(84) બિંદુ P(1, 4, 5)માંથી XY અને YZ સમતલો પર અનુક્રમે લંબ $\overline{PA}$ અને $\overline{PB}$ દોરેલા છે. સમતલ OAB નું સમીકરણ.....

(A) $20x + 5y + 4z = 0$ (B) $x + 4y + 5z = 0$

(C) $20x + 5y - 4z = 0$ (D) $20x - 5y + 4z = 0$

ઉકેલ : P(1, 4, 5)માંથી XY પરનો લંબપાદ A(1, 4, 0) અને YZ સમતલ પરનો લંબપાદ B(0, 4, 5) છે.

ધારો કે સમતલ OABનું સમીકરણ $ax + by + cz = 0$ છે.

તે A અને B માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ $a + 4b = 0$ અને ...(1)

$4b + 5c = 0$ ...(2)

સમીકરણ (1) અને (2)ને ઉકેલતાં

$a = -4b = 5c$

$\therefore$ $\frac{a}{20} = \frac{b}{-5} = \frac{c}{4} = k$ ($k \neq 0$) (ધારો કે)

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $20kx - 5ky + 4kz = 0$

$\therefore$ $20x - 5y + 4z = 0$ **જવાબ : (D)**

(85) એક ચલ-સમતલ, નિશ્ચિત બિંદુ (a, b, c)માંથી પસાર થાય છે અને અક્ષોને P, Q, R માં છેદે છે. યામ-સમતલોને સમાંતર તથા P, Q અને R માંથી પસાર થતા સમતલોના છેદબિંદુનો બિંદુગણ.....

(A) $ax + by + cz = 1$ (B) $ax + by + cz = -1$ (C) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$ (D) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

ઉકેલ : ધારો કે ચલ-સમતલ, અક્ષોને $P(p, o, o)$, $Q(o, q, o)$ અને $R(o, o, r)$માં છેદે છે.

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$

તે (a, b, c)માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} = 1$ ...(1)

યામ-સમતલોને સમાંતર તથા P, Q અને R માંથી પસાર થતા સમતલોનાં સમીકરણ અનુક્રમે $x = p$, $y = q$, $z = r$ છે.

$\therefore$ p, q, r નો (1)માંથી લોપ કરતાં આ સમતલોના છેદબિંદુનો બિંદુગણ $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$.

જવાબ : (C)

(86) બિંદુઓ (0, –1, 3), (1, 2, 2) અને (3, 1, 1)માંથી પસાર થતા સમતલનું (8, 5, 7) બિંદુથી લંબઅંતર ......

(A) $\sqrt{76}$ (B) $\sqrt{71}$ (C) $\sqrt{66}$ (D) $\sqrt{73}$

ઉકેલ : આપેલાં બિંદુઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-3 \\ 1-0 & 2+1 & 2-3 \\ 3-0 & 1+1 & 1-3 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore \begin{vmatrix} x & y+1 & z-3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore x(-4) - (y+1)(1) + (z-3)(-7) = 0$

$\therefore -4x - y - 1 - 7z + 21 = 0$

$\therefore 4x + y + 7z = 20$

હવે, સમતલ $4x + y + 7z - 20 = 0$ નું (8, 5, 7)થી લંબઅંતર

$= \frac{|4(8)+1(5)+7(7)-20|}{\sqrt{16+1+49}}$

$= \frac{66}{\sqrt{66}} = \sqrt{66}$ **જવાબ : (C)**

(87) $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{2}$ અને $\frac{x}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ બંને રેખાઓને સમાવતા સમતલને લંબ અને રેખા $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ ને સમાવતા સમતલનું સમીકરણ...... [IIT : 2010]

(A) $x + 2y - 2z = 0$ (B) $3x + 2y - 2z = 0$ (C) $x - 2y + z = 0$ (D) $5x + 2y - 4z = 0$

ઉકેલ : રેખાઓ $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{2}$ અને $\frac{x}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ ને સમાવતા સમતલને લંબસદિશ

$\vec{a} = \vec{l_1} \times \vec{l_2} = (3, 4, 2) \times (4, 2, 3) = (8, -1, -10)$

માંગેલ સમતલ રેખા $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ ને સમાવે છે.

$\therefore$ સમતલને અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{l}$

$= (8, -1, -10) \times (2, 3, 4)$

$= (26, -52, 26)$ એટલે કે $(1, -2, 1)$ છે.

સમતલનું એક બિંદુ ઊગમબિંદુ છે.

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $(x - 0) - 2(y - 0) + (z - 0) = 0$

$\therefore x - 2y + z = 0$ **જવાબ : (C)**

(88) સમતલો $2x - y + z = 6$ અને $x + 2y + 3z = 3$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ.....

(A) $cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{7}}\right)$ (B) $cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$ (C) $cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ (D) $cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$

ઉકેલ : સમતલો માટે $\vec{n_1} = (2, -1, 1)$ અને $\vec{n_2} = (1, 2, 3)$

હવે, $cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$

$= \frac{|2-2+3|}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+4+9}} = \frac{3}{2\sqrt{21}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$

$\therefore \theta = cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ **જવાબ : (C)**

(89) રેખા $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ અને સમતલ $3x + 2y - 3z = 4$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ.....

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) 0 (C) $cos^{-1}\left(\frac{24}{\sqrt{29}\sqrt{22}}\right)$ (D) $\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $\vec{l} = (2, 3, 4)$, $\vec{n} = (3, 2, -3)$

રેખા અને સમતલ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય, તો

$$sin\theta = \frac{|\vec{l} \cdot \vec{n}|}{|\vec{l}||\vec{n}|} = \frac{|2(3)+3(2)+4(-3)|}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{22}} = 0$$

$\therefore \theta = 0$ (રેખા સમાંતર છે.) (રેખા સમતલમાં કેમ નથી ?) **જવાબ : (B)**

(90) જો રેખા $x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{\lambda}$ અને સમતલ $x + 2y + 3y = 4$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $cos^{-1}\sqrt{\frac{5}{14}}$ હોય, તો λ = ... [AIEEE : 2011]

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{5}{3}$

ઉકેલ : $\vec{l} = (1, 2, \lambda)$, $\vec{n} = (1, 2, 3)$

રેખા અને સમતલ α વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય, તો

$$sin\theta = \frac{|\vec{l} \cdot \vec{n}|}{|\vec{l}||\vec{n}|} = \frac{|1 + 4 + 3\lambda|}{\sqrt{5+\lambda^2}\cdot\sqrt{14}}$$

$$\therefore cos\theta = \sqrt{1 - \frac{(5+3\lambda)^2}{(5+\lambda^2)14}}$$

$$\therefore \theta = cos^{-1}\sqrt{\frac{14(5+\lambda^2)-(5+3\lambda)^2}{14(5+\lambda^2)}}$$

$$\therefore cos^{-1}\sqrt{\frac{5}{14}} = cos^{-1}\sqrt{\frac{70+14\lambda^2-25-30\lambda-9\lambda^2}{14(5+\lambda^2)}}$$

$\therefore 5(5 + \lambda^2) = 5\lambda^2 - 30\lambda + 45$

$\therefore 25 = -30\lambda + 45$

$\therefore 30\lambda = 20$

$\lambda = \frac{2}{3}$ **જવાબ : (A)**

(91) રેખા $x = y = z$ ને સમાંતર બિંદુ $(1, -5, 9)$નું સમતલ $x - y + z = 5$ થી અંતર ...... [AIEEE : 2011]

(A) $10\sqrt{3}$ (B) $5\sqrt{3}$ (C) $3\sqrt{10}$ (D) $3\sqrt{5}$

ઉકેલ : રેખા $x = y = z$ ને સમાંતર A(1, –5, 9)માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

$\vec{r} = (1, -5, 9) + k\,(1, 1, 1),\ k \in R$

આ રેખા પરનું કોઈક બિંદુ B$(1 + k, -5 + k, 9 + k)$ એ સમતલ $x - y + z = 5$ પર આવેલું છે.

$\therefore\ 1 + k + 5 - k + 9 + k = 5$

$\therefore\ k = -10$

$\therefore$ સમતલ પરના બિંદુ B(–9 –15, –1)નું A(1, –5, 9)થી અંતર $= \sqrt{100+100+100}$

$= 10\sqrt{3}$ **જવાબ : (A)**

(92) ઊગમબિંદુથી એક એકમ દૂર આવેલા $x - 2y + 2z - 5 = 0$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ...... [AIEEE : 2012]

(A) $x - 2y + 2z - 3 = 0$ (B) $x - 2y + 2z + 1 = 0$

(C) $x - 2y + 2z - 1 = 0$ (D) $x - 2y + 2z + 5 = 0$

ઉકેલ : સમતલ $x - 2y + 2z - 5 = 0$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ $x - 2y + 2z + k = 0$ છે.

તેનું ઊગમબિંદુથી અંતર = 1.

$\therefore\ \frac{|k|}{\sqrt{1+4+4}} = 1$

$\therefore\ k = \pm 3$

વિકલ્પ $k = -3$ આપેલ વિકલ્પો પૈકી લઈ શકાય તેમ છે.

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $x - 2y + 2z - 3 = 0$ **જવાબ : (A)**

(93) (2, –3, 1) અને (3, –4, –5) પસાર થતી રેખા અને સમતલ $2x + y + z = 7$ નું છેદબિંદુ......

(A) (1, 2, 7) (B) (1, –2, 7) (C) (–1, 2, 7) (D) (1, –2, –7)

ઉકેલ : (2, –3, 1) અને (3, –4, –5)માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $\vec{r} = (2, -3, 1) + k\,(1, -1, -6)$ $k \in R$ છે. કોઈક $k \in R$ માટે રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(2 + k, -3 - k, 1 - 6k)$ એ સમતલ $2x + y + z = 7$ પર આવેલું હોય, તો $2\,(2 + k) + (-3 - k) + (1 - 6k) = 7$.

$\therefore\ 4 + 2k - 3 - k + 1 - 6k = 7$

$\therefore\ 5k = -5$

$\therefore\ k = -1$

$\therefore$ છેદબિંદુ $(2 - 1, -3 + 1, 1 + 6) = (1, -2, 7)$ છે. **જવાબ : (B)**

(94) (3, –2, 1)માંથી પસાર થતા ને રેખાઓ $\frac{x}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{-2}$ અને $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3}$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ ......

