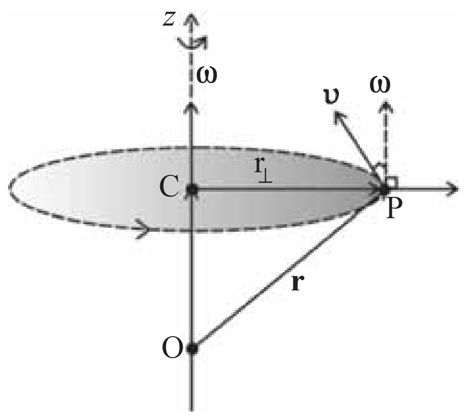
આપણે પદાર્થના શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ માટે એવી લાક્ષણિકતા જણાવી છે કે પદાર્થના તમામ ભાગો કોઈ પણ ક્ષણે સમાન વેગ ધરાવે છે. એ જ રીતે, શુદ્ધ ચાકગતિની લાક્ષણિકતા આપણે પદાર્થના તમામ ભાગો, સમયની કોઈ પણ ક્ષણે સમાન કોણીય વેગ ધરાવે છે તે દ્વારા જણાવી શકીએ છીએ. નોંધ કરો કે સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને દૃઢ પદાર્થના પરિભ્રમણની આ લાક્ષણિકતા એ વિભાગ 7.1માં વર્ણવેલ કે પદાર્થના દરેક કણ એક વર્તુળમાં કે જે અક્ષના લંબ સમતલમાં છે તેની પર ગતિ કરે છે અને તેનું કેન્દ્ર અક્ષ પર છે તેની જેમ જ ચાકગતિને દર્શાવવાની આ અન્ય એક રીત છે.

આપણી ચર્ચામાં અત્યાર સુધી તો કોણીય વેગ અદિશ રાશિ હોય તેવું લાગે છે. હકીકતમાં તે સદિશ છે. આપણે આ હકીકતને સાબિત નહિ કરીએ. પરંતુ આપણે તેને સ્વીકારી લઈશું. સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે કોણીય વેગ સદિશએ ભ્રમણાક્ષની દિશામાં હોય છે અને તે જ્યારે જમણા હાથના સ્ક્રૂનું શીર્ષ પદાર્થ સાથે ફેરવવામાં આવે છે ત્યારે જમણા હાથનો સ્ક્રૂ જે દિશામાં આગળ વધે છે એ દિશાનો નિર્દેશ કરે છે. (જુઓ આકૃતિ 7.17a.)

ઉપર ઉલ્લેખ કર્યા મુજબ આ સદિશનું માન $\omega = d\theta/dt$ છે.



આકૃતિ 7.17(*a*) *જો જમણા હાથના સ્ક્રૂનું શીર્ષ પદાર્થ સાથે ભ્રમણ કરે તો સ્ક્રૂ કોણીય વેગ* **ω***ની દિશામાં આગળ વધે છે. જો પદાર્થના પરિભ્રમણની [સમઘડી અથવા વિષમઘડી] દિશામાં ફેરફાર થાય છે તો તે* **ω***ની દિશામાં પણ ફેરફાર કરે છે.*



આકૃતિ 7.17(*b*) *કોણીય વેગ સદિશ* **ω** *એ સ્થિર અક્ષ પર દર્શાવેલ છે. P પરના કણનો રેખીય વેગ* **υ** = **ω** × **r** *છે. જે* **ω** *અને* **r** *બંનેને લંબ છે અને કણ દ્વારા બનાવાયેલ વર્તુળના સ્પર્શકની દિશામાં છે.*

હવે આપણે સદિશ ગુણાકાર **ω** × **r** શું છે તે જોઈશું. આકૃતિ 7.17 (b)નો સંદર્ભ લો, જે આકૃતિ 7.16નો એક ભાગ છે અને તેને કણ P નો માર્ગ બતાવવા પુનઃ પ્રસ્તુત કરેલ છે. આ આકૃતિ એ સ્થિર (z−અક્ષની) દિશામાંનો સદિશ **ω** દર્શાવે છે જે સાથે સાથે ઉદ્‌ગમબિંદુના સંદર્ભમાં આ દૃઢ પદાર્થના P પરના કણનું સ્થાનસદિશ **r** = **OP** પણ છે. નોંધ કરો કે ઉદ્‌ગમબિંદુને પરિભ્રમણના અક્ષ પર પસંદ કરવામાં આવેલ છે.

હવે $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{OC} + \mathbf{CP})$

પણ $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OC} = \mathbf{0}$ કેમ કે $\boldsymbol{\omega}$ એ **OC** તરફ છે.

જેથી $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CP}$

સદિશ $\boldsymbol{\omega} \times$ CP એ $\boldsymbol{\omega}$ને એટલે કે z-અક્ષને અને P પરના કણ દ્વારા બનાવેલ વર્તુળની ત્રિજ્યા **CP**ને પણ લંબ છે. તેથી તે P આગળ વર્તુળના સ્પર્શકની દિશામાં છે. પણ $\boldsymbol{\omega} \times$ **CP**નું માન ω (CP) છે કારણ કે $\boldsymbol{\omega}$ અને CP એકબીજાને લંબ છે. આપણે CPને $\mathbf{r}_{\perp}$ દ્વારા દર્શાવીશું, અગાઉ કર્યું તેમ **r** દ્વારા નહિ.

આ રીતે $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ એ $\omega r_{\perp}$ના માનનો સદિશ છે અને તે P પરના કણ દ્વારા બનાવેલ વર્તુળના સ્પર્શકની દિશામાં છે. P પર રેખીય વેગ સદિશ $\boldsymbol{\upsilon}$નું માન અને દિશા પણ એટલા જ છે.

આમ,

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{7.20}$$

હકીકતમાં, આ સંબંધ સમીકરણ (7.20), એક સ્થિર બિંદુને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં દૃઢ પદાર્થ જેમકે ભમરડા માટે પણ સત્ય છે [આકૃતિ 7.6(a)]. આ કિસ્સામાં **r** એ ઉદ્‌ગમ બિંદુ તરીકે લેવાયેલા સ્થિર બિંદુની સાપેક્ષે કણનો સ્થાન સદિશ રજૂ કરે છે.

આપણે નોંધીએ કે **સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને પરિભ્રમણ માટે, સદિશ $\boldsymbol{\omega}$ની દિશા સમય સાથે બદલાતી નથી. આમ છતાં, તેમનું માન ક્ષણે ક્ષણે બદલાઈ શકે છે. વધુ વ્યાપક પરિભ્રમણ માટે $\boldsymbol{\omega}$નું માન અને દિશા બંનેમાં ક્ષણે ક્ષણે ફેરફાર થઈ શકે છે.**

7.6.1 કોણીય પ્રવેગ (Angular acceleration)

તમે કદાચ નોંધ્યું હશે કે, જેની સાથે આપણે પહેલેથી જ પરિચિત છીએ તે સ્થાનાંતરણ ગતિના અભ્યાસની દિશામાં જ આપણે ચાકગતિનો અભ્યાસ આગળ ધપાવી રહ્યા છીએ. રેખીય સ્થાનાંતર અને વેગ ($\boldsymbol{\upsilon}$)ના શુદ્ધ ગતિકી ચલોને અનુરૂપ ચાકગતિમાં, કોણીય સ્થાનાંતર અને કોણીય વેગ ($\boldsymbol{\omega}$) છે. એ હવે સ્વાભાવિક છે કે સ્થાનાંતરણ ગતિમાં રેખીય પ્રવેગને વેગના ફેરફારના સમય-દર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કર્યું હતું તેવી જ રીતે ચાકગતિમાં કોણીય પ્રવેગને વ્યાખ્યાયિત કરીએ. આપણે કોણીય વેગના ફેરફારના સમય-દર તરીકે કોણીય પ્રવેગ $\boldsymbol{\alpha}$ને વ્યાખ્યાયિત કરીશું. આમ,

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \tag{7.21}$$

જો પરિભ્રમણની અક્ષ સ્થિર હોય, તો $\boldsymbol{\omega}$ની દિશા અને તેથી, $\boldsymbol{\alpha}$ની દિશા પણ સ્થિર હોય. આ કિસ્સામાં સદિશ સમીકરણ એ એક અદિશ સમીકરણમાં પરિણમે છે.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{7.22}$$

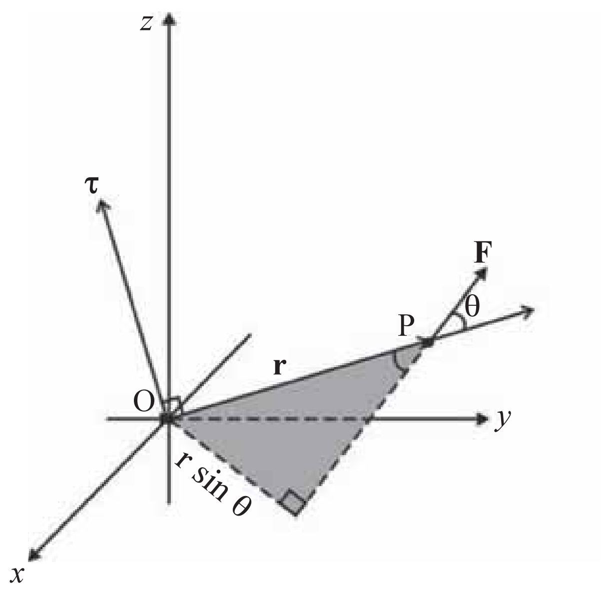
7.7 ટૉર્ક અને કોણીય વેગમાન (TORQUE AND ANGULAR MOMENTUM)

આ વિભાગમાં, આપણે એવી બે ભૌતિકરાશિઓથી અવગત થઈશું કે જેને બે સદિશોના સદિશ ગુણાકાર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. આપણે જોઈશું કે આ રાશિઓ કણોનાં તંત્રોની, ખાસ કરીને દૃઢ પદાર્થોની, ગતિની ચર્ચામાં મહત્ત્વની છે.

7.7.1 બળની ચાકમાત્રા (ટૉર્ક) [Moment of force (Torque)]

આપણે શીખ્યાં છીએ કે સામાન્ય રીતે દૃઢ પદાર્થની ગતિ એ ચાકગતિ અને સ્થાનાંતરણનું સંયોજન છે. જો પદાર્થ કોઈ એક બિંદુ અથવા રેખા સાથે જડિત હોય, તો તેને માત્ર ચાકગતિ હોય છે. આપણે જાણીએ છીએ કે, કોઈ પદાર્થની સ્થાનાંતરણ અવસ્થાને બદલવા માટે એટલે કે રેખીય પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરવા માટે બળ જરૂરી છે. આપણે પછી સવાલ કરી શકીએ કે ચાકગતિના કિસ્સામાં બળને સમતુલ્ય શું છે ? વાસ્તવિક પરિસ્થિતિમાં આ પ્રશ્નની ચકાસણી કરવા માટે આપણે બારણું ખોલવાનું કે બંધ કરવાનું ઉદાહરણ લઈએ. બારણું એક દૃઢ પદાર્થ છે, જે મિજાગરામાંથી પસાર થતી સ્થિર ઊભી અક્ષને અનુલક્ષીને ફરી શકે છે. બારણાને કોણ પરિભ્રમણ કરાવે છે ? એ તો સ્પષ્ટ છે કે જ્યાં સુધી કોઈ બળ લગાડવામાં ન આવે ત્યાં સુધી બારણું ભ્રમણ કરતું નથી. પરંતુ ગમે તે બળ આ કાર્ય નથી કરી શકતું. મિજાગરામાંથી પસાર થતી સ્થિર ઊભી અક્ષ પર લગાડવામાં આવતું બળ એ કોઈ પણ ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરી શકતું નથી, આથી વિશેષ આપેલ માનનું એક બળ બારણાની બાહ્ય ધાર પર લંબવત લગાડવામાં આવે, તો તે પરિભ્રમણ ઉત્પન્ન કરવા માટે સૌથી વધુ અસરકારક છે. ચાકગતિમાં એકલું બળ નહિ, પરંતુ તે કેવી રીતે અને ક્યાં લગાડવામાં આવે છે તે પણ મહત્ત્વનું છે.

ચાકગતિમાં બળને સમતુલ્ય ભૌતિકરાશિ **બળની ચાકમાત્રા (Moment of Force)** છે. તેને **ટૉર્ક (Torque)** અથવા **બળયુગ્મ (Couple)** તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે. (આપણે બળની ચાકમાત્રા અને ટૉર્ક શબ્દોનો ઉપયોગ એકબીજાના પર્યાય તરીકે કરીશું.) પ્રથમ આપણે એક કણના ખાસ કિસ્સા માટે બળની ચાકમાત્રા વ્યાખ્યાયિત કરીશું. ત્યારબાદ આ ખ્યાલ વિસ્તારીને આપણે તેને દૃઢ પદાર્થ સહિત કણોનાં તંત્રોને લાગુ કરીશું. આપણે ચાકગતિની અવસ્થામાં થતાં ફેરફાર એટલે કે દૃઢ પદાર્થના કોણીય પ્રવેગ સાથે પણ તેને સાંકળીશું.



આકૃતિ 7.18 **τ = r × F**, **τ** *એ* **r** *અને* **F** *ધરાવતાં સમતલને લંબરૂપ છે અને તેની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ દ્વારા આપવામાં આવે છે.*

જો કોઈ એક બિંદુ P કે જેનું ઉદ્‌ગમબિંદુ Oની સાપેક્ષે સ્થાન એ સ્થાનસદિશ **r** (આકૃતિ 7.18) વડે આપવામાં આવે છે તે બિંદુએ એક કણ પર બળ **F** લાગે તો ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે કણ પર લાગતા બળની ચાકમાત્રા નીચેના સદિશ ગુણાકાર તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (7.23)$$

બળની ચાકમાત્રા (અથવા ટૉર્ક) એક સદિશ રાશિ છે. તેની સંજ્ઞા τ ગ્રીક અક્ષર ટૌ છે. τનું માન

$$\tau = r\,F\,\sin\theta \qquad (7.24a)$$

છે. જ્યાં r એ સ્થાનસદિશ ***r***નું માન એટલે કે લંબાઈ OP છે. F એ બળ **F**નું માન છે અને આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ θ એ ***r*** અને **F** વચ્ચેનો ખૂણો છે.

બળની ચાકમાત્રાનાં પરિમાણો ML^2T^{-2} છે. તેનાં પરિમાણો કાર્ય અથવા ઊર્જાના જેવા જ છે. તેમ છતાં તે કાર્યથી ખૂબ જ અલગ ભૌતિકરાશિ છે.

બળની ચાકમાત્રા એ સદિશ છે. જ્યારે કાર્ય એક અદિશ છે. બળની ચાકમાત્રાનો SI એકમ ન્યૂટન મીટર (N m) છે. બળની ચાકમાત્રાનું માન નીચે મુજબ લખી શકાય છે :

$$\tau = (r\,\sin\theta)\,F = r_{\perp}F \qquad (7.24b)$$

$$\text{અથવા } \tau = r\,F\,\sin\theta = rF_{\perp} \qquad (7.24c)$$

જ્યાં, $r_{\perp} = r\,\sin\theta$ એ ઉદ્‌ગમબિંદુથી **F**ની કાર્યરેખાનું લંબઅંતર છે અને $F_{\perp}$ $(= F\,\sin\theta)$ એ **F**નો **r**ની લંબ દિશામાંનો ઘટક છે. નોંધ કરો કે જો $r = 0$, $F = 0$ અથવા $\theta = 0°$ અથવા $180°$ હોય તો $\tau = 0$. આમ, જો બળનું માન શૂન્ય હોય અથવા જો બળની કાર્યરેખા ઉદ્‌ગમબિંદુમાંથી પસાર થતી હોય, તો બળની ચાકમાત્રા શૂન્ય થાય છે.

આપણે નોંધવું જોઈએ કે **r** × **F** એ સદિશ ગુણાકાર છે. તેથી બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારના બધા જ ગુણધર્મો તેને લાગુ પડે છે. જો બળની દિશા ઉલટાવવામાં આવે તો બળની ચાકમાત્રાની દિશા પણ ઊલટાય છે. જો **r** અને **F** બંનેની દિશા ઉલટાવવામાં આવે, તો બળની ચાકમાત્રાની દિશા તે જ રહે છે (ઊલટાતી નથી).

7.7.2 કણનું કોણીય વેગમાન (Angular Momentum of a particle)

જેમ બળની ચાકમાત્રા એ બળનું પરિભ્રમણીય સમતુલ્ય છે. તે જ પ્રમાણે કોણીય વેગમાન નામની રાશિ રેખીય વેગમાનનું પરિભ્રમણીય સમતુલ્ય છે. પ્રથમ આપણે એક કણના વિશિષ્ટ કિસ્સા માટે કોણીય વેગમાનને વ્યાખ્યાયિત કરીશું અને એક કણની ગતિના સંદર્ભમાં તેની ઉપયોગિતા જોઈશું. ત્યાર બાદ આપણે દૃઢ પદાર્થ સહિતના કણોનાં તંત્રો માટે કોણીય વેગમાનની આ વ્યાખ્યાને લાગુ પાડીશું.

બળની ચાકમાત્રાની જેમ કોણીય વેગમાન પણ એક સદિશ ગુણાકાર છે. તે (રેખીય) વેગમાનની ચાકમાત્રા તરીકે પણ ઓળખાય છે. આ પદ પરથી કોણીય વેગમાન કેવી રીતે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે તેનું અનુમાન કોઈ કરી શકે છે.

ઉદ્‌ગમબિંદુ O થી **r** સ્થાને, m દળનો અને **p** રેખીય વેગમાન ધરાવતો એક કણ લો. ઉદ્‌ગમબિંદુ Oની સાપેક્ષે કોણીય વેગમાન ***l***ને

$$\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad (7.25a)$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

આ કોણીય વેગમાન સદિશનું માન

$$l = r\,p\,\sin\theta \qquad (7.26a)$$

છે, જ્યાં p એ **p**નું માન છે અને θ એ **r** અને **p** વચ્ચેનો ખૂણો છે. આમ આપણે લખી શકીએ કે,

$$l = r\,p_{\perp} \text{ અથવા } r_{\perp}p \qquad (7.26b)$$

જ્યાં $r_{\perp}$ $(= r\,\sin\theta)$ એ ઉદ્‌ગમબિંદુથી **p**ની દિશારેખાનું લંબઅંતર છે અને $p_{\perp}$ $(= p\,\sin\theta)$ એ **p**નો **r**ને લંબ દિશામાંનો ઘટક છે. જ્યારે રેખીય વેગમાન લુપ્ત પામે $(p = 0)$ અથવા જો કણ ઉદ્‌ગમબિંદુ પર હોય $(r = 0)$ અથવા જો **p**ની દિશારેખા ઉદ્‌ગમબિંદુમાંથી પસાર થતી હોય $\theta = 0°$ અથવા $180°$ ત્યારે આપણે અપેક્ષા મુજબ કોણીય વેગમાન શૂન્ય $(l = 0)$ થાય.

ભૌતિકરાશિઓ, બળની ચાકમાત્રા અને કોણીય વેગમાન તેમની વચ્ચે મહત્ત્વપૂર્ણ સંબંધ ધરાવે છે. તે બળ અને રેખીય વેગમાન વચ્ચેના સંબંધનો પરિભ્રમણીય સમતુલ્ય છે. એક કણના સંદર્ભમાં સંબંધ તારવવા માટે આપણે સમયના સાપેક્ષે $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$નું વિકલન કરીએ.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

જમણી બાજુએ વિકલન માટે ગુણાકારનો નિયમ લાગુ પાડતાં,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$$

હવે, કણનો વેગ $\boldsymbol{\upsilon} = d\mathbf{r}/dt$ છે અને $\mathbf{p} = m\boldsymbol{\upsilon}$. આના કારણે

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} = \boldsymbol{\upsilon} \times m\,\boldsymbol{\upsilon} = 0.$$

કારણ કે, બે સમાંતર સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર શૂન્ય થાય છે. વધુમાં $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ છે.

$$\mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}$$

આથી $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \boldsymbol{\tau}$

અથવા $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau} \qquad (7.27)$$

આમ, કણના કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમય-દર તેના પર લાગતાં ટૉર્ક જેટલો છે. આ સમીકરણ $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$નું પરિભ્રમણીય સમતુલ્ય છે, જે એક કણની સ્થાનાંતરિત ગતિ માટે ન્યૂટનના બીજા નિયમને વ્યક્ત કરે છે.

કણોના કોઈ તંત્ર માટે ટૉર્ક અને કોણીય વેગમાન (Torque and angular momentum for a system of particles)

આપેલ બિંદુને અનુલક્ષીને કણોના તંત્રનું કુલ કોણીય વેગમાન મેળવવા માટે આપણે પ્રત્યેક કણના કોણીય વેગમાનોનો સદિશ સરવાળો કરવો પડે છે. આમ, n કણોના તંત્ર માટે

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \ldots\ldots + \mathbf{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{l}_i$$

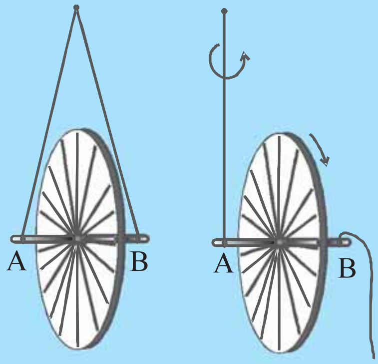
iમા કણના કોણીય વેગમાનને

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

વડે દર્શાવાય છે.