(A) $13x - 8y + 14z - 37 = 0$ (B) $13x + 8y + 14z + 37 = 0$

(C) $13x - 8y - 14z - 41 = 0$ (D) $13x + 8y + 14z - 37 = 0$

ઉકેલ : (3, –2, 1)માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

$a\,(x - 3) + b\,(y + 2) + c\,(z - 1) = 0$

સમતલ, રેખાઓ $\frac{x}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{-2}$ અને $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3}$ ને સમાંતર છે, તેથી સમતલનો અભિલંબ

સદિશ $\vec{n} = \vec{l_1} \times \vec{l_2} = (4, -3, -2) \times (-2, -2, 3) = (-13, -8, -14)$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $13(x - 3) + 8(y + 2) + 14(z - 1) = 0$

$\therefore 13x + 8y + 14z = 37$ **જવાબ : (D)**

(95) (3, 1, –1) થી $\frac{2}{\sqrt{3}}$ અંતરે આવેલા અને સમતલો $x + 2y + 3z = 2$ તથા $x - y + z = 3$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ..... [IIT : 2012]

(A) $5x - 11y + z = 17$ (B) $\sqrt{2}x + y = 3\sqrt{2} - 1$

(C) $x + y + z = \sqrt{3}$ (D) $x - \sqrt{2}y = 1 - \sqrt{2}$

ઉકેલ : સમતલો $x + 2y + 3z - 2 = 0$ અને $x - y + z - 3 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $x + 2y + 3z - 2 + \lambda(x - y + z - 3) = 0$,

$\therefore (1 + \lambda)x + (2 - \lambda)y + (3 + \lambda)z + (-2 - 3\lambda) = 0$

સમતલનું બિંદુ (3, 1, –1)થી અંતર $\frac{2}{\sqrt{3}}$ છે.

$$\therefore \frac{|3 + 3\lambda + 2 - \lambda - 3 - \lambda - 2 - 3\lambda|}{\sqrt{(1+\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 + (3+\lambda)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\therefore 3(4\lambda^2) = 4(3\lambda^2 + 4\lambda + 14)$

$\therefore 4\lambda + 14 = 0$

$\therefore \lambda = -\frac{7}{2}$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $\left(1 - \frac{7}{2}\right)x + \left(2 + \frac{7}{2}\right)y + \left(3 - \frac{7}{2}\right)z - \left(2 + 3\left(-\frac{7}{2}\right)\right) = 0$

$\therefore 5x - 11y + z = 17$ **જવાબ : (A)**

(96) બિંદુ P એ સમતલ $5x - 4y - z = 1$ અને Q(2, 3, 5) તથા R(1, –1, 4)ને જોડતી રેખાનું છેદબિંદુ છે. જો T(2, 1, 4)માંથી $\overleftrightarrow{QR}$ પરનો લંબપાદ S હોય, તો $\overline{PS}$ ની લંબાઈ ...... [IIT : 2012]

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) $2\sqrt{2}$

ઉકેલ : $\overleftrightarrow{QR}$ નું સમીકરણ $\vec{r} = (2, 3, 5) + k(1, 4, 1), k \in R$

રેખા પરનું બિંદુ $(2 + k, 3 + 4k, 5 + k)$ એ રેખા અને સમતલ $5x - 4y - z = 1$ નું છેદબિંદુ P હોય, તો

$5(2 + k) - 4(3 + 4k) - (5 + k) = 1$

$\therefore 10 + 5k - 12 - 16k - 5 - k = 1$

$\therefore 12k = -8$. આથી, $k = -\frac{2}{3}$

$\therefore$ છેદબિંદુ $P\left(2 - \frac{2}{3}, 3 - \frac{8}{3}, 5 - \frac{2}{3}\right) = P\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$

ધારો કે બિંદુ T માંથી $\overleftrightarrow{QR}$ પરનો લંબપાદ કોઈક k માટે $S(2 + k, 3 + 4k, 5 + k)$ છે.

હવે, $T = (2, 1, 4)$

$\vec{TS} \perp \vec{l}$

$\therefore \vec{TS} \cdot \vec{l} = 0$

$\therefore (k, 2 + 4k, 1 + k) \cdot (1, 4, 1) = 0$

$\therefore k + 8 + 16k + 1 + k = 0$

$\therefore 18k = -9$. આથી, $k = -\frac{1}{2}$

$\therefore S\left(2 - \frac{1}{2}, 3 - \frac{4}{2}, 5 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{2}, \frac{9}{2}\right)$

અંતર $PS = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{3} - \frac{9}{2}\right)^2}$

$= \frac{1}{6}\sqrt{1 + 16 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **જવાબ : (A)**

(97) સમતલ $x + 2y - 5z + 9 = 0$ ને લંબ $(1, 2, 3)$માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ ......

(A) $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{3}$ (B) $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{-5}$

(C) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+5}{3}$ (D) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-5}$

ઉકેલ : સમતલનો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = (1, 2, -5)$ એ રેખાની દિશા હશે.

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-5}$ ((B) ચકાસી જુઓ) **જવાબ : (D)**

(98) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{4}$ માંથી પસાર થતા અને $x + 2y + z = 12$ ને લંબ-સમતલનું સમીકરણ.....

(A) $2x - 9y + 5z + 4 = 0$ (B) $3x - 6y + 5z + 4 = 0$

(C) $5x - 2y + 9z + 4 = 0$ (D) $9x - 2y - 5z + 4 = 0$

ઉકેલ : સમતલ રેખા $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{4}$ માંથી પસાર થાય છે.

તેથી સમતલ બિંદુ $(1, -1, 3)$માંથી પસાર થાય છે અને તેના અભિલંબ સદિશ $\vec{l} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ ને લંબ છે.

માંગેલ સમતલનો અભિલંબ સદિશ $x + 2y + z = 12$ ના અભિલંબ સદિશ $\vec{n_1} = (1, 2, 1)$ને પણ લંબ છે.

$\therefore$ માંગેલ સમતલનો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{l} = (1, 2, 1) \times (2, -1, 4) = (9, -2, -5)$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $9(x - 1) - 2(y + 1) - 5(z - 3) = 0$

$\therefore 9x - 2y - 5z + 4 = 0$ **જવાબ : (D)**

(99) સમતલો $3x + 3y - 4z + 7 = 0$ અને $2x - 5y + z + 2 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા તથા રેખા $x = 0, z = 0$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ ......

(A) $21x - 8y + 23 = 0$ (B) $23y + 20z + 23 = 0$

(C) $21x - 17z + 41 = 0$ (D) $20x - 21z + 41 = 0$

ઉકેલ : $3x + 3y - 4z + 7 = 0$ અને $2x - 5y + z + 2 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $3x + 3y - 4z + 7 + \lambda (2x - 5y + z + 2) = 0$ છે.

$\therefore$ $(3 + 2\lambda)x + (3 - 5\lambda)y + (-4 + \lambda)z + (7 + 2\lambda) = 0$ માંગેલ સમતલનું સમીકરણ છે.

સમતલ રેખા $x = 0, z = 0$ ને સમાંતર છે એટલે કે $(0, 1, 0)$ સમતલના અભિલંબને લંબ છે.

$\therefore$ $3 - 5\lambda = 0$

$\therefore$ $\lambda = \frac{3}{5}$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $21x - 17z + 41 = 0$ **જવાબ : (C)**

(100) $x + y + z - 6 = 0$ અને $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા અને $4x + 5y - 3z = 8$ ને લંબ-સમતલનું સમીકરણ ......

(A) $x + 7y + 13z - 96 = 0$ (B) $x + 7y + 13z + 96 = 0$

(C) $x + 7y - 13z - 96 = 0$ (D) $x - 7y + 13z + 96 = 0$

ઉકેલ : આપેલાં સમતલોની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

$x + y + z - 6 + \lambda (2x + 3y + 4z + 5) = 0$

$\therefore$ $(1 + 2\lambda)x + (1 + 3\lambda)y + (1 + 4\lambda)z + (-6 + 5\lambda) = 0$

તે સમતલ $4x + 5y - 3z = 8$ ને લંબ છે.

$\therefore$ $4(1 + 2\lambda) + 5(1 + 3\lambda) - 3(1 + 4\lambda) = 0$

$\therefore$ $11\lambda = -6$

$\therefore$ $\lambda = -\frac{6}{11}$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $x + 7y + 13z + 96 = 0$ **જવાબ : (B)**

(101) $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ અને $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ ......

(A) $5x - 8y + z + 9 = 0$ (B) $5x - 8y + z + 3 = 0$

(C) $5x - 8y - z + 7 = 0$ (D) $5x + 8y - z - 9 = 0$

ઉકેલ : આપેલ રેખાઓ એકબીજાને સમાંતર છે. સમતલ બિંદુઓ $(0, 1, -1)$ અને $(-1, 0, 2)$માંથી પસાર થાય છે અને $\vec{l} = (3, 2, -1)$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore$ $\begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore$ $-5x + 8(y - 1) + 1 (z + 1) = 0$

$\therefore$ $5x - 8y - z + 7 = 0$ (રેખાઓ સંપાતી છે ?) **જવાબ : (C)**

JEE અને Advanced JEE માં પુછાયેલા પ્રશ્નો :

(102) બે રેખાઓ $L_1 : x = 5, \frac{y}{3-\alpha} = \frac{z}{-2}$ અને $L_2 : x = \alpha, \frac{y}{-1} = \frac{z}{2-\alpha}$ સમતલીય હોય, તો α ની કિંમત (કિંમતો) ...... [JEE : 2013]

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : રેખાઓ માટે $\vec{a} = (5, 0, 0)$ $\vec{l} = (0, 3 - \alpha, -2)$ અને

$\vec{b} = (\alpha, 0, 0)$ $\vec{m} = (0, -1, 2 - \alpha)$. રેખાઓ સમતલીય છે.

$\therefore (\bar{b} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = 0$

આથી $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \begin{vmatrix} \alpha - 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \alpha & -2 \\ 0 & -1 & 2 - \alpha \end{vmatrix} = 0$

$\therefore (\alpha - 5) [(3 - \alpha) (2 - \alpha) - 2] = 0$

$\therefore (\alpha - 5) (\alpha^2 - 5\alpha + 4) = 0$

$\therefore \alpha = 5, \alpha = 4, \alpha = 1$ **જવાબ : (A), (D)**

(103) બે રેખાઓ $L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{1}, L_2 : \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+3}{2}$ છે

તથા બે સમતલો $\pi_1 : 7x + y + 2z = 3$ અને $\pi_2 : 3x + 5y - 6z = 4$ છે.

રેખા L_1 અને L_2 ના છેદબિંદુમાંથી સમતલ $ax + by + cz = d$ પસાર થાય છે તથા તે π_1 અને π_2 ને લંબ છે. ....

યાદી : 1 ને **યાદી** : 2 સાથે યોગ્ય રીતે જોડો અને આપેલ સંજ્ઞામાંથી સાચો જવાબ શોધો :

	યાદી : 1	**યાદી** : 2
P	$a =$	1. 13
Q	$b =$	2. –3
R	$c =$	3. 1
S	$d =$	4. –2

સંજ્ઞા :

	P	Q	R	S
(A)	3	2	4	1
(B)	1	3	4	2
(C)	3	2	1	4
(D)	2	4	1	3

ઉકેલ : રેખા L_1 પરનું કોઈ પણ બિંદુ M $(2k_1 + 1, -k_1, k_1 - 3)$ અને

રેખા L_2 પરનું કોઈ પણ બિંદુ N $(k_2 + 4, k_2 - 3, 2k_2 - 3)$ છે.