જ્યાં, $\mathbf{r}_i$ એ આપેલ ઉદ્‌ગમબિંદુના સંદર્ભમાં iમાં કણનો સ્થાનસદિશ છે અને $\mathbf{p}_i = (m_i\boldsymbol{\upsilon}_i)$ એ કણનું રેખીય વેગમાન છે. (આ કણનું દળ m_i અને વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_i$ છે.) આપણે કણોના

સાઈકલની રિંગ સાથે પ્રયોગ



પ્રારંભમાં પછીથી

એક સાઈકલની રિંગ લો અને બંને બાજુએ તેની ધરી (એક્સલને) લંબાવો. બાજુની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે બે દોરી, બંને છેડા A અને B પર બાંધો. આ બંને દોરીને એક હાથમાં એ રીતે પકડી રાખો કે રિંગ શિરોલંબ રહે. જો તમે એક દોરીને છોડો છો તો રિંગ નમી જશે. હવે બંને દોરીને એક હાથમાં રાખીને રિંગને ઊભી સ્થિતિમાં રાખીને વ્હીલને બીજા હાથથી ધરીની ફરતે ઝડપી ફેરવો. પછી તમારા હાથમાંથી એક દોરી, દા.ત., Bને છોડો અને શું થાય છે તેનું અવલોકન કરો.

રિંગ ઊર્ધ્વ સમતલમાં ફરતી રહે છે અને તેના પરિભ્રમણનું સમતલ દોરી Aની આસપાસ ફરે છે. આપણે કહીએ છીએ કે રિંગની પરિભ્રમણ-અક્ષ અથવા સમતુલ્ય રીતે તેનું કોણીય વેગમાન દોરી Aને અનુલક્ષીને ઘૂર્ણન (precession) કરે છે.

આ ફરતી રિંગ કોણીય વેગમાન ઉત્પન્ન કરે છે. આ કોણીય વેગમાનની દિશા નિર્ધારિત કરો. જ્યારે તમે ફરતી રિંગને દોરી A વડે પકડી રાખો છો ત્યારે ટૉર્ક પેદા થાય છે. (અમે ટૉર્ક કેવી રીતે પેદા થાય છે અને તેની દિશા શું છે તે શોધવાનું તમારે માટે છોડી દઈએ છીએ.) આ કોણીય વેગમાન પર ટૉર્કની અસર તે કોણીય વેગમાન અને ટૉર્ક એમ બંનેને લંબ અક્ષની આસપાસ તેનું ઘૂર્ણન કરવાની છે. આ તમામ નિવેદનો ચકાસો.

કોઈ એક તંત્રના કુલ કોણીય વેગમાનને નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ છીએ :

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \qquad (7.25b)$$

આ એક એકાકી કણના કોણીય વેગમાનની વ્યાખ્યા (સમીકરણ 7.25a)નું કણોના તંત્ર માટેનું વ્યાપકીકરણ છે.

સમીકરણો (7.23) અને (7.25b)નો ઉપયોગ કરીને આપણે

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum \mathbf{l}_i\right) = \sum_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i \qquad (7.28a)$$

મેળવી શકીએ, જ્યાં τ_i એ iમા કણ પર લાગતું ટૉર્ક છે.

$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

iમા કણ પર લાગતું બળ $\mathbf{F}_i$ એ કણ પર લાગતાં બાહ્ય બળો $\mathbf{F}_i^{ext}$ અને તંત્રના બીજા કણો દ્વારા તેના પર લાગતાં આંતરિક બળો $\mathbf{F}_i^{\text{int}}$નો સદિશ સરવાળો છે. આથી, આપણે કુલ ટૉર્કમાં બાહ્ય અને આંતરિક બળોના ફાળાને જુદા પાડી શકીએ છીએ.

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{ext} + \boldsymbol{\tau}_{\text{int}}$$

જ્યાં, $\boldsymbol{\tau}_{ext} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}$

અને $\boldsymbol{\tau}_{\text{int}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{int}}$

આપણે ન્યૂટનનો માત્ર ત્રીજો નિયમ-કે તંત્રના કોઈ પણ બે કણો વચ્ચે લાગતાં બળો એ સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે-તે જ નહિ પરંતુ આ બળો તે બંને કણોને જોડતી રેખાની દિશામાં હોય છે તેમ પણ ધારેલ છે. આ કિસ્સામાં તંત્ર પરના કુલ ટૉર્કમાં આંતરિક બળોનો ફાળો શૂન્ય હોય છે. કારણ કે, પ્રત્યેક ક્રિયા-પ્રતિક્રિયા યુગ્મ બળોની જોડથી પરિણમતું ટૉર્ક શૂન્ય છે. આમ, આપણને $\boldsymbol{\tau}_{\text{int}} = 0$ અને તેથી $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{ext}$.

પણ $\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i$ હોવાથી સમીકરણ (7.28a) પરથી

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{ext} \tag{7.28b}$$

આમ, **કોઈ એક બિંદુની સાપેક્ષે** (આપણી નિર્દેશ-ફ્રેમમાં તેને ઉદ્‌ગમબિંદુ તરીકે લીધેલ છે.) **કણોના કોઈ એક તંત્ર પરના કુલ કોણીય વેગમાનના સમય સાથે ફેરફારનો દર એ આ જ બિંદુની સાપેક્ષે તંત્ર પર લાગતાં બાહ્ય ટૉર્ક** (એટલે કે બાહ્ય બળોથી ઉદ્‌ભવતા ટૉર્ક)**ના સરવાળા બરાબર છે.** સમીકરણ (7.28b) એ સમીકરણ (7.23)ના એકાકી કણના કિસ્સાનું કણોના તંત્ર માટેનું વ્યાપકીકરણ છે. નોંધો કે જ્યારે આપણી પાસે ફક્ત એક જ કણ હોય ત્યારે કોઈ પણ આંતરિક બળો કે ટૉર્ક હોતાં નથી. સમીકરણ (7.28b) એ

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \tag{7.17}$$

નું ચાકગતિમાંનું સમતુલ્ય છે.

ધ્યાન રહે કે સમીકરણ (7.17)ની જેમ સમીકરણ (7.28b) એ કણોના કોઈ પણ તંત્રને લાગુ પડે છે. પછી ભલે તે દૃઢ પદાર્થ હોય કે વિભિન્ન પ્રકારની આંતરિક ગતિ ધરાવતા સ્વતંત્ર કણોનું તંત્ર.

કોણીય વેગમાનનું સંરક્ષણ (Conservation of angular momentum)

જો $\boldsymbol{\tau}_{ext} = 0$ હોય તો સમીકરણ (7.28b) પરથી,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

અથવા $\mathbf{L}$ = અચળ (7.29a)

થશે. આમ, જો કણોના તંત્ર પરનું કુલ બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય તો આ તંત્રના કુલ કોણીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થશે, એટલે કે અચળ રહેશે. સમીકરણ (7.29a) એ ત્રણ અદિશ સમીકરણોને સમતુલ્ય છે.

$L_x = K_1$, $L_y = K_2$ અને $L_z = K_3$ (7.29b)

અહીં, K_1, K_2 અને K_3 એ અચળાંકો છે. L_x, L_y અને L_z એ કુલ કોણીય વેગમાન $\mathbf{L}$ના અનુક્રમે x, y અને z-અક્ષો પરનાં ઘટકો છે. કુલ કોણીય વેગમાન સંરક્ષિત છે આ વિધાનનો અર્થ એ છે કે આ ત્રણેય ઘટકો પણ સંરક્ષિત છે.

સમીકરણ (7.29a) એ સમીકરણ (7.18a) એટલે કે કણોના કોઈ પણ તંત્ર માટે કુલ રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમનું ચાકગતિમાંનું સમતુલ્ય છે. સમીકરણ (7.18a)ની જેમ તેની પણ વ્યવહારુ પરિસ્થિતિઓમાં ઘણી ઉપયોગિતાઓ છે. આ પ્રકરણમાં હવે પછી આપણે તેની કેટલીક રસપ્રદ ઉપયોગિતાઓ જોઈશું.

▶ *ઉદાહરણ 7.5* ઉદ્‌ગમબિંદુને અનુલક્ષીને બળ $7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$નો ટૉર્ક શોધો. જે કણ પર બળ લાગે છે તેનો સ્થાનસદિશ $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ છે.

ઉકેલ અહીં, $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$

અને $\mathbf{F} = 7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$.

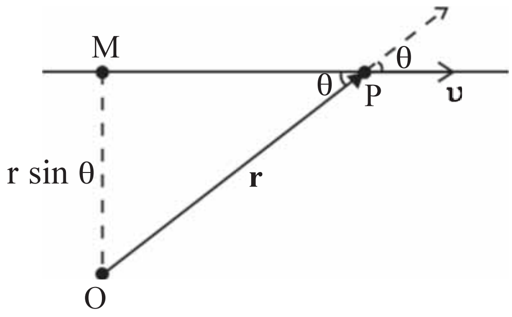
આપણે ટૉર્ક $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ શોધવા નિશ્ચાયકના નિયમનો ઉપયોગ કરીશું.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (5-3)\hat{\mathbf{i}} - (-5-7)\hat{\mathbf{j}} + (3+7)\hat{\mathbf{k}}$$

અથવા $\boldsymbol{\tau} = 2\hat{\mathbf{i}} + 12\hat{\mathbf{j}} + 10\hat{\mathbf{k}}$ ◀

▶ *ઉદાહરણ 7.6* દર્શાવો કે કોઈ એક બિંદુની સાપેક્ષે અચળ વેગથી ગતિ કરતાં કોઈ એક કણનું કોણીય વેગમાન સમગ્ર ગતિ દરમિયાન અચળ રહે છે.

ઉકેલ ધારો કે, $\boldsymbol{\upsilon}$ વેગ ધરાવતો આ કણ કોઈક ક્ષણે P બિંદુ પર છે. આપણે એક યાદચ્છિક બિંદુ Oની સાપેક્ષે કણના કોણીય વેગમાનની ગણતરી કરવા માંગીએ છીએ.



આકૃતિ 7.19

કોણીય વેગમાન $\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times m\boldsymbol{\upsilon}$ છે. તેનું માન $m\upsilon r \sin\theta$ છે, જ્યાં θ એ આકૃતિ 7.19માં બતાવ્યા પ્રમાણે $\mathbf{r}$ અને $\boldsymbol{\upsilon}$ વચ્ચેનો કોણ છે. જોકે, કણ સમય સાથે સ્થાન બદલે છે, તેમ છતાં $\boldsymbol{\upsilon}$ની દિશા-રેખા સમાન જ રહે છે અને તેથી OM = $r \sin\theta$ એ અચળ છે.

વધુમાં $\boldsymbol{l}$ ની દિશા $\mathbf{r}$ અને $\boldsymbol{\upsilon}$ના સમતલને લંબ છે જે આકૃતિના પૃષ્ઠની અંદરની તરફની છે. આ દિશા સમય સાથે બદલાતી નથી. આ રીતે, $\boldsymbol{l}$નું માન અને દિશા પણ બદલાતી નથી અને તેથી તે સંરક્ષિત છે. આ કણ પર કોઈ બાહ્ય ટૉર્ક છે ? ◀

7.8 દૃઢ પદાર્થનું સંતુલન (EQUILIBRIUM OF A RIGID BODY)

હવે આપણે કણોનાં વ્યાપક તંત્રોની ગતિના બદલે દૃઢ પદાર્થોની ગતિ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરવા જઈ રહ્યા છીએ.