L_1 અને L_2 ના છેદબિંદુ માટે કોઈક k_1 તથા k_2 માટે,

$2k_1 + 1 = k_2 + 4, - k_1 = k_2 - 3; k_1 - 3 = 2k_2 - 3$

$\therefore\ 2k_1 - k_2 = 3$ અને $k_1 + k_2 = 3$

$\therefore\ k_1 = 2;\ k_2 = 1$

વળી, $k_1 = 2$ તથા $k_2 = 1$ લેતા $k_1 - 3 = 2k_2 - 3$ છે.

$\therefore$ છેદબિંદુ $M = N = (5, -2, -1)$

સમતલ $ax + by + cz = d$, π_1 અને π_2 ને લંબ છે.

$(a, b, c) = (7, 1, 2) \times (3, 5, -6) = (-16, 48, 32)$

$\therefore\ (a, b, c) = (1, -3, -2)$ લઈ શકાય.

$(x - 5) - 3(y + 2) - 2(z + 1) = 0$

$\therefore\ x - 3y - 2z = 13$

$\therefore$ P : $a = 1$, Q : $b = -3$, R : $c = -2$, S : $d = 13$

$\therefore$ P $\rightarrow$ 3, Q $\rightarrow$ 2, R $\rightarrow$ 4, S $\rightarrow$ 1

$\therefore$ P Q R S એ 3 2 4 1 **જવાબ : (A)**

(104) બે રેખાઓ $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{-k}$ અને $\frac{x-1}{k} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{1}$ સમતલીય હોય, તો k ની ......

[JEE : 2013]

(A) ફક્ત એક કિંમત મળે. (B) ફક્ત બે કિંમત મળે. (C) ફક્ત ત્રણ કિંમત મળે. (D) કોઈ પણ કિંમત ન મળે.

ઉકેલ : રેખાઓ માટે $\vec{a} = (2, 3, 4)$, $\vec{l} = (1, 1, -k)$ અને $\vec{b} = (1, 4, 5)$, $\vec{m} = (k, 2, 1)$. રેખાઓ સમતલીય છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -k \\ k & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore\ -1(1 + 2k) - 1(1 + k^2) + 1\ (2 - k) = 0$

$\therefore\ -1 - 2k - 1 - k^2 + 2 - k = 0$

$\therefore\ k^2 + 3k = 0$

$\therefore\ k(k + 3) = 0$

$\therefore\ k = 0$ અથવા -3

$\therefore$ k ની બે કિંમત મળે. **જવાબ : (B)**

(105) જો રેખાઓ $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}$ અને $\frac{x+2}{2} = \frac{y-k}{3} = \frac{z}{4}$ સમતલીય હોય, તો k = ...

[JEE : 2013]

(A) $\frac{11}{2}$ (B) $-\frac{11}{2}$ (C) $\frac{9}{2}$ (D) $-\frac{9}{2}$

ઉકેલ : રેખાઓ માટે, $\vec{a} = (-1, 1, -1)$, $\vec{l} = (2, 1, 3)$ અને $\vec{b} = (-2, k, 0)$, $\vec{m} = (2, 3, 4)$.

રેખાઓ સમતલીય છે.

$\therefore (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = 0$

$\therefore (1, 1 - k, -1) \cdot (-5, -2, 4) = 0$

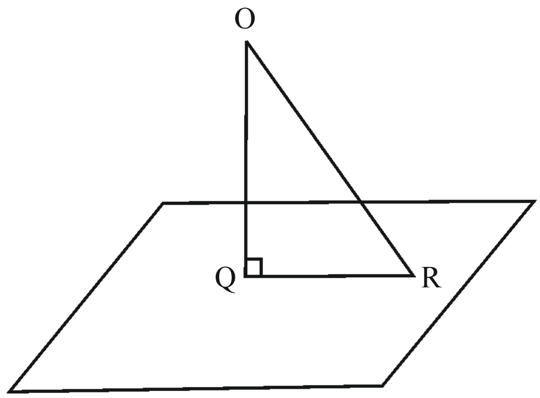
$\therefore -5 - 2 + 2k - 4 = 0$

$\therefore k = \frac{11}{2}$ **જવાબ : (A)**

(106) ઊગમબિંદુથી સમતલ $4x - 3y + z + 13 = 0$ પરના લંબપાદ Q નું સમતલના બિંદુ R(–1, 1, –6) થી અંતર...... [JEE 2013]

(A) $\sqrt{14}$ (B) $\sqrt{\frac{19}{2}}$ (C) $3\sqrt{\frac{7}{2}}$ (D) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

ઉકેલ : ઊગમબિંદુ O(0, 0, 0) થી સમતલનું લંબઅંતર



આકૃતિ 21.7

$OQ = \frac{|13|}{\sqrt{16+9+1}} = \frac{13}{\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$

$OR = \sqrt{1+1+36} = \sqrt{38}$

$\therefore QR = \sqrt{OR^2 - OQ^2}$

$= \sqrt{38 - \frac{13}{2}}$

$= \sqrt{\frac{63}{2}}$

$= 3\sqrt{\frac{7}{2}}$ **જવાબ : (C)**

(107) જો બે રેખાઓની દિક્કોસાઇન l, m અને n એ સમીકરણ $l + m + n = 0$ અને $l^2 + m^2 - n^2 = 0$ નું સમાધાન કરે, તો તેમની વચ્ચેના લઘુકોણનું માપ.... [JEE : 2013]

(A) $\frac{\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

ઉકેલ : દાખલો (34) નો ઉકેલ

(108) અવકાશની બે રેખાઓ $L_1 : \{x = \sqrt{\lambda}\, y + \sqrt{\lambda} - 1),\ z = (\sqrt{\lambda} - 1)\, y + \sqrt{\lambda}\}$ અને

$L_2 : \{x = \sqrt{\mu}\, y + (1 - \sqrt{\mu}),\ z = (1 - \sqrt{\mu})\, y + \sqrt{\mu}\}$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે. L_1 અને L_2 પરસ્પર લંબ હોય, તો.... [JEE : 2013]

(A) $\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu} = 1$ (B) $\lambda \neq \mu$ (C) $\lambda + \mu = 0$ (D) $\lambda = \mu$

ઉકેલ : રેખા $L_1 : \frac{x - (\sqrt{\lambda} - 1)}{\sqrt{\lambda}} = \frac{y}{1} = \frac{z - \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} - 1}$

અને $L_2 : \frac{x - (1 - \sqrt{\mu})}{\sqrt{\mu}} = \frac{y}{1} = \frac{z - \sqrt{\mu}}{1 - \sqrt{\mu}}$

$\therefore \vec{l} = \left(\sqrt{\lambda}, 1, \sqrt{\lambda} - 1\right)$ અને $\vec{m} = \left(\sqrt{\mu}, 1, 1 - \sqrt{\mu}\right)$

$L_1 \perp L_2 \Rightarrow \vec{l} \perp \vec{m}$

$\Rightarrow \vec{l} \cdot \vec{m} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda\mu} + 1 + \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda\mu} - 1 + \sqrt{\mu} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu} = 0$ તથા λ અને μ અનૃણ

$\Rightarrow \lambda = \mu = 0$

જવાબ : (C), (D)

(109) $x + 2y = 3$ અને $y - 2z + 1 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા તથા પ્રથમ સમતલને લંબ-સમતલનું સમીકરણ.... [JEE : 2013]

(A) $2x - y - 10z = 9$ (B) $2x - y + 7z = 11$ (C) $2x - y + 10z = 11$ (D) $2x - y - 9z = 10$

ઉકેલ : આપેલાં સમતલોની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $x + 2y - 3 + \lambda(y - 2z + 1) = 0$

$\therefore x + (2 + \lambda)y - 2\lambda z - (3 - \lambda) = 0$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n_1} = (1, 2 + \lambda, -2\lambda)$ અને તેને લંબ-સમતલ

$x + 2y = 3$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n_2} = (1, 2, 0)$ છે.

$\therefore \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Rightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 \Rightarrow 1 + 4 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{2}$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $2x - y + 10z = 11$ **જવાબ : (C)**

(110) જેની દિક્કોસાઈનો સમીકરણ $l + m + n = 0$ અને $l^2 = m^2 + n^2$ નું સમાધાન કરે તેવી રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ...... છે. [JEE : 2014]

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : દાખલા (34)ના ઉકેલ પ્રમાણે ગણવો. **જવાબ : (A)**

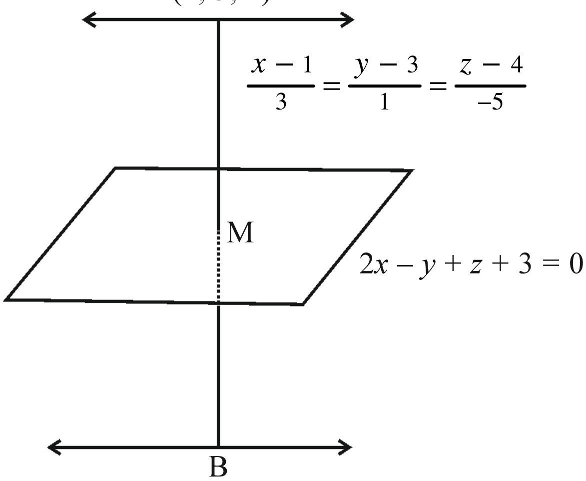
(111) રેખા $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{-5}$ નું સમતલ $2x - y + z + 3 = 0$ માં પ્રતિબિંબ ...... રેખા છે. [JEE : 2014]

(A) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-2}{-5}$ (B) $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+2}{5}$

(C) $\frac{x-3}{3} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-2}{-5}$ (D) $\frac{x-3}{-3} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-2}{5}$

ઉકેલ : સમતલ $2x - y + z + 3 = 0$ નો અભિલંબ $\vec{n} = (2, -1, 1)$ છે.

$\therefore$ A માંથી પસાર થતી સમતલ $2x - y + z + 3 = 0$ ને લંબરેખા $\overleftrightarrow{AM}$ નું સમીકરણ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{1}$ થાય.



આકૃતિ 21.8

ધારો કે સમતલમાં A નું પ્રતિબિંબ B છે, B $\in \overleftrightarrow{AM}$

$\therefore$ કોઈક $k \in R$ માટે

B$(1 + 2k, 3 - k, 4 + k)$ છે.

$\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ $M\left(\frac{2+2k}{2}, \frac{6-k}{2}, \frac{8+k}{2}\right)$ સમતલનું બિંદુ છે.

$\therefore\ 2\left(\frac{2+2k}{2}\right) - \left(\frac{6-k}{2}\right) + \left(\frac{8+k}{2}\right) + 3 = 0$

$\therefore\ 4 + 4k - 6 + k + 8 + k + 6 = 0$

$\therefore\ 6k = -12$

$\therefore\ k = -2$

$\therefore$ B (–3, 5, 2) થશે.

$\therefore$ આપેલ રેખાની પ્રતિબિંબ રેખા $\frac{x+3}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-2}{-5}$ થશે. **જવાબ : (A)**

(112) રેખાઓ $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ અને $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતા અને ઊગમબિંદુથી ન્યૂનતમ અંતરે આવેલા સમતલનું સમીકરણ.... [JEE : 2014]

(A) $7x + 2y + 4z = 54$ (B) $3x + 4y + 5z = 49$

(C) $4x + 3y + 5z = 50$ (D) $5x + 4y + 3z = 57$

ઉકેલ : ધારો કે રેખા $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ પરનું બિંદુ $P(1 + 3k, 2 + k, 3 + 2k)$ એ આપેલ રેખાઓનું છેદબિંદુ છે.

$\therefore$ P એ રેખા $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ પર આવેલું છે.

$\therefore\ \frac{1+3k-3}{1} = \frac{2+k-1}{2} = \frac{3+2k-2}{3}$

$\therefore\ 6k - 4 = k + 1$

$\therefore\ 5k = 5$

$\therefore\ k = 1$

($k = 1$ માટે $\frac{2+k-1}{2} = \frac{3+2k-2}{3}$ પણ છે જ.)

$\therefore$ રેખાઓના છેદબિંદુ P(4, 3, 5)નું અંતર OP એ સમતલનું ઊગમબિંદુથી ન્યૂનતમ અંતર થશે. સમતલનો અભિલંબ

સદિશ $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \vec{n} = (4, 3, 5)$

$\therefore$ ઊગમબિંદુથી ન્યૂનતમ અંતરે આવેલા સમતલનું સમીકરણ

$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

$\therefore\ 4(x - 4) + 3(y - 3) + 5(z - 5) = 0$

$\therefore\ 4x + 3y + 5z = 50$ **જવાબ : (C)**

(113) ત્રિપરિમાણીય અવકાશની એક રેખા X-અક્ષ અને Y-અક્ષ સાથે θ માપનો ખૂણો $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$ બનાવે, તો θ ની તમામ કિંમતોનો ગણ ...... છે.

(A) $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ (B) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ (C) $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ (D) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

ઉકેલ : ધારો કે રેખા Z-અક્ષ સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે છે.

$\therefore\ cos^2\theta + cos^2\theta + cos^2\alpha = 1$

$\therefore\ cos^2\alpha = 1 - 2cos^2\theta$

$\therefore\ cos^2\alpha = -\ cos2\theta$

$0 \le cos^2\alpha \le 1 \Rightarrow 0 \le -cos2\theta \le 1$

$\Rightarrow -1 \le cos2\theta \le 0$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \le 2\theta \le \pi$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ **જવાબ : (D)**

(114) રેખા $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ ને સમાવતું તથા $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$ રેખાને સમાંતર સમતલ ...... બિંદુમાંથી પસાર થાય છે. [JEE : 2014]

(A) (1, –2, 5) (B) (1, 0, 5) (C) (0, 3, –5) (D) (–1, –3, 0)

ઉકેલ : સમતલમાં આવેલી રેખા પરનું બિંદુ A(1, 2, 3) સમતલનું પણ બિંદુ છે. સમતલનો અભિલંબ સદિશ એ $\vec{l} = (1, 2, 3)$ તથા $\vec{m} = (1, 1, 4)$ સદિશની દિશાવાળી રેખાને લંબ છે.

$\therefore$ સમતલનો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = \vec{l} \times \vec{m} = (1, 2, 3) \times (1, 1, 4) = (5, -1, -1)$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $5(x - 1) -1 (y - 2) -1 (z - 3) = 0$

$\therefore 5x - y - z = 0$

આપેલ બિંદુઓ પૈકી માત્ર બિંદુ (1, 0, 5) આ સમતલ પર આવેલું છે તે ચકાસી શકાય. **જવાબ : (B)**

(115) સમતલો $x = ay + b$ અને $z = cy + d$ ની છેદરેખાનું સંમિત સ્વરૂપ.... [JEE : 2014]

(A) $\frac{x-b}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-d}{c}$ (B) $\frac{x-b-a}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-d-c}{c}$

(C) $\frac{x-b}{b} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-c}{d}$ (D) $\frac{x-b-a}{b} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-d-c}{d}$

ઉકેલ : સમતલ $x - ay = b$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n_1} = (1, -a, 0)$ અને સમતલ $z - cy = d$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n_2} = (0, -c, 1)$

$\therefore$ સમતલોની છેદરેખાની દિશાનો સદિશ $\vec{l} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$

$= (1, -a, 0) \times (0, -c, 1)$

$= (-a, -1, -c)$

અથવા $\vec{l} = (a, 1, c)$

છેદરેખા પરના કોઈક બિંદુ માટે $y = 1$ લેતાં $x = a + b$ અને $z = c + d$

$\therefore$ છેદરેખા પર એક બિંદુ $(a + b, 1, c + d)$ છે.

$\therefore$ છેદરેખાનું સંમિત સ્વરૂપ $\frac{x-a-b}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-c-d}{c}$ **જવાબ : (B)**

(116) જો સમતલો $4x - 2y - 4z + 1 = 0$ અને $4x - 2y - 4z + d = 0$ વચ્ચેનું અંતર 7 હોય, તો d ......

[JEE : 2014]

(A) 41 અથવા –42 (B) 42 અથવા –43 (C) –41 અથવા 43 (D) –42 અથવા 44

ઉકેલ : સમાંતર સમતલો વચ્ચેનું અંતર $= \frac{|d_1 - d_2|}{|\vec{n}|}$

$\therefore\ 7 = \frac{|d-1|}{\sqrt{16+4+16}}$

$42 = d - 1$ અથવા $-42 = d - 1$

$\therefore\ d = 43$ અથવા $d = -41$ **જવાબ : (C)**

(117) રેખા $2(x + 1) = y = z + 4$ અને સમતલ $2x - y + \sqrt{\lambda}\, z + 4 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{6}$ હોય, તો λ = ...

[JEE : 2014]

(A) $\frac{135}{7}$ (B) $\frac{45}{11}$ (C) $\frac{45}{7}$ (D) $\frac{135}{11}$

ઉકેલ : રેખા $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{2}$ ની દિશા $\vec{l} = (1, 2, 2)$ અને સમતલ $2x - y + \sqrt{\lambda}\, z + 4 = 0$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = (2, -1, \sqrt{\lambda})$.

રેખા અને સમતલ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ લેતાં, $sin\theta = \frac{|\vec{l} \cdot \vec{n}|}{|\vec{l}||\vec{n}|}$

$\therefore\ sin\ \frac{\pi}{6} = \frac{|2 - 2 + 2\sqrt{\lambda}|}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{4+1+\lambda}}$

$\therefore\ \frac{1}{2} = \frac{|2\sqrt{\lambda}|}{3\sqrt{5+\lambda}}$

$\therefore\ 45 + 9\lambda = 16\lambda$. આથી $\frac{45}{7} = \lambda$ **જવાબ : (C)**

(118) રેખાઓ $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ તથા $\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ ની વચ્ચેના ન્યૂનતમ અંતરને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ....

[JEE : 2014]

(A) $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}$ (B) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-2}$ (C) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ (D) $\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$

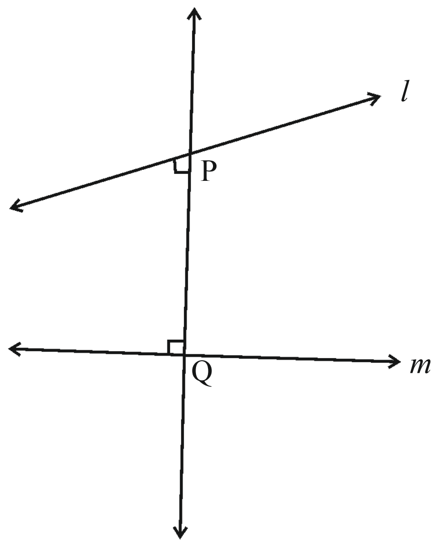
ઉકેલ : રેખા $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ પર કોઈક $k_1 \in$ R માટે બિંદુ $P(k_1, -k_1, k_1)$ અને રેખા $\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ પર કોઈક $k_2 \in$ R માટે બિંદુ $Q(1, -2k_2 - 1, k_2)$ છે.

$\overleftrightarrow{PQ}$ એ આપેલ બંને રેખાઓને લંબ હોય, તો PQ ન્યૂનતમ અંતર થાય.

$\overrightarrow{\mathbf{PQ}} = (-k_1 + 1, -2k_2 + k_1 - 1, k_2 - k_1)$

$\overrightarrow{\mathbf{PQ}} \perp \vec{l}$ અને $\overrightarrow{\mathbf{PQ}} \perp \vec{m}$,

જ્યાં $\vec{l} = (1, -1, 1)$ અને $\vec{m} = (0, -2, 1)$



આકૃતિ 21.9

$\overrightarrow{\mathbf{PQ}} = k(\vec{l} \times \vec{m})$

$= k(1, -1, -2)$

$\therefore -k_1 + 1 = 2k_2 - k_1 + 1$ ...(1)

$\therefore 2(-2k_2 + k_1 - 1) = k_2 - k_1$ ...(2)

(1) પરથી $k_2 = 0$

$\therefore 2k_1 - 2 = -k_1$

$\therefore k_1 = \frac{2}{3}$

$\therefore Q(1, -2k_2 - 1, k_2) = (1, -1, 0)$

$\overleftrightarrow{PQ}$ ની દિશાનો સદિશ $= \left(1-\frac{2}{3}, -1+\frac{2}{3}, 0-\frac{2}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ એટલે કે $(1, -1, -2)$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ વચ્ચેના ન્યૂનતમ અંતરને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-2}$ છે.

જવાબ : (B)

જુઓ કે,

$(1, -1, 1) \times (0, -2, 1) = (1, -1, -2)$

$\therefore$ જવાબ (A) કે (B) શક્ય છે.

(119) બિંદુ $P(\lambda, \lambda, \lambda)$માંથી રેખાઓ $y = x$, $z = 1$ અને $y = -x$, $z = -1$ પર $\overline{PQ}$ અને $\overline{PR}$ લંબ દોરેલા છે. જો બિંદુ P એ $\angle QPR$ કાટખૂણો બને તેવું હોય, તો λ ની શક્ય કિંમત (કિંમતો)....