બાહ્ય બળો દૃઢ પદાર્થ પર શું અસર કરે છે તે આપણે સ્મરણ કરીએ. (હવેથી આપણે વિશેષણ 'બાહ્ય'નો ઉપયોગ નહિ કરીએ, કારણ કે જ્યાં સુધી અન્યથા જણાવ્યું ના હોય ત્યાં સુધી આપણે ફક્ત બાહ્ય બળો અને ટૉર્ક સાથે વ્યવહાર કરીશું.) આ બળો દૃઢ પદાર્થની ગતિની સ્થાનાંતર અવસ્થાને ફેરફાર કરી શકે છે. એટલે કે તે સમીકરણ (7.17) મુજબ તેનું કુલ રેખીય વેગમાન બદલે છે. પરંતુ બળોની આ એક માત્ર જ અસર નથી. પદાર્થ પરનું કુલ ટૉર્ક જો શૂન્ય ન થાય તો આવા ટૉર્ક દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિની અવસ્થામાં પરિવર્તન લાવે છે. એટલે તે સમીકરણ (7.28b)ના અનુસાર પદાર્થનું કુલ કોણીય વેગમાન બદલે છે.

દૃઢ પદાર્થ જો તેના બંને, રેખીય વેગમાન અને કોણીય વેગમાન સમય સાથે બદલાતા ન હોય એટલે કે, પદાર્થ રેખીય પ્રવેગ કે કોણીય પ્રવેગ ન ધરાવે, તો યાંત્રિક સંતુલનમાં કહેવાય છે. આનો અર્થ એ થાય કે,

(1) દૃઢ પદાર્થ પરનું કુલ બળ એટલે કે બળોનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય છે.

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + ... + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \qquad (7.30a)$$

જો પદાર્થ પરનું કુલ બળ શૂન્ય છે, તો પદાર્થનું કુલ રેખીય વેગમાન સમય સાથે બદલાતું નથી. સમીકરણ (7.30a) પદાર્થની સ્થાનાંતરીય સંતુલન માટેની શરત આપે છે.

(2) કુલ ટૉર્ક એટલે કે દૃઢ પદાર્થ પરના બધા ટૉર્કનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય છે.

$$\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + ... + \boldsymbol{\tau}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{0} \qquad (7.30b)$$

જો દૃઢ પદાર્થ પર કુલ ટૉર્ક શૂન્ય હોય તો પદાર્થનું કુલ કોણીય વેગમાન સમય સાથે બદલાતું નથી. સમીકરણ (7.30 b) પદાર્થની ચાકગતિના સંતુલન માટેની શરત આપે છે.

કોઈ એ પ્રશ્ન પણ ઉપસ્થિત કરી શકે છે કે જે ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે ટૉર્ક લેવામાં આવેલ છે તે બિંદુ સ્થાનાંતરિત થાય તો શું ચાકગતિના સંતુલનની શરત [સમીકરણ 7.30(b)] માન્ય રહે ? કોઈ એમ પણ બતાવી શકે છે કે જો સ્થાનાંતરણ સંતુલનની શરત [સમીકરણ 7.30(a)] દૃઢ પદાર્થ માટે લાગુ પડતી હોય તો ઉદ્‌ગમબિંદુના આવા કોઈ પણ સ્થાનાંતરણની અસર થશે નહિ. એટલે કે ચાકગતિના સંતુલનની શરત જેને અનુલક્ષીને ટૉર્ક લેવામાં આવેલ હોય તે ઉદ્‌ગમબિંદુના સ્થાન પર આધાર રાખતી નથી (સ્વતંત્ર છે). ઉદાહરણ 7.7 એ બળ-યુગ્મના એટલે કે સ્થાનાંતરણ સંતુલનમાં દૃઢ પદાર્થ પર લાગતાં બે બળોના વિશિષ્ટ કિસ્સામાં આ પરિણામની સાબિતી આપે છે. આ પરિણામનું n બળો માટેનું વ્યાપક સ્વરૂપ તમારા માટે એક સ્વાધ્યાય તરીકે છોડી દેવામાં આવેલ છે.

સમીકરણ (7.30a) અને સમીકરણ (7.30b) બંને સદિશ સમીકરણો છે. તેઓ દરેક ત્રણ અદિશ સમીકરણોને સમતુલ્ય છે. સમીકરણ (7.30a) એ

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \text{ અને } \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \qquad (7.31a)$$

ને અનુરૂપ છે, જ્યાં F_{ix}, F_{iy} અને F_{iz} એ બળ $\mathbf{F}_i$ના અનુક્રમે x, y અને z ઘટકો છે. એ જ રીતે, સમીકરણ (7.30b) એ નીચેનાં ત્રણ અદિશ સમીકરણોને સમતુલ્ય છે :

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} \tau_{iy} = 0 \text{ અને } \sum_{i=1}^{n} \tau_{iz} = 0 \qquad (7.31b)$$

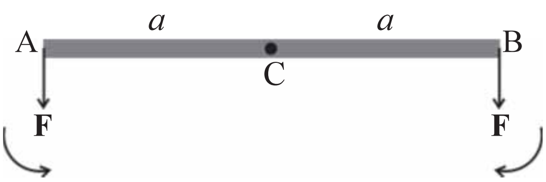
જ્યાં, τ_{ix}, τ_{iy} અને τ_{iz} એ τ_iના અનુક્રમે x, y અને z ઘટકો છે.

સમીકરણ (7.31a) અને (7.31b) એ કોઈ એક દઢ પદાર્થના યાંત્રિક સંતુલન માટેની જરૂરી એવી છ સ્વતંત્ર (એકબીજા પર નિર્ભર ન હોય તેવી) શરતો આપે છે. ઘણી સમસ્યાઓમાં, પદાર્થ પર લાગતાં તમામ બળો એક જ સમતલમાં હોય છે. ત્યારે યાંત્રિક સંતુલન માટે માત્ર ત્રણ જ શરતો સંતુષ્ટ થવાની જરૂર પડે છે. આમાંની બે શરતો સ્થાનાંતરણ સંતુલનને અનુરૂપ છે; સમતલમાં કોઈ પણ બે લંબ અક્ષોને અનુલક્ષીને બળોનાં ઘટકોનો સરવાળો શૂન્ય જ હોવો જોઈએ. ત્રીજી શરત ચાકગતિય સંતુલનને અનુલક્ષીને છે. બળોના સમતલને લંબ કોઈ પણ અક્ષની સાપેક્ષે ટૉર્કનાં ઘટકોનો સરવાળો શૂન્ય જ હોવો જોઈએ.

દઢ પદાર્થના સંતુલનની શરતોની સરખામણી એક કણ માટેની શરતો સાથે થઈ શકે છે, જેને આપણે પહેલાનાં પ્રકરણોમાં લીધી હતી. ચાકગતિની કોઈ વિચારણા એક કણને લાગુ પડતી નથી, તેથી માત્ર સ્થાનાંતરણ સંતુલન (સમીકરણ 7.30a) માટેની જ શરતો કણને લાગુ પડે છે. આમ, એક કણના સંતુલન માટે તેના પરનાં તમામ બળોનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય હોવો જોઈએ. આ તમામ બળ એ એક જ કણ પર કાર્યરત હોવાથી તેઓ એક બિંદુગામી હોવાં જોઈએ. અગાઉનાં પ્રકરણોમાં એક બિંદુગામી બળોની અસરમાં સંતુલનની ચર્ચા કરવામાં આવી છે.

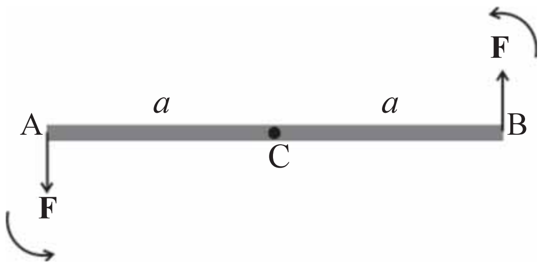
કોઈ પદાર્થ આંશિક સંતુલનમાં હોઈ શકે છે, એટલે કે, તે સ્થાનાંતરણ સંતુલનમાં હોય અને ચાકગતિય સંતુલનમાં ન હોય, અથવા તે ચાકગતિય સંતુલનમાં હોય અને સ્થાનાંતરણ સંતુલનમાં ન હોય.

એક હલકા (એટલે કે અવગણ્ય દળના) સળિયા (AB)ને ધ્યાનમાં લો. જેના બે છેડા (A અને B) પર સમાન માનના બે સમાંતર બળ આકૃતિ 7.20(a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સળિયાને લંબરૂપે લગાડવામાં આવે છે.



આકૃતિ 7.20(*a*)

AB નું મધ્યબિંદુ C લો. CA = CB = a. A અને B પર બંને બળોની ચાકમાત્રાનું માન (aF) સમાન પરંતુ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વિરુદ્ધ દિશામાં છે. આ સળિયા પરની બળની કુલ ચાકમાત્રા શૂન્ય હશે. આ તંત્ર ચાકગતિય સંતુલનમાં છે. પરંતુ તે સ્થાનાંતરણ સંતુલનમાં નથી. $\sum \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$.



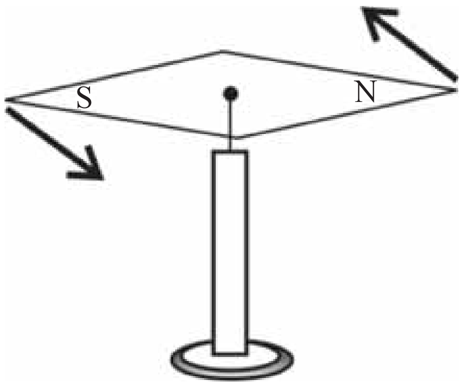
આકૃતિ 7.20(*b*)

આકૃતિ 7.20(a)માં B છેડા પરના બળને આકૃતિ 7.20(b)માં ઉલટાવેલ છે. આમ, આપણી પાસે સળિયાને લંબરૂપે એક છેડા A પર અને બીજા છેડા B પર લાગતાં બે સમાન અને વિરુદ્ધ બળો સાથેનો તે જ સળિયો છે. બંને બળોની ચાકમાત્રા સમાન છે. પરંતુ તેઓ વિરુદ્ધ દિશામાં નથી. તેઓ સમાન દિશામાં કાર્ય કરે છે અને સળિયામાં વિષમઘડીના દિશામાં ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરે છે. પદાર્થ પર કુલ બળ શૂન્ય છે. તેથી પદાર્થ સ્થાનાંતરીય સંતુલનમાં છે. પરંતુ તે ચાકગતિય સંતુલનમાં નથી. જોકે, સળિયો કોઈ પણ રીતે સ્થિર નથી. તે શુદ્ધ ચાકગતિ (એટલે કે સ્થાનાંતરીય વગરની ચાકગતિ) કરે છે.

જુદી જુદી કાર્યરેખા ધરાવતા બે સમાન મૂલ્યના અને વિરુદ્ધ દિશામાંનાં બળોની જોડને **બળયુગ્મ (Couple)** અથવા **ટૉર્ક** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. બળયુગ્મ સ્થાનાંતરીય ગતિ વિના ચાકગતિ પેદા કરે છે.