(A) $\sqrt{2}$ (B) 1 (C) -1 (D) $-\sqrt{2}$

ઉકેલ : રેખા $L_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$ પરનું કોઈ પણ બિંદુ, $Q(k_1, k_1, 1)$ અને $\vec{l} = (1, 1, 0)$ અને રેખા

$L_2 : \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{0}$ પરનું કોઈ પણ બિંદુ $R(k_2, -k_2, -1)$ અને $\vec{m} = (1, -1, 0)$

$\overrightarrow{\mathbf{PQ}} = (k_1 - \lambda, k_1 - \lambda, 1 - \lambda)$. વળી, $\overrightarrow{\mathbf{PQ}} \perp L_1$

$\therefore \overrightarrow{\mathbf{PQ}} \cdot \vec{l} = 0$

$\therefore k_1 - \lambda + k_1 - \lambda = 0$. આથી, $k_1 = \lambda$

તથા $\overrightarrow{\mathbf{PR}} \perp L_2$. આથી, $\overrightarrow{\mathbf{PR}} \cdot \vec{m} = 0$

$\therefore (k_2 - \lambda, -k_2 - \lambda, -1 - \lambda) \cdot (1, -1, 0) = 0$

$\therefore\ k_2 - \lambda + k_2 + \lambda = 0$

$\therefore\ k_2 = 0$

$\angle QPR$ કાટખૂણો છે.

$\therefore\ \vec{PQ} \perp \vec{PR}$. આથી, $\vec{PQ} \cdot \vec{PR} = 0$

$\therefore\ (k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda) + (k_1 - \lambda)(-k_2 - \lambda) + (1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$

$\therefore\ (1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0 \qquad (k_1 = \lambda)$

$\therefore\ \lambda^2 - 1 = 0$

$\therefore\ \lambda = 1$ અથવા $\lambda = -1$

$\lambda = 1$ લેતાં $P = Q = (1, 1, 1)$. આથી, $\lambda = 1$ શક્ય નથી.

$\therefore\ \lambda = -1$ **જવાબ : (C)**

(120) R^3 માં સમતલ $\pi_1 : y = 0$ અને $\pi_2 : x + z = 1$ છે. સમતલ π_1 અને π_2 થી ભિન્ન સમતલ π_3 છે. તે π_1 અને π_2 ની છેદરેખામાંથી પસાર થાય છે. જો બિંદુ $(0, 1, 0)$ નું π_3 થી અંતર 1 હોય અને (α, β, γ) થી π_3 નું અંતર 2 હોય, તો નીચેનામાંથી ...... સત્ય છે. [JEE : 2015]

(A) $2\alpha + \beta + 2\gamma + 2 = 0$ (B) $2\alpha - \beta + 2\gamma + 4 = 0$

(C) $2\alpha + \beta - 2\gamma - 10 = 0$ (D) $2\alpha - \beta + 2\gamma - 8 = 0$

ઉકેલ : π_1 અને π_2 ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલ π_3 નું સમીકરણ $x + z - 1 + \lambda (y) = 0$

π_3 નું $(0, 1, 0)$થી અંતર $= 1 = \dfrac{|0 + 0 - 1 + \lambda|}{\sqrt{1 + 1 + \lambda^2}}$

$\therefore\ (\lambda^2 + 2) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

$\therefore\ 2\lambda = -1$

$\therefore\ \lambda = \frac{-1}{2}$

π_3 નું સમીકરણ $2x - y + 2z - 2 = 0$

π_3 નું (α, β, γ)થી અંતર $= 2 = \dfrac{|2\alpha - \beta + 2\gamma - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 4}}$

$\therefore\ 2(3) = |2\alpha - \beta + 2\gamma - 2|$

$\therefore\ 2\alpha - \beta + 2\gamma - 2 = 6$ અથવા $2\alpha - \beta + 2\gamma - 2 = -6$

$\therefore\ 2\alpha - \beta + 2\gamma - 8 = 0$ તથા $2\alpha - \beta + 2\gamma + 4 = 0$ **જવાબ : (B), (D)**

(121) ધારો કે R^3 ની રેખા L ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે તથા L પરનાં બધાં જ બિંદુઓ સમતલ $\pi_1 : x + 2y - z + 1 = 0$ અને $\pi_2 : 2x - y + z - 1 = 0$ થી સમાન અંતરે આવેલાં છે. ધારો કે L નાં બિંદુઓથી π_1 પર દોરેલા લંબપાદનો બિંદુગણ M છે. નીચેનામાંથી ક્યાં બિંદુ (બિંદુઓ) M ના સભ્ય છે ? [JEE : 2015]

(A) $\left(0, \frac{-5}{6}, \frac{-2}{3}\right)$ (B) $\left(\frac{-1}{6}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ (C) $\left(\frac{-5}{6}, 0, \frac{1}{6}\right)$ (D) $\left(\frac{-1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$

ઉકેલ : રેખા L નાં બધાં જ બિંદુઓ π_1 અને π_2 સમતલથી સમાન અંતરે આપેલાં છે, એટલે કે રેખા L એ π_1 અને π_2 ની વચ્ચેના ખૂણાના દુભાજક સમતલ પર આવેલી છે.

દુભાજક સમતલનું સમીકરણ $\dfrac{x + 2y - z + 1}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \pm \dfrac{2x - y + z - 1}{\sqrt{4 + 1 + 1}}$

$\therefore\ x + 2y - z + 1 = 2x - y + z - 1$ અથવા $x + 2y - z + 1 = -2x + y - z + 1$

$\therefore\ x - 3y + 2z - 2 = 0$ અથવા $3x + y = 0$

ધારો કે રેખાનું સમીકરણ $\dfrac{x-0}{l} = \dfrac{y-0}{m} = \dfrac{z-0}{n}$ છે.

તેનાં બિંદુઓ દુભાજક સમતલો પર આવેલાં છે.

$\therefore\ l - 3m + 2n = 0$ અને $3l + m = 0$

$\therefore\ \dfrac{l}{-2} = \dfrac{m}{6} = \dfrac{n}{10}$

$\therefore\ \dfrac{l}{-1} = \dfrac{m}{3} = \dfrac{n}{5}$

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5}$

$\therefore$ રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $A(-k, 3k, 5k)$ થશે.

ધારો કે બિંદુ A માંથી સમતલ π_1 પરનો લંબપાદ $B(x, y, z)$ છે.

$$\therefore\ \frac{x+k}{1} = \frac{y-3k}{2} = \frac{z-5k}{-1} = -\left(\frac{1(-k)+2(3k)-1(5k)+1}{(1)^2+(2)^2+(-1)^2}\right)$$

$$\therefore\ \frac{x+k}{1} = \frac{y-3k}{2} = \frac{z-5k}{-1} = \frac{-1}{6}$$

$\therefore$ લંબપાદ $(x, y, z) = \left(\dfrac{-1}{6} - k, \dfrac{-2}{6} + 3k, \dfrac{1}{6} + 5k\right)$

હવે, $k = 0$ લેતાં લંબપાદ $\left(\dfrac{-1}{6}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{6}\right)$

અને, $k = \dfrac{-1}{6}$ લેતાં લંબપાદ $\left(0, \dfrac{-5}{6}, \dfrac{2}{3}\right)$ **જવાબ : (A), (B)**

(122) રેખા $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-2}{12}$ અને સમતલ $x - y + z = 16$ ના છેદબિંદુથી $(1, 0, 2)$ નું અંતર ......

[JEE : 2015]

(A) $2\sqrt{14}$ (B) 8 (C) $3\sqrt{21}$ (D) 13

ઉકેલ : રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(3k + 2, 4k - 1, 12k + 2)$ એ સમતલનું પણ બિંદુ હોય, તો

$3k + 2 - 4k + 1 + 12k + 2 = 16$

$\therefore\ 11k = 11$

$\therefore\ k = 1$

$\therefore$ રેખા અને સમતલનું છેદબિંદુ $(5, 3, 14)$ છે.

$(1, 0, 2)$થી તેનું અંતર $= \sqrt{(5-1)^2 + (3-0)^2 + (14-2)^2} = \sqrt{16+9+144} = 13$ **જવાબ : (D)**

(123) $2x - 5y + z = 3$ અને $x + y + 4z = 5$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા અને $x + 3y + 6z = 1$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ ......

(A) $2x + 6y + 12z = 13$ (B) $x + 3y + 6z = -7$ (C) $x + 3y + 6z = 7$ (D) $2x + 6y + 12z = -13$

ઉકેલ : સમતલો $2x - 5y + z = 3$ અને $x + y + 4z = 5$ ના એક છેદબિંદુ માટે $z = 0$ લેતાં, $2x - 5y = 3$ અને $x + y = 5$.

બંને સમીકરણો ઉકેલતાં $x = 4, y = 1$

$\therefore$ (4, 1, 0)માંથી પસાર થતા અને $x + 3y + 6z = 1$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ

$1(x - 4) + 3\ (y - 1) + 6\ (z - 0) = 0$

$\therefore\ x + 3y + 6z = 7$ **જવાબ : (C)**

બીજી રીત :

માંગેલ સમતલનું સમીકરણ $2x - 5y + z - 3 + \lambda(x + y + 4z - 5) = 0$

$\therefore\ (2 + \lambda)x + (-5 + \lambda)y + (4\lambda + 1)z - 5\lambda - 3 = 0$

તે $x + 3y + 6z = 1$ ને સમાંતર છે.

$\therefore\ \frac{2+\lambda}{1} = \frac{-5+\lambda}{3} = \frac{4\lambda+1}{6}$

$\therefore\ 6 + 3\lambda = -5 + \lambda$

$\therefore\ \lambda = -\frac{11}{2}$

$\therefore\ \left(2 - \frac{11}{2}\right)x + \left(-5 - \frac{11}{2}\right)y + (-22+1)z + \frac{55}{2} - 3 = 0$

$\therefore\ 7x + 21y + 42z - 49 = 0$

$\therefore\ x + 3y + 6z - 7 = 0$ **જવાબ : (C)**

(124) રેખા $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ $(\alpha \neq 0)$ અને $x + y + z + 1 = 0$ તથા $2x - y + z + 3 = 0$ ની છેદરેખા વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર $\frac{1}{\sqrt{3}}$ હોય, તો $\alpha =$ ...... [JEE : 2015]

(A) $-\frac{16}{19}$ (B) $-\frac{19}{16}$ (C) $\frac{32}{19}$ (D) $\frac{19}{32}$

ઉકેલ : સમતલો $x + y + z + 1 = 0$ અને $2x - y + z + 3 = 0$ ના અભિલંબ સદિશ અનુક્રમે

$\vec{n_1} = (1, 1, 1)$ અને $\vec{n_2} = (2, -1, 1)$

$\therefore$ છેદરેખાની દિશાનો સદિશ $\vec{l} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = (1, 1, 1) \times (2, -1, 1) = (2, 1, -3)$

સમતલોનાં સમીકરણોમાં $z = 0$ લેતાં, $x + y = -1$ અને $2x - y = -3$

$\therefore\ x = \frac{-4}{3}, y = \frac{1}{3}$

$\therefore$ છેદરેખા પરનું એક બિંદુ $B(\vec{b}) = \left(\frac{-4}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ છે.

રેખા $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ માટે $A(\vec{a}) = (1, -1, 0)$ અને $\vec{m} = (\alpha\ -1, 1)$

$\vec{l} \times \vec{m} = (2, 1, -3) \times (\alpha, -1, 1) = (-2, -2 - 3\alpha, -2 - \alpha)$

અથવા $\vec{l} \times \vec{m} = (2, 2 + 3\alpha, 2 + \alpha)$

લઘુતમ અંતર $= \dfrac{|(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m})|}{|\vec{l} \times \vec{m}|}$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\left|\left(\frac{-7}{3}, \frac{4}{3}, 0\right) \cdot (2, 2 + 3\alpha, 2 + \alpha)\right|}{\sqrt{4 + (2 + 3\alpha)^2 + (2 + \alpha)^2}}$$

$$\therefore 10\alpha^2 + 16\alpha + 12 = 3\left(\frac{-14}{3} + \frac{8}{3} + 4\alpha\right)^2$$

$\therefore 10\alpha^2 + 16\alpha + 12 = 12(4\alpha^2 - 4\alpha + 1)$

$\therefore 10\alpha^2 + 16\alpha + 12 = 48\alpha^2 - 48\alpha + 12$

$\therefore 38\alpha^2 - 64\alpha = 0$

$\therefore 2\alpha(19\alpha - 32) = 0$

$\therefore \alpha = 0$ અથવા $\alpha = \frac{32}{19}$. પરંતુ $\alpha \neq 0$

$\therefore \alpha = \frac{32}{19}$ **જવાબ : (C)**

(125) (3, 2, 0)માંથી પસાર થતા સમતલમાં રેખા $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{4}$ આવેલી છે. આ સમતલમાં ...... બિંદુ પણ આવેલું છે. [JEE : 2015]

(A) (0, 7, –10) (B) (0, 7, 10) (C) (0, 3, 1) (D) (0, –3, 1)

ઉકેલ : રેખા $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{4}$ માટે $A(\vec{a}) = (1, 2, 3)$ અને $A(\vec{l}) = (1, 5, 4)$

સમતલનું બિંદુ B (3, 2, 0) છે. $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = (2, 0, -3)$

$\therefore$ સમતલનો અભિલંબ $\vec{n} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} \times \vec{l} = (2, 0, -3) \times (1, 5, 4) = (15, -11, 10)$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $15(x - 3) - 11(y - 2) + 10(z - 0) = 0$

$\therefore 15x - 11y + 10z - 23 = 0$

આપેલ બિંદુઓ પૈકી માત્ર (0, 7, 10) સમતલ પર છે. **જવાબ : (B)**

(126) Z-અક્ષ અને $x + y + 2z - 3 = 0 = 2x + 3y + 4z - 4$ ની છેદરેખા વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર ...... [JEE : 2015]

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : સમતલો $x + y + 2z - 3 = 0$ અને $2x + 3y + 4z - 4 = 0$ ના અભિલંબ અનુક્રમે $\vec{n_1} = (1, 1, 2)$ અને $\vec{n_2} = (2, 3, 4)$

છેદરેખાની દિશાનું સદિશ $\vec{l} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$

$$= (1, 1, 2) \times (2, 3, 4) = (-2, 0, 1)$$

$z = 0$ લેતાં $x + y = 3$ અને $2x + 3y = 4$ નું સમાધાન કરતું છેદરેખા પરનું એક બિંદુ $(5, -2, 0)$ છે.

Z-અક્ષની દિશાનો સદિશ $\vec{m} = (0, 0, 1)$

$$\therefore \vec{l} \times \vec{m} = (0, 2, 0) \text{ એટલે કે } \vec{l} \times \vec{m} = (0, 1, 0) \text{ લઈ શકાય.}$$

Z-અક્ષ પરનું બિંદુ $(0, 0, 1)$ લઈ શકાય.

$\therefore$ લઘુતમ અંતર $= \dfrac{|(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m})|}{|\vec{l} \times \vec{m}|} = \dfrac{|(5, -2, -1) \cdot (0, 1, 0)|}{1} = 2$ **જવાબ : (B)**

એક કરતાં વધુ સાચા વિકલ્પવાળા પ્રશ્નો હોય તેવા દાખલા :

(127) રેખા $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{3}$ એ ......

(A) ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે. (B) $(1, 0, -1)$માંથી પસાર થાય છે.

(C) $x + 2y + 3z - 7 = 0$ સાથે કાટખૂણો બનાવે છે. (D) રેખા $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{1-z}{3}$ ને સમાંતર છે.

ઉકેલ : રેખા પરનું બિંદુ $(1, 0, -1)$ છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

રેખાની દિશાનો સદિશ અને સમતલ $x + 2y + 3z - 7 = 0$નો અભિલંબ સદિશ સમાન હોવાથી રેખા, સમતલને લંબ છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (C) સત્ય છે.

આપેલ રેખાનો સદિશ $\vec{l} = (1, 2, 3)$ અને રેખા $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$ દિશાનો સદિશ $\vec{m} = (1, 2, -3)$ હોવાથી,

$\vec{l} \times \vec{m} \neq \overline{0}$

$\therefore$ રેખાઓ એકબીજાને સમાંતર નથી

$\therefore$ વિકલ્પ (D) અસત્ય છે.

$\dfrac{0-1}{1} = \dfrac{0}{2} = \dfrac{0+1}{3}$ સત્ય નથી. આથી વિકલ્પ (A) સત્ય નથી. **જવાબ : (B), (C)**

(128) રેખા $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ એ ......

(A) $3x + y - 2z = 6$ સમતલમાં આવેલી છે. (B) રેખા $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$ ને સંપાતી છે.

(C) સમતલ $x + y - 2z = 0$ માં આવેલી છે. (D) રેખા $(6, 2, 4)$માંથી પસાર થાય છે.

ઉકેલ : રેખા માટે $\vec{a} = (3, 1, 2)$ અને $\vec{l} = (3, 1, 2)$

$3(3k + 3) + k + 1 - 2(2k + 2) = 6 \Rightarrow k = 0$

રેખા પરનું $k = 0$ સિવાયનું બિંદુ $(3k + 3, k + 1, 2k + 2)$ સમતલ $3x + y - 2z = 6$ માં આવેલું નથી.

∴ રેખા સમતલમાં આવેલી નથી.

∴ વિકલ્પ (A) અસત્ય છે.

આપેલ રેખા પરનું પ્રત્યેક બિંદુ $(3k + 3, k + 1, 2k + 2)$ એ રેખા $\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ નું સમાધાન કરે છે.

∴ બંને રેખા સંપાતી છે. (આમ, જો $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$)

∴ વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

બિંદુ $(3k + 3, k + 1, 2k + 2)$ પ્રત્યેક $k \in R$ માટે સમતલ $x + y - 2z = 0$ માં આવેલું છે.

∴ વિકલ્પ (C) સત્ય છે.

બિંદુ (6, 2, 4) રેખાના સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. ($k = 1$ માટે)

∴ વિકલ્પ (D) સત્ય છે. ($\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ પ્રમાણે બધાં લો) **જવાબ : (B), (C), (D)**

(129) રેખા $\frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-5}{2}$ એ ......

(A) $\frac{x}{6} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z-2}{4}$ ને સમાંતર છે. (B) સમતલ $8x + 3y - 6z = 3$ માં આવેલી છે.

(C) (3, –3, 5) માંથી પસાર થાય છે. (D) $3x - 4y + 2z = 7$ ને લંબ છે.

ઉકેલ : રેખા L : $\frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-5}{2}$ માટે $\vec{l} = (3, -4, 2)$ તથા $P(3k + 3, -4k + 3, 2k + 5)$ એ રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે.

રેખા M : $= \frac{x}{6} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z-2}{4}$ માટે $\vec{m} = (6, -8, 4)$.

$\vec{l} \times \vec{m} = \vec{0}$ તથા બિંદુ $(3, 3, 5) \notin M$ કારણ કે $\frac{3}{6} \neq \frac{3-5}{-8} \neq \frac{5-2}{4}$

∴ બે રેખાઓ એકબીજીને સમાંતર છે.

∴ વિકલ્પ (A) સત્ય છે.

બિંદુ P એ સમતલ $8x + 3y - 6z = 3$ માં આવેલું છે.

કારણ કે $8(3k + 3) + 3(-4k + 3) - 6(2k + 5) = 3, \forall k \in R$

∴ વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

બિંદુ (3, –3, 5) એ રેખા L ના સમીકરણનું સમાધાન કરતું નથી, કારણ કે $\frac{3-3}{3} \neq \frac{-3-3}{4}$

∴ વિકલ્પ (C) અસત્ય છે.

સમતલ $3x - 4y + 2z = 7$ નો અભિલંબ $\vec{n} = (3, -4, 2) = \vec{l}$

∴ રેખા સમતલને લંબ છે.

∴ વિકલ્પ (D) સત્ય છે. **જવાબ : (A), (B), (D)**

(130) રેખાઓ L : $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{5}$ અને M : $\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$ માટે ......

(A) L || M (B) L અને M વિષમતલીય રેખાઓ છે.

(C) રેખા બિંદુ M (2, 4, 1)માંથી પસાર થાય છે. (D) L અને M વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર $\frac{107}{\sqrt{1038}}$ છે.

ઉકેલ : રેખા L માટે $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{l} = (3, 2, 5)$

રેખા M માટે $\vec{b} = (-2, 1, -1)$, $\vec{m} = (4, 3, -2)$

હવે, $\vec{l} \times \vec{m} = (3, 2, 5) \times (4, 3, -2) = (-19, 26, 1) \neq \vec{0}$

$\therefore$ L અને M સમાંતર રેખાઓ પણ નથી અને સંપાતી પણ નથી. આથી વિકલ્પ (A) અસત્ય છે.

બિંદુ $(2, 4, 1) \notin$ M કારણ કે $\frac{2+2}{4} = \frac{4-1}{3} = \frac{1+1}{-2}$ સત્ય નથી.

$\therefore$ વિકલ્પ (C) અસત્ય છે.

વળી $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = (-3, 2, -2) \cdot (-19, 26, 1) = 57 + 52 - 2 = 107 \neq 0$

$\therefore$ L અને M વિષમતલીય છે. આમ, વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

$\therefore$ L અને M વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર $= \frac{|(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m})|}{|\vec{l} \times \vec{m}|}$

$$= \frac{107}{\sqrt{(-19)^2 + (26)^2 + (1)^2}} = \frac{107}{\sqrt{1038}}$$

$\therefore$ વિકલ્પ (D) સત્ય છે. **જવાબ : (B), (D)**

(131) રેખા L : $\frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z+3}{4}$ અને સમતલ π : $2x + 4y - z = 1$ ......