જ્યારે આપણે બોટલના ઢાંકણને ઘુમાવીને ખોલીએ છીએ, ત્યારે આપણી આંગળીઓ ઢાંકણાં પર એક બળયુગ્મ લગાડે છે. (આકૃતિ 7.21(a)). આકૃતિ 7.21(b)માં બતાવ્યા પ્રમાણે પૃથ્વીના ચુંબકીયક્ષેત્રમાં હોકાયંત્રની સોય એ એક અન્ય જાણીતું ઉદાહરણ છે. પૃથ્વીનું ચુંબકીયક્ષેત્ર ઉત્તર અને દક્ષિણ ધ્રુવો પર સમાન બળો લગાડે છે. ઉત્તર ધ્રુવ પર લાગતું બળ ઉત્તર તરફ અને દક્ષિણ ધ્રુવ પર લાગતું બળ દક્ષિણ તરફ છે. સોય જ્યારે ઉત્તર-દક્ષિણ દિશાનો નિર્દેશ કરે તે સિવાય, બે બળોની ક્રિયા-રેખા એક જ નથી હોતી. આમ, પૃથ્વીના ચુંબકીયક્ષેત્રને કારણે સોય પર એક **બળયુગ્મ** લાગે છે.

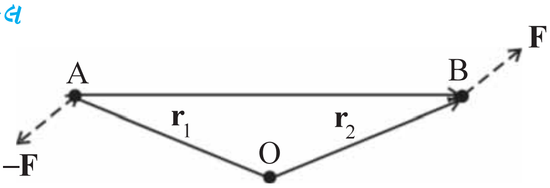
આકૃતિ 7.21(*a*) *ઢાંકણ ખોલવા આપણી આંગળીઓ એક બળયુગ્મ લગાડે છે.*



આકૃતિ 7.21(b) પૃથ્વીનું ચુંબકીયક્ષેત્ર હોકાયંત્રની સોય પર સમાન મૂલ્યનાં બે બળો વિરુદ્ધ દિશામાં લગાડે છે. આ બે બળો બળયુગ્મ બનાવે છે.

> ▶ *ઉદાહરણ 7.7* દર્શાવો કે કોઈ બળયુગ્મની ચાકમાત્રા એ બિંદુ પર આધારિત નથી કે જે બિંદુને અનુલક્ષીને તમે ચાકમાત્રાઓ લીધી હોય.

ઉકેલ



આકૃતિ 7.22

આકૃતિ 7.22માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું એક બળયુગ્મ ધ્યાનમાં લો. બિંદુ B અને A પર અનુક્રમે બળો **F** અને **–F** લાગે છે. ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે આ બિંદુઓના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $\mathbf{r}_1$ અને $\mathbf{r}_2$ છે. આવો, ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે બળોની ચાકમાત્રાઓ લઈએ.

બળયુગ્મની ચાકમાત્રા = આ યુગ્મ બનાવતાં બે બળોની ચાકમાત્રાનો સરવાળો

$= \mathbf{r}_1 \times (-\mathbf{F}) + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}$

$= \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}$

$= (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}$

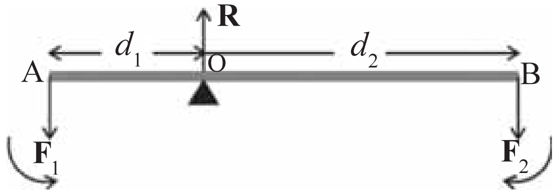
પણ, $\mathbf{r}_1 + \mathbf{AB} = \mathbf{r}_2$, અને તેથી $\mathbf{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

આથી, બળયુગ્મની ચાકમાત્રા $\mathbf{AB} \times \mathbf{F}$ છે.

સ્પષ્ટપણે આ ઉદ્‌ગમબિંદુથી એટલે કે તે બિંદુ કે જેને અનુલક્ષીને આપણે બળોની ચાકમાત્રા લીધી હતી તેનાથી સ્વતંત્ર છે. ◀

7.8.1 ચાકમાત્રાનો સિદ્ધાંત (Principle of moments)

એક આદર્શ ઉચ્ચાલન (લિવર) મૂળભૂત રીતે, એક હલકો (એટલે કે અવગણ્ય દ્રવ્યમાનનો) સળિયો છે કે જે તેની લંબાઈ પરના કોઈ એક બિંદુ પર કિલકિત કરેલ (pivoted) છે. આ બિંદુને આધારબિંદુ (fulcrum) કહેવામાં આવે છે. બાળકોના રમતનાં મેદાનમાં જોવા મળતો ચીચવો (see-saw) એ એક ઉચ્ચાલનનું વિશિષ્ટ ઉદાહરણ છે. બે બળો F_1 અને F_2 એકબીજાને સમાંતર અને સામાન્ય રીતે લિવરને લંબ આકૃતિ 7.23માં બતાવ્યા પ્રમાણે આધારબિંદુથી અનુક્રમે d_1 અને d_2 અંતરે લાગે છે.



આકૃતિ 7.23

ઉચ્ચાલન (લિવર) એ યાંત્રિક સંતુલનમાંનું એક તંત્ર છે. ધારો કે **R** એ આધારબિંદુ પર આધાર દ્વારા પ્રતિક્રિયાબળ છે. **R** એ બળો F_1 અને F_2ની વિરુદ્ધ દિશામાં છે. સ્થાનાંતરીય સંતુલન માટે,

$$R - F_1 - F_2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

ચાકગતિય સંતુલન માટે જો આપણે આધારબિંદુને અનુલક્ષીને ચાકમાત્રા લઈએ, તો ચાકમાત્રાનો સરવાળો શૂન્ય હોવો જોઈએ.

$$d_1F_1 - d_2F_2 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

સામાન્ય રીતે વિષમઘડી દિશા (સમઘડી દિશા)માં ચાકમાત્રા ધન (ઋણ) લેવામાં આવે છે. નોંધો કે R એ આધારબિંદુ પર જ લાગે છે અને આધારબિંદુને અનુલક્ષીને તે શૂન્ય ચાકમાત્રા ધરાવે છે.

લિવરના કિસ્સામાં F_1 એ સામાન્યતઃ થોડુંક વજન હોય છે. જેને ઉંચકવાનું હોય છે તેને ભાર (load) કહેવામાં આવે છે અને આધારબિંદુથી તેના અંતર d_1ને ભારભુજા (load arm) કહેવાય છે. બળ F_2 એ ભારને ઉપાડવા માટે લાગુ પાડવામાં આવતો પ્રયાસ (effort) છે. આધારબિંદુથી તેના અંતર d_2ને પ્રયાસભુજા (effort arm) કહેવાય છે.

સમીકરણ (ii)ને

$$d_1F_1 = d_2F_2 \qquad (7.32a)$$

અથવા ભારભુજા × ભાર = પ્રયાસભુજા × પ્રયાસ તરીકે લખી શકાય છે.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ ઉચ્ચાલન માટે ચાકમાત્રાના સિદ્ધાંતને વ્યક્ત કરે છે. ગુણોત્તર F_1/F_2ને યાંત્રિક-લાભ (Mechanical Advantage - M.A.) કહેવાય છે.

$$\text{M.A.} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1} \qquad (7.32b)$$

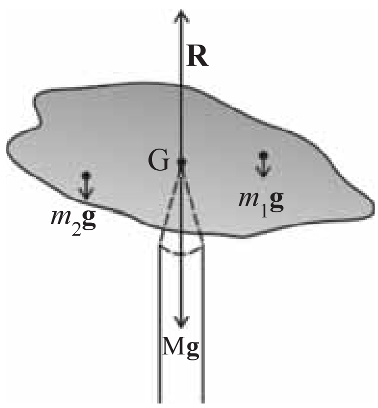
જો પ્રયાસભુજા d_2 એ ભારભુજા કરતાં મોટી હોય, તો યાંત્રિક-લાભ એક કરતાં મોટો હોય છે. એક કરતા મોટો યાંત્રિક-લાભનો અર્થ એ થાય છે કે, ઓછા પ્રયાસથી વધુ ભાર

ઉંચકી શકાય છે. ચીચવા સિવાય પણ તમારી આસપાસ ઉચ્ચાલનના (લિવરનાં) કેટલાંય ઉદાહરણો મળી આવશે. તુલાનો દંડ એ પણ એક ઉચ્ચાલન છે. આ પ્રકારનાં વધુ ઉદાહરણો શોધવાનો પ્રયાસ કરો અને દરેક કિસ્સામાં ઉચ્ચાલન માટે આધારબિંદુ, પ્રયાસ અને પ્રયાસભુજા તથા ભાર અને ભારભુજાને ઓળખો.

તમે એ સહેલાઈથી બતાવી શકો છો કે જો આ સમાંતર બળો F_1 અને F_2 એ ઉચ્ચાલનને લંબ ન હોય, પરંતુ કોઈ અન્ય કોણે લાગુ પડે ત્યારે પણ ચાકમાત્રાનો સિદ્ધાંત લાગુ પાડી શકાય છે.

7.8.2 ગુરુત્વ કેન્દ્ર (Centre of gravity)

તમારામાંથી ઘણા બધાને આંગળીની ટોચ પર તમારી નોટબુકને સંતુલિત કરવાનો અનુભવ હશે. આકૃતિ 7.24 એ આવા જ એક પ્રયોગને દર્શાવે છે જે તમે સરળતાથી કરી શકો છો. એક અનિયમિત આકારનું પૂંઠું (કાર્ડબૉર્ડ) લો અને પેન્સિલ જેવી પાતળી અણીવાળી એક વસ્તુ લો. તમે કેટલાક પ્રયત્નો દ્વારા કાર્ડબૉર્ડ પર એક બિંદુ Gને શોધી શકો છો કે જ્યાં તે પેન્સિલની અણી પર સંતુલિત થઈ શકે છે. (કાર્ડબૉર્ડ આ સ્થિતિમાં સમક્ષિતિજ રહે છે.) આ સંતુલનનું બિંદુ એ કાર્ડબૉર્ડનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર (CG) છે. પેન્સિલની અણી ઊર્ધ્વદિશામાં ઉપર તરફનું બળ આપે છે જેના કારણે કાર્ડબૉર્ડ યાંત્રિક સંતુલનમાં રહે છે. આકૃતિ 7.24માં બતાવ્યા પ્રમાણે, અણીનું પ્રતિક્રિયા બળ કાર્ડબૉર્ડનું કુલ વજન (એટલે કે, તેના પરનું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ) $M\mathbf{g}$ને સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં છે. અને તેથી કાર્ડબૉર્ડ સ્થાનાંતરીય સંતુલનમાં છે. તે ચાકગતિય સંતુલનમાં પણ છે. જો તે આમ ન હોય તો અસંતુલિત ટૉર્કને કારણે તે એક તરફ નમી અને પડી જશે. એકાકી કણો પર ગુરુત્વાકર્ષણને લીધે લાગતાં બળો જેવાં કે, $m_1\mathbf{g}$, $m_2\mathbf{g}$, ... વગેરેના કારણે કાર્ડબૉર્ડ પર ટૉર્ક લાગે છે જેના થકી તે સંતુલનમાં રહે છે.