(A) રેખા L અને સમતલ π એકબીજાને સમાંતર છે. (B) L $\perp$ π

(C) L અને π નું છેદબિંદુ $(3, -1, 1)$ છે. (D) L અને π વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $sin^{-1} \frac{12}{\sqrt{609}}$ છે.

ઉકેલ : રેખા L માટે $\vec{a} = (1, 2, -3)$, $\vec{l} = (2, -3, 4)$

રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $P(2k + 1, -3k + 2, 4k - 3)$ છે. સમતલ π નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = (2, 4, -1)$

$\vec{l} \cdot \vec{n} = 4 - 12 - 4 \neq 0$. આથી L અને π એકબીજાને સમાંતર નથી. L એ π માં આવેલ પણ નથી.

$\therefore$ વિકલ્પ (A) અસત્ય છે.

વળી $\vec{l} \neq k\vec{n}$, $k \in R$

$\therefore$ L અને π એકબીજાને લંબ નથી.

$\therefore$ વિકલ્પ (B) અસત્ય છે.

જો $P \in L$ એ સમતલ π સાથેનું છેદબિંદુ હોય, તો $P \in \pi$

$\therefore$ $2(2k + 1) + 4(-3k + 2) - (4k - 3) = 1$

$\therefore$ $12k = 12$. આથી, $k = 1$

$\therefore$ સમતલ તથા રેખાનું છેદબિંદુ $P(3, -1, 1)$ છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (C) સત્ય છે.

∴ L અને π વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ લેતાં,

$$\therefore \sin\theta = \frac{|\vec{l} \cdot \vec{n}|}{|\vec{l}||\vec{n}|}$$

$$= \frac{|4 - 12 - 4|}{\sqrt{4 + 9 + 16}\ \sqrt{4 + 16 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{609}}$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1} \frac{12}{\sqrt{609}}$$

∴ વિકલ્પ (D) સત્ય છે.

જવાબ : (C), (D)

(132) સમતલ $3x + 4y - 6z = 12$ માટે ......

(A) અક્ષો પરના અંતઃખંડો અનુક્રમે 4, 3 અને –2 છે.

(B) રેખા $\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+1}{-1}$ ને સમાંતર છે.

(C) (1, 5, 3) સમતલનું એક બિંદુ છે.

(D) રેખા $\frac{x-0}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{3-z}{6}$ સમતલને લંબ છે.

ઉકેલ : સમતલ $3x + 4y - 6z = 12$

$$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1$$

∴ અક્ષો પરના અંતઃખંડ અનુક્રમે 4, 3, –2 છે.

∴ વિકલ્પ (A) સત્ય છે.

∴ સમતલનો અભિલંબ $\vec{n} = (3, 4, -6)$

રેખા $\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+1}{-1}$ ની દિશાનો સદિશ $\vec{l} = (2, -3, -1)$

$\vec{n} \cdot \vec{l} = 6 - 12 + 6 = 0$

∴ $\vec{n} \perp \vec{l}$ તથા રેખા પરના બિંદુ (4, 3, –1) માટે $3x + 4y - 6z \neq 12$

∴ રેખાનું બિંદુ (4, 3, –1) એ $3x + 4y - 6z = 12$ પર નથી.

∴ રેખા આપેલ સમતલને સમાંતર છે

∴ વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

બિંદુ (1, 5, 3) માટે $3(1) + 4(5) - 6(3) = 3 + 20 - 18 = 5 \neq 12$

∴ બિંદુ (1, 5, 3) સમતલ પર નથી

∴ વિકલ્પ (C) અસત્ય છે.

રેખા $\frac{x-0}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{3-z}{6}$ ની દિશાનો સદિશ $\vec{m} = (3, 4, -6) = \vec{n}$

∴ રેખા સમતલને લંબ છે.

∴ વિકલ્પ (D) સત્ય છે.

જવાબ : (A), (B), (D)

(133) અવકાશમાં આવેલી રેખાના અક્ષો સાથેના પ્રક્ષેપનાં માપ અનુક્રમે 3, 4, 12 હોય, તો તેની દિક્કોસાઇન ......

(A) $\frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{-12}{13}$ (B) $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ (C) $\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}$ (D) $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{-12}{13}$

ઉકેલ : પ્રક્ષેપનાં માપ અનુક્રમે 3, 4, 12 છે.

અક્ષો પરના પ્રક્ષેપનાં માપ $|\vec{l} \cdot \hat{i}|, |\vec{l} \cdot \hat{j}|, |\vec{l} \cdot \hat{k}| = (|l_1|, |l_2|, |l_3|)$ થાય.

$\therefore \vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$ તો $(|l_1|, |l_2|, |l_3|) = (3, 4, 12)$

$\therefore l_1 = \pm 3, l_2 = \pm 4, l_3 = \pm 12$. આથી, $|\vec{l}| = 13$

$\therefore$ દિક્કોસાઇન $\frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{-12}{13}$ અથવા $\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}$ અથવા $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$, $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{-12}{13}$

જવાબ : (A), (B), (C), (D)

(134) સમતલ $2x + y - 3z + 4 = 0$ ના અભિલંબની દિક્કોસાઇન અનુક્રમે ......

(A) $\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}$ (B) $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}$ (C) $\frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$

ઉકેલ : સમતલનો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = (2, 1, -3)$

$\therefore |\vec{n}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

$\therefore \vec{n}$ ની દિક્કોસાઇન $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}$ અથવા $\frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$

(સમતલનું સમીકરણ $-2x - y + 3z = 4$ પણ લઈ શકાય.)

જવાબ : (B), (C)

(135) રેખાઓ $\frac{x+1}{0} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$ અને $\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{0}$ ......

(A) એકબીજીને છેદશે નહિ. (B) એકબીજીને છેદશે.

(C) (–1, 4, 0) બિંદુએ છેદશે. (D) (–1, 1, 1) બિંદુએ છેદશે.

ઉકેલ : રેખાઓ માટે $\vec{a} = (-1, 1, 1)$, $\vec{l} = (0, 3, -1)$

અને $\vec{b} = (-1, 4, 0)$, $\vec{m} = (3, 2, 0)$

$$\text{હવે, } [\vec{b} - \vec{a} \; \vec{l} \; \vec{m}] = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

વળી, $\vec{l} \times \vec{m} \neq \vec{0}$

$\therefore$ રેખાઓ એકબીજીને છેદે છે.

વિકલ્પ (A) અસત્ય છે અને વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

પ્રથમ રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(-1, 3k_1 + 1, -k_1 + 1)$

અને બીજી રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(3k_2 - 1, 2k_2 + 4, 0)$

રેખાઓ એકબીજાને છેદે છે.

કોઈક k_2 તથા k_1 માટે, $-1 = 3k_2 - 1$, $3k_1 + 1 = 2k_2 + 4$, $-k_1 + 1 = 0$

$\therefore$ $k_2 = 0$ અને $k_1 = 1$

આ કિંમતો સમીકરણ $3k_1 + 1 = 2k_2 + 4$ નું સમાધાન પણ કરે છે તથા છેદબિંદુ (–1, 4, 0) છે.

વિકલ્પ (C) સત્ય છે અને (D) અસત્ય છે. **જવાબ : (B), (C)**

(136) જો રેખા અક્ષો સાથે અનુક્રમે α, β, γ માપના ખૂણા બનાવે તો ......

(A) $cos^2\alpha = cos^2\beta + cos^2\gamma$ (B) $sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma = 2$

(C) $sin^2\beta + sin^2\gamma = 1 + cos^2\alpha$ (D) $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 2$

ઉકેલ : રેખાની દિક્કોસાઇન $cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$ થશે.

$\therefore$ $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

વિકલ્પ (A) અસત્ય છે તથા વિકલ્પ (D) અસત્ય છે.

હવે, $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

$\therefore$ $1 - sin^2\alpha + 1 - sin^2\beta + 1 - sin^2\gamma = 1$

$\therefore$ $sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma = 2$

વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

તથા $sin^2\beta + sin^2\gamma = 1 + 1 - sin^2\alpha$

$\therefore$ $sin^2\beta + sin^2\gamma = 1 + cos^2\alpha$

વિકલ્પ (C) સત્ય છે. **જવાબ : (B), (C)**

(137) રેખા $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{2}$ સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવતી તથા તેને છેદતી અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ ......

(A) $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ (B) $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ (C) $\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ (D) $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$

ઉકેલ : રેખા $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{2}$ માટે $\vec{a} = (0, 3, 3)$, $\vec{l} = (1, 1, 2)$ અને રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ P$(k, k + 3, 2k + 3)$ છે.

$\overleftrightarrow{OP}$ ની દિશાનો સદિશ $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = (k, k + 3, 2k + 3)$

$\overleftrightarrow{OP}$ એ આપેલ રેખા સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

$$\therefore\ cos\frac{\pi}{3} = \frac{|1(k) + 1(k+3) + 2(2k+3)|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{k^2 + (k+3)^2 + (2k+3)^2}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2} = \frac{|6k+9|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6k^2 + 18k + 18}} = \frac{3|2k+3|}{6\sqrt{k^2 + 3k + 3}}$$

$\therefore$ $k^2 + 3k + 3 = 4k^2 + 12k + 9$

$\therefore$ $3k^2 + 9k + 6 = 0$

$\therefore$ $k^2 + 3k + 2 = 0$

$\therefore$ $(k + 2)(k + 1) = 0$

$\therefore$ $k = -2$ અથવા $k = -1$

$\overleftrightarrow{OP}$ ની દિશાનો સદિશ $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = (-2, 1, -1)$ અથવા $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = (-1, 2, 1)$ અને $\overleftrightarrow{OP}$ બિંદુ O(0, 0, 0)માંથી પસાર થાય છે.

$\overleftrightarrow{OP}$ નાં સમીકરણ $\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ તથા $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ **જવાબ : (A), (C)**

(138) બે સમતલો $x + y + z - 1 = 0$ અને $x - 2y + 4z + 2 = 0$ ની છેદરેખાના સમીકરણનું સંમિત સ્વરૂપ ......

(A) $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ (B) $\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$

(C) $\frac{1-x}{2} = \frac{2y-1}{2} = \frac{2z+1}{2}$ (D) $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$

ઉકેલ : સમતલોના અભિલંબ સદિશ $\vec{n_1} = (1, 1, 1)$, $\vec{n_2} = (1, -2, 4)$ છે.

છેદરેખાની દિશાનું સદિશ $\vec{l} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = (6, -3, -3)$ એટલે કે $\vec{l} = (-2, 1, 1)$

સમતલોનાં સમીકરણોમાં $z = 0$ લેતાં છેદરેખા પરનું એક બિંદુ (0, 1, 0) થશે. કારણ કે સમીકરણો $x + y = 1$, $x - 2y = -2$ બને.

તેથી રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$

$\therefore$ વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

$z = -1$ લેતાં, બિંદુ (2, 0, –1) મળશે.