આકૃતિ 7.24 *પૂંઠાને પેન્સિલની અણી પર સંતુલિત કરવું. આધારબિંદુ G એ ગુરુત્વ કેન્દ્ર છે.*

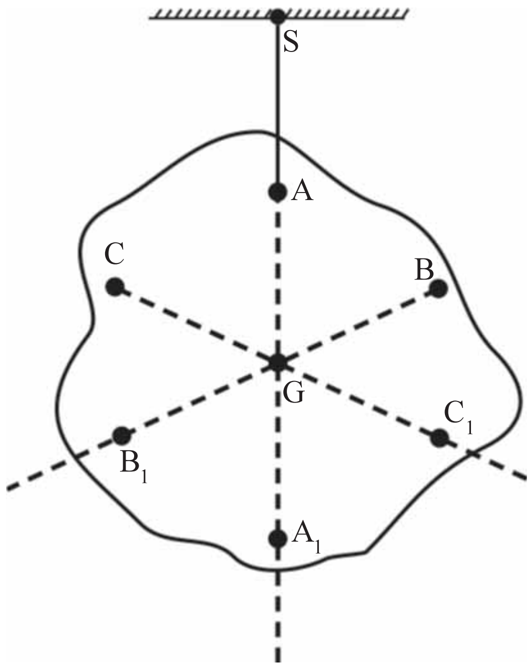
કાર્ડબૉર્ડનું CG એવી રીતે નિર્ધારિત કરવામાં આવે છે કે બળો $m_1\mathbf{g}$, $m_2\mathbf{g}$ .... વગેરેના કારણે તેના પરનું કુલ ટૉર્ક શૂન્ય થાય.

જો $\mathbf{r}_i$ એ વિસ્તરીત પદાર્થના iમા કણનો તેના CGની સાપેક્ષે સ્થાનસદિશ હોય, તો પછી CGની સાપેક્ષે કણો પર ગુરુત્વાકર્ષણ બળને કારણે, ટૉર્ક $\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{g}$ લાગે છે. CGને અનુલક્ષીને કુલ ગુરુત્વાકર્ષણ ટૉર્ક શૂન્ય છે. એટલે કે,

$$\boldsymbol{\tau}_g = \sum \boldsymbol{\tau}_i = \sum \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{g} = \mathbf{0} \qquad (7.33)$$

તેથી આપણે પદાર્થના CGને એ બિંદુ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ છીએ કે જ્યાં પદાર્થ પરનું કુલ ગુરુત્વાકર્ષણ ટૉર્ક શૂન્ય છે.

આપણે નોંધ્યું છે કે સમીકરણ (7.33)માં $\mathbf{g}$ બધા જ કણો માટે સમાન છે અને તેથી તે સરવાળામાં બહાર આવે છે. કેમ કે $\mathbf{g}$ એ શૂન્ય નથી. આથી $\sum m_i\mathbf{r}_i = \mathbf{0}$. યાદ રાખો કે સ્થાનસદિશ ($\mathbf{r}_i$) એ CGના સંદર્ભમાં લેવામાં આવેલ છે. હવે પરિચ્છેદ 7.2માં સમીકરણ (7.4a)ની નીચે આપવામાં આવેલ તર્ક અનુસાર, જો સરવાળો શૂન્ય હોય, તો ઉદ્‌ગમબિંદુ એ પદાર્થનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર હોવું જોઈએ. આમ, નિયમિત ગુરુત્વમાં કે ગુરુત્વમુક્ત અવકાશમાં, પદાર્થનું ગુરુત્વકેન્દ્ર એ દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સાથે સંપાત થાય છે. આપણે એ નોંધીએ કે પદાર્થ નાનો છે કે જેથી પદાર્થના એક બિંદુ કે બીજા બિંદુ પર $\mathbf{g}$ બદલાતો નથી, આથી આ સાચું છે.



આકૃતિ 7.25 *અનિયમિત આકારના પદાર્થનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર G નક્કી કરવું. પદાર્થના આધારબિંદુ Aમાંથી પસાર થતી ઊર્ધ્વ રેખા AA_1 પર આ ગુરુત્વ કેન્દ્ર આવેલું છે.*

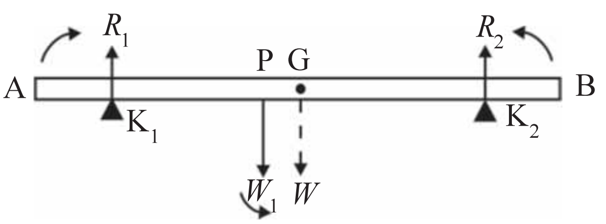
જો પદાર્થ એટલો વિસ્તરીત હોય કે જેથી પદાર્થના એક ભાગથી બીજા ભાગ પર **g** બદલાતો હોય, તો પછી ગુરુત્વ કેન્દ્ર અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સંપાતી (એક) નથી. મૂળભૂત રીતે આ બંને અલગ અલગ ખ્યાલો છે. દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને ગુરુત્વાકર્ષણ સાથે કોઈ સંબંધ નથી. તે ફક્ત પદાર્થના દળ-વિતરણ પર જ આધાર રાખે છે.

પરિચ્છેદ 7.2માં આપણે કેટલાક નિયમિત, સમાંગી પદાર્થોના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના સ્થાન શોધ્યા છે. સ્પષ્ટતઃ જો પદાર્થ પૂરતો નાનો હોય, તો આ માટે ત્યાં ઉપયોગમાં લીધેલ રીતો પણ આવા પદાર્થોના ગુરુત્વ કેન્દ્ર આપે છે.

આકૃતિ 7.25, કાર્ડબૉર્ડ જેવા અનિયમિત આકારના પદાર્થનું CG શોધવા માટેની એક બીજી રીત દર્શાવે છે. જો તમે A જેવા કોઈ બિંદુએથી પદાર્થને લટકાવો તો Aમાંથી પસાર થતી ઊર્ધ્વરેખા CG માંથી પસાર થાય છે. આપણે આ રેખા AA_1 નોંધીએ. પછી બીજા B અને C જેવા બિંદુએથી પદાર્થને લટકાવીએ. આ બધી ઊર્ધ્વરેખાઓનું છેદનબિંદુ CG આપે છે. આ રીત કેમ ચાલી શકે તે સમજાવો. પદાર્થ પૂરતો નાનો હોવાથી, આ રીતે આપણે દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પણ શોધી શકીએ.

▶ ***ઉદાહરણ 7.8*** 70 cm લાંબા અને 4.00 kg દળના એક ધાતુના સળિયાને બંને છેડેથી 10 cm દૂર મૂકેલ બે છરીધાર (Knife-edges) પર ગોઠવેલ છે. એક છેડાથી 30 cm દૂર એક 6.00 kg બોજને લટકાવવામાં આવેલ છે. છરીધાર પર પ્રતિક્રિયા બળો શોધો. (આ સળિયો નિયમિત આડછેદનો અને સમાંગ છે તેમ ધારો.)

ઉકેલ



આકૃતિ 7.26

આકૃતિ 7.26માં એક સળિયો AB, છરી-ધારની સ્થિતિ K_1 અને K_2, આ સળિયાનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર G અને P પર લટકાવેલ બોજ દર્શાવે છે.

નોંધો કે સળિયાનું વજન W તેના ગુરુત્વ કેન્દ્ર પર લાગે છે. સળિયો એ સમાંગ અને એક સમાન આડછેદનો છે. તેથી G એ સળિયાની મધ્યમાં છે. AB = 70 cm, AG = 35 cm, AP = 30 cm, PG = 5 cm, $AK_1 = BK_2 = 10$ cm અને $K_1G = K_2G = 25$ cm. ઉપરાંત W = સળિયાનું વજન = 4.00 kg અને W_1 = લટકાવેલ વજન (બોજ) = 6.00 kg, R_1 અને R_2 એ છરી ધાર આગળ ટેકા દ્વારા લાગતાં લંબ પ્રતિક્રિયાબળો છે.

આ સળિયાના સ્થાનાંતરીય સંતુલન માટે,

$$R_1 + R_2 - W_1 - W = 0 \qquad \text{(i)}$$

નોંધો કે, W_1 અને W એ શિરોલંબ દિશામાં નીચે તરફ લાગે છે અને R_1 અને R_2 એ શિરોલંબ દિશામાં ઉપર તરફ લાગે છે.

ચાકગતિય સંતુલનને ધ્યાનમાં લેવા માટે આપણે બળોની ચાકમાત્રા લઈએ છીએ. ચાકમાત્રા શોધવાનું સૌથી સુલભ બિંદુ એ G છે. R_2 અને W_1ની ચાકમાત્રા વિષમઘડી દિશામાં (+ve) છે, જ્યારે R_1ની ચાકમાત્રા સમઘડી દિશામાં (−ve) છે.

ચાકગતિય સંતુલન માટે,

$$-R_1(K_1G) + W_1(PG) + R_2(K_2G) = 0 \qquad \text{(ii)}$$

W = 4.00g N અને W_1 = 6.00g N આપવામાં આવ્યું છે. જ્યાં g = ગુરુત્વ પ્રવેગ છે. આપણે g = 9.8 m/s^2 લઈએ છીએ.

સમીકરણ (i)માં સંખ્યાત્મક મૂલ્યો મૂકતાં,

$R_1 + R_2 - 4.00g - 6.00g = 0$

અથવા $R_1 + R_2 = 10.00$ g N (iii)

$= 98.00$ N

(ii) પરથી, $-0.25\ R_1 + 0.05\ W_1 + 0.25\ R_2 = 0$

અથવા $R_1 - R_2 = 1.2$ g N = 11.76 N (iv)

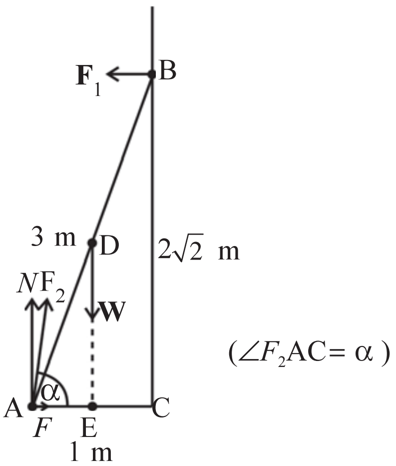
(iii) અને (iv) પરથી $R_1 = 54.88$ N,

$R_2 = 43.12$ N

આમ, આધારો પરનાં પ્રતિક્રિયા બળો K_1 પર આશરે 55 N અને K_2 પર આશરે 43 N છે. ◀

▶ ***ઉદાહરણ 7.9*** એક 3 m લાંબી નિસરણી, જે 20 kg વજન ધરાવે છે તે ઘર્ષણરહિત દીવાલ પર ઝુકાવેલ છે. આકૃતિ 7.27માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તેનો નીચેનો છેડો દીવાલથી 1 m દૂર છે. દીવાલ અને ભોંયતળિયાનાં પ્રતિક્રિયા બળો શોધો.