કારણ કે સમીકરણો $x + y = 2$, $x - 2y = 2$ બને.

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$ થશે.

$\therefore$ વિકલ્પ (A) અસત્ય છે.

અથવા (2, 1, –1) સમતલ $x + y + z = 1$ પર નથી.

$\therefore$ વિકલ્પ (A) અસત્ય છે.

વિકલ્પ (C) માં રેખાનું સમીકરણ $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{1} = \frac{z+\frac{1}{2}}{1}$ છે.

$\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ બંને સમતલો $x + y + z - 1 = 0$ તથા $x - 2y + 4z + 2 = 0$ પર છે.

દિશા તો (–2, 1, 1) છે જ.

$\therefore$ વિકલ્પ (C) સત્ય છે.

વિકલ્પ (D) પરથી રેખાની દિશા (–1, 2, 2) છે પરંતુ (–2, 1, 1) હોવી જોઈએ.

$\therefore$ વિકલ્પ (D) અસત્ય છે. **જવાબ : (B), (C)**

(139) સમતલ $2x + 3y + 5z = 0$ માટે ......

(A) $2x - 3y + z - 7 = 0$ એ લંબ સમતલ છે. (B) (2, 2, –2)માંથી પસાર થતું નથી.

(C) (–2, –2, 2)માંથી પસાર થાય છે. (D) $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+7}{5}$ સમતલને લંબ રેખા છે.

ઉકેલ : સમતલ $2x + 3y + 5z = 0$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n_1} = (2, 3, 5)$

સમતલ $2x - 3y + z - 7 = 0$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n_2} = (2, -3, 1)$

હવે, $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 4 - 9 + 5 = 0$. આથી, $\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$

∴ સમતલ $2x - 3y + z - 7 = 0$ આપેલ સમતલને લંબ સમતલ છે.

∴ વિકલ્પ (A) સત્ય છે.

$2x + 3y + 5z = 0$ માં બિંદુના યામ $(2, 2, -2)$ મૂકતાં, $2(2) + 3(2) + 5(-2) = 4 + 6 - 10 = 0$.

∴ બિંદુ $(2, 2, -2)$ સમતલનો સભ્ય છે.

∴ વિકલ્પ (B) અસત્ય છે.

બિંદુ $(-2, -2, 2)$ માટે $2(-2) + 3(-2) + 5\ (2) = -4 - 6 + 10 = 0$

∴ સમતલ બિંદુ $(-2, -2, 2)$માંથી પસાર થાય છે.

∴ વિકલ્પ (C) સત્ય છે.

રેખા $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+7}{5}$ ની દિશાનો સદિશ $\vec{l} = (2, 3, 5) = \vec{n_1}$

∴ રેખા સમતલને લંબ છે.

∴ વિકલ્પ (D) સત્ય છે. **જવાબ : (A), (C), (D)**

(140) બિંદુ $(0, 1, -1)$થી $2\sqrt{14}$ અંતરે આવેલું રેખા $x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-3}$ પરનું બિંદુ ...... છે.

(A) $(4, 9, -13)$ (B) $(-4, -7, 13)$ (C) $(-2, -3, 5)$ (D) $(2, 5, -7)$

ઉકેલ : આપેલ રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $P(k, 2k + 1, -3k - 1)$ છે.

ધારો કે બિંદુ P નું $(0, 1, -1)$થી અંતર $2\sqrt{14}$ છે.

∴ $k^2 + (2k + 1 - 1)^2 + (-3k - 1 + 1)^2 = 4(14)$

∴ $14k^2 = 4(14)$. આથી, $k^2 = 4$

∴ $k = 2$ અથવા $k = -2$

∴ રેખા પર $(0, 1, -1)$થી $2\sqrt{14}$ અંતરે આવેલાં બિંદુઓ $(2, 5, -7)$ તથા $(-2, -3, 5)$

જવાબ : (C), (D)

(141) સમતલ $6x - 2y + 3z + 18 = 0$ અને $2x - y + 2z + 13 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાના દુભાજક સમતલનું સમીકરણ ......

(A) $4x + y - 5z - 37 = 0$ (B) $4x + y - 5z + 37 = 0$

(C) $32x - 13y + 23z - 145 = 0$ (D) $32x - 13y + 23z + 145 = 0$

ઉકેલ : આપેલાં સમતલોની વચ્ચેના ખૂણાના દુભાજકનાં સમીકરણ

$$\frac{6x-2y+3z+18}{\sqrt{36+4+9}} = \pm \frac{2x-y+2z+13}{\sqrt{4+1+4}}$$

∴ $3(6x - 2y + 3z + 18) = \pm\ 7\ (2x - y + 2z + 13)$

∴ $18x - 6y + 9z + 54 = \pm\ (14x - 7y + 14z + 91)$

∴ $4x + y - 5z - 37 = 0$ તથા $32x - 13y + 23z + 145 = 0$ **જવાબ : (A), (D)**

નિષ્કર્ષ અને કારક પ્રકારના પ્રશ્નો

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં બે વિધાન હોય છે :

વિધાન 1 : નિષ્કર્ષ

વિધાન 2 : કારક

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં ચાર વિકલ્પો હોય છે. તે નીચે પ્રમાણે :

(A) વિધાન 1 અને વિધાન 2 બંને સત્ય છે અને વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

(B) વિધાન 1 અને વિધાન 2 બંને સત્ય છે અને વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

(C) વિધાન 1 સત્ય છે અને વિધાન 2 અસત્ય છે.

(D) વિધાન 1 અસત્ય છે અને વિધાન 2 સત્ય છે.

(142) **વિધાન 1 :** રેખા L : $\frac{x}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{3}$ એ સમતલ $4x - 5y + 3z = 20$ ને લંબ છે.

વિધાન 2 : રેખા L ની દિક્કોસાઈન $\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{-5}{5\sqrt{2}}, \frac{3}{5\sqrt{2}}$ છે.

ઉકેલ : સમતલ $4x - 5y + 3z = 20$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = (4, -5, 3)$. રેખા L સમતલને લંબ હોય, તો રેખા L ની દિશાનો સદિશ $\vec{l} = k\vec{n}$, $k \in R$ થશે.

હવે $\vec{l} = \vec{n}$ લેતાં રેખા L ની દિક્કોસાઈન $\frac{4}{|\vec{l}|}, \frac{-5}{|\vec{l}|}, \frac{3}{|\vec{l}|}$

જ્યાં $|\vec{l}| = \sqrt{16 + 25 + 9} = 5\sqrt{2}$

$\therefore$ રેખા L ની દિક્કોસાઈન $\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{5\sqrt{2}}$ થશે.

$\therefore$ વિધાન **1** અને વિધાન **2** બંને સત્ય છે તથા વિધાન **2** એ વિધાન **1** ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

(143) **વિધાન 1 :** બે સમતલો $5x - 12y + 13z = 40$ અને $5x - 12y + 13z = 20$ વચ્ચેનું અંતર $\frac{10\sqrt{2}}{13}$

વિધાન 2 : બે સમાંતર સમતલો $ax + by + cz + d_1 = 0$ અને $ax + by + cz = d_2$ વચ્ચેનું લંબઅંતર $\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ થાય.

ઉકેલ : સમતલો $5x - 12y + 13z - 40 = 0$ અને $5x - 12y + 13z - 20 = 0$ માટે $\vec{n_1} = \vec{n_2}$ હોવાથી તે સમાંતર સમતલો છે.

બે સમતલો વચ્ચેનું લંબઅંતર $= \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-40 - (-20)|}{\sqrt{25 + 144 + 169}} = \frac{20}{13\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{13}$

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

હવે સમાંતર સમતલો $ax + by + cz + d_1 = 0$ અને $ax + by + cz - d_2 = 0$ વચ્ચેનું લંબઅંતર

$\frac{|d_1 - (-d_2)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d_1 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ થશે.

$\therefore$ વિધાન 2 અસત્ય છે.

જવાબ : (C)

(144) રેખા : $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{2}$ અને સમતલ $\pi : x - y + 2z = 0$ છે.

વિધાન 1 : L એ π માં આવેલી છે.

વિધાન 2 : L એ π ને સમાંતર છે.

ઉકેલ : રેખા L માટે $\vec{a} = (3, -1, -1)$, $\vec{l} = (-1, 3, 2)$ અને $(-k + 3, 3k - 1, 2k - 1)$ એ રેખા L નું કોઈ પણ બિંદુ છે.

સમતલ π માટે $\vec{n} = (1, -1, 2)$

હવે, $\vec{l} \cdot \vec{n} = (-1, 3, 2) \cdot (1, -1, 2) = -1 -3 + 4 = 0$

$\therefore \vec{l} \perp \vec{n}$

$\therefore$ L એ π માં આવેલી છે અથવા L એ π ને સમાંતર છે.

હવે રેખા પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ $(-k + 3, 3k - 1, 2k - 1)$ સમતલના સમીકરણમાં મૂકતાં,

$$(-k + 3) - (3k - 1) + 2(2k - 1) = 2 \neq 0$$

$\therefore$ L એ π માં આવેલી નથી.

$\therefore$ વિધાન 1 અસત્ય છે અને વિધાન 2 સત્ય છે. **જવાબ : (D)**

(145) બે રેખાઓનાં સમીકરણ L : $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{2}$ અને M : $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{1}$ છે.

વિધાન 1 : L અને M સમતલીય છે.

વિધાન 2 : સમીકરણો $x_1 + 3y_1 = 4$, $3x_1 + 2y_1 = 5$ અને $2x_1 - y_1 = 1$ સુસંગત છે.

ઉકેલ : રેખા L માટે $\vec{a} = (-3, 2, 1)$, $\vec{l} = (1, -3, 2)$ અને રેખા M માટે $\vec{b} = (1, -3, 2)$, $\vec{m} = (-3, 2, 1)$

$$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(-7) + 5(7) + 1(-7) = 0$$

$\therefore$ L અને M સમતલીય છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે. વળી $\vec{l} \times \vec{m} \neq \vec{0}$

આથી રેખાઓ સમાંતર ન હોવાથી પરસ્પર છેદે છે.

L પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(x_1 - 3, -3x_1 + 2, 2x_1 + 1)$

અને M પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(-3y_1 + 1, 2y_1 - 3, y_1 + 2)$

હવે છેદબિંદુ માટે $x_1 - 3 = -3y_1 + 1$, $-3x_1 + 2 = 2y_1 - 3$, $2x_1 + 1 = y_1 + 2$

$\therefore x_1 + 3y_1 = 4$ $\quad 3x_1 + 2y_1 = 5$ $\quad 2x_1 - y_1 = 1$

આપેલ સમીકરણો સુસંગત છે. $x_1 = 1, y_1 = 1$ તેમનો ઉકેલ છે.

$\therefore$ વિધાન 2 સત્ય છે.

વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ : (A)**