ઉકેલ



આકૃતિ 7.27

આ નિસરણી AB એ 3 m લાંબી છે, તેનો નીચેનો છેડો એ દીવાલથી AC = 1 mના અંતરે છે. પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી, BC = $2\sqrt{2}$ m. આ નિસરણી પરનાં બળોએ તેના ગુરુત્વકેન્દ્ર D પર લાગતું તેનું વજન W, દીવાલ અને ભોંયતળિયાના પ્રતિક્રિયા બળો અનુક્રમે F_1 અને F_2 છે. બળ F_1 એ દીવાલને લંબ છે, કારણ કે દીવાલ એ ઘર્ષણરહિત છે. બળ F_2 બે ઘટકોમાં વિભાજિત થાય છે, લંબ પ્રતિક્રિયા બળ N અને ઘર્ષણ બળ F. નોંધ કરો કે F એ સીડીને દીવાલથી દૂર સરકતાં અટકાવે છે અને તેથી દીવાલ તરફની દિશામાં છે.

સ્થાનાંતરીય સંતુલન માટે, ઊર્ધ્વદિશામાંનાં બળો લેતાં

$$N - W = 0 \tag{i}$$

સમક્ષિતિજ દિશામાંનાં બળો લેતાં

$$F - F_1 = 0 \tag{ii}$$

ચાકગતિય સંતુલન માટે A ને અનુલક્ષીને બળોની ચાકમાત્રા લેતાં

$$2\sqrt{2}\ F_1 - (1/2)\ W = 0 \tag{iii}$$

હવે, W = 20 × g = 20 × 9.8 N = 196.0 N

(i) પરથી N = 196.0

(ii) પરથી $F = F_1 = 34.6$ N

(iii) પરથી $F_1 = W/4\sqrt{2} = 196.0/4\sqrt{2} = 34.6$ N

$$F_2 = \sqrt{F^2 + N^2} = 199.0 \text{ N}$$

બળ F_2 એ સમક્ષિતિજ સાથે બનાવેલ ખૂણો α, હોય તો

$\tan \alpha = N/F = 4\sqrt{2}$, $\alpha = \tan^{-1}(4\sqrt{2}) \approx 80°$ ◄

7.9 જડત્વની ચાકમાત્રા (MOMENT OF INERTIA)

આપણે અગાઉ પણ ઉલ્લેખ કર્યો છે કે, આપણે ચાકગતિના અભ્યાસનો વિકાસ સ્થાનાંતરણ ગતિ કે જેની સાથે આપણે પરિચિત છીએ તેને સમાંતર જ કરી રહ્યા છીએ. આપણે આ સંબંધમાં હજુ સુધી એક મુખ્ય પ્રશ્નનો જવાબ આપ્યો નથી. **ચાકગતિમાં દ્રવ્યમાનને સમતુલ્ય શું છે ?** આપણે આ વિભાગમાં આ પ્રશ્નનો જવાબ આપવાનો પ્રયાસ કરીશું. ચર્ચા સરળ રાખવા માટે, આપણે માત્ર એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ (પરિભ્રમણ) પર વિચારણા કરીશું. ચાલો **ચાકગતિ કરતા પદાર્થની ગતિઊર્જા (Kinetic Energy)** માટેનું સમીકરણ મેળવવાનો પ્રયાસ કરીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે પદાર્થ સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરે છે, ત્યારે પદાર્થના દરેક કણ એક વર્તુળમાં સમીકરણ (7.19) દ્વારા દર્શાવ્યા મુજબ રેખીય વેગ સાથે ગતિ કરે છે. (આકૃતિ 7.16નો સંદર્ભ લો.) અક્ષથી કોઈક અંતર પરના કણ માટે, રેખીય વેગ $\upsilon_i = r_i\omega$ છે. આ કણની ગતિઊર્જા

$$k_i = \frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2 = \frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2 \text{ છે.}$$

જ્યાં m_i એ કણનું દળ છે. આ પદાર્થની કુલ ગતિઊર્જા K એ દરેક કણોની ગતિઊર્જાઓનો સરવાળો છે.

$$K = \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(m_ir_i^2\omega^2)$$

અહીં n એ પદાર્થમાં રહેલ કુલ કણોની સંખ્યા છે. એ ધ્યાનમાં રહે કે ω એ બધા જ કણો માટે સમાન છે. આથી ω ને સરવાળાની બહાર લેતાં,

$$K = \frac{1}{2}\omega^2\left(\sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2\right)$$

આપણે દૃઢ પદાર્થની લાક્ષણિકતાને રજૂ કરતા એક નવા પ્રાચલ જેને જડત્વની ચાકમાત્રા I કહેવામાં આવે છે તેને

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2 \tag{7.34}$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ.

આ વ્યાખ્યા થકી,

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{7.35}$$

નોંધ કરો કે પ્રાચલ I એ કોણીય વેગના માનથી સ્વતંત્ર (આધારિત નથી) છે. તે દૃઢ પદાર્થની અને જે અક્ષને અનુલક્ષીને તે ચાકગતિ કરે છે તેની એક લાક્ષણિકતા છે.

ચાકગતિ કરતા પદાર્થની ગતિઊર્જા માટેના સમીકરણ (7.35)ની રેખીય ગતિમાંના પદાર્થની ગતિઊર્જા $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ સાથે સરખામણી કરો.

અહીં m એ પદાર્થનું દળ છે અને υ એ તેનો વેગ છે. આપણે કોણીય વેગ ω (સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના સંદર્ભમાં) અને રેખીય વેગ υ (રેખીય ગતિના સંદર્ભમાં) વચ્ચેની સામ્યતાને પહેલાથી જ નોંધેલ છે. તે પછી સ્પષ્ટ છે કે પ્રાચલ, જડત્વની ચાકમાત્રા I એ દ્રવ્યમાનનું ચાકગતિમાંનું જરૂરી સમતુલ્ય છે. (એક સ્થિત અક્ષને અનુલક્ષીને) ચાકગતિમાં, જડત્વની ચાકમાત્રા એ રેખીય ગતિમાં દ્રવ્યમાન જેવી જ સમાન ભૂમિકા ભજવે છે.

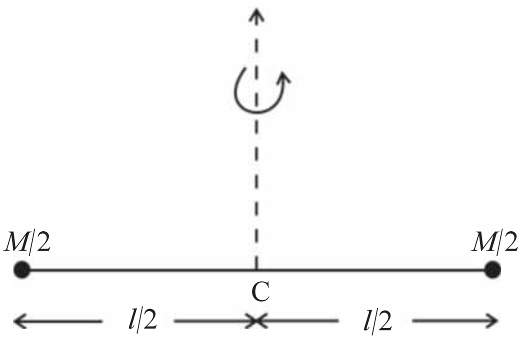
હવે આપણે સમીકરણ (7.34)ની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ બે સરળ કિસ્સાઓમાં જડત્વની ચાકમાત્રાની ગણતરી કરવા માટે કરીશું :

(a) R ત્રિજ્યા અને M દળની એક પાતળી રિંગ (વલય)નો વિચાર કરો કે જે તેના સમતલમાં કેન્દ્રની ફરતે કોણીય વેગ ω સાથે પરિભ્રમણ કરે છે. આ રિંગનો દરેક દળ ખંડ અક્ષથી R અંતરે છે અને $R\omega$ જેટલી ઝડપ

સાથે ગતિ કરે છે. તેથી આ ગતિઊર્જા

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

છે. સમીકરણ (7.35) સાથે સરખાવતાં આ રિંગ માટે આપણને $I = MR^2$ મળશે.



આકૃતિ 7.28 *દ્રવ્યમાનની એક જોડ ધરાવતો, l લંબાઈનો એક વજનમાં હલકો સળિયો આ તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને સળિયાને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને ઘૂમે છે. આ તંત્રનું કુલ દળ M છે.*

(b) હવે, નાના દ્રવ્યમાનની એક જોડ ધરાવતો, l લંબાઈનો એક દ્રવ્યમાનરહિત સળિયો લો, જે આ તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને સળિયાને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરે છે (આકૃતિ 7.28). દરેક દળ $M/2$ એ ધરીથી $l/2$ અંતરે છે. તેથી આ દ્રવ્યમાનોની જડત્વની ચાકમાત્રા

$$(M/2)\ (l/2)^2 + (M/2)\ (l/2)^2$$

દ્વારા મળે છે.

આ રીતે, દળોની જોડી, જે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને સળિયાને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરે છે તેના માટે $I = Ml^2/4$

કોષ્ટક 7.1માં કેટલાક સુપરિચિત નિયમિત આકારોવાળા નક્કર પદાર્થોની વિશિષ્ટ અક્ષોને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા આપેલ છે.

પદાર્થનું દળ એ તેની રેખીય ગતિની સ્થિતિમાં ફેરફારને અવરોધે છે, તેથી તે તેની રેખીય ગતિમાં જડત્વનું માપ છે. તેવી જ રીતે, ચાકગતિ (પરિભ્રમણ)માં આપેલ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા તેની ચાકગતિમાં ફેરફારનો પ્રતિકાર કરે છે, તેથી તેને પદાર્થની ચાકગતિય જડત્વના માપ તરીકે ગણવામાં આવે છે; પદાર્થના જુદા જુદા ભાગો અક્ષથી વિવિધ અંતરો પર કેવી રીતે વહેંચાયેલા છે તેનું એ માપ છે. પદાર્થના દ્રવ્યમાનથી વિપરીત, જડત્વની ચાકમાત્રાએ ચોક્કસ જથ્થો નથી, પરંતુ સમગ્ર પદાર્થના સંદર્ભમાં પરિભ્રમણ અક્ષના નમન અને સ્થાન પર આધારિત છે. કોઈ એક ભ્રમણાક્ષના સંદર્ભમાં ચાકગતિ કરતાં દૃઢ પદાર્થનું દ્રવ્યમાન કેવી રીતે વિતરણ થયેલ છે તેના એક માપ તરીકે, આપણે એક નવો પ્રાચલ **ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા (radius of gyration)** વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ છીએ. તે જડત્વની ચાકમાત્રા અને પદાર્થના કુલ દ્રવ્યમાન સાથે સંબંધિત છે.

કોષ્ટક 7.1માંથી નોંધો કે બધા કિસ્સાઓમાં, આપણે $I = Mk^2$ લખી શકીએ છીએ, જ્યાં k એ લંબાઈનું પરિમાણ છે. એક સળિયા માટે, તેના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થતી લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને, $k^2 = L^2/12$, એટલે કે, $k = L/\sqrt{12}$. એ જ રીતે, વર્તુળાકાર ડિસ્ક માટે તેના વ્યાસને અનુલક્ષીને $k = R/2$. લંબાઈ k એ પદાર્થનો અને ભ્રમણાક્ષનો એક ભૌમિતિક ગુણધર્મ છે. તેને **ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા** કહેવામાં આવે છે. **અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યાને** કોઈ અક્ષથી એક એવા દળબિંદુના અંતર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે, કે જેનું દ્રવ્યમાન એ સમગ્ર પદાર્થના દ્રવ્યમાન જેટલું જ હોય છે અને જેની જડત્વની ચાકમાત્રાએ પદાર્થની અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા જેટલી હોય છે.

આમ, એક દૃઢ પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા પદાર્થના દળ, તેના આકાર અને કદ, ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને દ્રવ્યમાન વિતરણ, અને પરિભ્રમણ અક્ષની સ્થિતિ અને નમન પર આધાર રાખે છે.

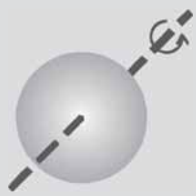
આ વ્યાખ્યા, સમીકરણ (7.34), પરથી આપણે એ અનુમાન કરી શકીએ છીએ કે જડત્વની ચાકમાત્રાનાં પરિમાણ ML^2 અને તેના SI એકમ kg m^2 છે.

કોઈ પદાર્થની ચાકગતિમાં જડત્વના માપ તરીકે અત્યંત મહત્ત્વની રાશિ Iના ઘણા પ્રાયોગિક ઉપયોગ છે. સ્ટીમ ઍન્જિન અને ઑટોમોબાઈલ ઍન્જિન જેવાં મશીનો વગેરે, જે ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરે છે તેમાં ખૂબ જ મોટા જડત્વની ચાકમાત્રાવાળી એક ડિસ્ક હોય છે, જેને **ફ્લાયવ્હીલ (flywheel)** કહેવાય છે. તેની મોટી જડત્વની ચાકમાત્રાને કારણે, ફ્લાયવ્હીલ વાહનની ઝડપના અચાનક વધારા અથવા ઘટાડાને અવરોધે છે. તે ઝડપમાં ધીમે ધીમે પરિવર્તન થવા દે છે અને આંચકાવાળી ગતિ અટકાવે છે, જેનાથી વાહનમાં મુસાફરો માટે સવારી સરળ બને છે.

7.10 લંબ અને સમાંતર અક્ષોના પ્રમેયો (THEOREMS OF PERPENDICULAR AND PARALLEL AXES)

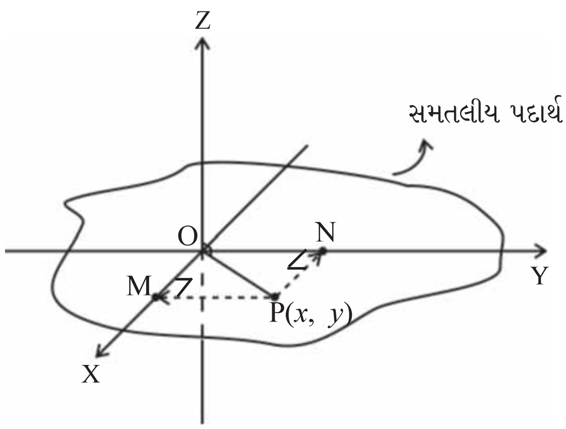
જડત્વની ચાકમાત્રાને લગતાં આ બે ઉપયોગી પ્રમેયો છે. આપણે પ્રથમ લંબ અક્ષોનો પ્રમેય અને નિયમિત આકારના પદાર્થોની જડત્વની ચાકમાત્રા શોધવાના તેના કેટલાક સરળ અને લાભદાયી ઉપયોગોની ચર્ચા કરીશું.

કોષ્ટક 7.1 કેટલાક નિયમિત આકારોવાળા પદાર્થોની વિશિષ્ટ અક્ષોને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા

Z	પદાર્થ (Body)	અક્ષ (Axis)	આકૃતિ (Figure)	I
(1)	પાતળી વર્તુળાકાર રિંગ, ત્રિજ્યા R (Thin circular ring, radius R)	સમતલને લંબ, કેન્દ્ર પર (Perpendicular to plane, at centre)		MR^2
(2)	પાતળી વર્તુળાકાર રિંગ, ત્રિજ્યા R (Thin circular ring, radius R)	વ્યાસ (Diameter)		$MR^2/2$
(3)	પાતળો સળિયો, લંબાઈ L (Thin rod, length L)	સળિયાને લંબ, મધ્ય બિંદુ પર (Perpendicular to rod, at mid point)		$ML^2/12$
(4)	વર્તુળાકાર ડિસ્ક (તકતી), ત્રિજ્યા R (Circular disc, radius R)	ડિસ્કને લંબ, કેન્દ્ર પર (Perpendicular to disc at centre)		$MR^2/2$
(5)	વર્તુળાકાર ડિસ્ક, ત્રિજ્યા R (Circular disc, radius R)	વ્યાસ (Diameter)		$MR^2/4$
(6)	પોલો નળાકાર, ત્રિજ્યા R (Hollow cylinder, radius R)	નળાકારની અક્ષ (Axis of cylinder)		MR^2
(7)	નક્કર નળાકાર, ત્રિજ્યા R (Solid cylinder, radius R)	નળાકારની અક્ષ (Axis of cylinder)		$MR^2/2$
(8)	નક્કર ગોળો, ત્રિજ્યા R (Solid sphere, radius R)	વ્યાસ (Diameter)		$2\ MR^2/5$

લંબ અક્ષોનો પ્રમેય

આ પ્રમેય એવા પદાર્થ પર લાગુ થાય છે કે જે સમતલીય હોય. વ્યવહારમાં તેનો મતલબ એવો થાય છે કે આ પ્રમેય સપાટ પદાર્થો પર લાગુ પડે છે, જેમની જાડાઈ તેમનાં અન્ય પરિમાણો (દા.ત., લંબાઈ, પહોળાઈ અથવા ત્રિજ્યા)ની સરખામણીમાં ખૂબ ઓછી હોય. આકૃતિ 7.29 એ આ પ્રમેયને સમજાવે છે. તેનું વિધાન આ પ્રમાણે છે : **કોઈ એક સમતલીય પદાર્થ (લેમિના)ની તેના સમતલને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રાએ તેની સાથે સંગામી અને લેમિનાના સમતલમાં સ્થિત બે લંબ અક્ષોને અનુલક્ષીને તેની જડત્વની ચાકમાત્રાઓના સરવાળા જેટલી જ હોય છે.**



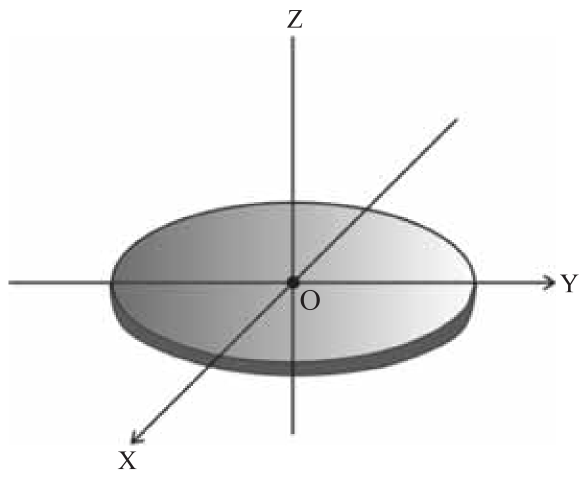
આકૃતિ 7.29 *સમતલીય પદાર્થને લાગુ પડતો લંબ અક્ષનો પ્રમેય; X અને Y-અક્ષો એ સમતલમાં બે લંબ અક્ષો છે અને Z-અક્ષ એ સમતલને લંબ છે.*

આ આકૃતિ એ એક સમતલીય પદાર્થ દર્શાવે છે. બિંદુ O પર આ પદાર્થને લંબ એક અક્ષને Z-અક્ષ તરીકે લેવામાં આવે છે. આ પદાર્થના સમતલ અને Z-અક્ષ સાથે સંગામી (સહવર્તી) એટલે કે, Oમાંથી પસાર થતા, બે પરસ્પર લંબ અક્ષોને, X અને Y-અક્ષો તરીકે લેવામાં આવે છે. આ પ્રમેય જણાવે છે કે,

$$I_z = I_x + I_y \qquad (7.35)$$

ચાલો એક ઉદાહરણ દ્વારા આ પ્રમેયની ઉપયોગિતા જોઈએ.

ઉદાહરણ 7.10 એક તકતીની તેના કોઈ એક વ્યાસને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા કેટલી છે ?



આકૃતિ 7.30 *વ્યાસને અનુલક્ષીને એક તકતીની M.I. તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી સમતલને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને M.I. આપેલ છે.*

ઉકેલ આપેલ તકતીની તેના સમતલને લંબ અને તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા જ્ઞાત છે તેમ ધારેલ છે; તે $MR^2/2$ છે, જ્યાં M એ તક્તીનું દળ છે R તેની ત્રિજ્યા છે (કોષ્ટક 7.1)

તકતીને સમતલીય પદાર્થ ગણવામાં આવે છે. તેથી લંબ અક્ષનો પ્રમેય તેને લાગુ પડે છે. આકૃતિ 7.30માં બતાવ્યા પ્રમાણે, તકતીના કેન્દ્ર Oથી આપણે ત્રણ સહવર્તી અક્ષોને X, Y, Z તરીકે લઈએ છીએ; X અને Y અક્ષો તક્તીના સમતલમાં આવેલા છે અને z તેને લંબ છે. લંબ અક્ષોના પ્રમેય દ્વારા,

$$I_z = I_x + I_y$$

હવે, x અને y-અક્ષો એ આ તક્તીના બે વ્યાસની દિશામાં છે અને સંમિતિ દ્વારા તક્તીની જડત્વની ચાકમાત્રા કોઈ પણ વ્યાસને સાપેક્ષે સમાન છે. તેથી

$$I_x = I_y$$

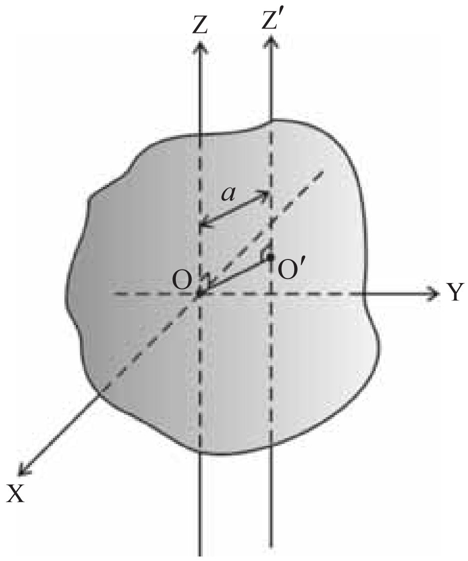
અને $\quad I_z = 2\,I_x$

પરંતુ $\quad I_z = MR^2/2$

તેથી અંતતઃ $\quad I_x = I_z/2 = MR^2/4$

આમ તેના કોઈ પણ વ્યાસને અનુલક્ષીને તક્તીની જડત્વની ચાકમાત્રા $MR^2/4$ છે. ◀

આ જ રીતે, કોઈ રિંગની તેના કોઈ પણ વ્યાસને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો. શું આ પ્રમેય નક્કર નળાકારને પણ લાગુ પડશે ?



આકૃતિ 7.31 *સમાંતર અક્ષોનો પ્રમેય. Z અને Z′ બે સમાંતર અક્ષો છે જેમની વચ્ચેનું અંતર a છે; O એ પદાર્થનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર છે, OO′ = a.*